Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica

REPORTE TÉCNICO NO. 661
COORDINACIÓN DE ÓPTICA

Geometría Plana Elemental
Material Auxiliar para la Enseñanza

por

Gonzalo Urcid Serrano

DICIEMBRE 4, 2018

Prólogo

El contenido de este reporte técnico consta de material auxiliar para la enseñanza de la geometría plana elemental. Este material se basa en el texto de *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría* del Dr. J. A. Baldor (1era Ed., Grupo Patria Cultural, reimp. 2006) , el cual proporciona soluciones breves a los problemas propuestos al final de cada capítulo. De forma complementaria, este trabajo presenta las *soluciones detalladas* a los problemas impares de los Capítulos 1 a 16, combinando las explicaciones textuales con los trazos gráficos pertinentes así como la simbología matemática adecuada con el próposito de ayudar al lector en la comprensión de los temas tratados en el texto. Se incluyen dos ejemplos de examen cuyas soluciones también se presentan en detalle. Debido a estas caractarísticas, el material aquí desarrollado puede emplearse como soporte adicional en un curso de geometría euclideana basado en cualquier otro texto orientado a la enseñanza de esta rama de las matemáticas.

Tonantzintla, 4 de Diciembre de 2018

Dr. Gonzalo Urcid Serrano
Investigador de la Coordinación de Óptica
INAOE

Índice al Contenido

Índice al Contenido

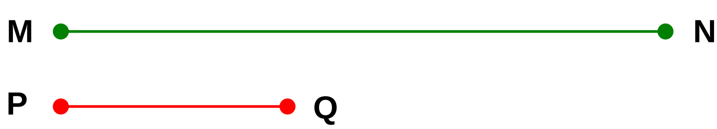
Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(1) Señalar de las opciones a), b) y c), cuál es el axioma. *Recuérdese que un axioma es una proposición cuya verdad se admite sin demostración y cuya descripción es relativamente simple y evidente. El axioma corresponde a b) ya que la proposición, "La suma de las partes es igual al todo" tiene las características antes mencionadas. Nótese que este axioma es similar al dado en el texto como ejemplo, "El todo es mayor que cualquiera de sus partes." (pág. 8). Complementariamente, a) y c) son ejemplos de teoremas.*

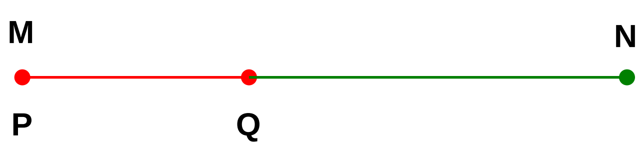
(3) Señalar de las opciones a), b) y c), cuál es el teorema. *Recuérdese que un teorema es una proposición que puede ser demostrada empleando razonamientos que conducen a establecer su veracidad y en la cuál se pueden distinguir las hipótesis (lo que se supone) de la tesis (lo que se desea demostrar). El teorema corresponde al inciso a), pues la proposición "Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio" no es simple o evidente y cuya verdad puede demostrarse encadenando razonamientos basados en definiciones, axiomas, postulados o teoremas (lemas) previamente dados o probados. En este caso particular, las hipótesis contemplan un rectángulo y sus diagonales, mientras que la tesis corresponde a que dichas diagonales se cortan en su punto medio. Complementariamente, b) y c) son ejemplos de axiomas.*

(5) Dibujar los segmentos: $\overline{MN} = 8 \text{ cm}$ y $\overline{PQ} = 3 \text{ cm}$ y restarlos gráficamente.



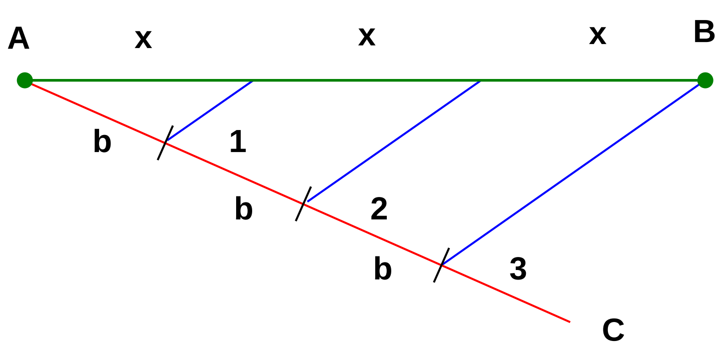
$\overline{MN} = 8 \text{ cm}$

$\overline{PQ} = 3 \text{ cm}$



$$\overline{MN} - \overline{PQ} = 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm}$$
$$= 5 \text{ cm} = \overline{QN}$$

(7) Dividir el segmento $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$ en 3 partes iguales.



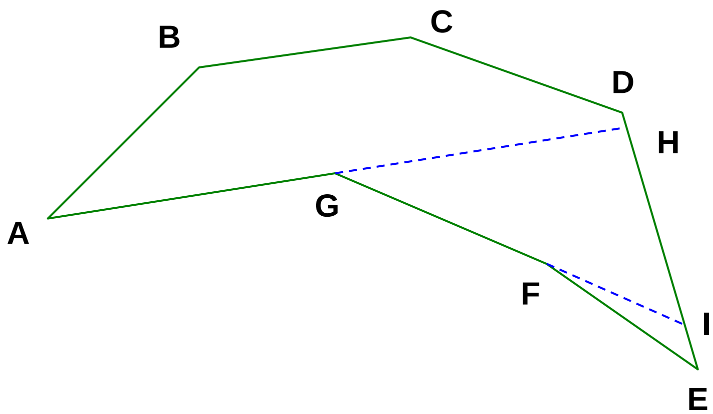
A partir del extremo A se traza la semirecta AC con cualquier inclinación. Sobre ella partiendo de A, se marcan sucesivamente 3 *marcas de longitud b (divisor). El extremo del* 3er *segmento b se une con B y se trazan paralelas al segmento B*3 *por los puntos* 1 *y* 2. *Entonces,*

$$x = \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{9 \text{ cm}}{3} = 3 \text{ cm}$$

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(9) Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE} > \overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE}$



Las hipótesis para resolver este problema son: ABCDE es una poligonal envolvente, AGFE es la poligonal envuelta, y A,E son los extremos comunes a ambas poligonales convexas. La construcción auxiliar consiste, en este caso, en prolongar AG hasta cortar DE en H y GF hasta cortar DE en I. Además, por suma de segmentos,

$$\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE}=\overline{DE}$$

Demostración: aplicando el postulado de la menor distancia entre dos puntos vemos que

en ABCDHG se tiene que $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH} > \overline{AG}+\overline{GH}$ (1)

en GHIF se obtiene $\overline{GH}+\overline{HI} > \overline{GF}+\overline{FI}$ (2)

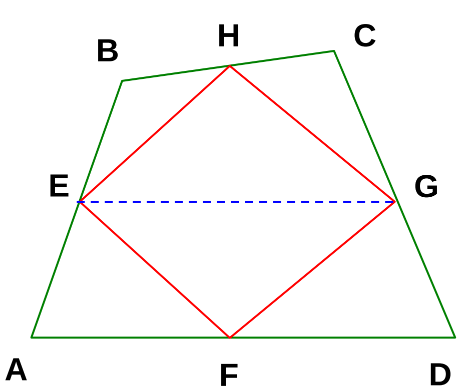
análogamente, en FIE $\overline{FI}+\overline{IE} > \overline{FE}$ (3) *sumando* (1), (2) y (3)

$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH})+(\overline{GH}+\overline{HI})+(\overline{FI}+\overline{IE}) > (\overline{AG}+\overline{GH})+(\overline{GF}+\overline{FI})+\overline{FE}$ *equivalentemente*

$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD})+(\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) > (\overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE})+(\overline{GH}+\overline{FI})$ (4)

de donde, al aplicar suma de segmentos (ver hipótesis adicional) y simplificar el último término igual a ambos lados de la desigualdad (4), *queda demostrada la proposición dada.*

(11) Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}$



Como construcción auxiliar puede dividirse la figura dada en dos partes, superior e inferior, respecto al segmento EG. Aplicando el Teorema 1 (pág. 17) a las poligonales convexas de ambas partes es claro que

$\overline{EB}+\overline{BC}+\overline{CG} > \overline{EH}+\overline{HG}$ (1) ; $\overline{EA}+\overline{AD}+\overline{DG} > \overline{EF}+\overline{FG}$ (2)

de (1) + (2), *por simetría de extremos y suma de segmentos*

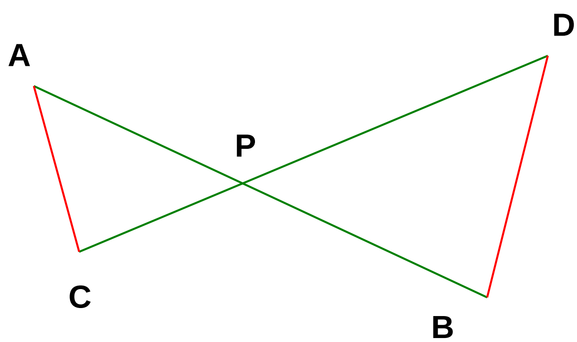
$$(\overline{EA}+\overline{EB})+\overline{BC}+(\overline{CG}+\overline{DG})+\overline{AD} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH}$$

$$(\overline{AE}+\overline{EB})+\overline{BC}+(\overline{CG}+\overline{GD})+\overline{DA} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}\ .$$

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (págs. 18 – 20)

(13) Demostrar que la suma de dos segmentos que se cortan es mayor que la suma de los segmentos que unen sus extremos.



Las hipótesis para resolver este problema son: AB y CD son segmentos que se cortan en el punto P y los segmentos AC y BD unen sus respectivos extremos. La tesis establece que: $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AC}+\overline{BD}$

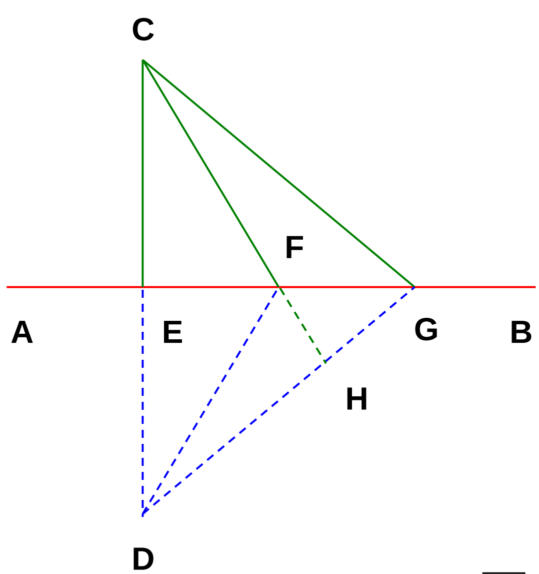
Demostración: por el postulado de menor distancia entre dos puntos aplicado respecto del punto P se obtiene

$\overline{AP}+\overline{PC}>\overline{AC}$ (1) ; $\overline{DP}+\overline{PB}>\overline{BD}$ (2)

$(\overline{AP}+\overline{PC})+(\overline{DP}+\overline{PB})>\overline{AC}+\overline{BD}$ *sumando* (1) y (2)

$(\overline{AP}+\overline{PB})+(\overline{CP}+\overline{PD})>\overline{AC}+\overline{BD}$ *por simetría de extremos y suma de segmentos*

(15) Si E es la intersección de los segmentos CD con AB y $CG = GD$, $CF = FD$ y $CE = ED$, demostrar que $\overline{CG}>\overline{CF}>\overline{CE}$.



Las hipótesis para resolver este problema corresponden a la igualdad de los segmentos CG, CF y CE (trazado sólido) respectivamente con los segmentos GD, FD y ED (trazado punteado). Empleando el postulado de menor distancia entre dos puntos resulta claro que

$\overline{CG}+\overline{GH}>\overline{CF}+\overline{FH}$ (1)

$\overline{FH}+\overline{HD}>\overline{DF}$ (2)

$\overline{CF}+\overline{FD}>\overline{CE}+\overline{ED}$ (3)

sumando (1) y (2) *y empleando las hipótesis dadas, resulta que*

$(\overline{CG}+\overline{GH})+(\overline{FH}+\overline{HD})>(\overline{CF}+\overline{FH})+\overline{DF}$

equivalentemente, $\overline{CG}+(\overline{GH}+\overline{HD})+\overline{FH}>(\overline{CF}+\overline{DF})+\overline{FH}$ *entonces,*

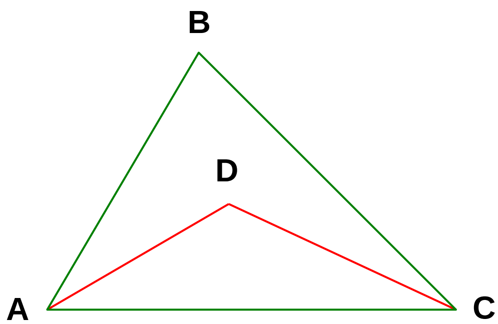
$\overline{CG}+\overline{GD}=2\overline{CG}>2\overline{CF}=(\overline{CF}+\overline{DF})$ *y de* (3), *se obtiene también que* $2\overline{CF}>2\overline{CE}$.

Finalmente, la tesis se justifica por la transitividad de la desigualdad.

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(17) Demostrar que el perímetro del triángulo *ABC* es mayor que el perímetro del triángulo *ADC*.



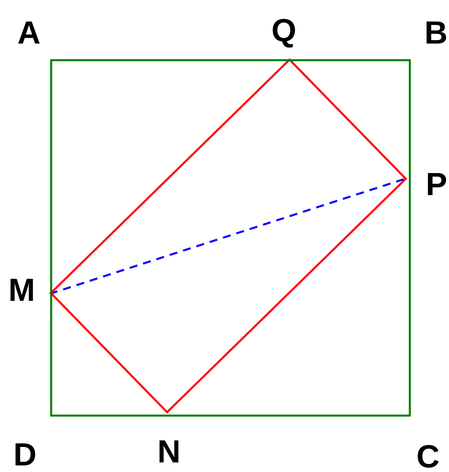
La hipótesis para resolver este problema es: los triángulos ABC y ADC comparten como base el segmento AC, que puede interpretarse respecto a los extremos comunes A y C, como la poligonal convexa ABC que envuelve a la poligonal convexa ADC. La tesis puede expresarse así,

$$\text{perímetro } \Delta\, ABC = \text{perímetro } \Delta\, ADC$$

equivalentemente, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}>\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CA}$.

Demostración: por el Teorema 1 (pág. 17), $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AD}+\overline{DC}$ *y al sumar el segmento CA a ambos lados de la desigualdad se demuestra la proposición dada.*

(19) Demostrar que el perímetro del *ABCD* es mayor que el perímetro del *MNPQ*.



La hipótesis para resolver este problema corresponde al hecho de que los vértices o esquinas del rectángulo MNPQ están sobre los segmentos que determinan los lados del rectángulo exterior ABCD. La tesis puede expresarse así,

$$\text{perímetro } ABCD = \text{perímetro } MNPQ$$

equivalentemente,

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}>\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PQ}+\overline{QM}\ .$$

Como construcción auxiliar puede dividirse la figura dada en dos partes, superior e inferior, respecto al segmento MP. Aplicando el Teorema 1 (pág. 17) a las poligonales convexas de ambas partes es claro que

$$\overline{MA}+\overline{AB}+\overline{BP}>\overline{MQ}+\overline{QP}\quad (1)\quad ;\quad \overline{MD}+\overline{DC}+\overline{CP}>\overline{MN}+\overline{NP}\quad (2)$$

de (1) + (2), *por simetría de extremos y suma de segmentos*

$$\overline{AB}+(\overline{BP}+\overline{CP})+\overline{DC}+(\overline{MA}+\overline{MD})>\overline{MQ}+\overline{QP}+\overline{NP}+\overline{MN}$$

$$\overline{AB}+(\overline{BP}+\overline{PC})+\overline{CD}+(\overline{DM}+\overline{MA})>\overline{QM}+\overline{PQ}+\overline{NP}+\overline{MN}$$

Ángulos

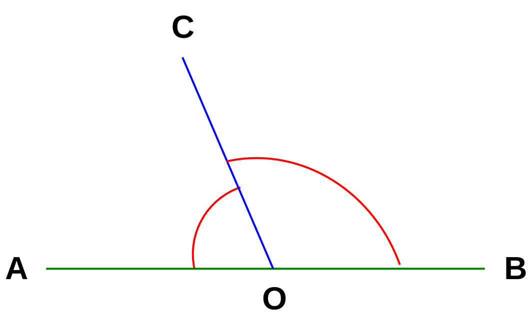
Capítulo 2. Ejercicios Resueltos (pp. 29 – 31)

(1) Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal: a) 3.14 rad y b) 9.42 rad. *Recuérdese que la relación entre medidas angulares expresadas en grados sexagesimales S y radianes R está dada por (No. 28, pág. 24)*

$S:360° = R:2\pi$ *de donde* $S = \left(\frac{R}{\pi}\right)180°$. *Considerando que* 3.14 *es una aproximación a* π *y empleando la ecuación anterior, se obtiene*

$$a)\quad S = \left(\frac{3.14}{\pi}\right)180° = 180° \quad ; \quad b)\quad S = \left(\frac{9.42}{\pi}\right)180° = 540°$$

(3) Los ángulos AOC y COB están en la relación 2 : 3. Hallarlos.



Por hipótesis, $3\angle AOC = 2\angle COB$ *y por ser ángulos adyacentes* $\angle COB = 2R - \angle AOC$ $\therefore$

$$3\angle AOC = 2(2R - \angle AOC) \quad \therefore \quad 5\angle AOC = 4R$$

Consecuentemente,

$$\angle AOC = \frac{4R}{5} = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$\angle COB = 180° - 72° = 108°$$

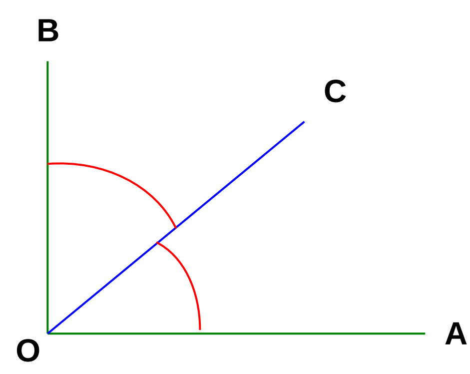
(5) Hallar los complementos de los siguientes ángulos: a) 18˚, b) 36˚ 52’ y c) 48˚ 39’ 15”. *Tómese en cuenta que en el sistema sexagesimal* 1˚ *(grado) tiene* 60’ *(minutos) y un minuto tiene* 60” *(segundos). El complemento de un ángulo AOB está dado por* $R - \angle AOB$ *de donde*

$a)\quad 90° - 18° = 72°$

$b)\quad 89°60' - 36°52' = 53°8'$

$c)\quad 89°59'60'' - 48°39'15'' = 41°20'45''$

(7) Si el ángulo AOB es recto y los ángulos AOC y BOC están en la relación 4:5, ¿cuánto vale cada ángulo?
Por hipótesis, $\angle AOB = R$ y $5\angle AOC = 4\angle BOC$ *consecuentemente AOC y BOC son complementarios. Así,* $\angle BOC = R - \angle AOC$ *de donde*



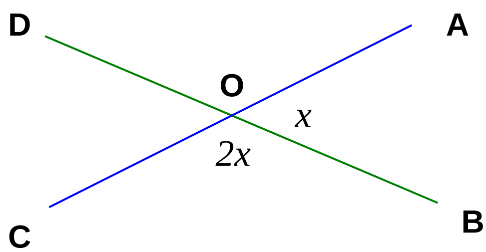
$$5\angle AOC = 4(R - \angle AOC) \quad \therefore \quad 9\angle AOC = 4R \quad \text{y}$$

$$\angle AOC = \frac{4R}{9} = \frac{360°}{9} = 40° \quad ; \quad \angle BOC = 90° - 40° = 50°$$

Ángulos

Capítulo 2. Ejercicios Resueltos (pp. 29 – 31)

(9) Si el ángulo *BOC* es del doble del ángulo *AOB*, hallar los ángulos *AOB*, *COD*, *BOC* y *AOD*.



Los ángulos dados son adyacentes al segmento AC de modo que

$$\angle BOC + \angle AOB = 2x + x = 3x = 2R \quad \therefore \quad x = \frac{2R}{3} = 60°$$

$$\angle BOC = 2x = 120°, \quad \angle COD = 60°, \quad \angle AOD = 120°$$

Los últimos dos valores son consecuencia de que los ángulos COD y AOD son opuestos por el vértice a los ángulos AOB y BOC respectivamente.

(11) Hallar el ángulo que es igual a su complemento. *Sea x el ángulo dado, entonces x debe cumplir la condición (nótese que este tipo de problema da lugar a una ecuación algebraica de primer grado donde x es la incógnita)*

$$x = R - x \quad \therefore \quad 2x = R \quad \therefore \quad x = \frac{R}{2} = 45°$$

(13) Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento. *Sea x el ángulo dado, entonces x debe satisfacer la ecuación*

$$x = \frac{1}{2}(R - x) \quad \therefore \quad 3x = R \quad \therefore \quad x = \frac{R}{3} = 30°$$

(15) Hallar el ángulo que es igual a su suplemento. *En este caso, el ángulo dado x, debe cumplir con la siguiente expresión (empleando la definición del suplementario de x)*

$$x = 2R - x \quad \therefore \quad 2x = 2R \quad \therefore \quad x = R = 90°$$

(17) Hallar el ángulo que es igual al doble de su sumplemento. S*i x es el ángulo dado, entonces x debe cumplir la relación*

$$x = 2(2R - x) \quad \therefore \quad 3x = 4R \quad \therefore \quad x = \frac{4R}{3} = 120°$$

(19) Dos ángulos están en la relación 3:4 y su suma vale 70˚. Hallarlos. *Sean x e y los ángulos dados. Por hipótesis,* $x : y = 3 : 4 \quad \therefore \quad 4x = 3y$ *además,* $x + y = 70° \quad \therefore \quad y = 70° - x$ *substituyendo esta última expresión en la relación dada, se obtiene*

$$4x = 3y = 3(70° - x) \quad \therefore \quad 4x + 3x = 210° \quad \therefore \quad \begin{cases} x = \dfrac{210°}{7} = 30° \\ y = 70° - 30° = 40° \end{cases}$$

$\perp$ y $\parallel$, *Rectas cortadas y <'s que se forman*

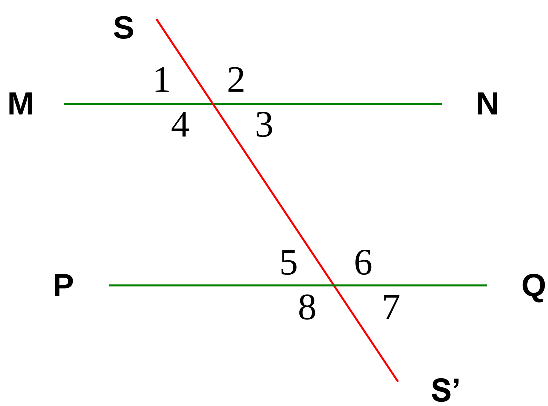
Cápitulo 3. Ejercicios Resueltos (pp. 43 – 46)

(1) ¿ Tiene la perpendicularidad la propiedad recíproca? ¿ Y la propiedad idéntica? *La relación de perpendicularidad entre rectas del plano es simétrica o recíproca, ya que dadas dos rectas AB y CD que se cortan y forman* 4 *ángulos rectos entre sí, es indistinto decir que AB es perpendicular a CD o que CD es perpendicular a AB. Por otra parte, dada una recta AB no es posible que ella sea perpendicular a sí misma, ya que la perpendicularidad requiere de dos rectas que se cortan en un punto y una recta se corta a sí misma en todos sus puntos. En consecuencia, no tiene la propiedad reflexiva o idéntica. Así,*

a) si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ entonces $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ es verdadero (Sí)

b) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (recta perpendicular a sí misma) es falso (No)

(3) Sea *MN* es paralela a *PQ* y *SS'* una secante para la cual el ángulo 7 es la mitad del ángulo 8; hallar todos los ángulos. *Por hipótesis,* $2\angle 7 = \angle 8 \quad \therefore \quad \angle 7 + \angle 8 = 3\angle 7 = 2R$ *(adyacentes)*



$$\therefore \quad \angle 7 = \frac{2R}{3} = 60° \text{ y } \angle 8 = 120°$$

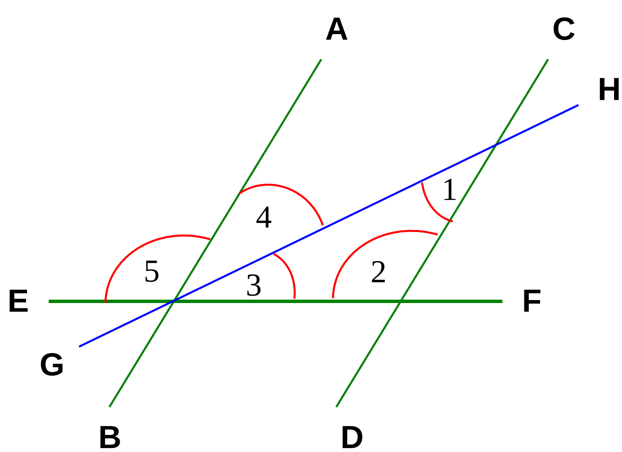
Por el postulado de paralelas cortadas por una secante, ángulos correspondientes son iguales. Así,

$$\angle 3 = \angle 7 = 60° \text{ y } \angle 4 = \angle 8 = 120°$$

finalmente, al ser opuestos por el vértice,

$$\angle 1 = \angle 5 = 60° \text{ y } \angle 2 = \angle 6 = 120°$$

(5) Si la recta *AB* es paralela a la recta *CD*, demostrar que: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2R$



Demostración: 1ero, los ángulos 5, 4 y 3 *son ángulos consecutivos formados al lado de la recta EF, por el Teorema 4 (pág. 28) se sigue que*

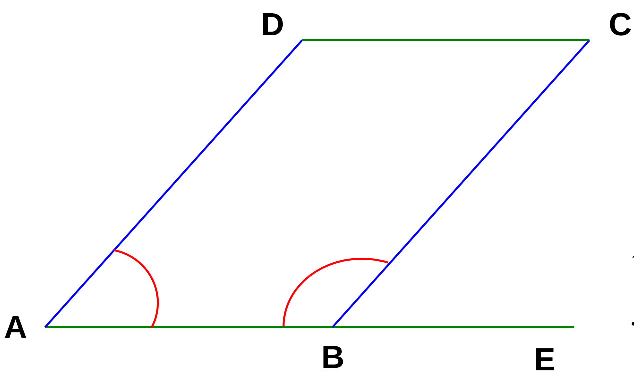
$$\angle 5 + \angle 4 + \angle 3 = 2R$$

Dado que la secante EF corta a $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ *entonces, por ser correspondientes,* $\angle 5 = \angle 2$. *Análogamente, por ser GH secante a las mismas paralelas y como consecuencia del Teorema 8 (pág. 41) sobre la igualdad de ángulos alternos internos, se obtiene que* $\angle 4 = \angle 1$, *de donde por substitución queda demostrada la proposición.*

$\perp$ y $\parallel$, *Rectas cortadas y <'s que se forman*

Capítulo 3. Ejercicios Resueltos (pp. 43 – 46)

(7) Si la recta AD es paralela a la recta BC, la recta CD es paralela a la recta AB, y los ángulos BAD y ABC son iguales, respectivamente a $2x$ y $6x$, hallar los ángulos ABC, BCD, CDA y DAB.



Por hipótesis, $\angle BAD = 2x$; $\angle ABC = 6x$ *por ser la recta AE secante a las paralelas AD y BC, aplicando el Teorema 10 (pág. 42) del cual los ángulos conjugados internos son suplementarios, se sigue entonces que*

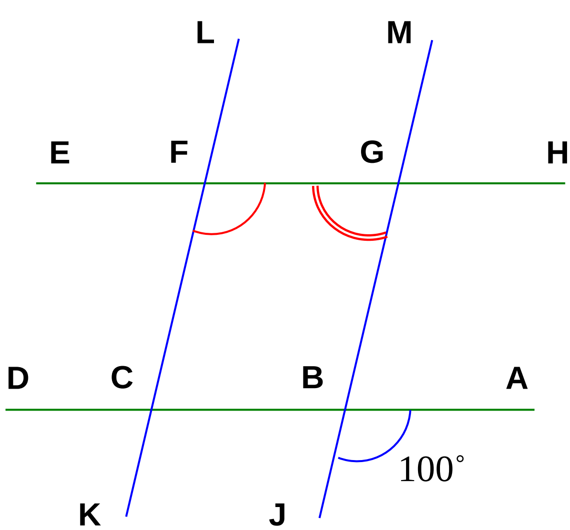
$$\angle BAD + \angle ABC = 2x + 6x = 4(2x) = 2R$$

$$\therefore \quad \angle DAB = 2x = \frac{2R}{4} = 45° \ \text{ y } \ \angle ABC = 3(2x) = 135°$$

Aplicando el mismo Teorema 10 a la secante AD *que corta AB* $\parallel$ *CD, y a la secante BC que también corta a AB* $\parallel$ *CD, se concluye que los ángulos conjugados internos DAB y CDA, así como los ángulos conjugados internos ABC y BCD son suplementarios. Así,*

$$\angle CDA = 2R - \angle DAB = 135° \quad \text{y} \quad \angle BCD = 2R - \angle ABC = 45°$$

(9) Si la recta EH es paralela a la recta DA, la recta LK es paralela a la recta MJ y el ángulo ABJ = 100˚, hallar los ángulos FGB y CFG.



