



INAOE

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica.**

ÓPTICA GEOMÉTRICA
Resumen de Conceptos y Fórmulas

Parte I

Reporte Técnico
presentado por

Alejandro Cornejo Rodríguez
y
Gonzalo Urcid Serrano

Tonantzintla, Puebla 72000
2da Edición, Octubre de 2005

©INAOE 2006

Derechos Reservados

Los autores otorgan al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de este reporte técnico en su totalidad o en partes.



ÓPTICA GEOMÉTRICA

Resumen de Conceptos y Fórmulas

Parte I

Alejandro Cornejo Rodríguez

y

Gonzalo Urcid Serrano

COORDINACIÓN DE ÓPTICA



Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Tonanzintla, Puebla, Pue. 72000
MÉXICO.

2^{ra} Edición, Octubre del 2005

Índice General

1	Conceptos básicos	1
1.1	¿Óptica geométrica u óptica de rayos?	1
1.2	Índice de refracción	1
1.3	Clasificación de los vidrios	2
1.4	Curvas de dispersión para vidrios	4
1.5	Camino óptico	6
1.6	Dos principios fundamentales	7
1.6.1	Principio de Fermat	7
1.6.2	Principio de Huygens	8
2	Prismas	9
2.1	Prisma dispersor y ángulo de desviación mínima	9
2.2	Parámetros de Abbe	12
2.3	Cuña acromática	15
2.4	Prisma de visión directa	16
2.5	Reflexión total	18
2.6	Refractómetros	19
2.6.1	Refractómetro por autocolimación	19
2.6.2	Refractómetro de Pülfrich	19
3	Espejos planos	22
3.1	El espejo plano	22
3.2	Dos espejos planos	25
3.3	Prismas reflectores	26
3.4	Tratamiento vectorial de la ley de reflexión	29
3.4.1	Dos espejos planos ortogonales	32
3.4.2	Retroreflector perfecto	33
4	Trazo de rayos	36
4.1	Nomenclatura	36
4.2	Fórmulas del trazo exacto	37
4.3	Convenio de signos	39
4.4	Fórmulas del trazo paraxial en superficies esféricas	40
4.4.1	Método $y-nu$	44
4.4.2	Método $l-l'$	45
4.4.3	Tamaño de la imagen e invariante de Lagrange	45
4.5	Refracción gráfica en superficies esféricas	47

5	Lentes	49
5.1	Distancia focal	51
5.2	Lentes positivas y negativas	52
5.3	Combinación de lentes delgadas	52
5.4	Construcción gráfica de rayos y ecuación de Newton.	57
5.5	Lentes gruesas	58
5.6	Planos cardinales de un sistema	62
5.6.1	Invariante de Helmholtz	65

Prefacio a la 2^{da} Edición

Esta segunda edición de las notas del curso de Óptica Geométrica e Instrumental ha sido ampliada con la solución de los ejercicios sugeridos al final de las notas de la primera edición. Puesto que esos ejercicios en su mayoría son una extensión o complemento de conceptos o técnicas de cálculo los autores hemos preferido incorporarlos *in situ* para darle continuidad a los temas tratados. Por lo tanto, el desarrollo de cada ejercicio propuesto en la primera versión de estas notas se ha colocado en el lugar más apropiado del texto y se ha escrito en un tipo de letra de menor tamaño para distinguir este material extra que puede saltarse en una primera lectura.

La presente edición consta de algunas correcciones menores al texto así como ajustes en algunas figuras. Además, la incorporación del nuevo material va acompañada de diagramas explicativos cuyo propósito primordialmente es de carácter didáctico. De esta manera, esperamos que el contenido en esta segunda edición ayude al estudiante de este curso a una mejor comprensión de los temas expuestos.

Alejandro Cornejo R.
Gonzalo Urcid S.

Tonantzintla, Puebla, Octubre del 2005.

INAOE

La composición tipográfica del presente reporte técnico: “**Óptica Geométrica: Resumen de Conceptos y Fórmulas, Parte I**” fué realizada con $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}2_{\text{e}}$ y $\text{AMS-T}_{\text{E}}\text{X}$ usando los programas Scientific Word 3.0 © TCI Software Research (1991–1998) y PCTeX 4.01 (beta) © Personal TeX Inc., (1994–1999); como editores de texto auxiliares se emplearon Word-2000 © Microsoft Corporation (1983–1999) y Programmer’s File Editor 32 bit 1.01 Ed. © Alan Phillips (1992–1999). La bibliografía fué generada automáticamente usando el manejador de bases de datos BibDB 1.4e © Eyal Doron (1994) y el programa Bib $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 0.99c © Oren Patashnik (1996). Para la silabización en español se utilizó el paquete babel © Johannes Braams. Para las figuras y diagramas se emplearon los programas PowerPoint-2000 © Microsoft Corporation (1987–1999), CorelDraw 8.2 © Corel Corporation (1988–1997), MathType Equation Editor 5.1 © Design Science, Inc. (1990–2002) y el visor de archivos EPS GSView32 4.6 © Ghostgum Software (1993-2003). El dispositivo de impresión fué una LaserJet 1020 © Hewlett-Packard (2005). El contenido de este reporte es propiedad intelectual de los autores, Alejandro Cornejo Rodríguez y Gonzalo Urcid Serrano.

Derechos de Propiedad © INAOE 2006

Impreso en Tonantzintla, Puebla, Pue. 72000, México.