Siendo la recta DA secante a LK $\parallel$ *MJ y aplicando el postulado sobre paralelas cortadas por una secante se sigue que* $\angle BCK = \angle ABJ$ *por ser correspondientes; una segunda aplicación del mismo postulado a la secante LK que corta a EH* $\parallel$ *DA, se deduce, por la misma razón, que* $\angle CFG = \angle BCK$ *y por transitividad se obtiene*

$$\angle CFG = 100°$$

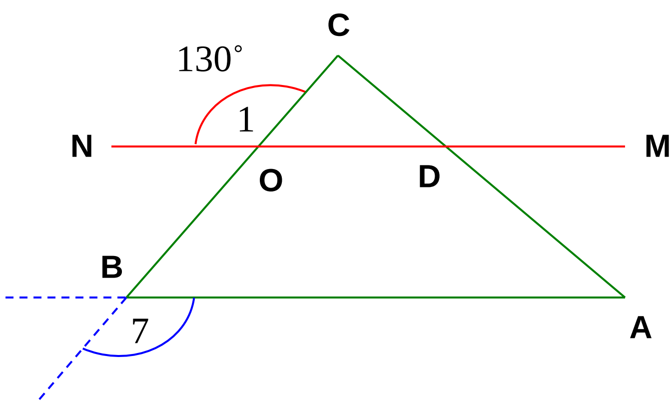
Finalmente, aplicando el Teorema 10 (pág. 42) a la secante EH que corta a LK $\parallel$ *MJ se tiene que* $\angle CFG + \angle FGB = 2R \ \therefore$

$$\angle FGB = 2R - \angle CFG = 180° - 100° = 80°$$

$\perp$ y $\parallel$, *Rectas cortadas y <'s que se forman*

Capítulo 3. Ejercicios Resueltos (pp. 43 – 46)

(11) Si la recta *AB* es paralela a la recta *MN* y el ángulo *CON* = 130˚, hallar el ángulo *ABC*.



Como construcción auxiliar, pueden prolongarse las rectas BC (hacia abajo) y AB (hacia la izquierda).

Considerando la recta BC secante a las paralelas dadas AB y MN, del Teorema 9 (pág. 42), que establece la igualdad de los ángulos alternos externos, se sigue que

$$\angle 7 = \angle 1 = \angle CON = 130°$$

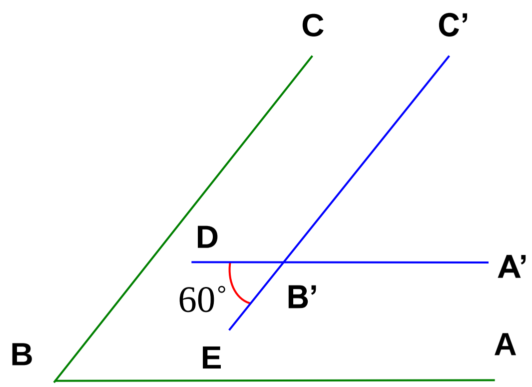
De la figura puede verse que el ángulo 7 *es adyacente al ángulo ABC, por tanto*

$$\angle ABC = 2R - \angle 7 = 180° - 130° = 50°$$

Ángulos con lados $\parallel$ *o* $\perp$

Capítulo 4. Ejercicios Resueltos (pp. 51 – 53)

(1) La recta *AB* es paralela a la recta *A'B'*, la recta *BC* es paralela a la recta *B'C'* y el ángulo *EB'D* = 60˚. Hallar el ángulo *ABC*.

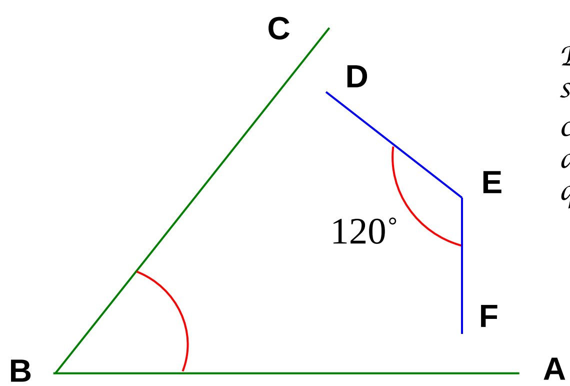


Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Por el Teorema 12 (pág. 47) se sigue los ángulos ABC y A'B'C' son iguales, es decir,* $\angle ABC = \angle A'B'C'$. *Además, el ángulo dado EB'D es opuesto por el vértice al ángulo A'B'C' y por el Teorema 3 (pág. 26) son iguales. Consecuentemente,*

como $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle A'B'C' = \angle EB'D$

entonces, $\angle ABC = 60° = \angle EB'D$

(3) El segmento *EF* es perpendicular al segmento *AB*, el segmento *DE* es perpendicular al segmento *BC* y el ángulo *DEF* = 120˚. Hallar el ángulo *ABC*.

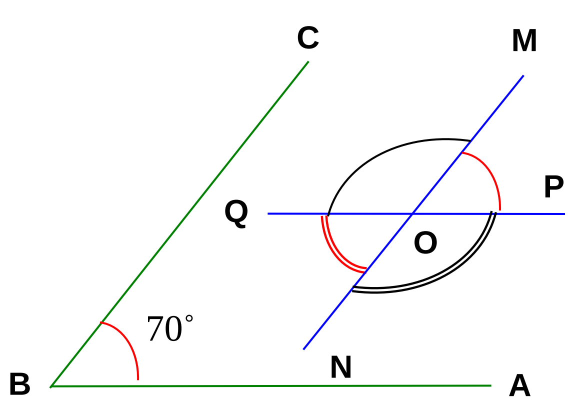


Por hipótesis, $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares siendo ABC un ángulo agudo y DEF un ángulo obstuso. Por el Teorema 16 (pág. 50) se sigue que estos ángulos son suplementarios. Así,*

$\angle ABC + \angle DEF = 2R$ de donde

$\angle ABC = 180° - 120° = 60°$

(5) La recta *AB* es paralela a la recta *PQ*, la recta *BC* es paralela a la recta *MN* y el ángulo *ABC* = 70˚. Hall los ángulos *MOP*, *NOP*, *NOQ* y *MOQ*.



Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ *de modo que los ángulos ABC y MOP tienen respectivamente, lados paralelos con la misma dirección. Al aplicar el Teorema 12 (pág. 47) resulta que* $\angle MOP = \angle ABC$. *El ángulo NOQ es opuesto por el vértice O al ángulo MOP y por el Teorema 3 (pág. 26) son iguales. Además, el ángulo MOP es adyacente al ángulo NOP y este último es opuesto por el vértice a MOQ*

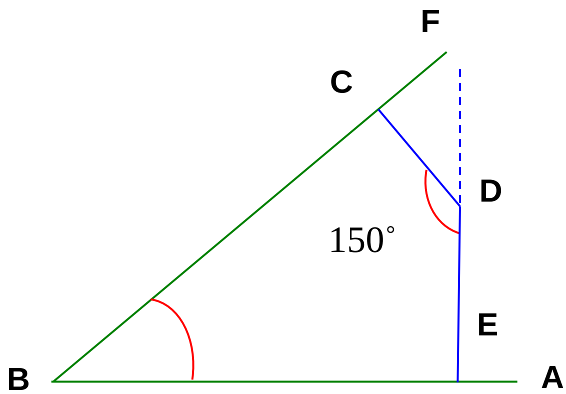
$\therefore \angle MOP = \angle ABC = 70°$; $\angle NOP = 180° - \angle MOP = 110°$

$\angle NOQ = \angle MOP = 70°$ y $\angle MOQ = \angle NOP = 110°$

Ángulos con lados $\parallel$ *o* $\perp$

Capítulo 4. Ejercicios Resueltos (pp. 51 – 53)

(7) La recta *AB* es perpendicular a la recta *ED*, la recta *BF* es perpendicular a la recta *CD* y el ángulo *CDE* = 150˚. Hallar el ángulo *ABC*.



Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{CD}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares siendo ABC un ángulo agudo y CDE un ángulo obtuso. Por el Teorema 16 (pág. 50) se sigue que estos ángulos son suplementarios. Así,*

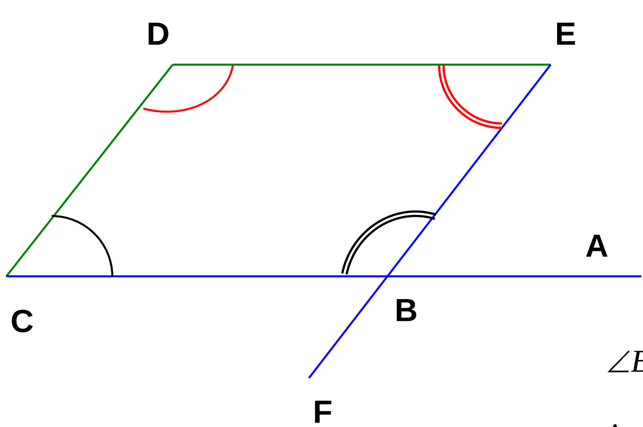
$$\angle ABC + \angle CDE = 2R \text{ de donde}$$

$$\angle ABC = 180° - 150° = 30°$$

Puede notarse que este problema es parecido al Problema (3) *y por ello el razonamiento es el mismo.*

Para un argumento diferente, considere la prolongación del segmento ED. En tal caso, el ángulo CDF es adyacente al ángulo conocido, por tanto, $\angle CDF = 180° - \angle CDE = 30°$. *Ahora, los ángulos ABC y CDF tienen lados respectivamente perpendiculares y son agudos, por lo que, al aplicar el Teorema 15 (pág. 49) se deduce que estos son iguales, es decir,* $\angle ABC = \angle CDF = 30°$.

(9) La recta *AC* es paralela a la recta *DE*, la recta *EF* es paralela a la recta *CD* y el ángulo *EBC* es el doble del ángulo *BED*. Hallar los ángulos *B*, *C*, *D* y *E*.



Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. *En 1er lugar, puede considerarse a la recta EF como secante a las paralelas AC y DE. En consecuencia, por el Teorema 10 (pág. 42) los ángulos conjugados internos, EBC y BED son suplementarios. Por lo cual,*

$$\angle EBC + \angle BED = R$$

y de la relación supuesta $\angle EBC = 2\angle BED$ *se obtiene el valor de los ángulos E y B*

$$\angle BED = R - \angle EBC = R - 2\angle BED$$

$$\therefore \quad \angle E = \angle BED = \frac{R}{3} = 60° \text{ y } \angle B = \angle EBC = 120°$$

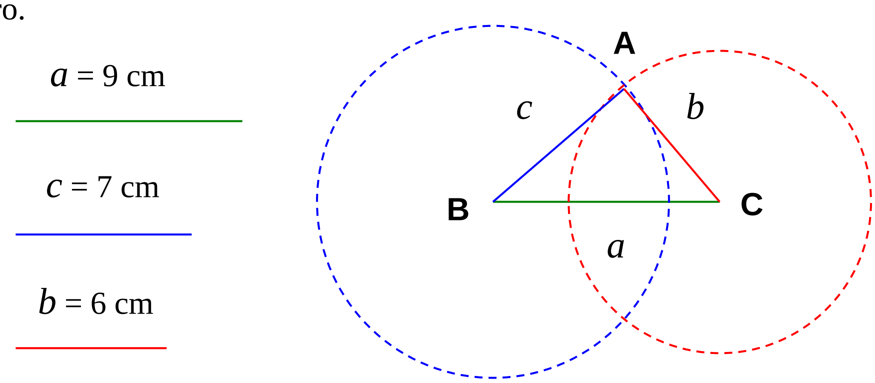
Finalmente, los ángulos encontrados, B y E tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario con los ángulos D y C. Según el Teorema 13 (pág. 48) se concluye la igualdad entre los ángulos B y D y la igualdad entre los ángulos E y C. Así,

$$\angle D = \angle EDC = \angle B = 120° \quad \text{y} \quad \angle C = \angle BCD = \angle E = 60°.$$

Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

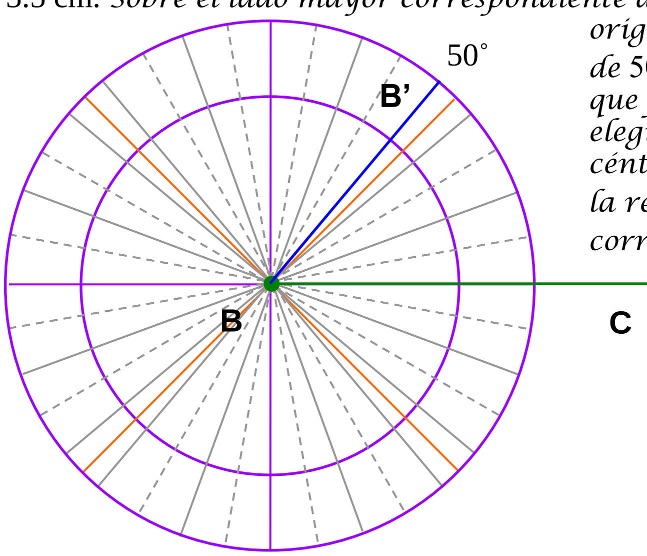
(1) Los lados de un triángulo miden 6 cm, 7 cm y 9 cm. Construir el triángulo y calcular su perímetro y su semiperímetro.



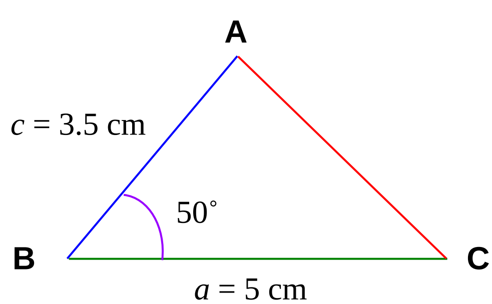
Para construir el triágulo pedido, se establecen los segmentos a, b y c con sus respectivas longitudes. Tomando el lado a como base del triángulo se dibujan dos circunferencias. La primera de radio b con centro en el punto C y la segunda de radio c con centro en el punto B. Estas dos circunferencias se cortan en el punto A del cual se trazan los segmentos AC = b y AB = c. El triángulo ABC tiene los lados dados. Por definición el perímetro es la suma de las longitudes de los lados. Así,

$$2p = a + b + c = 9 + 7 + 6 = 22 \text{ cm} \quad \text{de donde} \quad p = 11 \text{ cm (semiperímetro)}$$

(3) Construir un triángulo que tenga un ángulo de 50˚ y los dos lados que lo forman midan 5 cm y 3.5 cm. *Sobre el lado mayor correspondiente al segmento BC = a = 5 cm, se coloca el origen del transportador para marcar el ángulo de 50˚ como un punto B' sobre la circunferencia que forma el borde del transportador (aquí se ha elegido cualquiera de las dos circunferencias concéntricas trazadas en color morado). Luego, sobre la recta BB' se mide el otro lado dado (menor) que corresponde al segmento AB = c = 3.5 cm. Uniendo los extremos A y C se forma el tercer lado b completando así el triángulo ABC.*



Este transportador primitivo está dividido cada 10˚, las líneas en naranja señalan los ángulos múltiplos de 45˚.

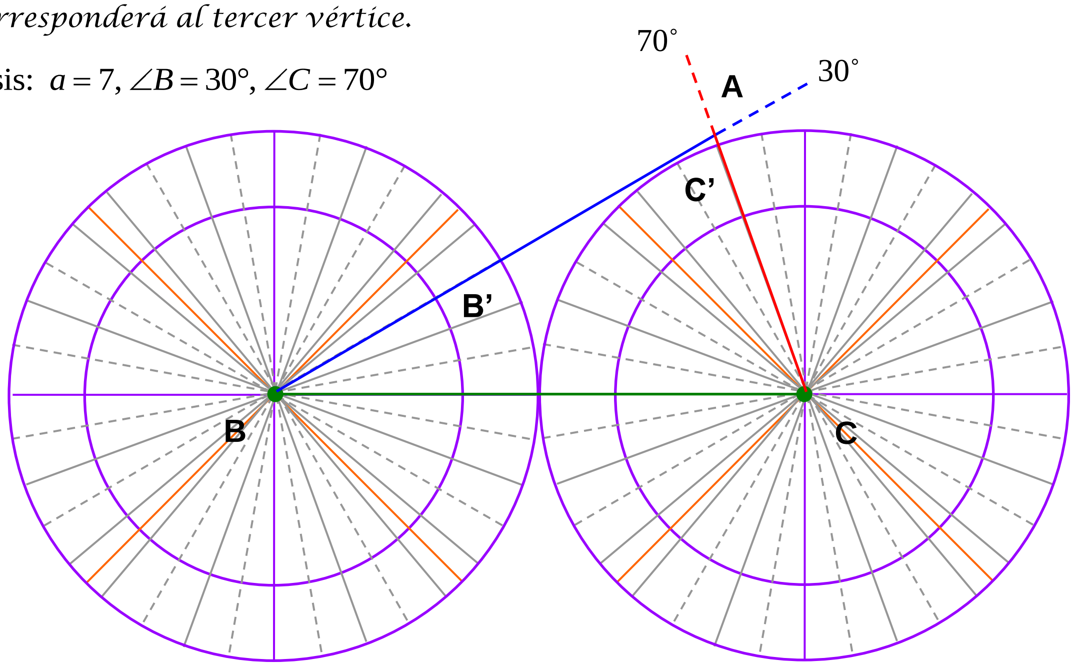


Triángulos y generalidades

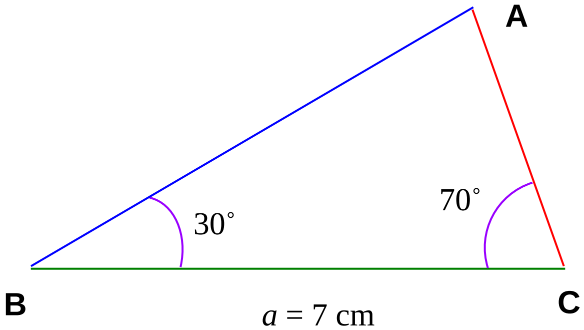
Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

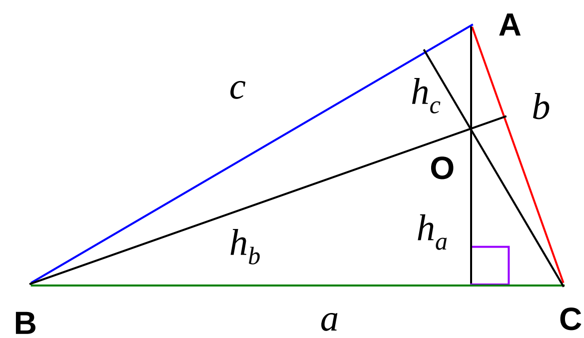
(5) Construir un triángulo que tenga un lado que mida 7 cm y los dos ángulos adyacentes midan 30˚ y 70˚. Trazar las tres alturas y señalar el ortocentro. *Sobre el lado dado correspondiente al segmento BC* = a = 7 cm, *se coloca el origen del transportador primero en B para marcar el ángulo de* 30˚ *con el punto B' y luego en C para marcar el ángulo de* 70˚ *con el punto C'. Después se trazan las rectas BB' y CC' las cuales, al prolongarlas se cortan en el punto A que corresponderá al tercer vértice.*

Hipótesis: $a = 7,\ \angle B = 30°,\ \angle C = 70°$



Uniendo los extremos, AB y AC forman los lados faltantes, respectivamente iguales a b y c, formando así el triángulo requerido ABC que se muestra abajo a la izquierda. Las alturas corresponden a las perpendiculares trazadas de cada vértice A, B y C al lado opuesto respectivo a, b y c (ver Definición, pág. 57) y concurren en el punto O que es el ortocentro. Para trazar una altura debe usarse la construcción auxiliar siguiente: por un punto exterior (vértice) a un segmento dado bajar una perpendicular del punto al segmento. O bien, emplear una escuadra alineando el ángulo recto al segmento en cuestión.





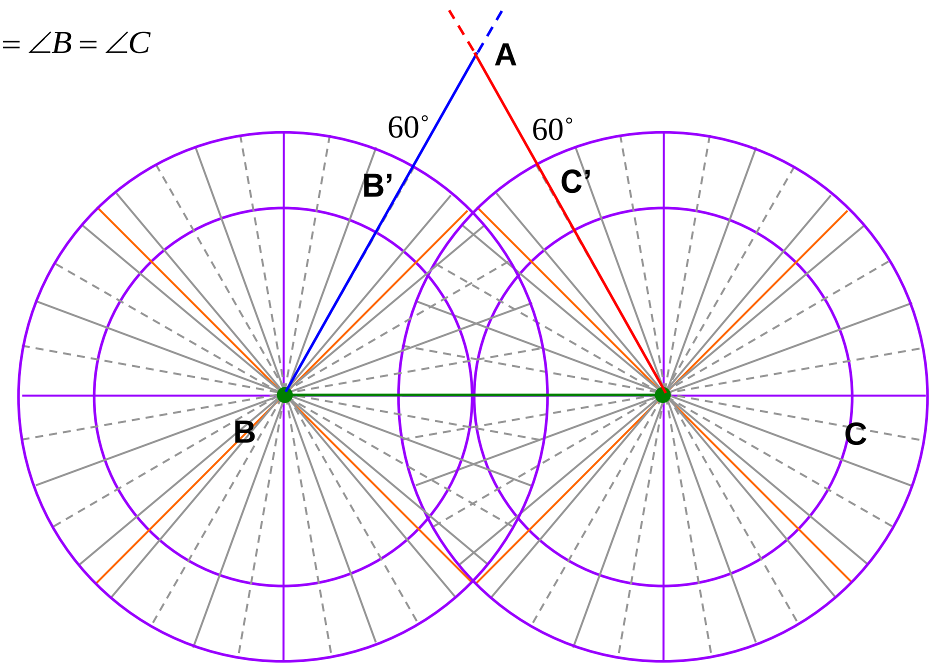
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

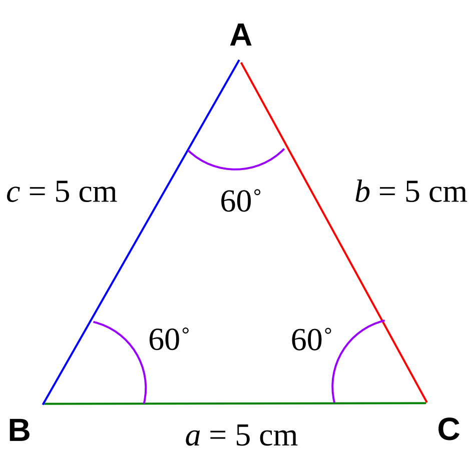
(7) Construir un triángulo equilátero de 5 cm de lado. Trazar las mediatrices y señalar el circuncentro. *Sobre la base (cualquier lado, ya que por hipótesis se trata de un triángulo equilátero) se coloca el origen del transportador primero en B para marcar el ángulo de* 60˚ *con el punto B' y luego en C para marcar el mismo ángulo* (60˚) *con el punto C'. Después, se trazan las rectas BB' y CC' las cuales al prolongarlas se cortan en el vértice A.*

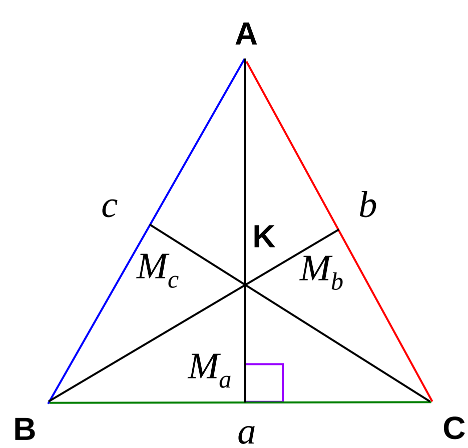
Hipótesis: $a = b = c$ y $\angle A = \angle B = \angle C$

Nota: puede resolverse este problema usando la construcción hecha en el Problema (1) *y en tal caso solo se necesita el compás y no el transportador. Las circunferencias colocadas en B y C se dibujan cada una con un radio de* 5 cm.



Uniendo los puntos extremos se forman los lados faltantes AB = c y AC = b, formando así el triángulo equilátero requerido ABC que se muestra abajo a la izquierda. Las mediatrices corresponden a las perpendiculares trazadas en el punto medio de cada lado a, b y c (ver Definición, pág. 57) y concurren en el punto K que es el circuncentro. El trazo de estas perpendiculares emplea la construcción geométrica 2) *del Art. 57 (pág. 38).*

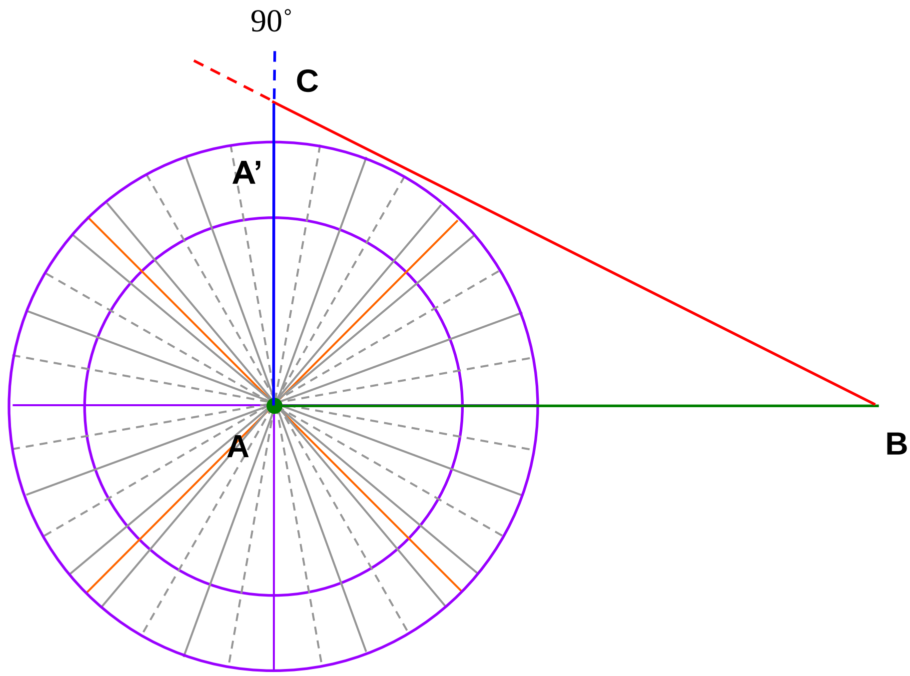




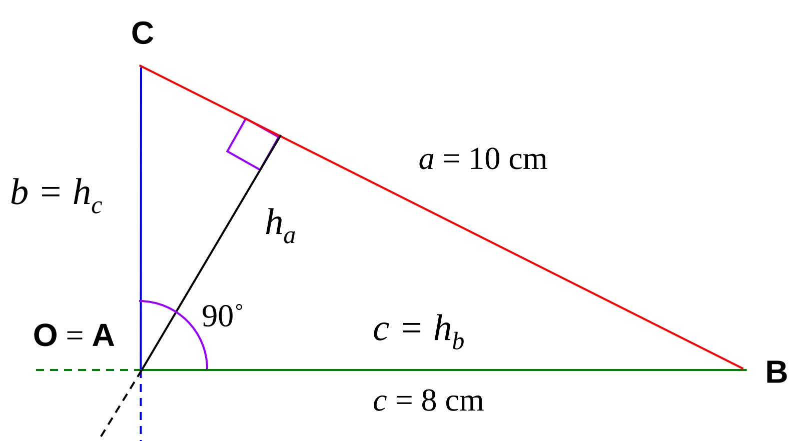
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

(9) Construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto que mida 8 cm y cuya hipotenusa mida 10cm. Dibujar las tres alturas. *Sobre el cateto dado se coloca el origen del transportador en A para marcar el ángulo de 90° con el punto A'. Se prolonga la recta AA' hacia arriba y del extremo B se traza a un punto C sobre AA', la hipotenusa con la longitud dada.*



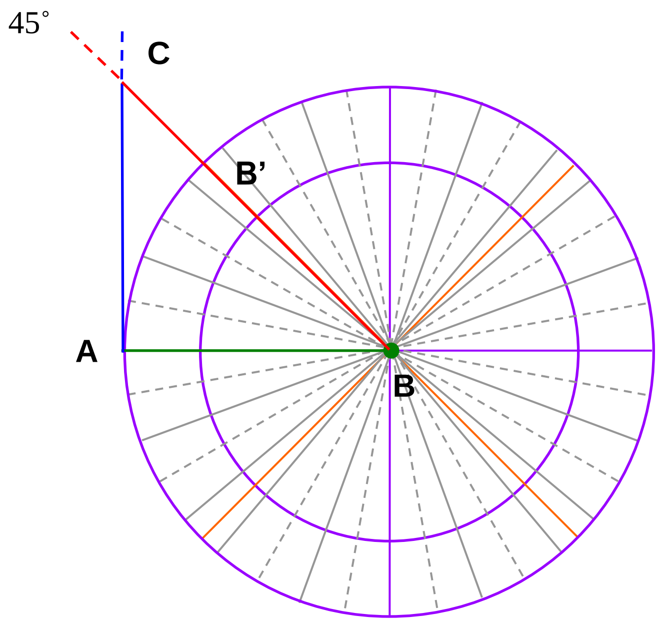
Uniendo los puntos A y C se forma el otro cateto AC = b, formando así el triángulo rectángulo requerido ABC que se muestra abajo. En este caso, las alturas h_c y h_b son iguales respectivamente a los catetos b y c y la única perpendicular que se traza es la que va del vértice A (ángulo recto) a la hipotenusa (lado a es opuesto). El ortocentro es O = A.

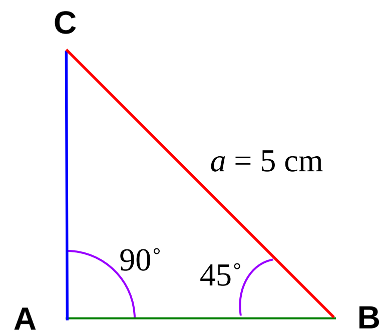


Triángulos y generalidades

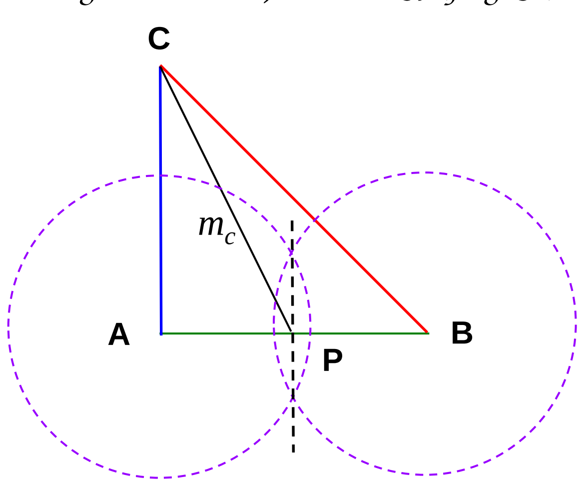
Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

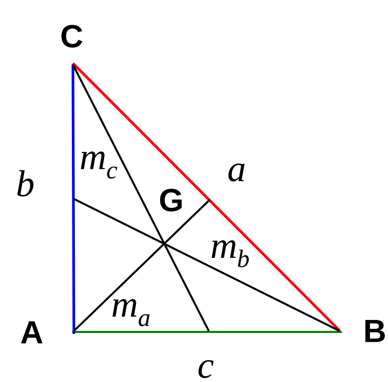
(11) Construir un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa que mida 5 cm y un ángulo que mida 45˚. Dibujar las tres medianas. *Sobre el cateto horizontal (sin longitud dada) se coloca el origen del transportador en B para marcar el ángulo de 45˚ con el punto B'. Se prolonga el segmento BB' (hipotenusa) hasta que mida 5 cm y de su extremo C se baja la perpendicular CA (cateto vertical) al cateto AB sobre el cual se colocó el transportador.*





Uniendo los puntos A y B se forma el cateto horizontal AB = c, formando así el triángulo rectángulo requerido ABC que se muestra arriba a la derecha. Las medianas son los segmentos que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto (ver definición, pág. 56) donde el punto medio P (para el cual, p. ej., AP = PB) puede determinarse por la construcción geométrica 1) *del Art. 57 (pág. 38). El punto G de concurrencia es el baricentro.*





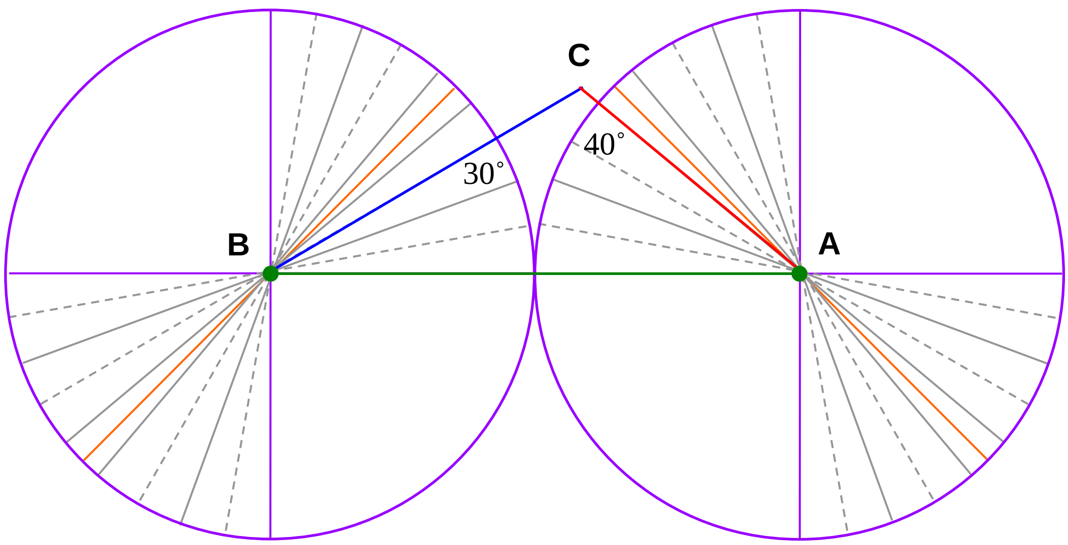
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

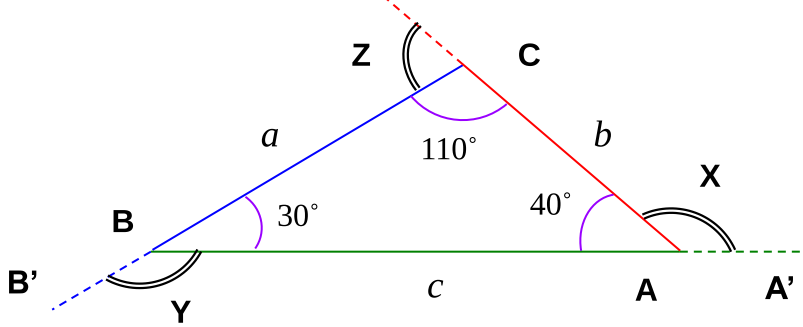
(13) Dos ángulos de un triángulo miden 40˚ y 30˚ respectivamente. ¿Cuánto mide el tercer ángulo y cada uno de los ángulos exteriores? *Según el Teorema 18 (pág. 58), la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale dos ángulos rectos, es decir, si A, B y C son los ángulos del triángulo, entonces* $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$. *Por hipótesis,*

$$\angle A = 40° \text{ y } \angle B = 30°, \text{ de donde } \angle C = 2R - (\angle A + \angle B) = 180° - 70° = 110°$$

Como 110˚ > *R, el tercer ángulo C es obtuso y se trata de un triángulo obtusángulo. La construcción del triángulo ABC se muestra a continuación.*



Los ángulos exteriores son los que se forman por uno de los lados del triángulo y la prolongación de otro (ver Definición Art. 84, pág 58). Por ejemplo, el ángulo exterior X se forma con el lado AC = b y la prolongación A'B del lado AB = c. Como X, Y, Z son ángulos adyacentes a los respectivos ángulos interiores A, B, C del triángulo, se obtiene inmediatamente que:



$$\angle X = 2R - \angle A = 180° - 40° = 140°$$

$$\angle Y = 2R - \angle B = 180° - 30° = 150°$$

$$\angle Z = 2R - \angle C = 180° - 110° = 70°$$

y se comprueba que

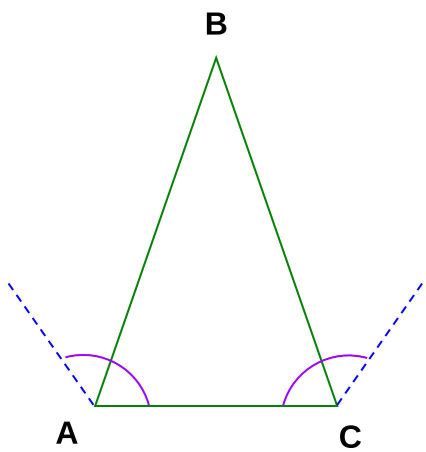
$$\angle X + \angle Y + \angle Z = 360° = 4R.$$

Triángulos y generalidades
Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

(15) ¿Puede ser obtuso el ángulo en la base de un triángulo isósceles? *Razonamos por el método de reducción al absurdo. Así, supóngase que el ángulo A de la base en un triángulo isósceles es un ángulo obtuso, por tanto, A es mayor a un ángulo recto. Por hipótesis, tratándose de un triángulo isósceles, el otro ángulo C de la base es igual con A, de modo que (ver esquema abajo a la izquierda)*

$$\angle A + \angle C > R + R = 2R \text{ de donde } \angle A + \angle B + \angle C > 2R + \angle B > 2R,$$

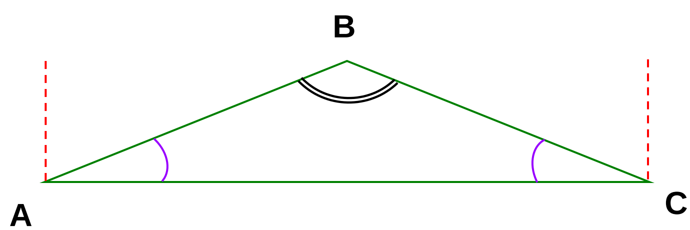
desigualdad que contradice al Teorema 18 que establece que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, en particular de un triángulo isósceles, es igual a un ángulo llano. Consecuentemente, lo que se supuso como verdadero es falso y el ángulo en la base de un triángulo isósceles no puede ser obtuso (ni A ni C). No obstante,



el ángulo opuesto a la base sí puede ser obtuso ya que si el ángulo $B > R$ (mayor a un recto), entonces

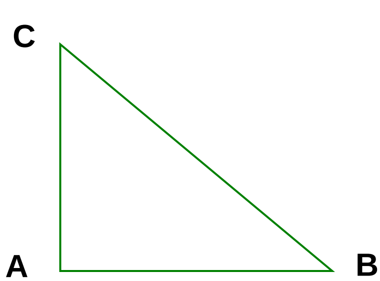
$$\angle A + \angle C = 2R - \angle B < R$$

$$\text{y } \angle A = \angle C < \frac{R}{2}$$

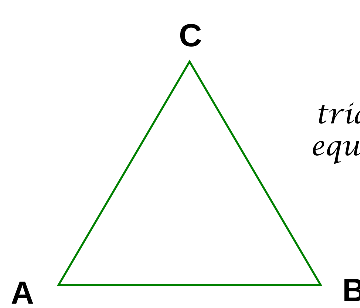


(17) ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo? *Por construcción geométrica, todos los ángulos de un triángulo equilátero ABC son iguales y como suman dos ángulos rectos (Teorema 18) se deduce que cada uno vale 60°. Como un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto igual a 90° (ver Definición, pág. 56), resulta claro que este ángulo no es igual a ningún ángulo de un triángulo equilátero (ver criterio de igualdad de triángulos en pág. 60). Por lo tanto, un triángulo rectángulo no puede ser equilátero.*

triángulo rectángulo



$\angle A = 90°; \angle B + \angle C = 90°$



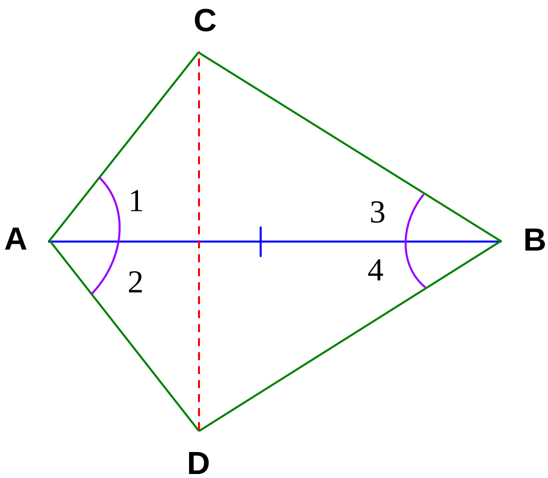
triángulo equilátero

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(1) Si $< 1 = < 2$ y $< 3 = < 4$, demostrar que $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$.



Como los triángulos ABC y ABD tienen como base el lado común AB y los ángulos adyacentes a la base 1, 3 *y* 2, 4 *son por hipótesis, iguales respectivamente, se sigue por el Teorema 21 (pág. 64) que ambos triángulos son iguales. De forma equivalente, puede emplearse el postulado del movimiento y rotar (fuera del plano de la hoja) el triángulo ABC respecto de la base AB (eje de rotación) para hacer coincidir el vértice C con el vértice D del triángulo ABD. Y dado que*

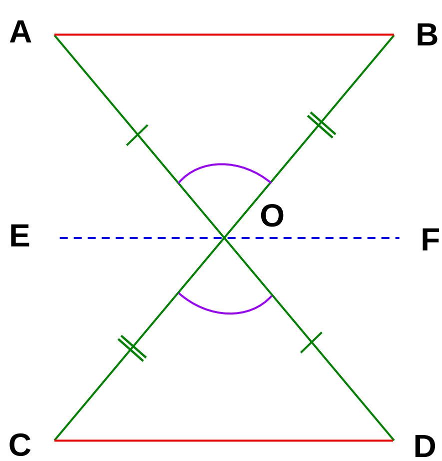
$$\angle 1 = \angle 2 \text{ entonces } \overline{AC} = \overline{AD},$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ entonces } \overline{BC} = \overline{BD}.$$

(3) Si $AC = AD$ y $BC = BD$, demostrar que $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$. *Por hipótesis ambos triángulos tienen dos lados iguales, además tienen como lado común e igual el segmento base AB por lo que se cumplen las condiciones del Caso 3 y según el Teorema 23 (pág. 66) ambos triángulos tienen entonces los tres lados iguales, es decir,*

$$\overline{AC} = \overline{AD}, \quad \overline{BC} = \overline{BD} \text{ y } \overline{AB} = \overline{AB} \text{ (base común) } \therefore\ \Delta ABC = \Delta ABD.$$

(5) Si O es el punto medio de los segmentos AD y BC, demostrar que $\Delta\, AOB = \Delta\, COD$.



Por hipótesis, al ser O el punto medio de los segmentos AD y BC se tiene que

$$\overline{AO} = \overline{DO} \text{ y } \overline{BO} = \overline{CO}.$$

Por otra parte, el ángulo interior O en ambos triángulos es el mismo por ser opuestos por el vértice común, denotado por la misma letra. Así, se cumplen las condiciones correspondientes al Caso 2 y según el Teorema 22 (pág. 65) ambos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, por tanto

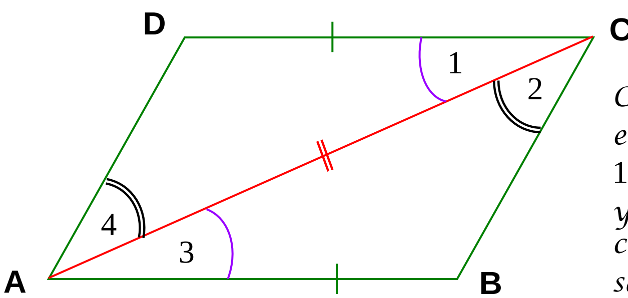
$$\Delta\, AOB = \Delta\, COD.$$

Como construcción auxiliar, Obsérvese que el triángulo AOB puede girarse, respecto al punto O, fuera del plano sobre la paralela EF a AB para hacerlo coincidir con el triángulo COD (postulado del movimiento) y así mostrar la igualdad de las bases AB y CD.

Casos de igualdad de triángulos

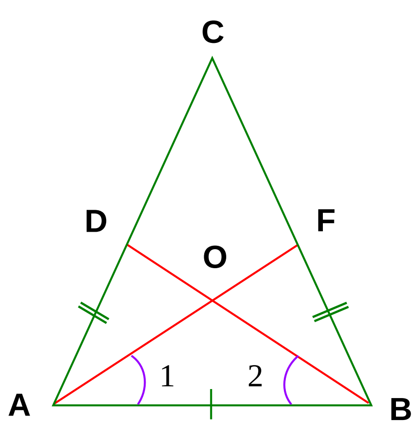
Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(7) Si $CD = AB$ y $<1 = <3$, demostrar que $\Delta\, ACD = \Delta\, ACB$ y que $BC = AD$.



Como los triángulos ACD y ACB tienen como base el lado común AC, el lado CD = AB y los ángulos 1 y 3 *comprendidos, respectivamente entre AC, CD y AC, AB son iguales, por hipótesis, resulta que las condiciones del Caso 2, Teorema 22 (pág. 65) se satisfacen. Por lo tanto,* $\Delta\, ACD = \Delta\, ACB$.

(9) El $\Delta\, ABC$ es isósceles; D y F son los puntos medios de los lados AC y BC respectivamente. Demostrar que $AF = BD$ y que $< 1 = < 2$.



Por hipótesis, al ser isósceles el triángulo ABC, $AC = BC$ *y* $< A = < B$ *(ver Corolario, pág. 66). Por otra parte, siendo* D y F *los puntos medios respectivos de los lados AC y BC se tiene que*

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 2\overline{AD} \\ \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = 2\overline{BF} \end{array}\right\} \text{ entonces } \overline{AD} = \overline{BF}\ .$$

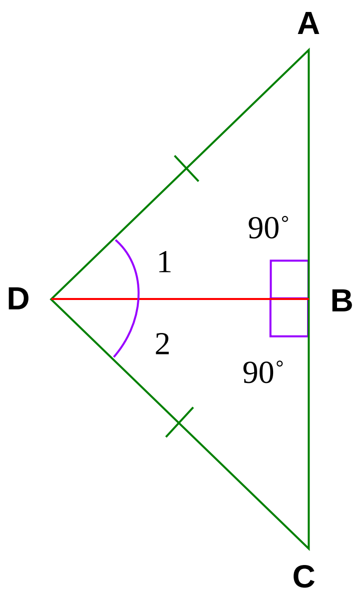
y siendo la base AB un lado común a los triángulos ABD y ABF resulta que estos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales. Se sigue por el Caso 2, Teorema 22 (pág. 65) que $\Delta\, ABD = \Delta\, ABF$.

Al ser iguales los triángulos ABD y ABF los lados que se oponen, respectivamente a los ángulos A y B son iguales. Así, el lado BD se opone al ángulo A y el lado AF se opone al ángulo B, consecuentemente AF = BD (lados homólogos). De manera análoga, ya que $\Delta\, ABD = \Delta\, ABF$ *y AD = BF los ángulos que se oponen a estos lados también son iguales. Es decir, como* < 1 *se opone al lado BF y el* < 2 *se opone al lado AD se sigue que* $< 1 = < 2$ *(ángulos homólogos).*

Casos de igualdad de triángulos

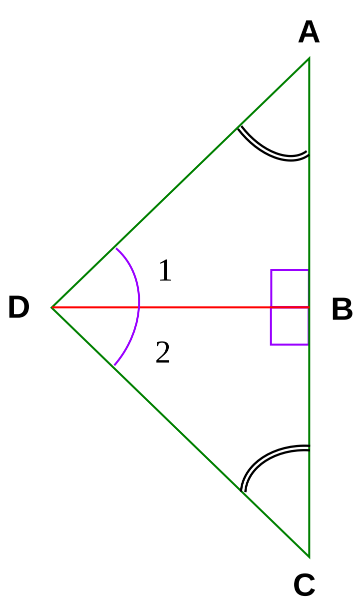
Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(11) Si el lado *BD* es perpendicular al segmento *AC*, < 1 = < 2 y *AD* = *CD*, demostrar que los triángulos *ABD* y *CBD* son iguales.



Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde < B = R, y como también < 1 = < 2 (ángulos agudos) y las hipotenusas respectivas AD y CD son iguales, se cumplen las condiciones del Caso 1 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 67). Entonces, Δ ABD = Δ CBD .

(13) Si el lado *BD* es perpendicular al segmento *AC* y < 1 = < 2, demostrar que los triángulos *ABD* y *CBD* son iguales, que *AD* = *CD* y que < *A* = < *C* .



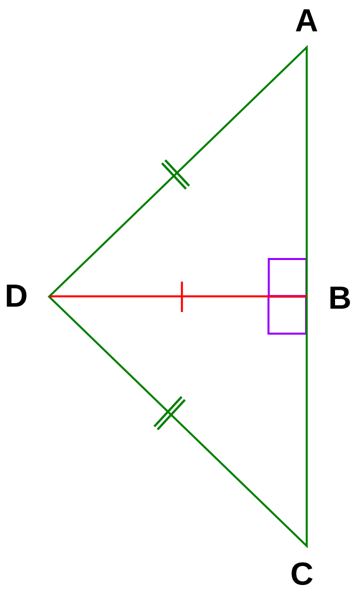
Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde < B = R, que comparten el cateto BD. Además, los ángulos adyacentes (agudos) son iguales, es decir, < 1 = < 2 por hipótesis. De esta manera, se cumplen las condiciones del Caso 2 a) para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68). Entonces, Δ ABD = Δ CBD . Por ser estos triángulos iguales, los lados que se oponen al ángulo recto son también iguales. Como AD se opone al < B en el Δ ABD y CD se opone al < B en el Δ CBD, resulta que AD = CD. Finalmente,

$$\left.\begin{array}{l}\text{en } \Delta ABD, \quad \angle 1 + \angle A = R \\ \text{en } \Delta CBD, \quad \angle 2 + \angle C = R\end{array}\right\} \text{ de donde } \angle A = \angle C .$$

Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(15) Si el lado *BD* es perpendicular al segmento *AC* y *AD* = *CD*, demostrar que *AB* = *BC*.



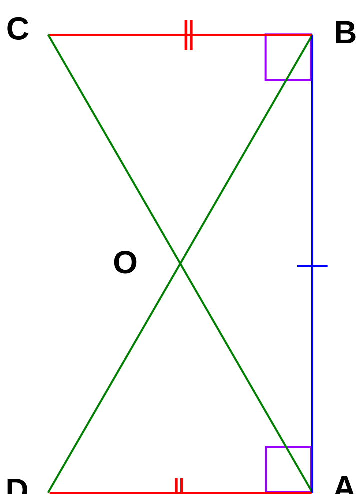
Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde < B = R, que comparten el cateto BD.

Adicionalmente, las hipotenusas respectivas se suponen también iguales, es decir, AD = CD. De este modo, se cumplen las condiciones del Caso 4 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 69). Entonces, Δ ABD = Δ CBD.

Ya que estos triángulos son iguales, por el criterio de igualdad de triángulos (Art. 87, pág. 60), sus tres lados son iguales. Consecuentemente, AB = BC. Recuérdese que este caso está relacionado al Teorema de Pitágoras. Así,

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$ de donde $\overline{AB} = \overline{BC}$.

(17) Si el lado *DA* es perpendicular al lado *AB*, el lado *CB* es perpendicular al lado *AB* y *AD* = *BC*, demostrar que Δ *ABD* = Δ *ABC*.

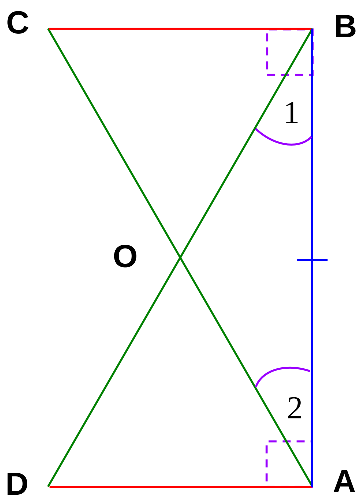


Por las relaciones de perpendicularidad supuestas, $DA \perp AB$ y $CB \perp AB$ *se sigue que los triángulos ABD y ABC son triángulos rectángulos que comparten el lado AB como cateto común. Como, por hipótesis, los catetos opuestos AD y BC, respectivamente a los ángulos B y A también son iguales, se satisfacen las condiciones correspondientes al Caso 3 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68-69). Entonces,* Δ *ABD* = Δ *ABC* .

Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(19) Si el lado *DA* es perpendicular al lado *AB*, el lado *CB* es perpendicular al lado *AB* y < 1 = < 2, demostrar que Δ *ABD* = Δ *ABC*.



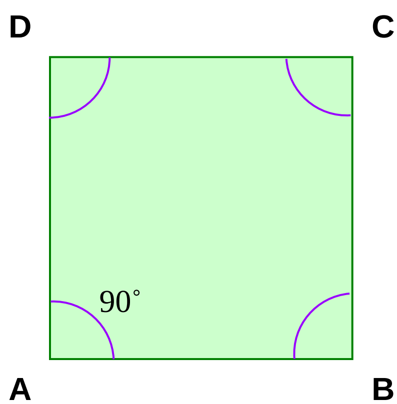
Por las relaciones de perpendicularidad supuestas, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ *se sigue que los triángulos ABD y ABC son triángulos rectángulos que comparten el lado AB como cateto común. Como, por hipótesis, los ángulos adyacentes al cateto AB son iguales, es decir,* < 1 = < 2, *se cumplen las condiciones correspondientes al Caso 2 a) para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68). Entonces,* Δ *ABD* = Δ *ABC.*

Obsérvese que el <1 *y el ángulo recto A son adyacentes sobre AB para el triángulo ABD. Similarmente, el* < 2 *y el ángulo recto B son adyacentes sobre AB para el triángulo ABC.*

Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(1) Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.



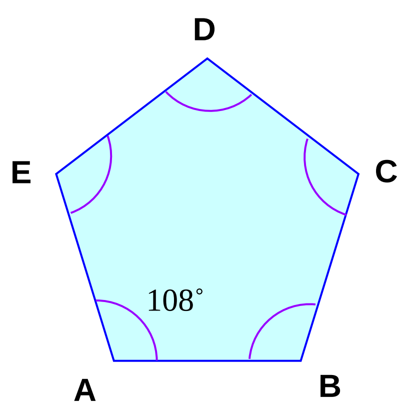
Por ser un cuadrado un polígono regular de cuatro lados (iguales) y en consecuencia un tipo de cuadrilátero puede aplicarse la fórmula dada en el Teorema 24 (pág. 75) empleando n = 4. *Realizando la susbtitución, se obtiene:*

$$S_i = 2R(n-2) = 2R(4-2) = 4R = 360° ,$$

lo que puede comprobarse de la figura adjunta, ya que

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4(90°) = 360° .$$

(3) Hallar la suma de los ángulos interiores de un pentágono.



Por ser un pentágono un polígono de cinco lados puede aplicarse la fórmula dada en el Teorema 24 (pág. 75) empleando n = 5. *Realizando la susbtitución, se obtiene:*

$$S_i = 2R(n-2) = 2R(5-2) = 6R = 540° .$$

En el pentágono regular de la figura adjunta, cada ángulo vale 108˚, *y se verifica que*

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 5(108°) = 540° .$$

(5) ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260˚? *De acuerdo al Teorema 24 (pág. 75) se sabe que* S_i = 1260˚ = 2R (n - 2), *ecuación de la cual puede despejarse el valor de n, es decir,*

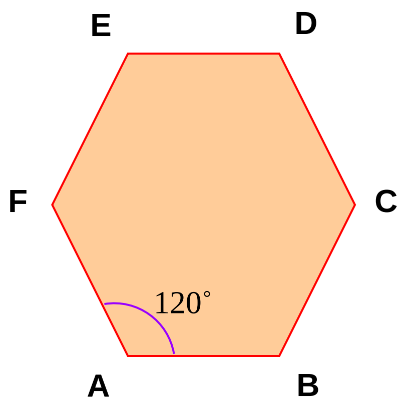
$$\text{como } S_i = 2R(n-2) = 1260° \text{ entonces } n = \frac{1260°}{2R} + 2 = \frac{1260°}{180°} + 2 = 7 + 2 = 9 .$$

En consecuencia, al ser n = 9, *se trata de un polígono de nueve lados llamado eneágono.*

Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(7) Hallar el valor del ángulo interior de un hexágono regular.



Por ser un hexágono regular un polígono con seis lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 76) empleando $n = 6$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle i = \frac{S_i}{n} = \frac{2R(n-2)}{n} = \frac{2R(6-2)}{6} = \frac{4R}{3} = \frac{360°}{3} = 120°.$$

Siendo este resultado el valor del ángulo interior para un hexágono regular, se observa en la figura adjunta que

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120°.$$

(9) Hallar el valor de un ángulo interior de un decágono regular. *Por ser un decágono regular un polígono con diez lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 76) empleando* $n = 10$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle i = \frac{S_i}{n} = \frac{2R(n-2)}{n} = \frac{2R(10-2)}{10} = \frac{8R}{5} = \frac{720°}{5} = 144°.$$

Siendo este resultado el valor del ángulo interior para un decágono regular, se sigue que los diez ángulos, $\angle A, \angle B, \ldots, \angle I, \angle J$ *tienen este mismo valor.*

(11) Determinar cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior vale 90°. *Considerando que la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 75) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo interior vale* 90°, *entonces*

como $\angle i = \dfrac{2R(n-2)}{n} = 90°$ se obtiene $2R(n-2) = 2Rn - 4R = 90°n$; equivalentemente

$180°n - 90°n = 4R = 360°$, de donde $n = \dfrac{360°}{90°} = 4$ y se trata de un cuadrado.

(13) Hallar la suma de los ángulos exteriores de un eptágono. *Siendo un eptágono un polígono convexo de siete lados, se le puede aplicar el Teorema 25 (pág. 76), el cual establece que la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados siempre es igual a* $4R$. *Así, en particular, la suma de los ángulos exteriores de un eptágono es igual a* 360°.

Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(15) Hallar el valor del ángulo exterior de un decágono regular. *Por ser un decágono regular un polígono con diez lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) empleando* $n = 10$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle e = \frac{S_e}{n} = \frac{4R}{n} = \frac{360°}{10} = 36°\,.$$

Siendo este resultado el valor del ángulo exterior para un decágono regular, se sigue que los diez ángulos, $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 9, \angle 10$ *tienen este mismo valor.*

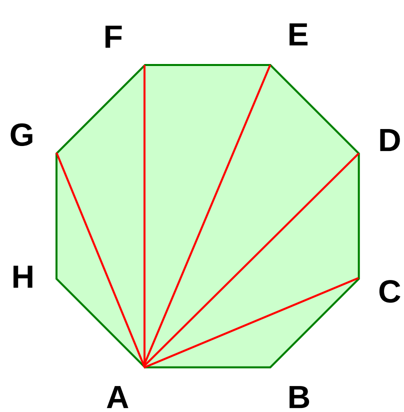
(17) ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 120˚? *Considerando que la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo exterior vale* 120˚, *entonces*

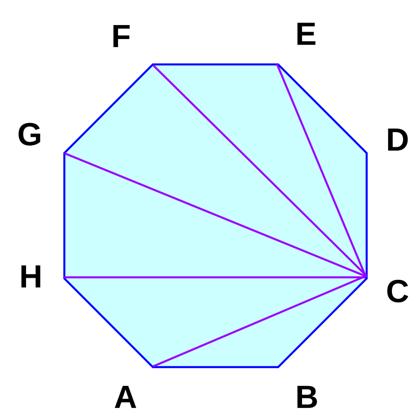
$$\angle e = \frac{4R}{n} = 120° \text{ de donde } 4R = 120° n \text{ y } n = \frac{360°}{120°} = 3 \quad \therefore \text{ es un triángulo equilátero.}$$

(19) Determinar cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 90˚? *Considerando que la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo exterior vale* 90˚, *entonces*

$$\angle e = \frac{4R}{n} = 90° \text{ de donde } 4R = 90° n \text{ y } n = \frac{360°}{90°} = 4 \quad \therefore \text{ es un cuadrado.}$$

(21) Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un octágono. *Siendo un octágono un polígono de ocho lados, se le puede aplicar el Teorema 26 (pág. 77), que dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice, considerando que* $n = 8$. *Así,* $d = n - 3 = 8 - 3 = 5$, *lo cual puede apreciarse en la figura adjunta, por ejemplo para los vértices A y C. Recordar que en el vértice mismo y en los* 2 *vértices contiguos no pueden trazarse diagonales.*



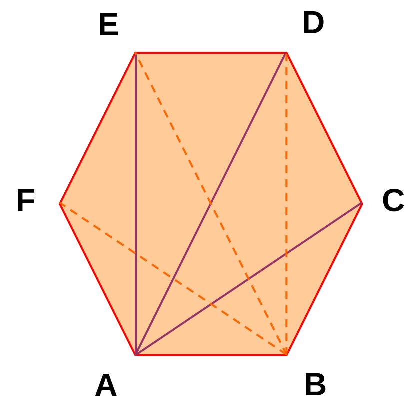


Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(23) ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar tres diagonales desde un vértice?

Como el Teorema 26 (pág. 77), dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice en un polígono de n lados, y en este caso, $d = 3 = n - 3$, *se sigue inmediatamente que* $n = 3 + 3 = 6$, *por lo cual se trata de un hexágono. Como se comprueba en la figura adjunta, por ejemplo,* 3 *diagonales pueden trazarse desde los vértices A y B, respectivamente. Obsérvese que el resultado se refiere a hexágonos regulares o irregulares.*



(25) ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar nueve diagonales? *Como el Teorema 26 (pág. 77), dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice en un polígono de n lados, y por hipótesis,* $d = 9 = n - 3$, *se sigue claramente que* $n = 9 + 3 = 12$, *por lo cual se trata de un dodecágono.*

(27) Calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un decágono? *Por ser un decágono un polígono de diez lados, puede aplicarse el Teorema 27 (pág. 77), con* $n = 10$, *para determinar el número total de diagonales que pueden trazarse en el decágono dado. Consecuentemente,*

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = \frac{10(7)}{2} = 35.$$

(29) ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 14 diagonales en total? *Para este problema, la hipótesis consiste en que el número total de diagonales de un polígono está dado y es igual a* 14. *Del Teorema 27 (pág. 77), se sabe que el número total de diagonales que pueden trazarse en un polígono de n lados está dado por*

$$D = 14 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{entonces} \quad n(n-3) = 2(14) = 7(4) \quad \text{de donde} \quad n = 7 \quad \text{y} \quad n - 3 = 4$$

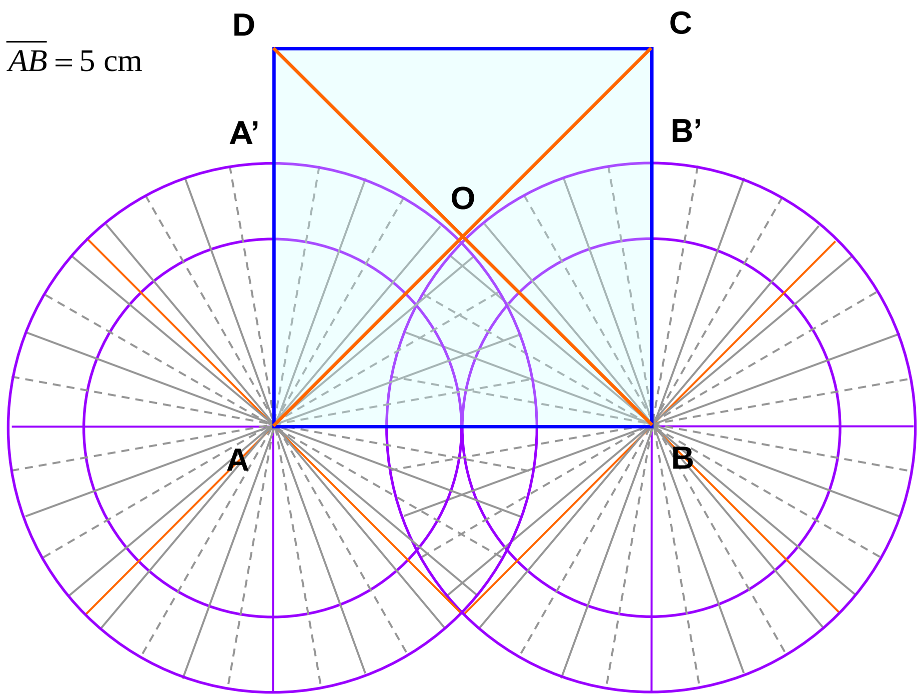
$\therefore \quad n = 7$ (ambas ecuaciones dan lo mismo) y se trata de un eptágono.

Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(1) Construir un cuadrado de 5 cm de lado, trazar sus diagonales y comprobar, por medición, que son iguales y perpendiculares, que se dividen mutuamente en partes iguales y que son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Hipótesis: $\overline{AB} = 5$ cm



Para construir un cuadrado de 5 cm *de lado, se mide un segmento AB con la longitud deseada y en sus extremos A y B se coloca el transportador para marcar los puntos A' y B' en su borde y trazar las rectas verticales AA' y BB' que formen un ángulo de* 90° *con AB. Sobre estas rectas se determinan los segmentos AD y BC de modo que tengan como longitud* 5 cm. *Finalmente, se unen los extremos C y D para formar el segmento CD y así cerrar el contorno del cuadrado ABCD pedido. Las diagonales AC y BD se trazan uniendo los vértices opuestos A con C y B con D.*

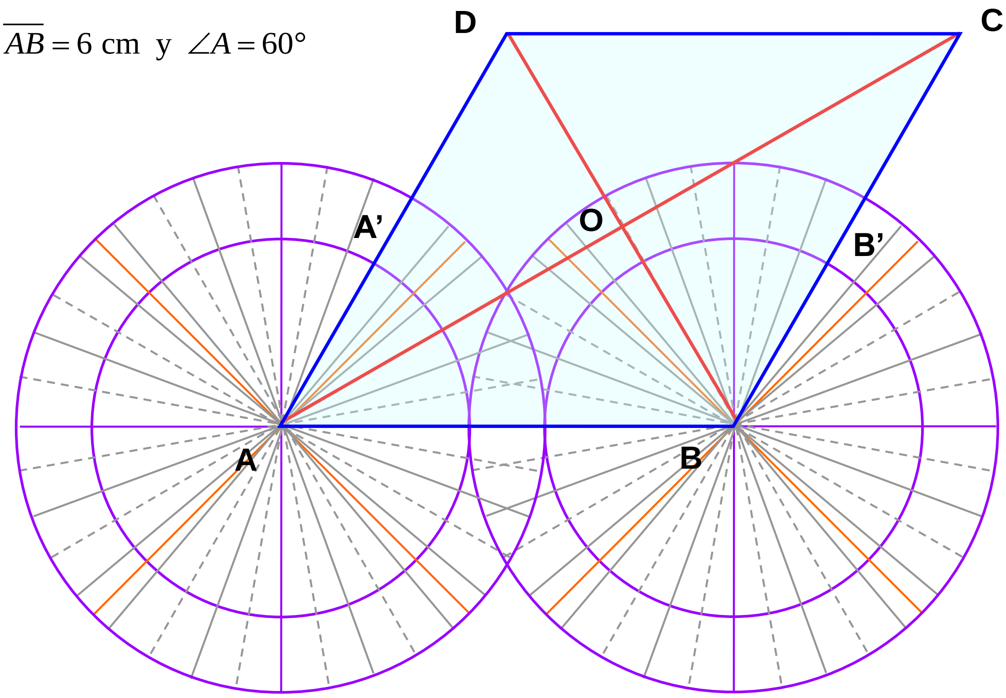
Usando una regla graduada se comprueba que AC = BD y que su longitud aproximada vale 7.1 cm; *además, colocando el transportador en el punto O donde se cruzan ambas diagonales, se verifica que AC y BD son perpendiculares entre sí. Empleando la regla graduada se ve que AO = OC y BO = OD ya que su longitud aproximada es de* 3.55 cm, *por tanto las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales. De la figura adjunta, puede observarse que las diagonales AC y BD caen sobre la prolongación de las líneas color naranja de este transportador primitivo y que forman entonces un ángulo de* 45° *(AC con AB y BD con BA), por tanto son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.*

Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(3) Construir un rombo cuyo lado mida 6 cm y tenga un ángulo agudo de 60˚. Comprobar, por medición, que las diagonales son perpendiculares, se dividen mutuamente en partes iguales y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Hipótesis: $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ y $\angle A = 60°$



Para construir un rombo de 6 cm *de lado, se mide un segmento AB con la longitud deseada y en sus extremos A y B se coloca el transportador para marcar los puntos A' y B' en su borde y trazar las rectas oblicuas AA' y BB' que formen un ángulo de* 60˚ *con AB. Sobre estas rectas se determinan los segmentos AD y BC de modo que tengan como longitud* 6 cm. *Finalmente, se unen los extremos C y D para formar el segmento CD y así cerrar el contorno del rombo ABCD requerido. Las diagonales AC y BD se trazan uniendo los vértices opuestos A con C y B con D.*

Colocando el transportador en el punto O donde se cruzan ambas diagonales, se comprueba que AC y BD son perpendiculares entre sí. Usando una regla graduada se verifica que AO = OC y BO = OD ya que sus longitudes aproximadas, son respectivamente de 5.2 cm y 3 cm, *por tanto las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales. De la figura adjunta, puede observarse que las diagonales AC y BD caen sobre la prolongación de las líneas que forman ángulos de* 30˚ y 60˚, *respectivamente, (AC con AB y BD con BA), por tanto son bisectrices de los ángulos que valen* 60˚ y 120˚ *cuyos vértices unen (como un rombo es un tipo de paralelogramo la relación de los ángulos A y B queda justificada por la Propiedad 3 del Art. 115, pág. 86).*

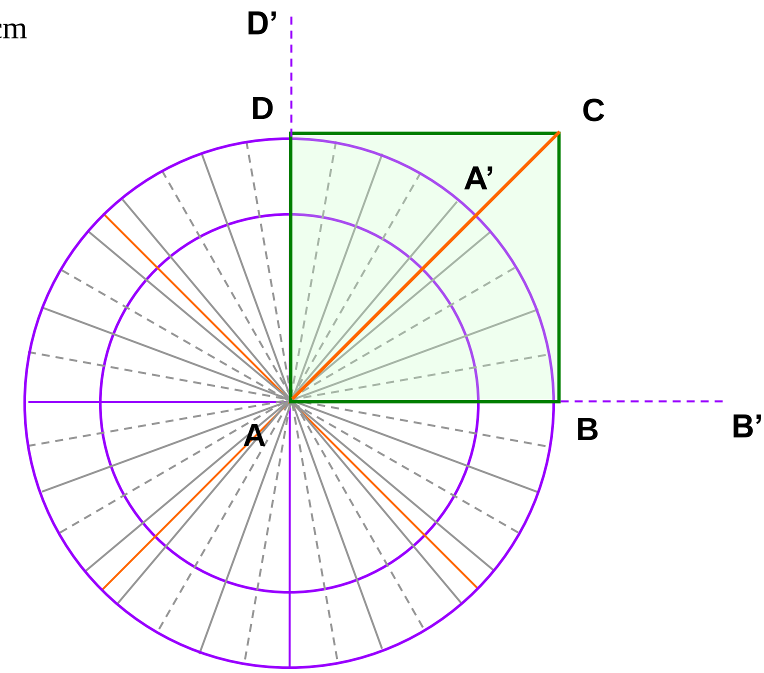
.

Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(5) Construir un cuadrado cuya diagonal mida 5 cm.

Hipótesis: $\overline{AC} = 5$ cm



Para construir un cuadrado cuya diagonal mida 5 cm, *sobre la recta horizontal AB' se coloca la base del transportador y su origen se sitúa en el extremo A del cual se mide un ángulo de* 45° *marcando el punto A' en su borde (por la Propiedad 5, pág. 86, las diagonales de un cuadrado son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen).*

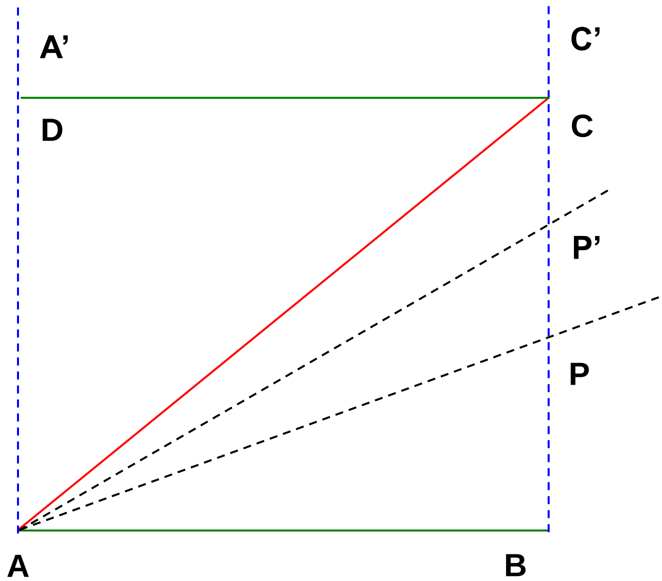
Sobre la recta oblicua AA' se traza la diagonal AC con la longitud deseada y del extremo C se baja la perpendicular CB sobre AB' determinando así el lado AB. Análogamente, del mismo extremo C se traza la perpendicular CD que corte la recta AD' para formar el lado AD y de este modo cerrar el contorno del cuadrado ABCD pedido. Usando una regla graduada se comprueba que AB = BC = CD = DA, cuya longitud aproximada mide 3.55 cm.

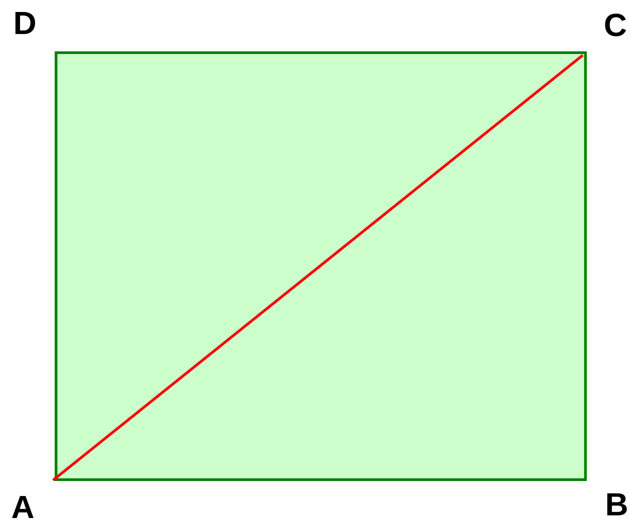
Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(7) Construir un rectángulo que tenga un lado que mida 7 cm y una diagonal que mida 9 cm.

Hipótesis: $\overline{AC} = 9$ cm y $\overline{AB} = 7$ cm

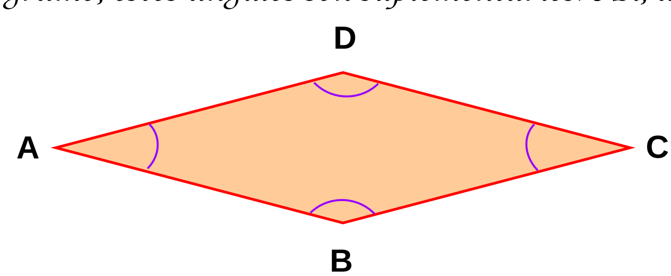




Para construir un rectángulo que tenga un lado que mida 5 cm, *sobre el segmento AB con la longitud especificada se levanta en el extremo derecho la semirecta perpendicular BC'. Después, desde el extremo izquierdo A se trazan segmentos oblicuos con la misma longitud igual a* 9 cm *que corten BC', por ejemplo, AP y AP', hasta que AP'' = AC. El punto P'' coincidirá con el vértice C para el cual la diagonal descansa justo en el extremo superior de la altura BC (con la misma longitud que antes, es decir,* 9 cm*).*

Posteriormente, por A se levanta la perpendicular AA' y por C se traza la paralela a AB que corte AA' en D formando así el lado AD. De este modo, AB = CD = 7 cm *y AC =* 9 cm*. Uniendo los segmentos AB, BC, CD y DA se limita la región del plano que forma el rectángulo ABCD pedido. Usando una regla graduada se comprueba que los lados BC y DA son iguales con una longitud aproximada de* 5.7 cm.

(9) Un ángulo de un romboide mide 36˚. ¿Cuánto mide cada uno de los otros tres? *Por definición, un romboide tiene los ángulos contiguos desiguales y como todo romboide es un paralelogramo, estos ángulos son suplementarios. Así, de acuerdo a la figura mostrada, se obtienen*



$\angle A = 36°$ (hipótesis)

$\angle B = 2R - \angle A = 180° - 36° = 144°$

$\angle C = 2R - \angle B = 180° - 144° = 36°$

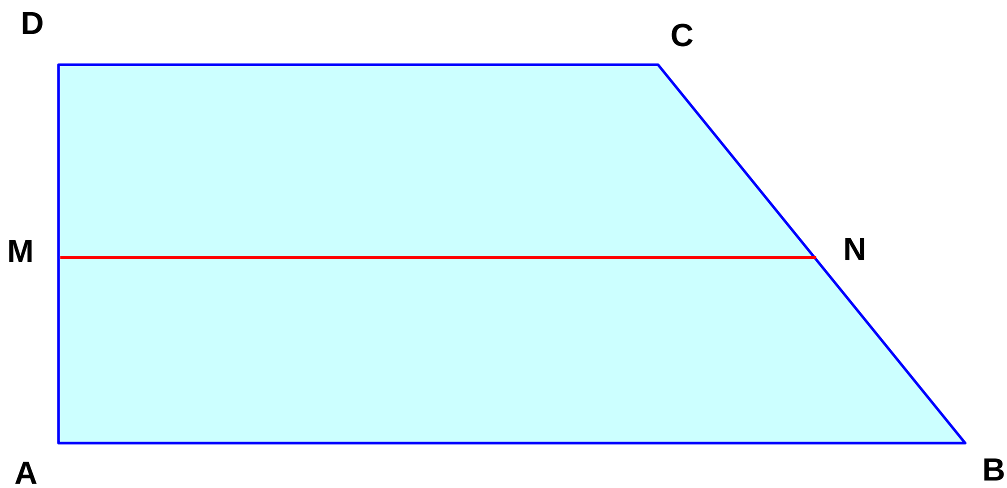
$\angle D = 2R - \angle C = 180° - 36° = 144°$

Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(11) Construir un trapecio rectángulo que cuyas bases midan 12 cm y 8 cm y la altura 5 cm. Trazar la base media y comprobar, por medición, que su longitud es igual a la semisuma de las bases.

Hipótesis: $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm y $\overline{AD} = h = 5$ cm.



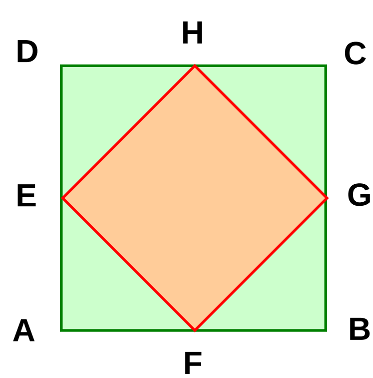
Para construir un trapecio rectángulo cuya base mayor mida 12 cm, *sobre el segmento AB con la longitud especificada se levanta en el extremo izquierdo la altura AD perpendicular a AB con longitud de* 5 cm. *Del extremo superior D se traza el segmento DC o base menor paralelo a AB con longitud igual a* 8 cm. *Finalmente, se unen los vértices C y B para formar el cuarto lado CB del trapecio. El contorno del trapecio rectángulo queda así formado por la secuencia de segmentos AB, BC, CD y DA. Del segmento AD que corresponde a la altura, el punto medio se encuentra a* 2.5 cm *de la base mayor con lo cual se determina el punto M. Trazando por M una paralela a AB o CD se obtiene la base media MN, la cual mediante una regla graduada mide* 10 cm *y se comprueba que es la semisuma o promedio de las bases (mayor y menor), es decir,*

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{12 \text{ cm } + 8 \text{ cm}}{2} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm.}$$

(13) Averiguar qué figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado.

Al unir los puntos medios E, F, G y H de los lados de un cuadrado se forma otro cuadrado ya que EF = FG = GH = HE y los ángulos E, F, G y H son rectos.

Nótese que el cuadrado EFGH no es un rombo pues este último no es equiángulo.

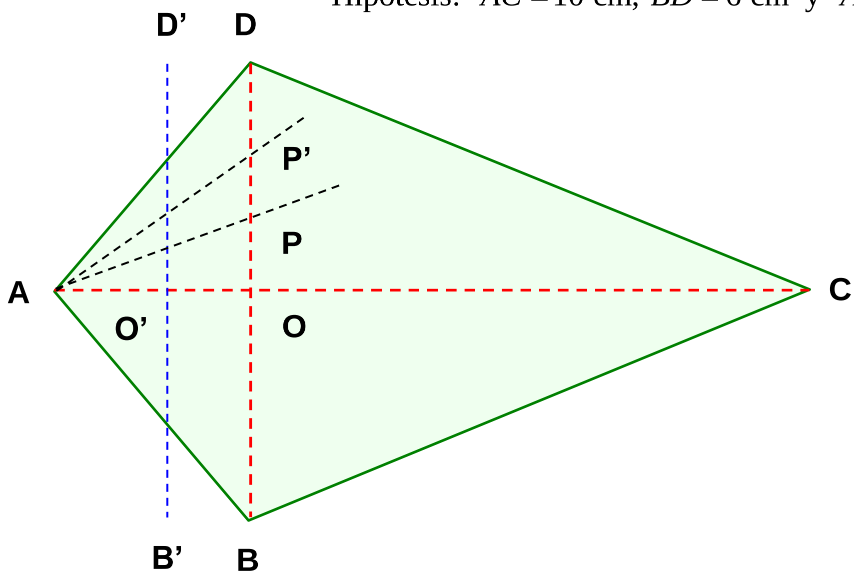


Cuadriláteros

Capítulo 8. Ejercicios Resueltos (p. 88)

(15) Construir un trapezoide simétrico cuyas diagonales midan 10 cm y 6 cm, y uno de los lados mida 4 cm.

Hipótesis: $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 6$ cm y $\overline{AD} = 4$ cm.



Recuérdese que un trapezoide simétrico es aquel con dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par es diferente del segundo. Así, en la figura mostrada arriba, AB = AD y CB = CD pero AB ≠ CB y *AD ≠ CD. Además, sus diagonales son perpendiculares y la que une los vértices donde concurren los lados iguales es bisectriz de los ángulos y eje de simetría de la figura (si se gira fuera del plano el Δ ADC respecto al eje AC, entonces Δ ADC = Δ ABC).*

Para construir el trapezoide simétrico requerido, sobre la diagonal mayor (*AC* = 10 cm)*, se traza la otra diagonal* (*BD* = 6 cm) *perpendicular a AC de modo que BO = DO =* 3 cm*. Luego, desde el extremo izquierdo A se trazan segmentos oblicuos de longitud igual a* 4 cm *(lado dado) que corten BD, por ejemplo, AP y AP', hasta que AP" = AD. El punto P" coincidirá con el vértice D para el cual el lado dado, digamos AD, descansa justo en el extremo superior de la diagonal menor BD (con la longitud pedida, es decir,* 4 cm*).*

Es importante mencionar que inicialmente la perpendicular a AC corresponderá al segmento B'D' = 6 cm *(igual que la diagonal menor) satisfaciendo B'O' = D'O'* = 3cm *y después de haber sido trasladado quedará como el segmento BD (posición final de la diagonal menor). Finalmente, el contorno del trapezoide simétrico queda formado al unir los puntos A* con *B (lado consecutivo igual al lado dado AD), y los pares de puntos B* con *C y D* con *C, los cuales forman el segundo par de lados consecutivos. Usando una regla graduada se comprueba, que CB y CD miden aproximadamente* 8 cm.

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar las razones directas e inversas de los segmentos a y b, sabiendo que:

(1) $a = 18$ m, $b = 24$ m (3) $a = 25$ cm, $b = 5$ cm (5) $a = 2.5$ dm, $b = 50$ cm
(7) $a = 5$ Hm, $b = 3$ Dm (9) $a = 6$ mm, $b = 3$ cm

La razón directa es el cociente $r = a/b$ mientras que la razón inversa o recíproca es el cociente $b/a = (a/b)^{-1} = r^{-1}$. De este modo se obtienen los siguientes valores numéricos:

$$(1)\quad r = \frac{a}{b} = \frac{18\text{ m}}{24\text{ m}} = \frac{3(6)}{4(6)} = \frac{3}{4} = 0.75 \qquad \text{y} \qquad r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$(3)\quad r = \frac{a}{b} = \frac{25\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{25}{5} = 5 \qquad \text{y} \qquad r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$(5)\quad r = \frac{a}{b} = \frac{2.5\text{ dm}}{50\text{ cm}} = \frac{25\text{ cm}}{50\text{ cm}} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \text{y} \qquad r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$(7)\quad r = \frac{a}{b} = \frac{5\text{ Hm}}{3\text{ Dm}} = \frac{500\text{ m}}{30\text{ m}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{3}{50}$$

$$(9)\quad r = \frac{a}{b} = \frac{6\text{ mm}}{3\text{ cm}} = \frac{6\text{ mm}}{30\text{ mm}} = \frac{1}{5} = 0.2 \qquad \text{y} \qquad r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

Hallar los dos segmentos sabiendo su suma (S) y su razón (r).

(11) $S = 6$, $r = 1/2$ (13) $S = 12$, $r = 1/2$ (15) $S = 40$, $r = 3/5$

Algebraicamente, $S = a + b$ mientras que $r = a/b$; consecuentemente, $b = a/r$ de modo que $S = a + a/r = a\,(1 + 1/r)$. Entonces, $a = S / (1 + r^{-1})$ por lo que se obtienen estos valores:

$$(11)\quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{6}{1+2} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 4$$

$$(13)\quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{12}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 8$$

$$(15)\quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{40}{1+\frac{5}{3}} = \frac{40}{\frac{8}{3}} = \frac{120}{8} = 15 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{15}{\left(\frac{3}{5}\right)} = 25$$

Alternativamente, como $S = a + b$ mientras que $r = a/b$; entonces, si $a = br$, $S = br + b = b\,(1 + r)$ de donde $b = S / (1 + r)$ y claramente se obtienen los mismos valores.

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar los dos segmentos sabiendo su diferencia (D) y su razón (r).

(17) $D = 24,\ r = 5$ (19) $D = 7,\ r = 2$

Algebraicamente, $D = a - b$ mientras que $r = a/b$; consecuentemente, $b = a/r$ de modo que $D = a - a/r = a(1 - 1/r)$. Entonces, $a = D / (1 - r^{-1})$ por lo que se obtienen estos valores:

(17) $$a = \frac{D}{1-r^{-1}} = \frac{24}{1-\frac{1}{5}} = \frac{24}{\frac{4}{5}} = 30 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{30}{5} = 6$$

(19) $$a = \frac{D}{1-r^{-1}} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{14}{2} = 7$$

Alternativamente, como $D = a - b$ mientras que $r = a/b$; entonces, si $a = br$, $D = br - b = b(1 - r)$ de donde $b = D / (1 - r)$ y claramente se obtienen los mismos valores.

Hallar la cuarta proporcional a los números a, b y c.

(21) $a = 2,\ b = 4,\ c = 8$ (23) $a = 4,\ b = 8,\ c = 10$ (25) $a = 6,\ b = 12,\ c = 3$

(21) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{entonces} \quad x = c\frac{b}{a} = 8\frac{4}{2} = 16$$

(23) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{entonces} \quad x = c\frac{b}{a} = 10\frac{8}{4} = 20$$

(25) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{entonces} \quad x = c\frac{b}{a} = 3\frac{12}{6} = 6$$

Hallar la tercera proporcional a los números a y b.

(27) $a = 2,\ b = 12$ (29) $a = 6,\ b = 30$

(27) $$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{entonces} \quad x = \frac{b^2}{a} = \frac{12^2}{2} = \frac{144}{2} = 72$$

(29) $$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{entonces} \quad x = \frac{b^2}{a} = \frac{30^2}{6} = \frac{900}{6} = 150$$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar la media proporcional a los números a y b.

(31) $a = 2,\ b = 4$ (33) $a = 4,\ b = 8$ (35) $a = 5,\ b = 10$

(31) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ de donde $x^2 = ab = (2)(4) \quad \therefore \quad x = \sqrt{2}\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

(33) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ de donde $x^2 = ab = (4)(8) \quad \therefore \quad x = \sqrt{4}\sqrt{8} = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

(35) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ de donde $x^2 = ab = (5)(10) \quad \therefore \quad x = \sqrt{5}\sqrt{10} = \sqrt{5}(\sqrt{5}\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$

Calcular los lados de un triángulo sabiendo su perímetro (P) y que los lados son proporcionales a los números dados.

(37) $P = 36$ y lados proporcionales a 3, 4, 5
(39) $P = 75$ y lados proporcionales a 3, 5, 7

Sean a, b y c los lados del triángulo cuyo perímetro P se conoce y sean a', b' y c' los números dados. Por hipótesis, los lados del triángulo son proporcionales a los números dados, entonces empleando la propiedad de las proporciones relativa a una serie de razones iguales (ver Art. 122, pág 90) se verifica que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{P}{a'+b'+c'} = r, \quad \text{entonces} \quad a = a'r, \quad b = b'r \quad \text{y} \quad c = c'r.$$

(37) $\frac{P}{a'+b'+c'} = \frac{36}{3+4+5} = \frac{36}{12} = 3 \quad \therefore \quad \begin{cases} a = a'r = (3)(3) = 9 \\ b = b'r = (4)(3) = 12 \\ c = c'r = (5)(3) = 15 \end{cases}$

(39) $\frac{P}{a'+b'+c'} = \frac{75}{3+5+7} = \frac{75}{15} = 5 \quad \therefore \quad \begin{cases} a = a'r = (3)(5) = 15 \\ b = b'r = (5)(5) = 25 \\ c = c'r = (7)(5) = 35 \end{cases}$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Calcular los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado mayor de los triángulos cuyos lados a, b y c miden:

(41) $a = 24,\ b = 32,\ c = 40$ (43) $a = 8,\ b = 10,\ c = 6$ (45) $a = 7,\ b = 3,\ c = 5$

En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos, x e y, proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá al lado de mayor longitud.

(41) $c > b > a \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ y $\frac{x+y}{x} = \frac{a+b}{a} = \frac{24+32}{24} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$ pero $x+y=c=40$

entonces $\frac{40}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{3\times 40}{7} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}}$, análogamente $\frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b} = \frac{24+32}{32} = \frac{56}{32} = \frac{7}{4}$

de donde $\frac{40}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{4\times 40}{7} = \frac{160}{7} = 22\frac{6}{7}}$; comprobación: $x+y = 17\frac{1}{7} + 22\frac{6}{7} = 40 = c$

(43) $b > a > c \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ y $\frac{x+y}{x} = \frac{c+a}{c} = \frac{6+8}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ pero $x+y=b=10$

entonces $\frac{10}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{3\times 10}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}}$, análogamente $\frac{x+y}{y} = \frac{c+a}{a} = \frac{6+8}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

de donde $\frac{10}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{4\times 10}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}}$; comprobación: $x+y = 4\frac{2}{7} + 5\frac{5}{7} = 10 = b$

(45) $a > c > b \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ y $\frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b} = \frac{3+5}{3} = \frac{8}{3}$ pero $x+y=a=7$

entonces $\frac{7}{x} = \frac{8}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{3\times 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}}$, análogamente $\frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{b} = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5}$

de donde $\frac{7}{y} = \frac{8}{5} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{5\times 7}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}}$; comprobación: $x+y = 2\frac{5}{8} + 4\frac{3}{8} = 7 = a$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

En cada uno de los triángulos siguientes, de lados *a*, *b* y *c*, calcular los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado menor:

(47) $a = 8,\ b = 12,\ c = 16$ (49) $a = 6,\ b = 12,\ c = 10$

En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos, x e y, proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá al lado de menor longitud.

(47) $a < b < c \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ y $\frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b} = \frac{12+16}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$ pero $x + y = a = 8$

entonces $\frac{8}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{3\times 8}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}}$, análogamente $\frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c} = \frac{12+16}{16} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$

de donde $\frac{8}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{4\times 8}{7} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}}$; comprobación: $x + y = 3\frac{3}{7} + 4\frac{4}{7} = 8 = a$

(49) $a < c < b \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{b} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ y $\frac{x+y}{x} = \frac{c+b}{c} = \frac{10+12}{10} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$ pero $x + y = a = 6$

entonces $\frac{6}{x} = \frac{11}{5} \quad \therefore \quad \boxed{x = \frac{5\times 6}{11} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}}$, análogamente $\frac{x+y}{y} = \frac{c+b}{b} = \frac{10+12}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

de donde $\frac{6}{y} = \frac{11}{6} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{6\times 6}{11} = \frac{36}{11} = 3\frac{3}{11}}$; comprobación: $x + y = 2\frac{8}{11} + 3\frac{3}{11} = 6 = a$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

(51) Los lados de un triángulo miden $a = 24$, $b = 10$, $c = 18$. Calcular los segmentos determinados por cada bisectriz sobre el lado opuesto.

En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos, x e y, proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá a cada lado del triángulo.

sobre el lado a: $\frac{x}{y}=\frac{b}{c}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ y $\frac{x+y}{x}=\frac{b+c}{b}=\frac{10+18}{10}=\frac{28}{10}=\frac{14}{5}$ pero $x+y=a=24$

entonces $\frac{24}{x}=\frac{14}{5}$ $\therefore$ $x=\frac{5\times 24}{14}=\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}$, análogamente $\frac{x+y}{y}=\frac{b+c}{b}=\frac{10+18}{18}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}$

de donde $\frac{24}{y}=\frac{14}{9}$ $\therefore$ $y=\frac{9\times 24}{14}=\frac{108}{7}=15\frac{3}{7}$; comprobación: $x+y=8\frac{4}{7}+15\frac{3}{7}=24=a$

sobre el lado b: $\frac{x}{y}=\frac{c}{a}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ y $\frac{x+y}{x}=\frac{c+a}{c}=\frac{18+24}{18}=\frac{42}{18}=\frac{7}{3}$ pero $x+y=b=10$

entonces $\frac{10}{x}=\frac{7}{3}$ $\therefore$ $x=\frac{3\times 10}{7}=\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$, análogamente $\frac{x+y}{y}=\frac{c+a}{a}=\frac{18+24}{24}=\frac{42}{24}=\frac{7}{4}$

de donde $\frac{10}{y}=\frac{7}{4}$ $\therefore$ $y=\frac{4\times 10}{7}=\frac{40}{7}=5\frac{5}{7}$; comprobación: $x+y=4\frac{2}{7}+5\frac{5}{7}=10=b$

sobre el lado c: $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ y $\frac{x+y}{x}=\frac{b+a}{b}=\frac{10+24}{10}=\frac{34}{10}=\frac{17}{5}$ pero $x+y=c=18$

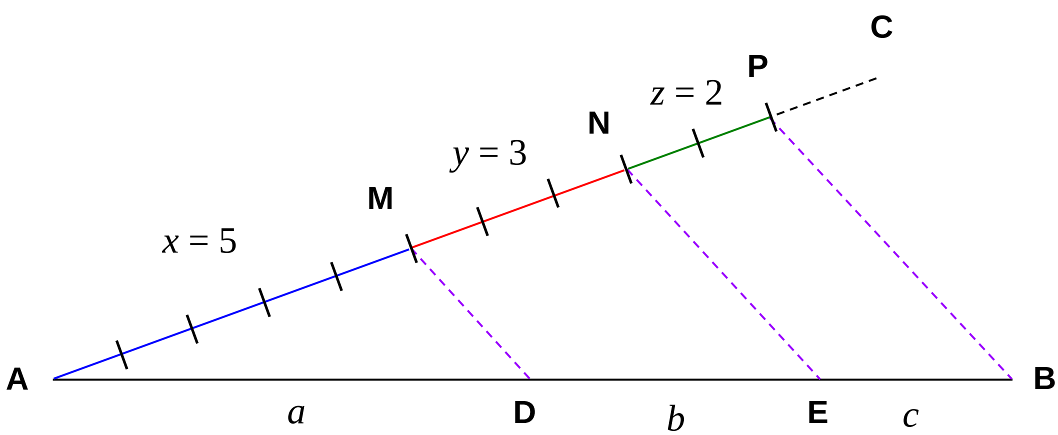
entonces $\frac{18}{x}=\frac{17}{5}$ $\therefore$ $x=\frac{5\times 18}{17}=\frac{90}{17}=5\frac{5}{17}$, análogamente $\frac{x+y}{y}=\frac{b+a}{a}=\frac{10+24}{24}=\frac{34}{24}=\frac{17}{12}$

de donde $\frac{18}{y}=\frac{17}{12}$ $\therefore$ $y=\frac{12\times 18}{17}=\frac{216}{17}=12\frac{12}{7}$; comprobación: $x+y=5\frac{5}{17}+12\frac{12}{17}=18=c$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Dividir gráficamente en partes proporcionales a 2, 3 y 5: (53) Un segmento de 5 pulgadas.



La construcción gráfica consiste en formar el ángulo BAC de cuyo vértice A se traza la semirrecta AC sobre la cual se llevan 2 + 3 + 5 = 10 *divisiones iguales cualesquiera, en particular se emplea como unidad* 1 cm. *El segmento AB (dado) tiene una longitud de* 5 plg x 2.54 cm/plg = 12.7 cm, *al cual se une el extremo P del número* z = 2 = *NP con el extremo B formando el segmento PB. Luego se trazan paralelas a PB en los puntos extremos N y M correspondientes a los números dados* y = 3 = *MN y* x = 5 = *AM y que cortan al segmento AB respectivamente en E y D. Los segmentos a = AD, b = DE y c = EB, así determinados, son proporcionales a los números dados x, y, z. Algebraicamente,*

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{12.7}{5+3+2}=1.27=r\,,\quad \text{entonces}\quad \begin{cases} a=\overline{AD}=xr=5\times 1.27=6.35\text{ cm}\\ b=\overline{DE}=yr=3\times 1.27=3.81\text{ cm}\\ c=\overline{EB}=zr=2\times 1.27=2.54\text{ cm}\end{cases}$$

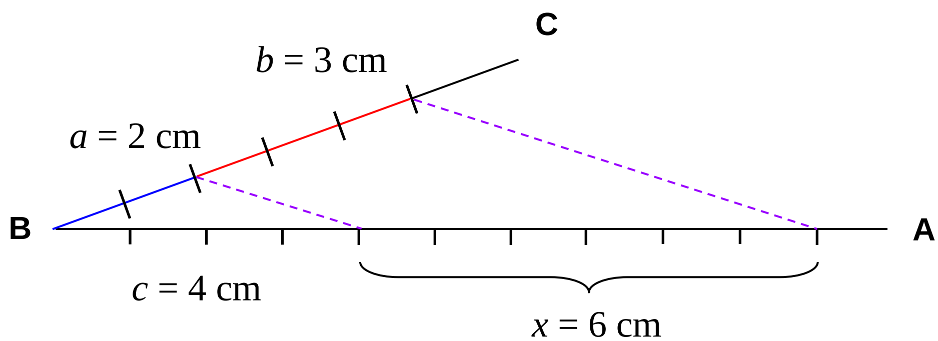
se comprueba que $a+b+c=\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=6.35+3.81+2.54=12.7=\overline{AB}$

y en pulgadas, $a=\dfrac{6.35}{2.54}=2.5$ plg., $b=\dfrac{3.81}{2.54}=1.5$ plg., y $c=\dfrac{2.54}{2.54}=1$ plg.

Segmentos proporcionales
Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

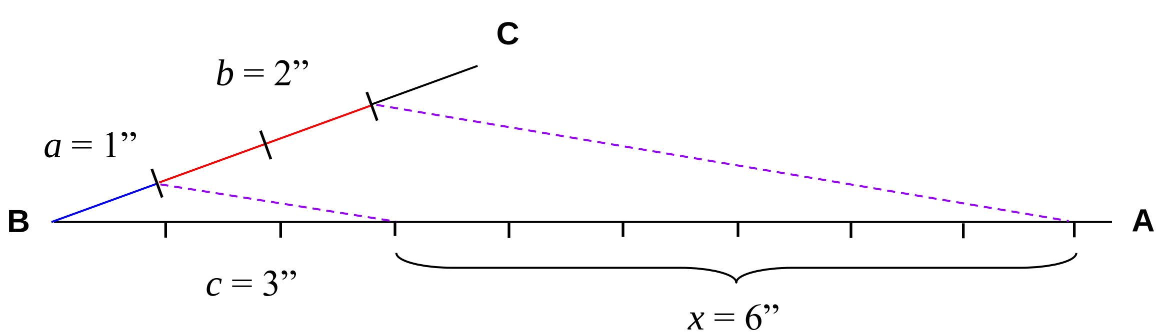
Hallar gráficamente la cuarta proporcional a segmentos que miden:

(55) 2, 3 y 4 cm (57) 1, 2 y 3 pulgadas



(55) *La construcción gráfica consiste en formar el ángulo ABC de cuyo vértice B se traza la semirrecta BC sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos* $a = 2$ cm *y* $b = 3$ cm. *Luego, sobre la semirrecta BA se coloca, partiendo de B, el segmento* $c = 4$ cm *y se une el extremos de a con el extremo de c. Finalmente, se traza en el extremo de b una paralela al segmento ac que corte BA formando así el segmento* $x = 6$ cm *que es cuarta proporcional de los segmentos dados a, b y c. Algebraicamente,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{2\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{c}{x}.$$



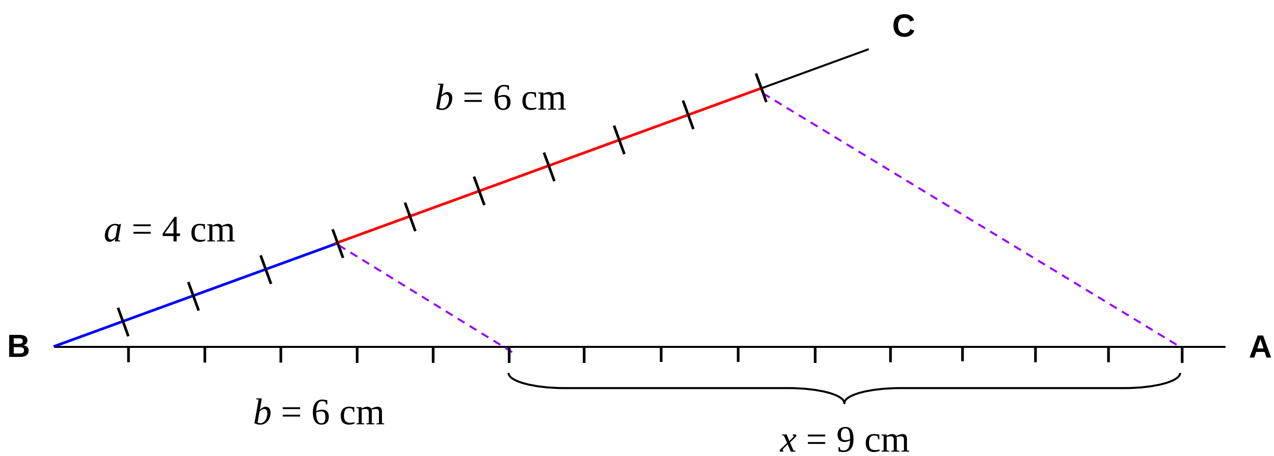
(57) *La construcción gráfica es similar a la anterior considerando que* $a = 1''$ (plg) *y* $b = 2''$. *El segmento* $c = 3''$ *se lleva sobre BA y el segmento* $x = 6''$ *es la cuarta proporcional de los segmentos dados a, b y c. Algebraicamente,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{1''}{2''} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3''}{6''} = \frac{c}{x}.$$

Segmentos proporcionales

Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar gráficamente la tercera proporcional a segmentos que miden: (59) 4 y 6 cm



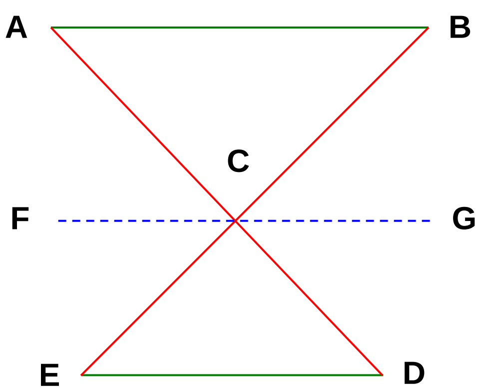
La construcción gráfica consiste en formar el ángulo ABC de cuyo vértice B se traza la semirrecta BC sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos a = 4 cm *y* b = 6 cm. *Luego, sobre la semirrecta BA se coloca, partiendo de B, el segmento* b = 6 cm *y se unen los extremos de a con b (sobre BA). Finalmente, se traza en el extremo de b una paralela al segmento ab que corte BA formando así el segmento x que es tercera proporcional de los segmentos dados. Aritméticamente,*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{2}{3} = \frac{6\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{b}{x}.$$

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

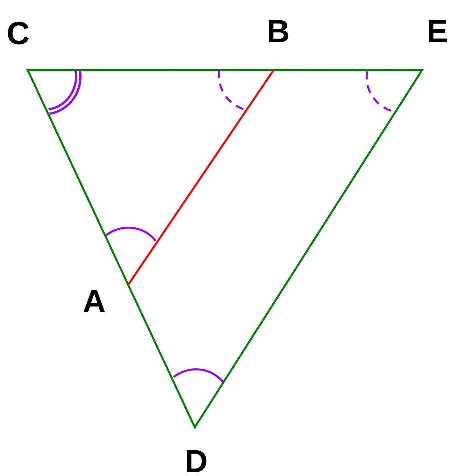
(1) Si $AB \parallel ED$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ECD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos. *Como construcción auxiliar se traza la recta FG, que pasa por el vértice C común a ambos triángulos, y que sea paralela a AB (y a ED por transitividad). Así,*



considerando AD y BE como segmentos de rectas transversales que cortan a las paralelas AB, ED (hipótesis) y FG (construcción auxiliar), se sigue, por el Teorema de Tales, que los segmentos determinados en ellas se corresponden proporcionalmente. Es decir, AC : CD = BC : CE. Además, al ser C vértice común, el ángulo ACB es igual al ángulo ECD. En consecuencia, $\Delta ABC \sim \Delta ECD$ *ya que tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido (2do caso, Teorema 36, pág. 109). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\,.$$

(3) Si $AB \parallel DE$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DCE$. Si $AC = 3$, $AD = 2$ y $AB = 4$; calcular DE.



Al ser C vértice común a ambos triángulos, el ángulo ACB es igual al ángulo DCE. Además, siendo $AB \parallel DE$, *y considerando la recta CD como secante que corta a AB y DE, entonces* $\angle A = \angle D$ *. Análogamente considerando la recta CE como secante que corta a AB y DE, entonces* $\angle B = \angle E$ *. En consecuencia,* $\Delta ABC \sim \Delta DCE$ *ya que tienen dos ángulos respectivamente iguales (1er caso, Teorema 35, pág. 109). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por*

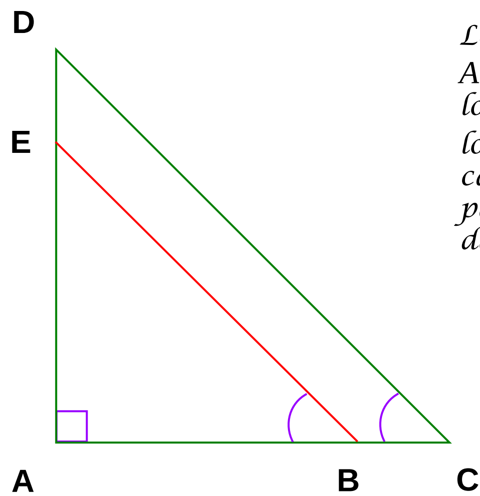
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \quad \text{de donde} \quad \overline{DE} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB}\,, \quad \text{entonces}$$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AC} + \overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{3+2}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} = 6.67$$

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

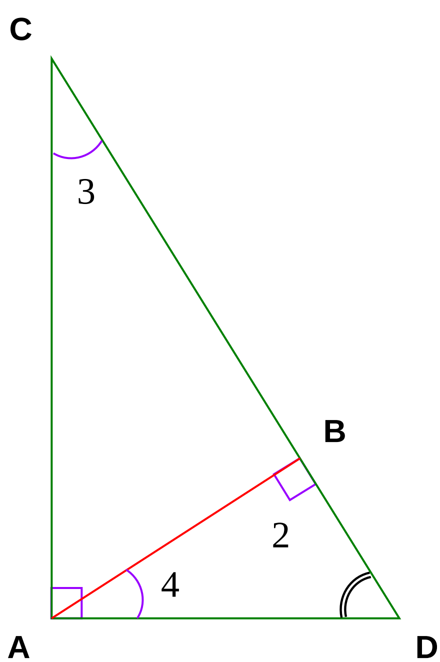
(5) El ángulo A es recto y el ángulo B es igual al ángulo C. Demostrar que $\Delta\, ABE \sim \Delta\, ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.



Los triángulos dados son rectángulos ya que el ángulo A es recto. Además, por hipótesis $\angle B = \angle C$ *de modo que los dos triángulos tienen un ángulo agudo igual y, por lo tanto* $\Delta\, ABE \sim \Delta\, ACD$ *ya que corresponde al primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

(7) Si $CA \perp AD$ y $AB \perp CD$, demostrar que $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos



Por ser ambos triángulos rectángulos ya que

$$\angle A = R \text{ en } \Delta\, ACD \quad \text{y} \quad \angle 2 = R \text{ en } \Delta\, ABD,$$

y el hecho que comparten el mismo ángulo agudo D, se sigue por el primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112) que $\Delta\, ACD \sim \Delta\, ABD$.

Además, se tiene que los ángulos $ACD = 3$ *y* $DAB = 4$ *tienen lados mutuamente perpendiculares (hipótesis) y por lo tanto son iguales, es decir,* $\angle 3 = \angle 4$ *(recuérdese el Teorema 15 sobre ángulos con lados perpendiculares, pág. 49). Así, la proporcionalidad entre lados homólogos se determina del siguiente modo*

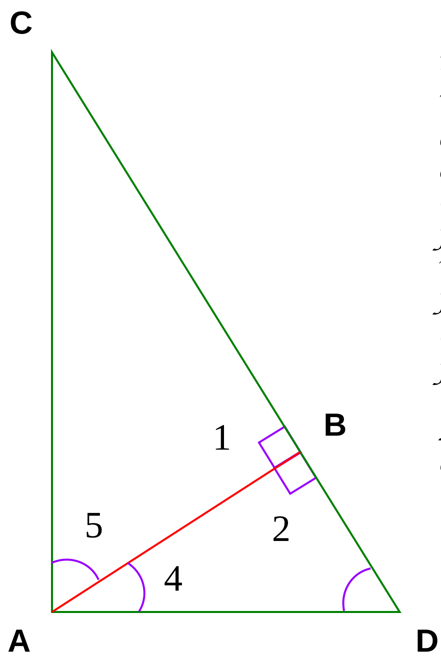
$$\frac{\angle A}{\angle 2} = \frac{\angle C}{\angle 4} = \frac{\angle D}{\angle D} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

obsérvese que se ha empleado el criterio sugerido en el Art. 143, pág. 106, para establecer la proporcionalidad de los lados. En este caso, el ángulo A es distinto en cada triángulo rectángulo.

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

(9) Si el ángulo A es recto y $AB \perp CD$ demostrar que $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ABC$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

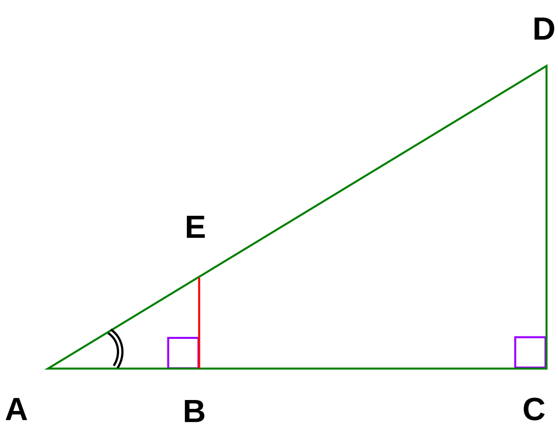


Por hipótesis, A es un ángulo recto. Entonces, $AC \perp AD$ y como $AB \perp CD$ (segunda hipótesis), resulta que los ángulos CAB = 5 y ADB tienen lados mutuamente perpendiculares y por lo tanto son iguales, es decir, $\angle 5 = \angle D$ (recuérdese el Teorema 15 sobre ángulos con lados perpendiculares, pág. 49). Entonces por ser triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual, se aplica el primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112). Por tanto, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ABD$. De donde, por semejanza, $\angle C = \angle 4$.

La proporcionalidad entre los lados homólogos se determina empleando el criterio sugerido en el Art. 143, pág. 106. Así,

$$\frac{\angle 1}{\angle 2} = \frac{\angle C}{\angle 4} = \frac{\angle 5}{\angle D} \quad \text{entonces} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{AD}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{BD}}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{\overline{AB}}}\,.$$

(11) Si $EB \parallel CD$ y $AB = 2$ m; $BC = 18$ m y $BE = 3$ m; calcular CD.



Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B = \angle C = R$, y tener un ángulo agudo igual (A). Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{\overline{AE}}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{\overline{BE}}} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{\overline{BE}}}$$

entonces,

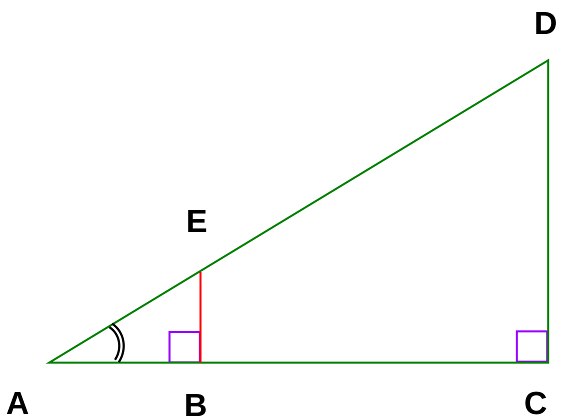
$$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{\overline{AB}}} \cdot \overline{BE} = \frac{2+18}{2} \cdot 3 = 30 \text{ m.}$$

Interpretación: conociendo, e.g., la longitud AB de la sombra proyectada por un poste de altura BE y la longitud AC de la sombra proyectada por la punta de un árbol se determina la altura CD del árbol, por la proporcionalidad de lados correspondientes en triángulos semejantes.

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

(13) Si $EB \parallel CD$ y $AB = 9$ m; $EB = 6$ m y $CD = 80$ m; calcular BC.



Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B = \angle C = R$, *y tener un ángulo agudo igual* (A). *Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$$

entonces,

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} = \frac{80}{6} \cdot 9 - 9 = 111 \text{ m.}$$

Interpretación: conociendo, e.g., la longitud AB de la sombra proyectada sobre la cubierta de un barco producida por un mástil de altura BE, al ser iluminado por la luz del faro y la altura CD de éste sobre el nivel del mar, se determina la distancia BC que hay del barco al faro (o a la costa aproximadamente), empleando la proporcionalidad de lados correspondientes en triángulos semejantes.

En este ejercicio así como en el anterior (11), *está implícita la aplicación del Teorema 34 (pág. 106) relativo a la existencia de triángulos semejantes ya que por hipótesis, en ambos ejercicios, EB || CD, y en consecuencia dicha paralela al lado CD forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero.*

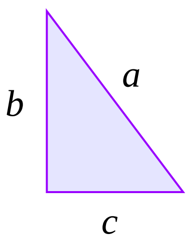
Relaciones métricas en los triángulos

Capítulo 11. Ejercicios Resueltos (pp. 125 – 127)

Si a es la hipotenusa y b, c son los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta:

(1) $b = 10$ cm, $c = 6$ cm (3) $a = 32$ m, $c = 12$ m (5) $a = 100$ Km, $b = 80$ Km.

Para resolver (1) *se emplea el Corolario 1 al Teorema de Pitágoras (pág. 121) y para resolver* (3) y (5) *se emplea el Corolario 2 al Teorema de Pitágoras (pág. 121).*



(1) $a^2 = b^2 + c^2 = 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136 = (4)(34) \quad \therefore \quad a = 2\sqrt{34}$ cm

(3) $b^2 = a^2 - c^2 = 32^2 + 12^2 = 1024 - 144 = 880 = (16)(55) \quad \therefore \quad b = 4\sqrt{55}$ m

(5) $c^2 = a^2 - b^2 = 100^2 - 80^2 = 10000 - 6400 = 3600 = (36)(100) \quad \therefore \quad c = 60$ Km.

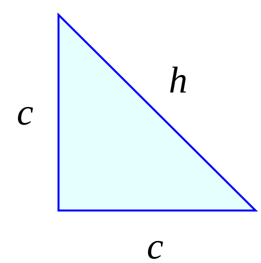
Hallar la hipotenusa (h) de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que el valor del cateto es:

(7) $c = 6$ m (9) $c = 9$ cm.

Para resolver (7) y (9) *se emplea el Corolario 1 al Teorema de Pitágoras (pág. 121) con la hipótesis adicional de que el triángulo rectángulo es isósceles de modo que ambos catetos son iguales. Así,*

(7) $h^2 = 2c^2$ entonces $h = c\sqrt{2} \quad \therefore \quad h = 6\sqrt{2}$ m

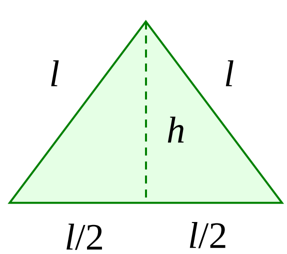
(9) $h^2 = 2c^2$ entonces $h = c\sqrt{2} \quad \therefore \quad h = 9\sqrt{2}$ cm.



Hallar la altura (h) de un triángulo equilátero sabiendo que el lado vale:

(11) $l = 12$ cm (13) $l = 4$ cm (15) $l = 30$ m.

Para resolver estos ejercicios se emplea el Corolario 2 al Teorema de Pitágoras (pág. 121) aplicado a cualquiera de los dos triángulos rectángulos iguales que resultan al dividir el triángulo equilátero mediante su altura. La hipotenusa tiene longitud l *y el cateto en la base mide* l/2. *Así,*



(11) $h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$ entonces $h = \frac{l}{2}\sqrt{3} \quad \therefore \quad h = 6\sqrt{3}$ cm

(13) $h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$ entonces $h = \frac{l}{2}\sqrt{3} \quad \therefore \quad h = 2\sqrt{3}$ cm

(15) $h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$ entonces $h = \frac{l}{2}\sqrt{3} \quad \therefore \quad h = 15\sqrt{3}$ m.

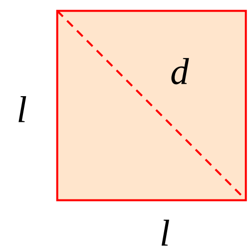
Relaciones métricas en los triángulos

Capítulo 11. Ejercicios Resueltos (pp. 125 – 127)

Hallar la diagonal (d) de un cuadrado cuyo lado vale:

(17) $l = 5$ m (19) $l = 9$ cm.

Para resolver estos ejercicios se emplea el Corolario 1 al Teorema de Pitágoras (pág. 121) aplicado a cualquiera de los dos triángulos iguales que son rectángulos e isósceles que se forman por la diagonal del cuadrado. Esta última corresponde a la hipotenusa que se desea encontrar y los catetos corresponden a un par de lados del cuadrado de la misma longitud l*. De esta manera,*



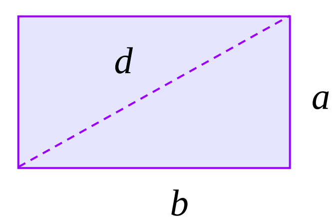
(17) $d^2 = 2l^2$ entonces $d = l\sqrt{2}$ $\therefore$ $d = 5\sqrt{2}$ m

(19) $d^2 = 2l^2$ entonces $d = l\sqrt{2}$ $\therefore$ $d = 9\sqrt{2}$ cm.

Hallar la diagonal (d) de un rectángulo sabiendo que los lados a y b miden lo que se indica:

(21) $a = 2$ m, $b = 4$ m (23) $a = 5$ m, $b = 6$ m (25) $a = 10$ m, $b = 12$ m.

Para resolver estos ejercicios se emplea el Corolario 1 al Teorema de Pitágoras (pág. 121) aplicado a cualquiera de los dos triángulos rectángulos iguales que se forman por la diagonal del rectángulo. Esta última corresponde a la hipotenusa que se desea encontrar y los catetos corresponden al par de lados dados con longitudes a *y* b*. De este modo,*



(21) $d^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$ $\therefore$ $d = 2\sqrt{5}$ m

(23) $d^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ $\therefore$ $d = \sqrt{61}$ m

(25) $d^2 = a^2 + b^2 = 10^2 + 12^2 = 100 + 144 = 244 = 4(61)$ $\therefore$ $d = 2\sqrt{61}$ m.

(27) Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números pares consecutivos.

Considerando que un número par positivo es de la forma 2k siendo k un entero > 0*, los lados del triángulo rectángulo requerido tienen los valores* $a = 2k$, $b = a + 2$ y $c = b + 2$, *donde c es la hipotenusa. Del Teorema de Pitágoras (Teorema 39, pág. 120) resulta que*

$$a^2 + b^2 = (2k)^2 + (a+2)^2 = 4k^2 + a^2 + 4a + 4 = 4k^2 + 4k^2 + 4(2k) + 4 = 8k^2 + 8k + 4$$

$$= c^2 = (b+2)^2 = (a+2+2)^2 = (a+4)^2 = a^2 + 8a + 16 = 4k^2 + 16k + 16$$

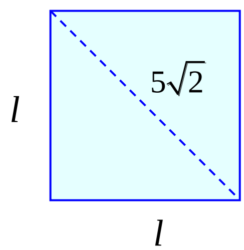
entonces, $4k^2 - 8k - 12 = 0$, equivalentemente $k^2 - 2k - 3 = 0 = (k+1)(k-3)$.

De la ecuación cuadrática factorizada, las soluciones son $k = -1$ *y* $k = 3$. *La primera solución se descarta por ser negativa, y la segunda es el valor buscado de k. Entonces, los lados del triángulo rectángulo valen:* $a = 2(3) = 6$, $b = a + 2 = 8$ y $c = b + 2 = 10$.

Relaciones métricas en los triángulos

Capítulo 11. Ejercicios Resueltos (pp. 125 – 127)

(29) La diagonal de un cuadrado vale $5\sqrt{2}$ m. Hallar el lado del cuadrado.



$$d^2 = 2l^2 \quad \text{entonces} \quad l = \frac{\sqrt{2}d}{2} \quad \therefore \quad l = \frac{\sqrt{2}(5\sqrt{2})}{2} = 5 \text{ m.}$$

Clasificar los triángulos cuyos lados a, b y c, valen:

(31) $a = 5$ m, $b = 4$ m, $c = 2$ m

(33) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 25$ cm

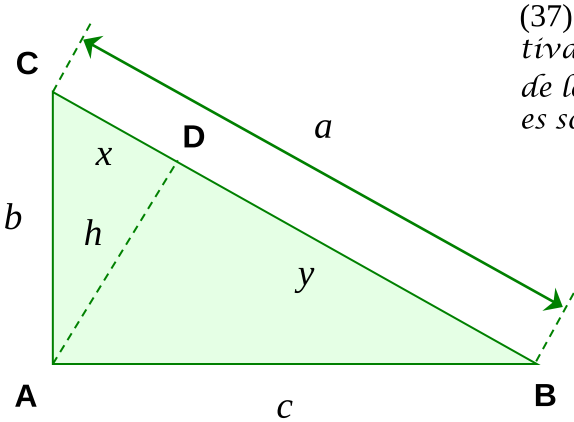
(35) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m.

(31) $a^2 = 25, \quad b^2 + c^2 = 16 + 4 = 20, \quad a^2 = 25 > 20 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad \Delta$ es obtusángulo

(33) $c^2 = 625, \quad a^2 + b^2 = 225 + 400 = 625, \quad c^2 = 625 = 625 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad \Delta$ es rectángulo

(35) $c^2 = 9, \quad a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5, \quad c^2 = 9 > 5 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad \Delta$ es obtusángulo

En la figura: (37) Si $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. Calcular h. (39) Si $a = 10$, $c = 8$. Calcular y.



(37) *Según la ecuación* (10) *del Art. 160 (pág. 125) relativa al cálculo de la altura de un triángulo en función de los lados y considerando que en este caso el lado* a *es sobre el cual se realiza la proyección se tiene*

$$h = \overline{AD} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{y} \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$\text{así,} \quad p = \frac{5+3+4}{2} = 6 \quad \text{y} \quad h = \frac{2}{5}\sqrt{6(6-5)(6-3)(6-4)}$$

$$\text{de donde,} \quad h = \frac{2\sqrt{6^2}}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

(39) *De acuerdo a la segunda expresión (ángulo agudo) dada en el Art. 159 (pág. 124) que permite calcular la proyección de un lado sobre otro, el valor de* y *queda determinado del modo siguiente (en la 3era igualdad se ha empleado el Teorema de Pitágoras correspondiente al cateto b)*

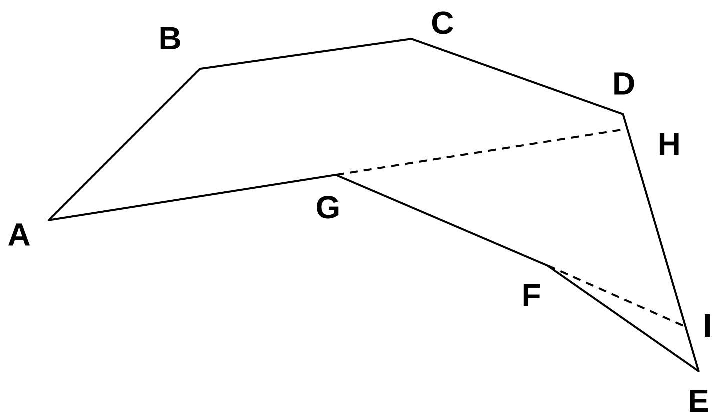
$$y = \text{Proy}_a\, c = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{c^2 + a^2 - (a^2 - c^2)}{2a} = \frac{c^2}{a} = \frac{64}{10} = 6.4$$

Ejemplo de Examen

Capítulos 1 a 11. Soluciones a los Problemas

1.- Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE} > \overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE}$.

Las hipótesis para resolver este problema son: ABCDE es una poligonal envolvente, AGFE es la poligonal envuelta, y A,E son los extremos comunes a ambas poligonales convexas. La construcción auxiliar consiste, en este caso, en prolongar AG hasta cortar DE en H y GF hasta cortar DE en I. Además, por suma de segmentos,



$$\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE}=\overline{DE}$$

Demostración: aplicando el postulado de la menor distancia entre dos puntos vemos que

en ABCDHG se tiene que $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH} > \overline{AG}+\overline{GH}$ (1)

en GHIF se obtiene $\overline{GH}+\overline{HI} > \overline{GF}+\overline{FI}$ (2)

análogamente, en FIE $\overline{FI}+\overline{IE} > \overline{FE}$ (3) *sumando* (1), (2) y (3)

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH})+(\overline{GH}+\overline{HI})+(\overline{FI}+\overline{IE}) > (\overline{AG}+\overline{GH})+(\overline{GF}+\overline{FI})+\overline{FE}$$ *equivalentemente*

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD})+(\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) > (\overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) \quad (4)$$

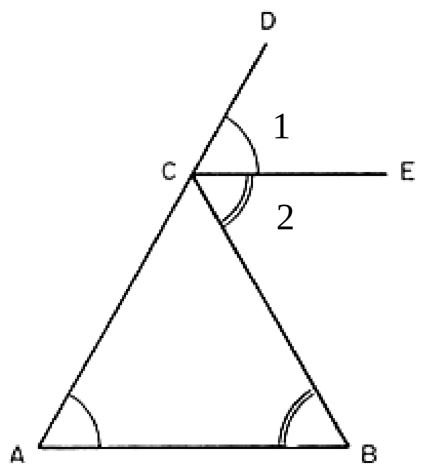
de donde, al aplicar suma de segmentos (ver hipótesis adicional) y simplificar el último término igual a ambos lados de la desigualdad (4), *queda demostrada la proposición dada.*

2.- Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento. *Sea x el ángulo buscado, por definición, su suplemento está dado por* $180^\circ - x$ *y según el planteamiento dado, se cumple que*

$$x=\frac{1}{2}(180^\circ - x) \quad \text{de donde} \quad 2x = 180^\circ - x$$

$$\text{entonces,} \quad 3x = 180^\circ \quad \text{y} \quad x=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ .$$

3.- Figura izquierda: la recta $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz del $\angle BCD$ y $\angle A = \angle B$. Demostrar que $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



La suma de los ángulos interiores en el $\Delta\, ABC$ está dada por

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \quad (1)$$

análogamente, los ángulos consecutivos formados sobre la recta AD suman dos rectos, es decir,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180° \quad (2)$$

por transitividad de (1) y (2) *se sigue que*

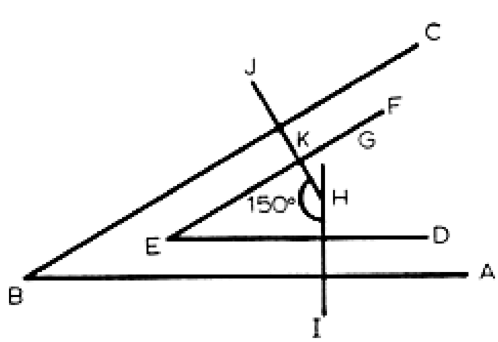
$$\angle A + \angle B = \angle 1 + \angle 2$$

Además, por hipótesis, $\angle A = \angle B$ y $\angle 1 = \angle 2$ *de modo que*

$$\angle A = \angle 1 \quad \text{y} \quad \angle B = \angle 2$$

Consecuentemente la recta secante AD forma ángulos correspondientes iguales con las rectas CE y AB, por tanto CE || AB (postulado de una secante). Equivalentemente, la recta secante BC forma ángulos alternos internos iguales con las rectas CE y AB, en consecuencia CE || AB (teorema recíproco).

4.- Figura derecha: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{HI} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{HK} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\angle JHI = 150°$. Hallar $\angle ABC$.



Por hipótesis, el ángulo agudo FED y el ángulo obtuso JHI tienen sus lados mutuamente perpendiculares, por lo tanto son suplementarios. Entonces,

$$\angle FED = 180° - \angle JHI = 180° - 150° = 30°$$

Por otra parte, los ángulos agudos FED y ABC son iguales por tener sus lados paralelos y orientados en el mismo sentido. Por tanto,

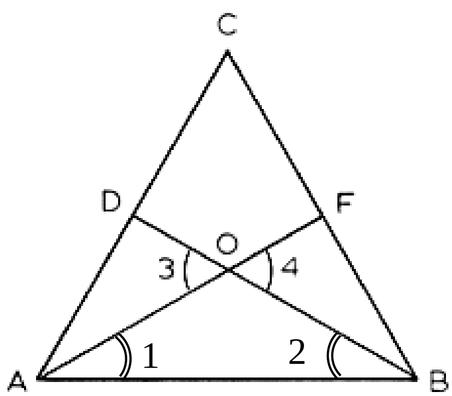
$$\angle ABC = \angle FED = 30°$$

5.- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 40° cada uno. ¿ Cuánto mide el ángulo opuesto a la base? *En un triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales y como la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a dos rectos, resulta que*

$\angle A + \angle B + \angle C = 2R = 180°$ entonces, $2\angle A + \angle C = 180°$, de donde

$\angle C = 180° - 2\angle A = 180° - 2 \times 40° = 180° - 80° = 100°$ (ángulo opuesto a la base)

6.- El ΔABC es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
Demostrar que, $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{DO} = \overline{FO}$ y $\angle 3 = \angle 4$.



Por ser el ΔABC isósceles, $AC = BC$. Siendo además D y F los puntos medios de los lados iguales, se tiene que $CF = CD$. Así, $\Delta ACF = \Delta BCD$ por tener dos lados iguales y el ángulo C comprendido entre ellos.

Por lo tanto, a los lados homólogos CF y CD se oponen ángulos iguales, es decir, $\angle CAF = \angle CBD$ y como por hipótesis ΔABC es isósceles, los ángulos en su base son iguales. De este modo,

$$\angle 1 = \angle A - \angle CAF = \angle B - \angle CBD = \angle 2 .$$

Consecuentemente, el ΔAOB es también isósceles y a ángulos iguales se oponen lados iguales, así $AO = BO$, y como, por hipótesis $AD = BF$, se deduce que $\Delta AOD = \Delta BOF$, por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos, ya que

$\angle DAO = \angle CAF = \angle CBD = \angle FBO$, de donde

los opuestos son iguales $\therefore$ $\overline{DO} = \overline{FO}$.

Finalmente, por ser ángulos exteriores al ΔAOB,

$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = \angle 4 .$$

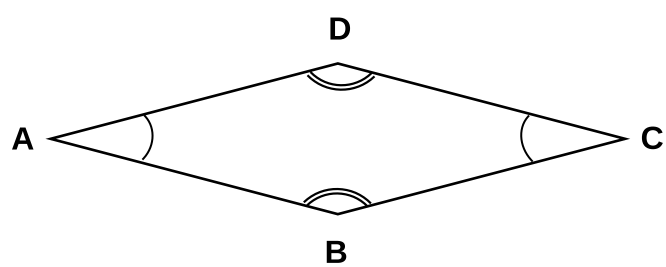
7.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 2340˚? *La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por*

$$S_i = 2R(n-2), \quad \text{entonces} \quad n = \frac{S_i}{2R} + 2 \quad \text{y al substituir,}$$

$$n = \frac{2340°}{180°} + 2 = 13 + 2 = 15$$

que resulta ser un polígono de 15 lados o pentedecágono.

8.- Un ángulo de un romboide mide 36˚. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos? *Por definición, un romboide tiene los ángulos contiguos desiguales y como todo romboide es un paralelogramo, estos ángulos son suplementarios. Así, de acuerdo a la figura mostrada, se obtienen*

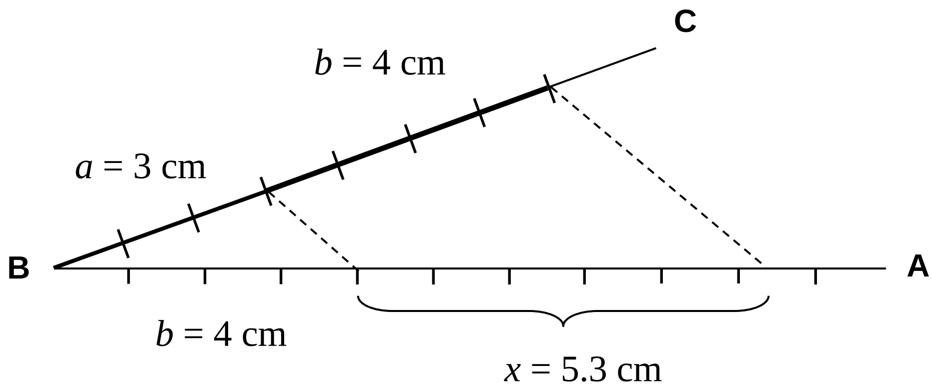


$$\angle A = 36° \;\; \text{(hipótesis)}$$
$$\angle B = 2R - \angle A = 180° - 36° = 144°$$
$$\angle C = 2R - \angle B = 180° - 144° = 36°$$
$$\angle D = 2R - \angle C = 180° - 36° = 144°$$

9.- Hallar gráficamente la longitud del segmento x que es la tercera proporcional a segmentos a y b que miden 3 cm y 4 cm, respectivamente.

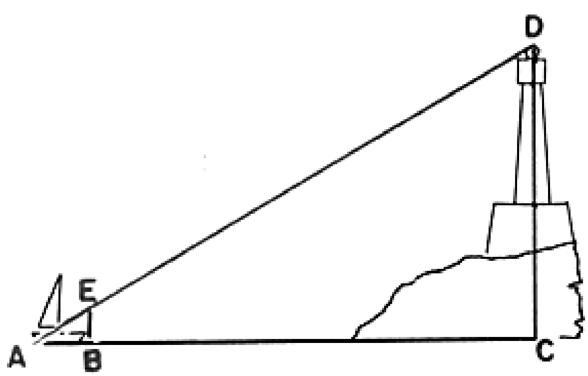
La construcción gráfica consiste en formar el ángulo ABC de cuyo vértice B se traza la semirrecta BC sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos a = 3 cm *y b* = 4 cm. *Luego, sobre la semirrecta BA se coloca, partiendo de B, el segmento b* = 4 cm *y se unen los extremos de a con b (sobre BA). Finalmente, se traza en el extremo de b una paralela al segmento ab que corte BA formando así el segmento x que es tercera proporcional de los segmentos dados. Aritméticamente,*

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b}=\frac{3}{4}=\frac{4}{x} \quad \therefore \quad x=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}\approx 5.3 \text{ cm.}$$



10.- Si $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overline{AB}=12$ m, $\overline{BE}=8$ m y $\overline{CD}=120$ m. Calcular $\overline{BC}$.

Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B=\angle C=R$, *y tener el ángulo agudo A igual. Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que*



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad \text{y por suma de segmentos}$$

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad \text{entonces,}$$

$$\overline{BC}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}\cdot\overline{AB}-\overline{AB}=\frac{120}{8}\cdot 12-12=168 \text{ m.}$$

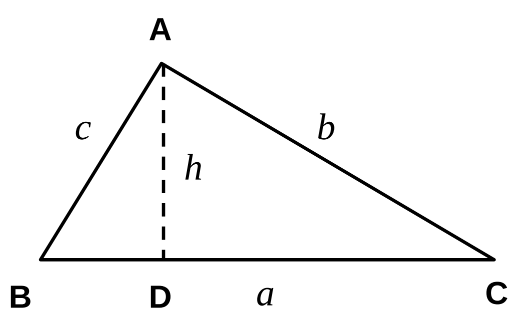
11.- Clasificar el triángulo cuyos lados miden: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 2$ cm. *Se escoge el lado mayor como opuesto al ángulo que clasifica al triángulo y los otros dos lados para ver si existe o no exceso o defecto entre el cuadrado del lado mayor y la suma de cuadrados de los otros dos lados (criterio basado en el Teorema de Pitágoras y sus generalizaciones). Así, como* $b > a$ *y* $b > c$, *se obtiene*

$$b^2 = 4^2 = 16, \quad a^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \quad \text{de modo que}$$

$$b^2 = 16 > 13 = a^2 + c^2 \quad \text{(exceso en el cuadrado del lado mayor)}$$

$\therefore$ el triángulo es obtusángulo.

12.- En el $\Delta\, ABC$ desarrollar una expresión algebraica para calcular la altura $h = \overline{AD}$ en función de los lados a, b y c, considerando que el ángulo B es agudo .



De la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD, se obtiene

$$h^2 = \overline{AD}^2 = c^2 - \overline{BD}^2 \qquad (1)$$

y por la generalización del Teorema de Pitágoras para la hipótesis de ángulo agudo, respecto del ángulo B (supuesto), vemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\ \text{proy}_a c = a^2 + c^2 - 2a \cdot \overline{BD}$$

$$\text{de donde} \quad \overline{BD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (2)$$

Substituyendo (2) *en* (1), *desarrollando algebraicamente y considerando que* $a + b + c = 2p$ *(semiperímetro), se obtiene*

$$h^2 = c^2 - \overline{BD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2a}\right) = \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2}$$

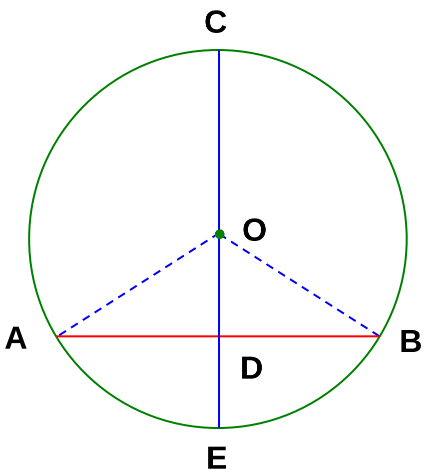
$$= \frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c) = \frac{1}{4a^2}(2p)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)$$

$$= \frac{16}{4a^2}\, p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \therefore \quad h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

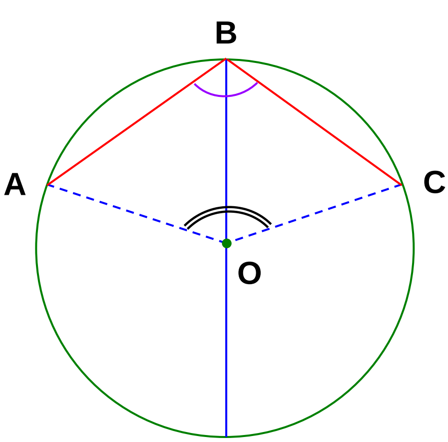
(1) Si $AD = DB$, demostrar que el arco AE es igual al arco EB. *Como construcción auxiliar se trazan los radios OA y OB formándose los triángulos rectángulos AOD y BOD que son iguales ya que tienen sus tres lados iguales, es decir, OA = OB (por ser radios de una misma circunferencia), OD es el lado común y, por hipótesis, AD = DB (igual base).*



Como $\Delta\, AOD = \Delta\, BOD$ y $\overline{AD} = \overline{DB}$ (hipótesis) se sigue que $\angle AOD = \angle BOD$ (opuestos a lados iguales) de donde $\frown AE = \frown EB$ (arcos correspondientes a ángulos centrales iguales).

Nótese que puede aplicarse directamente el Teorema 44 (pág. 134), que establece que todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y a los arcos subtendidos en partes iguales. En este caso CE es el diámetro (que pasa por O) y AB es la cuerda y se cumple la relación $CE \perp AB$.

(3) Si $AB = BC$, demostrar que el triángulo ABO es igual al triángulo CBO. *Como construcción auxiliar se trazan los radios OA y OC. Así los triángulos ABO y CBO tienen por lado común el segmento OB (igual al radio). Por hipótesis, AB = BC, de modo que al aplicar el Teorema recíproco (pág. 136, Art. 180), a cuerdas iguales corresponden arcos iguales. Consecuentemente, el arco AB es igual al arco CB y los ángulos centrales determinados por estos arcos también son iguales, es decir, ángulo central AOB = ángulo central COB.*



Por construcción, $\overline{OA} = \overline{OC}$ y $\overline{OB}$ es el lado común, además, $\angle AOB = \angle COB$ (demostrado)

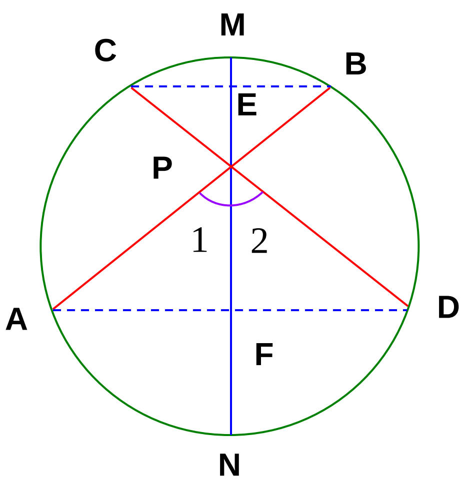
$\therefore$ $\Delta\, ABO = \Delta\, CBO$ (por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos).

En particular, como OA = OB y OC = OB, ambos triángulos son isósceles.

Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

(5) Si ángulo 1 = ángulo 2, demostrar que $AB = CD$.

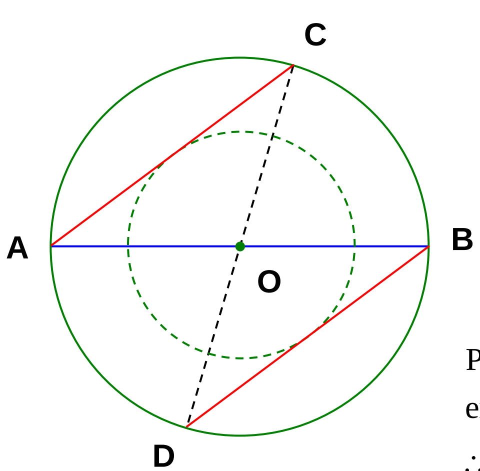


Como construcción auxiliar se unen los puntos C con B y A con D para formar los segmentos BC y AD cuya intersección con el diámetro MN corresponde a los puntos E y F. Además el punto donde concurren las secantes AB y CD se denota por P. De este modo, es inmediato ver que los triángulos rectángulos AFP y DFP son iguales, de donde AP = DP por ser hipotenusas homólogas de triángulos iguales. También, Δ CEP = Δ BEP, de donde CP = BP por la misma razón que antes. Finalmente por suma de segmentos, se tiene

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{PD} + \overline{CP} = \overline{CD}\,.$$

Obérvese que la hipótesis de que los ángulos 1 y 2 *son iguales se emplea para justificar que los triángulos rectángulos establecidos en la construcción auxiliar son iguales por tener un lado igual (común sobre MN) e iguales los ángulos adyacentes (agudo y recto).*

(7) Si $AC \parallel BD$ y O es el punto medio de AB, demostrar que $AC = BD$. *Al ser AC paralela a BD, puede aplicarse el Teorema 50 (pág. 144) el cual establece que los arcos comprendidos entre paralelas son iguales. Así, ∩ AD = ∩ BC, de donde*



$$\cap AC = \cap AB - \cap CB = \cap BA - \cap DA = \cap BD$$

por resta de arcos referida al diámetro $\overline{AB}$ $\therefore$ $\overline{AC} = \overline{BD}$

ya que a arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

De otra forma, se traza el diámetro CD como construcción auxiliar formándose los ángulos centrales AOC y BOD que son iguales por ser opuestos en el vértice O (centro de la circunferencia).

Por construcción, $\angle AOC = \angle BOD$ (ángulos centrales iguales)

entonces, $\cap AC = \cap BD$ (por igualdad de ángulos y arcos)

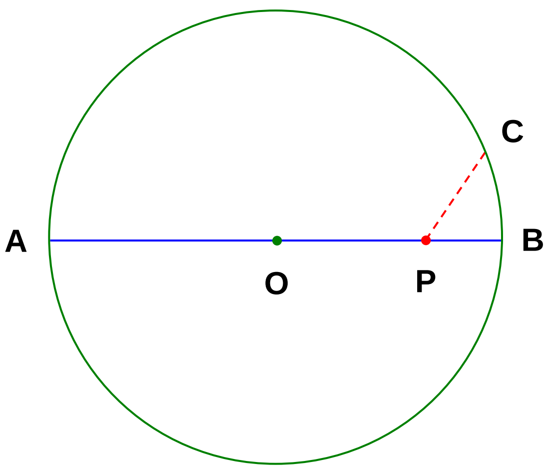
$\therefore$ $\overline{AC} = \overline{BD}$ (arcos iguales tienen cuerdas iguales).

En el último paso de cada argumentación se ha empleado el Teorema 45 (pág. 135) que establece las relaciones entre las cuerdas y arcos correspondientes para una circunferencia dada.

Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

(9) Un punto dista 2 cm del centro de una circunferencia de 6 cm de diámetro. Hallar la menor distancia del punto a la circunferencia.

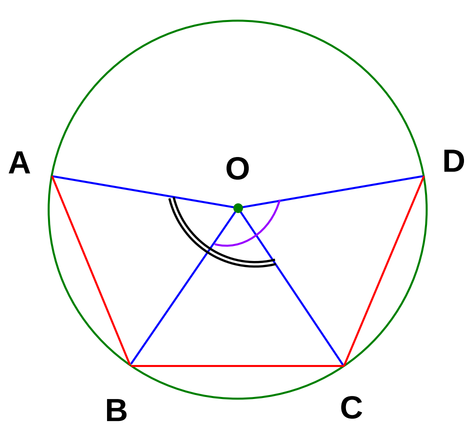


De acuerdo al Teorema 48 (pág. 139), la distancia mínima de un punto a una circunferencia es el menor de los segmentos de normal comprendidos entre ella y el punto.

De este modo, en la circunferencia O con diámetro (normal) es AB = 6 cm *y radio* OB = 3 cm, *el punto P es interior ya que* OP = 2 cm < OB. *Como PB < PC, la menor distancia del punto dado a la circunferencia está dada por*

$$d = \overline{PB} = \overline{OB} - \overline{OP} = 3 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 1 \text{ cm}.$$

(11) Si $AB = BC = CD$, demostrar que el ángulo AOC es igual al ángulo BOD. *Aplicando el Teorema recíproco (Art. 180, pág. 136) en el que cuerdas iguales determinan arcos iguales, se sigue que* $\cap AB = \cap BC = \cap CD$, *de donde, por suma de arcos (ver Art. 173, pág. 132):*



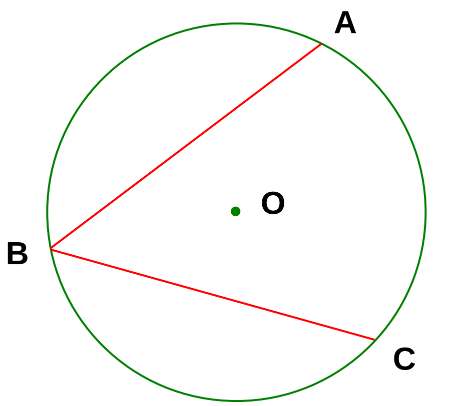
$$\cap AC = \cap AB + \cap BC = \cap BC + \cap CD = \cap BD$$

de donde $\angle AOC = \angle BOD$, ya que arcos iguales son subtendidos por ángulos centrales iguales.

Ángulos en la circunferencia

Capítulo 13. Ejercicios Resueltos (pp. 158 – 159)

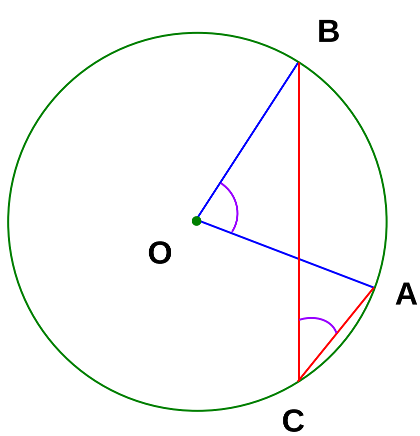
(1) Si el arco $AC = 100^\circ$, hallar el valor del ángulo ABC.



Por estar el vértice B en la circunferencia y por ser las semirrectas BA y BC secantes a la misma, el ángulo ABC es un ángulo inscrito (ver definición, Art. 200, pág. 150). Aplicando el Teorema 51 (pág. 151) relativo a la medida de un ángulo inscrito (2do Caso), se obtiene

$$\angle ABC = \angle B = \frac{\frown AC}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ .$$

(3) Si el ángulo $AOB = 80^\circ$, hallar el valor del ángulo ACB.



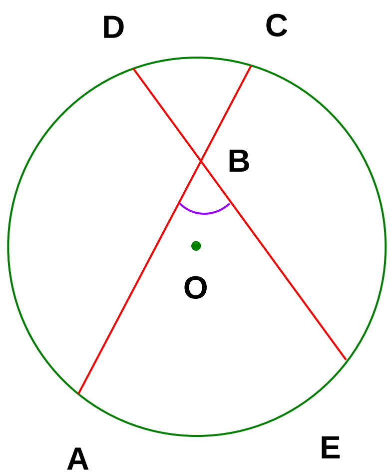
Por ser AOB un ángulo central, el arco AB mide 80°. Por otra parte, por estar el vértice C en la circunferencia y por ser las semirrectas CA y CB secantes a ella, el ángulo ACB es un ángulo inscrito (ver definición, Art. 200, pág. 150). Aplicando el Teorema 51 (pág. 151) relativo a la medida de un ángulo inscrito (3er Caso), se obtiene

$$\angle ACB = \angle C = \frac{\frown AB}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ .$$

Ángulos en la circunferencia

Capítulo 13. Ejercicios Resueltos (pp. 158 – 159)

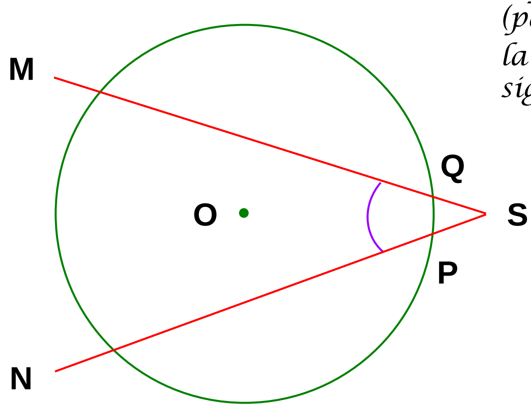
(5) Si el arco $DC = 40^\circ$ y el arco $AE = 80^\circ$, hallar el valor del ángulo ABE.



Por ser el vértice B un punto interior a la circunferencia, el ángulo B es un ángulo interior (ver definición, Art. 209, pág. 156). Aplicando el Teorema 54 (pág. 157) relativo a la medida de un ángulo interior, el valor del ángulo B está dado por

$$\angle B = \frac{\frown DC + \frown AE}{2} = \frac{40^\circ + 80^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ .$$

(7) Si el arco $PQ = 10^\circ$ y el ángulo $QSP = 40^\circ$, hallar el valor el valor del arco MN.



Por ser el vértice S un punto exterior a la circunferencia, el ángulo dado QSP es un ángulo exterior (ver definición, Art. 210, pág. 156). Aplicando el Teorema 55 (pág. 157) relativo a la medida de un ángulo exterior, la medida del arco MN se determina a partir de la siguiente ecuación

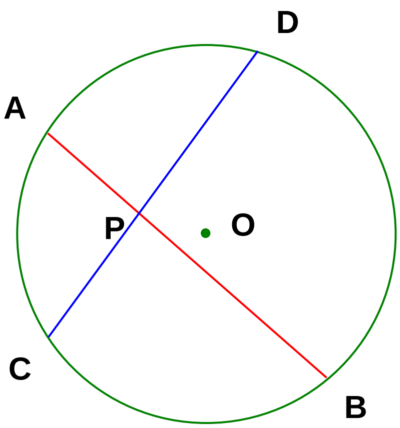
$$\angle S = \angle QSP = \frac{\frown MN - \frown PQ}{2} \quad \text{de donde}$$

$$\frown MN = 2\angle QSP + \frown PQ = 2(40^\circ) + 10^\circ = 90^\circ .$$

Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (1) a (5) emplear la siguiente figura:



(1) Si $AP = 3$, $PB = 5$ y $PC = 4$, hallar PD.

(3) Si $PB = 2\,AP$, $PC = 4$ y $CD = 12$, hallar AB.

(5) Si $CD = 15$, $PD = 6$ y $PB = 3\,PA$, hallar PA.

Estos ejercicios se resuelven considerando la relación entre las cuerdas establecida en el Teorema 56 (pág. 160): si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se cortan en P, entonces $PA \quad PB = PC \quad PD$ *. Aplicando esta relación se tiene:*

(1) $\overline{AP}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ de donde, $\overline{PD}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{3\times5}{4}=\dfrac{15}{4}=3.75$

(3) $\overline{AP}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ de donde, $\overline{PD}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{2(\overline{AP})^2}{4}=\dfrac{(\overline{AP})^2}{2}$

además, $\overline{PD}=\overline{CD}-\overline{PC}=12-4=8 \quad \therefore \quad (\overline{AP})^2=16 \quad \therefore \quad \overline{AP}=4$,

finalmente, $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=3\overline{AP}=12$.

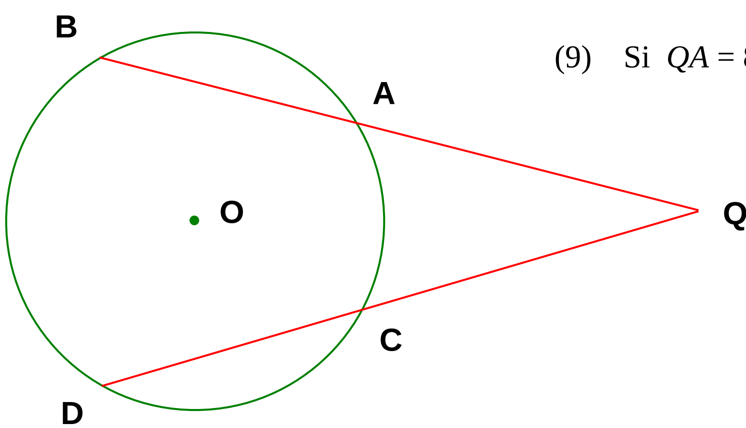
(5) como $\overline{PC}=\overline{CD}-\overline{PD}=15-6=9$ y $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

entonces, $\overline{PA}\times3\overline{PA}=9\times6$ de donde $(\overline{PA})^2=18$ y $\overline{PA}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (6) a (10) emplear la siguiente figura:



(7) Si $QB = 70$, $QA = 8$ y $QC = 6$, hallar QD.

(9) Si $QA = 8$, $AB = 12$ y $CD = 10$, hallar QC.

Estos ejercicios se resuelven considerando la relación entre las secantes establecida en el Teorema 57 (pág. 161): si por un punto exterior Q a una circunferencia, se trazan dos secantes QB y QD que la cortan, respectivamente, en A y en C, entonces QB QA = QD QC. Aplicando esta relación se obtiene:

(7) $\overline{QA}\times\overline{QB}=\overline{QC}\times\overline{QD}$ de donde, $\overline{QD}=\dfrac{\overline{QA}\times\overline{QB}}{\overline{QC}}=\dfrac{8\times 70}{6}=\dfrac{280}{3}=93\dfrac{1}{3}$

(9) como $\overline{QB}=\overline{QA}+\overline{AB}=8+12=20$ y $\overline{QD}=\overline{QC}+\overline{CD}=\overline{QC}+10$

entonces, $\overline{QA}\times\overline{QB}=8\times 20=\overline{QC}\times(\overline{QC}+10)$ de donde $(\overline{QC})^2+10\overline{QC}-160=0$

y resolviendo esta ecuación cuadrática, la raíz positiva es

$$\overline{QC}=\frac{-10+\sqrt{10^2+4(160)}}{2}=\frac{-10+\sqrt{100+640}}{2}=\frac{-10+\sqrt{740}}{2}=\frac{-10+27.2}{2}=8.6$$

Relaciones métricas en la circunferencia

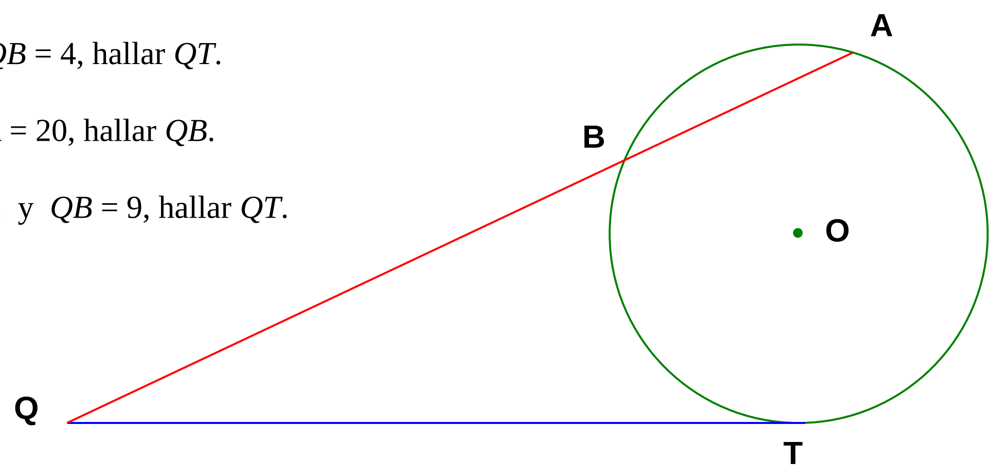
Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (11) a (15) emplear la siguiente figura:

(11) Si $QA = 9$ y $QB = 4$, hallar QT.

(13) Si $QT = 8$, $QA = 20$, hallar QB.

(15) Si $QT = QA / 2$ y $QB = 9$, hallar QT.



Estos ejercicios se resuelven considerando la propiedad de la tangente y la secante trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, establecida en el Teorema 58 (pág. 162): si por un punto exterior Q a una circunferencia, se trazan la tangente QT y la secante QA que la corta en B, entonces $QA : QT = QT : QB$. Usando esta relación se obtienen los siguientes resultados:

(11) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $(\overline{QT})^2 = \overline{QA} \times \overline{QB} = 9 \times 4 = 36 \quad \therefore \quad \overline{QT} = \sqrt{36} = 6$

(13) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $\overline{QB} = \dfrac{\overline{QT} \times \overline{QT}}{\overline{QA}} = \dfrac{8 \times 8}{20} = \dfrac{64}{20} = 3.2$

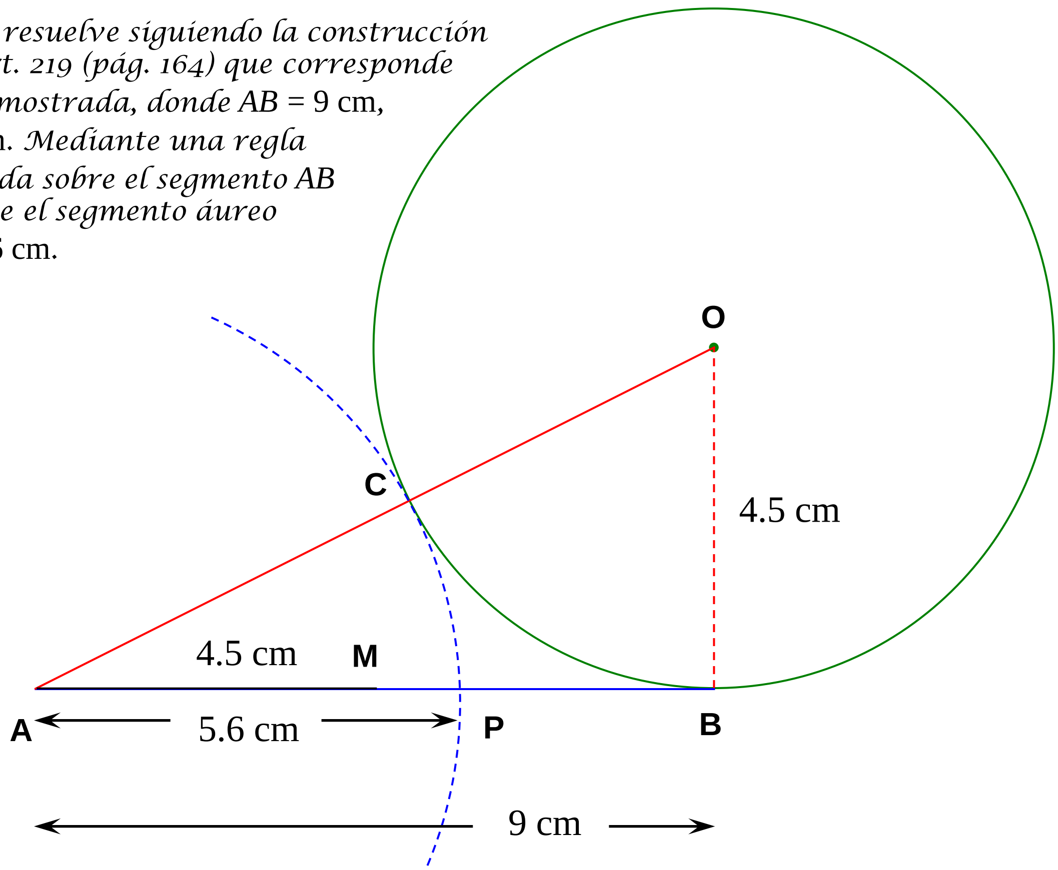
(15) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $\dfrac{\overline{QA}}{\left(\dfrac{\overline{QA}}{2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{\overline{QA}}{2}\right)}{9}$ entonces $\overline{QA} = 36 \quad \therefore \quad \overline{QT} = \dfrac{\overline{QA}}{2} = 18$.

Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

(16) Hallar gráficamente el segmento áureo de un segmento de 9 cm.
(17) Comprobarlo efectuando la medida.

El ejercicio 16 *se resuelve siguiendo la construcción descrita en el Art. 219 (pág. 164) que corresponde aquí a la figura mostrada, donde* AB = 9 cm, $OB = AM$ = 4.5 cm. *Mediante una regla graduada colocada sobre el segmento* AB *se comprueba que el segmento áureo* $AP = AC$ *mide* 5.6 cm.



(19) Hallar algebraicamente el segmento áureo de un segmento de 30 cm.

Recuérdese que el segmento áureo surge de dividir un segmento AB *en media y extrema razón, que consiste en determinar dos segmentos* AP *y* PB *tales que* $AB : AP = AP : PB$. *Según el desarrollo algebraico realizado en el Art. 217 (pág. 163), el segmento áureo* $AP = x$, *correspondiente al segmento* $AB = a$, *se calcula como sigue*

$$x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0.618a \quad \therefore \quad x = 0.618 \times 30\text{ cm} = 18.54 \approx 18.6\text{ cm}$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Ejercicios Resueltos (pp. 184 – 185)

(1) Calcular la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 m de radio, si el lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$ m (aproximadamente, 4.24 m).

fórmula de la apotema, $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$;

lado del cuadrado, $l_4 = 3\sqrt{2}$ m, $r = 3$ m y $n = 4$ entonces,

$$a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(3)^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36-18} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\text{ m} \simeq 2.12\text{ m.}$$

(3) Sabiendo que el lado del octágono regular inscrito en una circunferencia de 6 m de radio vale $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m (aproximadamente, 4.59 m), hallar el lado del polígono regular de 16 lados inscrito en la misma circunferencia.

fórmula del lado del polígono de doble no. de lados, $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$;

lado del octágono, $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m, $r = 6$ m y $n = 16$ entonces,

$$l_{16} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_6^2}} = \sqrt{2(6)^2 - 6\sqrt{4(6)^2 - (6\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}} = \sqrt{2(6)^2 - 6\sqrt{4(6)^2 - (6)^2(2-\sqrt{2})}}$$
$$= \sqrt{2(6)^2 - (6)^2\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}} = 6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\text{ m} \simeq 2.34\text{ m.}$$

(5) Sabiendo que el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 9 m de radio vale 9 m, hallar el lado del hexágono regular circunscrito en la misma circunferencia.

fórmula del lado del polígono circunscrito, $L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$;

lado del hexágono regular inscrito, $l_6 = r = 9$ m, $r = 9$ m y $n = 6$ entonces,

$$L_6 = \frac{2rl_6}{\sqrt{4r^2 - l_6^2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{2r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2(9)\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}\text{ m} \simeq 10.39\text{ m.}$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Ejercicios Resueltos (pp. 184 – 185)

(7) Calcular el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.

fórmula del lado de un triángulo equilátero, $l_3 = r\sqrt{3}$;

radio de la circunferencia, $r = 8$ m, entonces $l_3 = 8\sqrt{3}$ m $\simeq 13.86$ m.

(9) Calcular el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio.

fórmula del lado de un cuadrado, $l_4 = r\sqrt{2}$;

radio de la circunferencia, $r = 12$ cm, entonces $l_4 = 12\sqrt{2}$ cm $\simeq 16.97$ cm.

(11) Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

fórmula del lado de un pentágono, $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$;

radio de la circunferencia, $r = 10$ cm, entonces

$$l_5 = \frac{10}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ cm} \simeq 11.76 \text{ cm.}$$

(13) Calcular el lado de un octágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio vale $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ m (aproximadamente, 1.85 m).

fórmula del lado de un octágono, $l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$;

radio de la circunferencia, $r = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ m, entonces

$$l_8 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \text{ m} \simeq 1.41 \text{ m.}$$

(15) Calcular el lado de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $2+\sqrt{3}$ cm (aproximadamente, 3.73 cm).

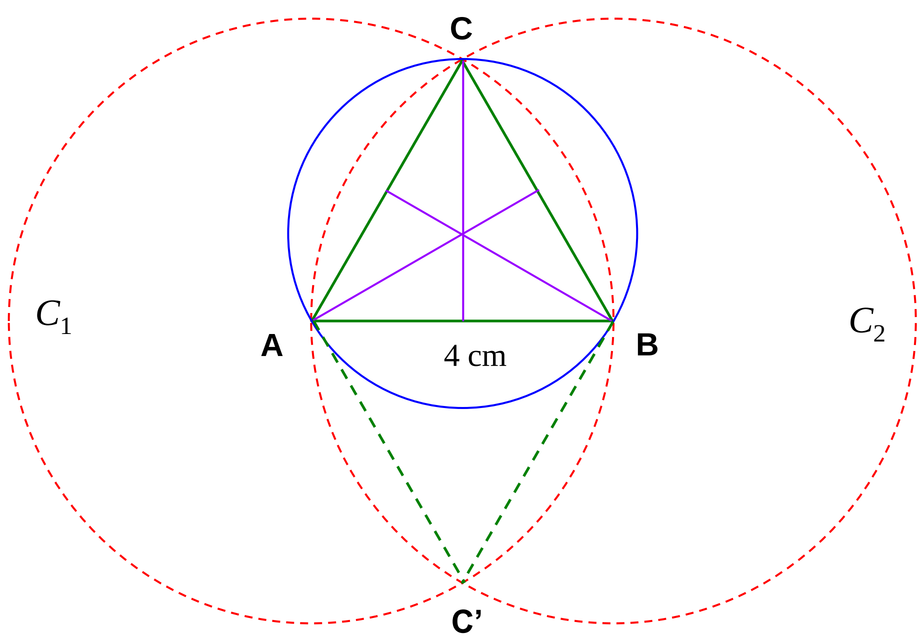
fórmula del lado de un dodecágono, $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$; radio de la circunferencia, $r = 2+\sqrt{3}$ cm

entonces, $$l_{12} = (2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{(2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]}$$
$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})[2^2 - 3]} = \sqrt{(2+\sqrt{3})[4-3]} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ cm} \simeq 1.93 \text{ cm.}$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(1) Construir un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 cm inscrito en una circunferencia de radio r. ¿Dado el valor del lado l_3, cuánto mide r? *La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: con regla se mide el segmento horizontal* $AB = 4$ cm *que se toma como la base del triángulo equilátero. Colocando el compás en el extremo A se traza la circunferencia* C_1 *(izquierda) de radio AB y análogamente, en el extremo B se traza la circunferencia* C_2 *(derecha) con el mismo radio. Ambas circunferencias se cortan en C y C'. Uniendo A con C y B con C se forman los otros dos lados iguales,* $AC = 4$ cm *y* $BC = 4$cm *y el triángulo equilátero* ΔABC *queda construido.*



Dado que el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio r está dado por $l_3 = r\sqrt{3}$ *entonces, como* $l_3 = 4$ cm, *se obtiene*

$$r = \frac{l_3}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31 \text{ cm} \;\; \text{y} \;\; d = 2r \approx 4.62 \text{ cm.}$$

con lo cual circunferencia circunscrita puede trazarse colocando el compás en el circuncentro que es el punto donde concurren las mediatrices del triángulo. Recuérdese que las mediatrices son los segmentos perpendiculares que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. De la figura se observa también que:

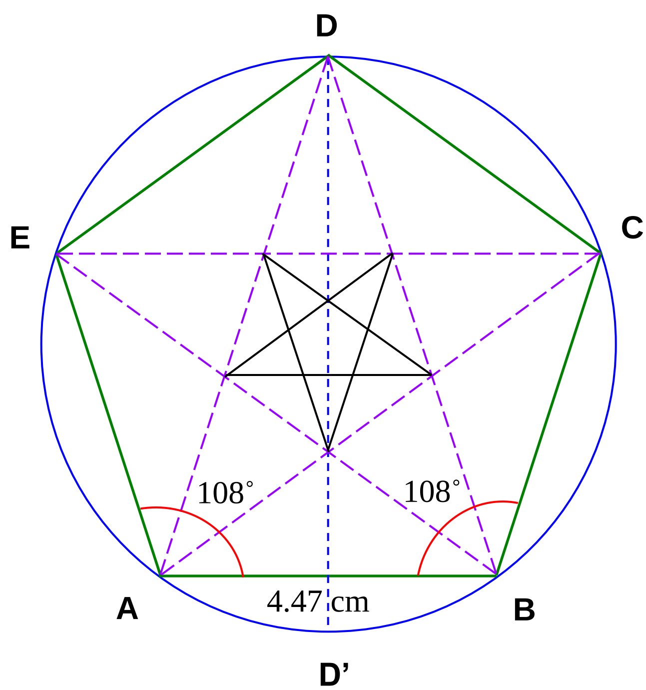
$$\Delta ABC = \Delta ABC' .$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(3) Construir un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ cm ¿Dado el valor del radio, cuál es la longitud del lado del pentágono, es decir, cuánto vale l_5?
La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: calculando el valor aproximado del radio, resulta que $r = 3.804$ cm *mediante el cual trazamos la circunferencia circunscrita con diámetro* $d = 7.61$ cm. *El lado* l_5 *del pentágono tiene el valor*

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2-(4)(5)} = \frac{\sqrt{80}}{2} \approx 4.47 \text{ cm.}$$



Entonces, el segmento $AB = l_5$ *se coloca horizontalmente como cuerda que forma la base del pentágono. Una vez trazada la cuerda AB, puede emplearse el transportador sobre ella para marcar los puntos C y E de modo que los ángulos ABC y BAE midan* 108°. *Después, en el punto medio D' de AB se levanta una recta perpendicular que corte al círculo en D. Obsérvese que* $AD' = BD' = 2.235$ cm *y que* $DD' = 7.61$ cm *es un diámetro. Finalmente, se unen los puntos B con C, C con D, D con E y E con A que forman los otros cuatro lados del pentágono regular. Nótese como los puntos de intersección de las diagonales que pueden formarse en el pentágono inscrito dá lugar a un pentágono de menor tamaño pero invertido.*

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(5) Construir un eptágono regular inscrito en una circunferencia. *Dado que no se dispone de una expresión, exenta de funciones trigonométricas, que permita calcular el lado de un eptágono y ya que no es posible construir exclusivamente con regla y compás este polígono regular puede optarse por el uso del transportador. En este caso, la división de la circunferencia completa de* 360° *al no ser exacta puede descomponerse en siete arcos cuya medida angular es la siguiente:*

$$51^\circ+52^\circ+51^\circ+52^\circ+51^\circ+52^\circ+51^\circ=51^\circ(4)+52^\circ(3)=204^\circ+156^\circ=360^\circ.$$

La construcción geométrica se realiza entonces eligiendo una circunferencia de un radio determinado con centro en O y usar el transportador sobre el diámetro horizontal. Después, marcar consecutivamente los puntos A, B, C, D, E, F y G según el valor de los ángulos indicados antes, sumados consecutivamente. La intercalación de un ángulo de 52° *entre dos ángulos de* 51° *(excepto al cerrar el polígono) obedece al hecho de minimizar el error en la longitud de cada lado del eptágono.*

$\angle AOB = 51°$

$\angle BOC = 51° + 52° = 103°$

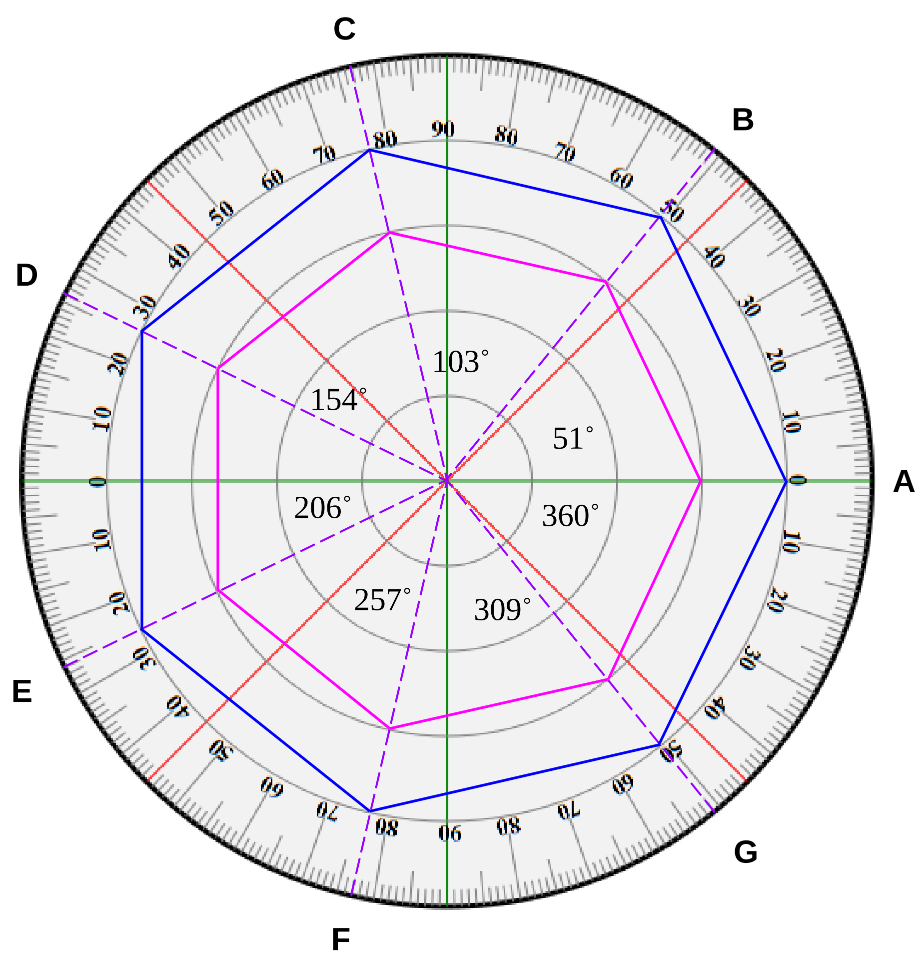
$\angle COD = 103° + 51° = 154°$

$\angle DOE = 154° + 52° = 206°$

$\angle EOF = 206° + 51° = 257°$

$\angle FOG = 257° + 52° = 309°$

$\angle GOA = 309° + 51° = 360°$



Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(7) Construir un eneágono regular inscrito en una circunferencia. *Dado que no se dispone de una expresión, exenta de funciones trigonométricas, que permita calcular el lado de un eneágono y ya que no es posible construir exclusivamente con regla y compás este polígono regular puede optarse por el uso del transportador. En este caso, la división de la circunferencia completa de* 360° *es exacta ya que* $360^\circ = 9(40^\circ)$.

La construcción geométrica se realiza entonces eligiendo una circunferencia de un radio determinado con centro en O y usar el transportador sobre el diámetro horizontal. Después, marcar consecutivamente los puntos A, B, C, D, E, F, G, H e I cada 40°, *o equivalentemente, ángulos acumulados consecutivamente.*

$\angle AOB = 40°$

$\angle BOC = 40°(2) = 80°$

$\angle COD = 40°(3) = 120°$

$\angle DOE = 40°(4) = 160°$

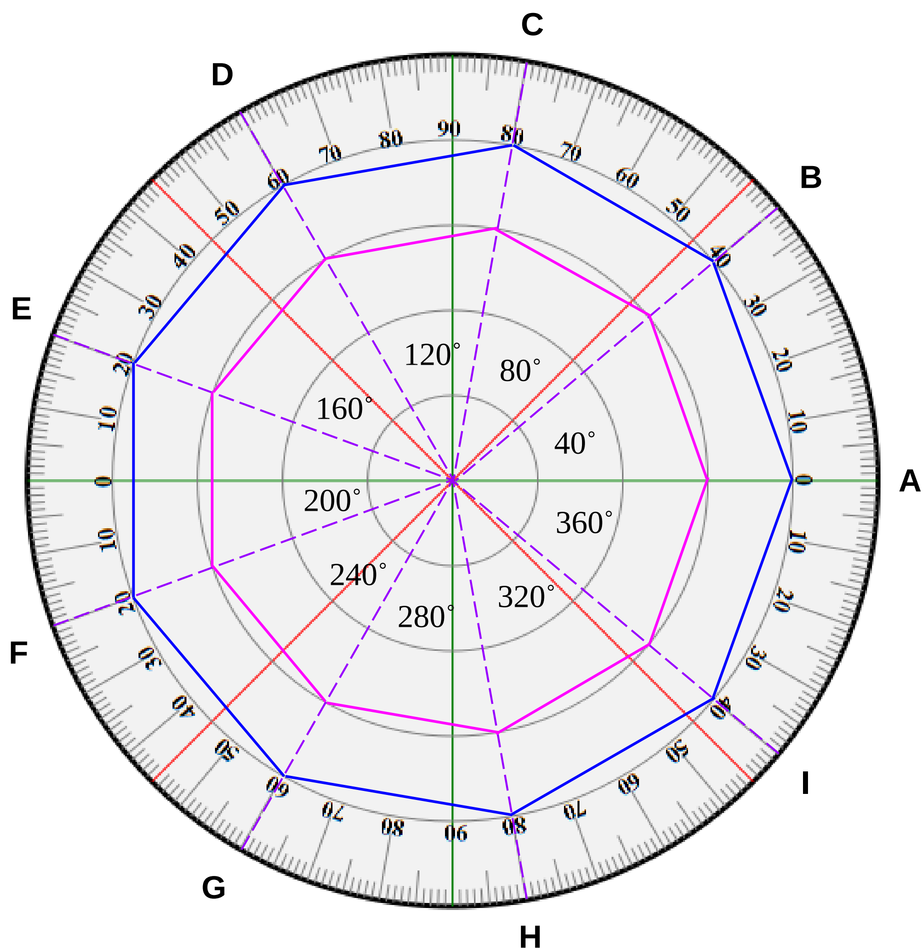
$\angle EOF = 40°(5) = 200°$

$\angle FOG = 40°(6) = 240°$

$\angle GOH = 40°(7) = 280°$

$\angle HOI = 40°(8) = 320°$

$\angle IOA = 40°(9) = 360°$

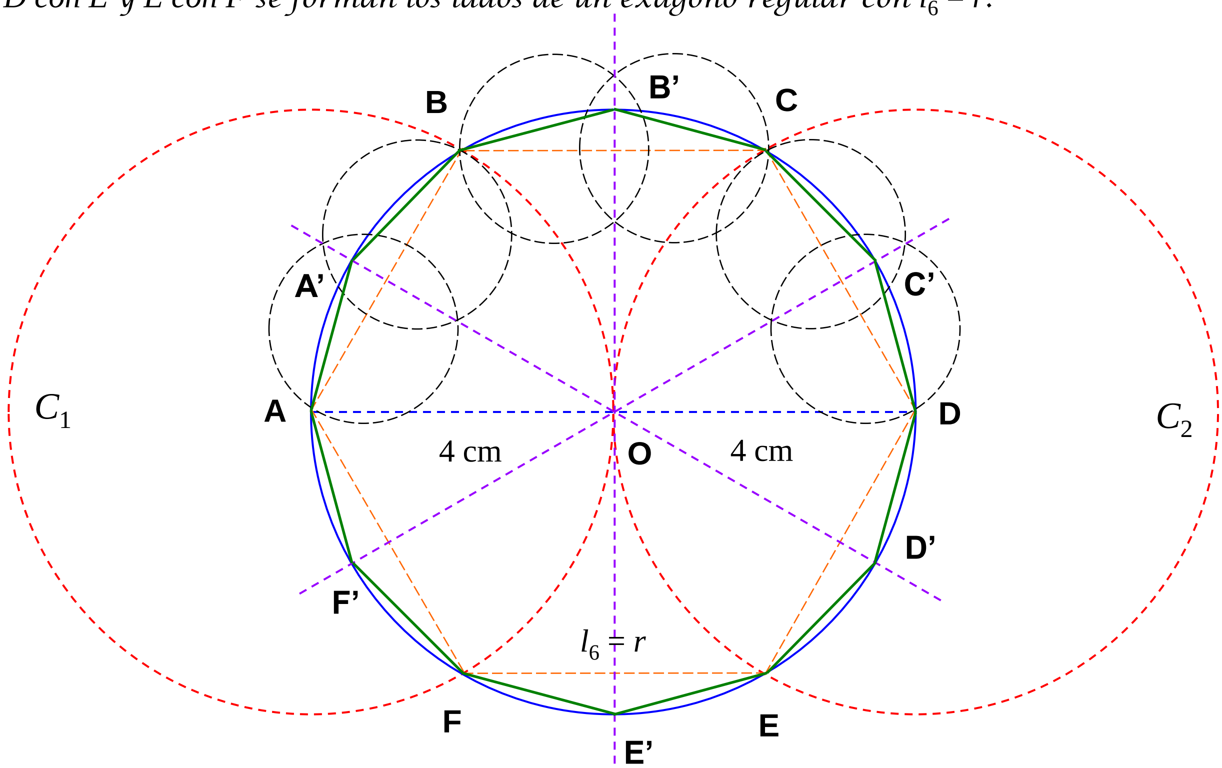


Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(9) Construir un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 4$ cm.

La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: con regla se mide el segmento horizontal AD = 8 cm *que se toma como un diámetro de la circunferencia circunscrita al dodecágono con centro en O. Colocando el compás en el extremo A se traza la circunferencia C_1 (izquierda) de radio OA* = 4 cm *y análogamente, en el extremo D se traza la circunferencia C_2 (derecha) con el mismo radio, OD* = 4 cm. *Ambas circunferencias cortan a la circunferencia circunscrita en B, C, E y F. Uniendo A con B, B con C, C con D, D con E y E con F se forman los lados de un exágono regular con $l_6 = r$.*



Sobre los primeros 3 *lados del exágono auxiliar ABCDEF, se trazan rectas perpendiculares en sus puntos medios usando, por ejemplo, circunferencias de radio mayor a $l_6/2$; aquí, se han trazado con un radio de* 2.5 cm *en cada uno de los extremos de los lados AB, BC y CD. De esta forma, cada par de circunferencias cortan los arcos AB, BC y CD respecitvamente en los puntos A', B' y C'. Al prolongar los segmentos A'O, B'O y C'O se obtienen los puntos D', E' y F' que dividen a la mitad los arcos inferiores DE, EF y FA. Finalmente, al unir A con A', A' con B, B con B', B' con C, etc., ... hasta F con F' y F' con A, se obtiene un dodecágono regular AA'BB'CC'DD'EE'FF'. Se comprueba, midiendo con una regla graduada, que AA' mide aproximadamente*

$$2.1 \text{ cm} \approx l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(1) Los lados de dos polígonos están en la relación 2:7. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué? *Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos ordenadamente iguales y sus lados homólogos proporcionales. Como solamente se establece la proporcionalidad de los lados pero no la igualdad de los ángulos, ambos polígonos no son semejantes. Es necesaria la igualdad de los ángulos para que fueran semejantes.*

(3) Dos rectángulos son semejantes. Los anchos respectivos son 16 y 24 metros y el primero tiene 30 m de largo. ¿Cuál es el largo del segundo? *Por hipótesis, al ser ambos rectángulos semejantes entre sí, en particular, los lados homólogos son proporcionales (anchos y largos), es decir si a, a' denotan el ancho y l, l' denotan el largo respectivo en cada rectángulo, entonces se cumple que*

$$\frac{a}{a'}=\frac{l}{l'} \quad \text{substituyendo,} \quad \frac{16}{24}=\frac{30}{l'} \quad \text{de donde} \quad l'=\frac{(24)(30)}{16}=45 \text{ m.}$$

(5) En una circunferencia de 10 m de diámetro, el lado del polígono regular de 48 lados, inscrito en la misma, mide 1.3 m. Calcular el lado de otro polígono regular del mismo número de lados, inscrito en una circunferencia de 12.5 m de radio. *Por el Teorema 64 (pág. 189), dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes y por el Teorema 65 (pág. 190), la razón de sus lados es igual a la razón de sus radios. Sean r, r' los radios de las circunferencias circunscritas a cada polígono regular de* 48 *lados, y sean l, l' los lados respectivos del polígono regular inscrito en cada circunferencia. Entonces,*

$$\frac{r}{r'}=\frac{l}{l'} \quad \text{substituyendo,} \quad \frac{(10/2)}{12.5}=\frac{1.3}{l'} \quad \text{entonces} \quad l'=\frac{(12.5)(1.3)}{5}=3.25 \text{ m.}$$

(7) Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 9 cm. *Según la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196), la longitud de una circunferencia de radio r está dada por (donde el valor del resultado es dependiente de la precisión, en cifras decimales, empleada para representar al número* π*):*

$$C=2\pi r \quad \text{y substituyendo el valor del radio,} \quad C=2\pi\times 9=2\times 3.14\times 9=56.52 \text{ cm.}$$

$$\text{obsérvese que} \quad C=2\times 3.141\times 9=56.538 \text{ cm}\approx 56.54 \text{ cm.}$$

$$\text{y que} \quad C=2\times 3.1416\times 9=56.5488 \text{ cm}\approx 56.55 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(9) Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es 628 cm. *Según la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196), la longitud de una circunferencia de radio r está dada por (donde el valor del resultado es dependiente de la precisión, en cifras decimales, empleada para representar al número π):*

$$C = 2\pi r \quad \text{de donde,} \quad r = \frac{C}{2\pi} \quad \text{y substituyendo,} \quad r = \frac{628}{2\times 3.14} = \frac{628}{6.28} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m.}$$

$$\text{obsérvese que} \quad r = \frac{628}{2\times 3.141} = \frac{628}{6.282} \approx 99.97 \text{ cm.}$$

$$\text{y que} \quad r = \frac{628}{2\times 3.1416} = \frac{628}{6.2832} \approx 99.95 \text{ cm.}$$

(11) Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de dos circunferencias cuyos radios miden 6 m y 12 m. *Aplicando la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196) para la longitud de una circunferencia de radio r se tiene que*

$$C = C_1 + C_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + r_2) = 2\pi r \quad \text{de donde} \quad r = r_1 + r_2 = 6 + 12 = 18 \text{ m.}$$

(13) Hallar la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de 20 cm de lado. *Como se trata de una circunferencia inscrita entonces es tangente en los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito. Así, el valor del radio es la mitad del lado dado. Consecuentemente, aplicando la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196) para la longitud de una circunferencia de radio r se obtiene*

$$C = 2\pi r = 2\pi \times \frac{20}{2} = 2\times 3.14\times 10 = 6.28\times 10 = 62.8 \text{ cm.}$$

(15) Hallar la longitud de un arco cuya amplitud es de 30°, que pertenece a una circunferencia de 10 cm de diámetro. *Aplicando la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n°, se obtiene (usando π ~ 3.14)*

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi(10/2)(30^\circ)}{180^\circ} = \frac{5}{6}\pi \text{ cm} \approx 2.62 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(17) Calcular el radio de un arco cuya amplitud es de 20°, si su longitud es de 2.79 cm. *Aplicando la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n°, resulta que (aproximación de* π ~ 3.1416*)*

de $l = \dfrac{\pi r n°}{180°}$ se sigue que $r = \dfrac{180° l}{\pi n°}$ y substituyendo,

$$r = \frac{180° \times 2.79}{\pi(20°)} = \frac{9 \times 2.79}{3.1416} = 7.993 \approx 8 \text{ cm.}$$

(19) Hallar la longitud de un arco de 5° 2’ 8” que pertenece a una circunferencia de 2 m de radio. *Primero se convierte el arco sexagesimal a decimal y luego se aplica la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n°, de la cual se obtiene (aproximación de* π ~ 3.1416*)*

arco sexagesimal $n° = 5°2'8''$; su equivalente decimal es $n° = 5° + \dfrac{2'}{60'/°} + \dfrac{8''}{3600''/°} = 5.035°$

entonces, $l = \dfrac{\pi \times 2 \times 5.035°}{180°} = \dfrac{3.1416 \times 2 \times 5.035°}{180°} = 0.176 \text{ m} \dfrac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \approx 17.6 \text{ cm.}$

(21) Hallar el perímetro del segmento circular limitado por el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio. *El perímetro del segmento circular limitado por el lado del cuadrado inscrito a una circunferencia es la suma de la longitud del lado supuesto y la longitud del arco de circunferencia subtendido por el ángulo central del cuadrado inscrito. De esta manera se obtiene (aproximando* √2 como 1.41 y π como 3.14*)*

$$P_{\text{segmento circular}} = l_{\text{lado cuadrado inscrito}} + l_{\text{arco subtendido}} = r\sqrt{2} + \frac{\pi r n°}{180°}, \text{ substituyendo}$$

$$P_{\text{segmento circular}} = 3\sqrt{2} + \frac{\pi \times 3 \times 90°}{180°} = 3\sqrt{2} + \frac{3}{2}\pi = 3 \times 1.41 + 1.5 \times 3.14 = 8.94 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

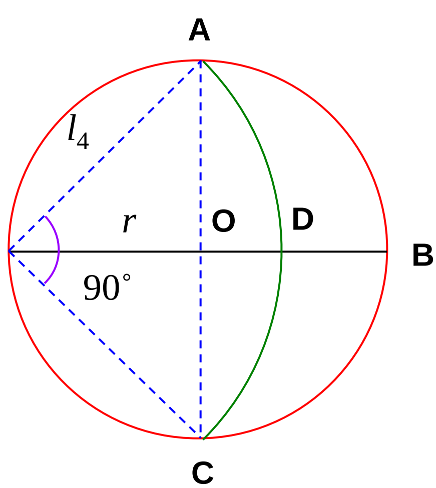
Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(23) La longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 4 m de radio, es igual a la longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 10 m de radio. Si el primer arco es de 36˚, ¿cuántos grados tiene el segundo arco? *Aplicando a cada circunferencia, la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de ellas, se tiene que*

en la 1era circunferencia, $l = \dfrac{\pi \times 4 \times 36°}{180°}$; en la 2da circunferencia, $l' = \dfrac{\pi \times 10 \times n°}{180°}$

por hipótesis, $l = l'$ entonces $\dfrac{\pi \times 4 \times 36°}{180°} = \dfrac{\pi \times 10 \times n°}{180°} \;\therefore\; n° = \dfrac{2}{5}(36°) = 14.4° = 14°24'$

(25) Si el radio de la circunferencia *O* es *r*, ¿cuál es el perímetro de la "lúnula" *ABCD*? *El perímetro de la lúnula ABCD es la suma de la longitud de la semicircunferencia ABC y la longitud del arco de circunferencia ADC subtendido por el ángulo central (90˚) del cuadrado inscrito. Para esta segunda longitud de arco resulta claro, de la figura adjunta, que el radio correspondiente a la circunferencia de la cual ADC es parte tiene por radio el lado del cuadrado inscrito en O, es decir,* l_4.



$$P_{\text{lúnula}} = l_{\text{semicircunferencia ABC}} + l_{\text{arco ADC}}$$
$$= \frac{2\pi r}{2} + \frac{\pi l_4 \times 90°}{180°}$$
$$= \pi r + \frac{\pi r\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi r\,.$$

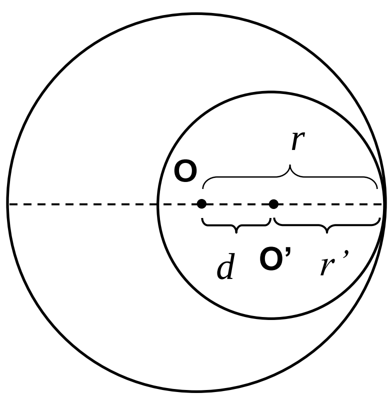
Ejemplo de Examen

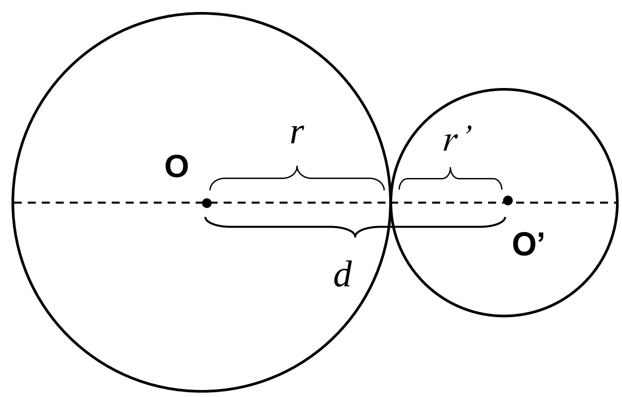
Capítulos 12 a 16. Soluciones a los Problemas

1.- Los radios de dos circunferencias son 10 y 16 cm. Hallar la distancia entre los centros si las circunferencias son: a) tangentes interiores; b) tangentes exteriores.

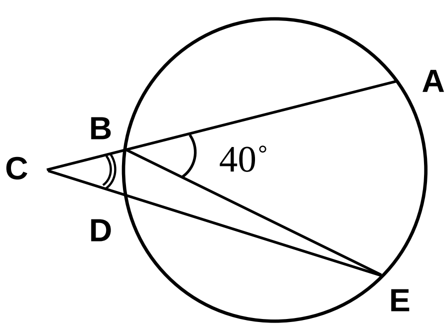
a) En dos circunferencias tangentes interiormente la distancia d *entre los centros* O y O' *es igual a la diferencia de sus radios; así,* $d = OO' = r - r'$ *(pues* $r > r'$*),*
de donde, $d = 16 - 10 = 6$ cm.

b) En dos circunferencias tangentes exteriormente la distancia de los centros es igual a la suma de los radios. Por tanto, $d = OO' = r + r'$*, en particular,*
$d = 16 + 10 = 26$ cm.





2.- Si el arco BD mide 10° y el ángulo $ABE = 40^\circ$; hallar el ángulo BCD (ver figura izquierda).



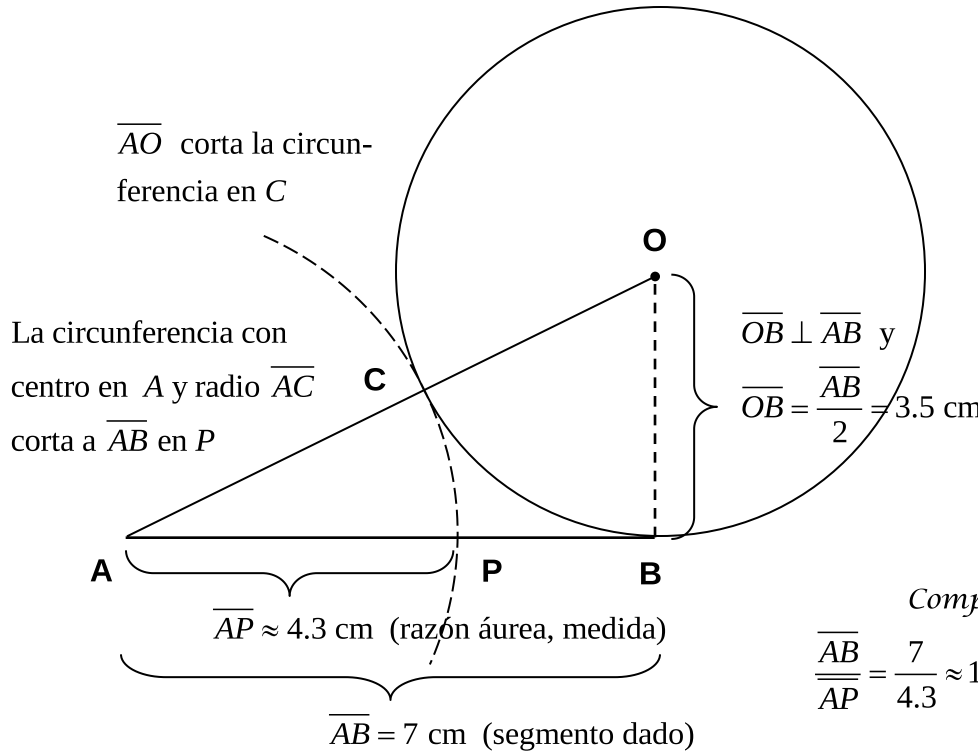
El ángulo dado ABE *es inscrito y su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados. Así,*

$$\angle B = \angle ABE = 40^\circ = \frac{\frown AE}{2} \quad \therefore \quad \frown AE = 2(40^\circ) = 80^\circ,$$

y como se conoce la medida del arco BD*, resulta que siendo* C *un punto exterior a la circunferencia, la medida del ángulo exterior* BCD *es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos por sus lados. Entonces,*

$$\angle C = \angle BCD = \frac{\frown AE - \frown BD}{2} = \frac{1}{2}(80^\circ - 10^\circ) = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

3.- Hallar gráficamente la longitud del segmento áureo AP del segmento AB = 7 cm en base a la figura derecha (equivalentemente, ver la Fig. 192 del Art. 219, pág. 164).



Comprobación:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{7}{4.3} \approx 1.6 \approx \frac{4.3}{2.7} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}(\sqrt{5}-1) = 3.5(1.23) \approx 4.3$$

4.- Sabiendo que el perímetro de un exágono regular inscrito en una circunferencia vale 48 cm, calcular el diámetro de dicha circunferencia.

El perímetro de un exágono regular inscrito en una circunferencia está dado por 6 *veces su lado y como el lado del exágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita, se tiene que:*

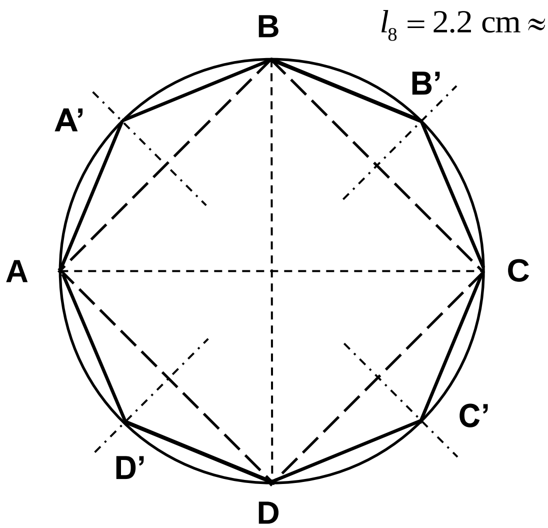
$$p_6 = 6l_6 = 6r = 48 \text{ cm., de donde } r = \frac{48}{6} = 8 \text{ cm.}$$

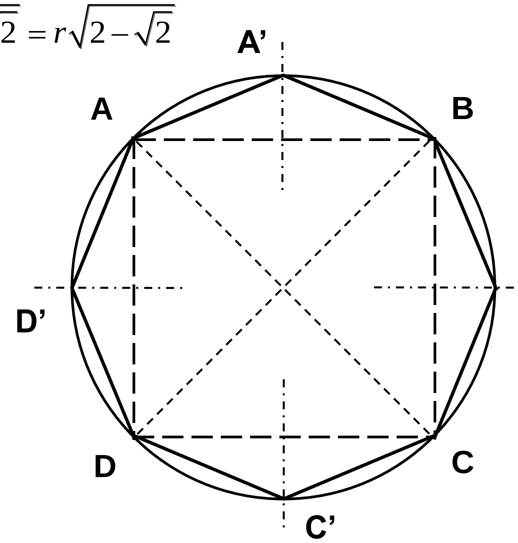
Por lo tanto, $d = 2r = 2(8) = 16$ cm es el diámetro buscado.

5.- Construir <u>geométricamente</u> un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 2\sqrt{2}$ cm, basándo la construcción en la del cuadrado inscrito (misma circunferencia).

Para trazar la circunferencia circunscrita, el valor aproximado del radio es $r = 2(1.41) \approx 2.8$ cm; *por otra parte, el lado del cuadrado inscrito tiene por lado* $l_4 = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$ cm. *Este cuadrado se puede trazar, a) considerando que los vértices quedan determinados por la intersección de los diámetros AC y BD (perpendiculares entre sí) con la circunferencia, o b) considerando que los vértices quedan determinados por la intersección de los diámetros oblicuos a* 45° y 135° *(perpendiculares entre sí) con la circunferencia. Finalmente, se levantan perpendiculares en los puntos medios de cada lado del cuadrado construido en a) o b) y se unen por segmentos, dos por cada lado, para así formar el octágono regular inscrito requerido. Se comprueba, midiendo con una regla graduada que*

$$l_8 = 2.2 \text{ cm} \approx 2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$





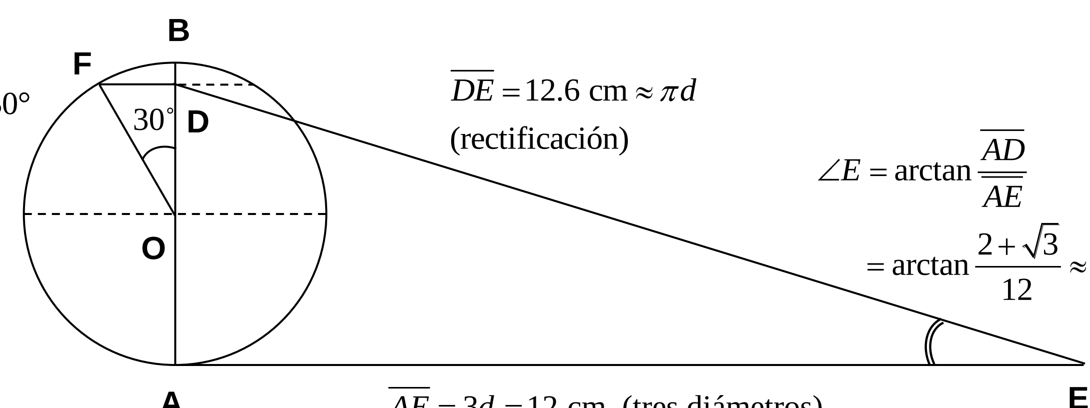
6.- Rectificar <u>gráficamente</u> una circunferencia cuyo diámetro es $AB = d = 4$ cm. (Sugerencia: ver la Fig. 221 del Art. 263, pág. 199).

$\angle BOF = 30^\circ$

$\overline{FD} \perp \overline{OB}$

$\overline{OD} = \sqrt{3}$

$\overline{OA} = 2$



$\overline{DE} = 12.6 \text{ cm} \approx \pi d$

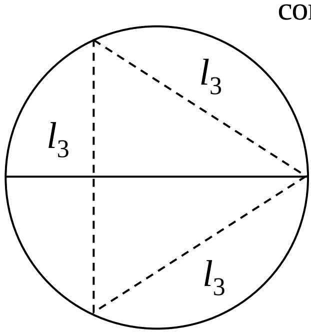
(rectificación)

$$\angle E = \arctan \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \arctan \frac{2+\sqrt{3}}{12} \approx 17.3^\circ$$

$\overline{AE} = 3d = 12$ cm (tres diámetros)

7.- Hallar la longitud de una circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de 36 m de perímetro.

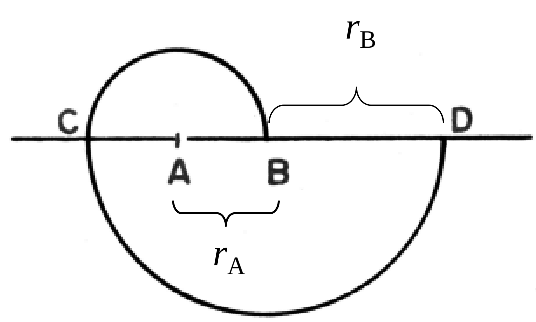
como $P_{\Delta} = 3l_3 = 3r\sqrt{3} = 36$ m, se obtiene $r = \dfrac{36}{3\sqrt{3}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$



de donde, la longitud de la circunferencia circunscrita es

$$C = 2\pi r = 2\pi(4\sqrt{3}) = 8\pi\sqrt{3} \text{ m} \approx 43.53 \text{ m.}$$

8.- El arco $\frown BC$ se ha trazado haciendo centro en *A*. El arco $\frown CD$ se ha trazado haciendo centro en *B*. Si *AB* = 5 cm, calcular la longitud de la curva *BCD*.



La longitud del arco $\frown BC$ equivale a la longitud de la semicircunferencia con centro en A y radio r_A = AB = 5 cm, y la longitud del arco $\frown CD$ es igual a la longitud de la semicircunferencia con centro en B y radio r_B = BC= BD = 10 cm. Por lo tanto, la longitud de la curva BCD está dada por:

$$L_{BCD} = L_{\frown BC} + L_{\frown CD} = \pi r_A + \pi r_B = \pi(5+10) = 15\pi \text{ cm} \approx 47.12 \text{ cm.}$$

Lecturas Recomendadas

A continuación se dá una lista sugerida de textos alternativos de diversos niveles. Para los propósitos del material presentado en este reporte técnico es preferible consultar textos orientados a los temas y aplicaciones que combinen la teoría necesaria para los métodos en los cuales se ha hecho énfasis. Los libros que exponen un enfoque más avanzado pueden servir como referencia especializada para el lector interesado.

1. *Euclides: La Definición de los Axiomas de la Geometría*, Josep Pla i Carrera, Genios de las Matemáticas, RBA Eds., 2017

2. *Geometría y Trigonometría*, 2da Ed. Aurelio Baldor, Grupo Patria Cultural, 2008.

3. *Historia de las Matemáticas*, Vol. I, 5ta Ed., Jean Paul Colette, Siglo Veintiuno Editores, 2002

4. *Geometría Plana y del Espacio*, 24va Ed., George Wentworth and David Eugene Smith, Editorial Porrúa, 1997.

5. *Elementos de Euclides*, 3 vols., Ma. Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991, 1994 y 1996.

6. *Trigonometría Plana y Esférica con Tablas Trigonométricas*, William A. Granville, James S. Mikesh & Percy F. Smith, UTEHA, 1992.

7. *Fundamentos de Geometría*, Harold Scott M. Coxeter, Limusa-Wiley, 1971.

8. *Estudio de las Geometrías*, Tomos I y II, H. Eves, UTEHA, 1969.

9. *Geometría Axiomática*, Leonard M. Blumenthal, Aguilar, 1965.

10. *Fundamentos de Geometría*, David Hilbert, Centro Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1953 (reeditado en 2010).