Prefacio a la 1^{era} Edición

La presente monografía, como su título lo indica, resume de manera organizada una parte de las notas del curso de *Óptica Geométrica e Instrumental* que han sido expuestas por uno de los autores durante varios períodos académicos en el posgrado de Óptica de nuestro Instituto. Nuestra intención al elaborar estas notas es ofrecer al lector en general, y en particular a los estudiantes de posgrado, un punto de vista particular sobre como exponer las ideas elementales así como diversas fórmulas de interés práctico en esta área de la óptica.

Debido a la gran extensión temática propia del curso mencionado, nos hemos restringido a tratar en esta Primera Parte los siguientes aspectos de la *Óptica Geométrica: Conceptos Básicos, Prismas, Espejos planos, Trazo de rayos y Lentes*. El punto de partida, lo constituyen los conceptos de rayo, del índice de refracción de los materiales (vidrio) y del camino óptico de un rayo a través de uno o más materiales; no se hace una discusión o derivación de estas nociones ya que se encuentran en varios libros de Física, Óptica en general y Óptica Geométrica en particular. Hemos procurado apoyar con diagramas y esquemas las discusiones teóricas, que por tratarse de un curso intermedio no pretenden ser de un carácter formal absoluto. Al final de nuestra exposición damos una lista modesta pero representativa de textos elementales y avanzados, que sin lugar a dudas, abordan con mayor profundidad y con distintos puntos de vista los temas aquí tratados. Como complemento a este trabajo se sugieren algunos ejercicios que ayudarán al lector a una mejor comprensión del material.

Agradecemos especialmente a la Lic. Ana María Zárate Rivera su ayuda en la preparación de la mayoría de los dibujos y a la M. C. Ma. de Lourdes Gómez Hernández por leer el manuscrito completo e indicarnos algunos errores tipográficos. También estamos agradecidos con el Dr. Francisco Soto Eguibar, Director de Posgrado y con el Dr. Gabriel Martínez Nikonoff, Coordinador de Óptica por su apoyo logístico en la reproducción de estas notas para su difusión dentro y fuera del Instituto. Cualquier comentario, sugerencia o corrección es bienvenida pues eso nos permitirá en el futuro mejorar el contenido de este escrito.

Alejandro Cornejo R.
Gonzalo Urcid S.

Tonantzintla, Puebla, Mayo del 2003.

INAOE

1 Conceptos básicos

1.1 ¿Óptica geométrica u óptica de rayos?

Bajo el título de *Óptica Geométrica*, generalmente se incluye todo el material que se presenta en este manuscrito; y esto se ha hecho así histórica y tradicionalmente. Sin embargo, desde hace algunos años, varios investigadores del campo de la óptica han propuesto que el tema de estudio, aquí presentado, debería considerarse bajo el rubro de *Óptica de Rayos* [13]. El argumento fundamental de esta última propuesta y que los autores consideran válido, es que se está analizando el problema físico de la refracción o la reflexión de la luz en una o más superficies refractoras o reflectoras. Ahora bien, para hacer este tipo de estudio se acepta y trabaja con el concepto de “rayo”, el cual representa la dirección en la cual viaja la luz o la energía de una onda luminosa u onda electromagnética. Una vez aceptado el concepto de rayo, se representan sus trayectorias como líneas rectas y a partir de los esquemas planteados, la geometría plana se ha empleado para el estudio de la reflexión y la refracción en superficies con formas diferentes; de ahí el nombre clásico de óptica geométrica.

En consideración a lo antes expuesto, los lectores deberán estar conscientes que en otras lecturas seguramente se encontrarán con la frase “óptica de rayos” en textos y artículos de investigación, pero el material bajo discusión básicamente será como el que se desarrollará en las páginas siguientes como óptica geométrica. Al final de estas notas, la sección bibliográfica proporciona una lista sugerida, no exhaustiva, de libros de texto y tratados de óptica que pueden consultarse para conocer otros puntos de vista. En ellos puede encontrarse un tratamiento de mayor profundidad y extensión de ciertos aspectos de la óptica geométrica clásica y moderna. Hemos señalado en cada uno de estos libros los capítulos que se relacionan con el material tratado en estas notas.

1.2 Índice de refracción

La interacción macroscópica de la luz con los medios materiales puede caracterizarse mediante un cociente de velocidades denominado *índice de refracción* y simbolizado comúnmente por n . Si c es la velocidad de la luz en el vacío, considerado como el medio de referencia, y v es la velocidad de la luz en un medio material para una cierta longitud de onda λ , entonces,

$$n = \frac{c}{v} \text{ siendo } v < c. \quad (1)$$

En el vacío, $v = c$, por tanto $n = 1$; en cualquier otro medio material, $n > 1$. Cabe aclarar, que la Ec. (1) es válida únicamente si el medio material bajo consideración es *homogéneo* e *isótropo*; en materiales que no cumplen estas condiciones el índice de refracción depende de otras variables, como son la posición en el espacio (x, y, z) , el tiempo t o la temperatura T , de modo que estas dependencias pueden representarse por una función de varias variables,

como se indica en la siguiente expresión,

$$n = n(x, y, z, t, T). \quad (2)$$

La atmósfera terrestre es un buen ejemplo a la cual se aplica la Ec. (2); no obstante, en el presente contexto de la óptica geométrica, el medio material con el que principalmente se trabaja es *vidrio óptico* de manera que salvo la dispersión debido a un cambio en la longitud de onda de la luz, consideraremos solamente la Ec. (1) al tratar otros conceptos. Si el índice de refracción únicamente depende de la posición, i.e., $n = n(x, y, z)$, se dice que el medio material es *heterogéneo* u, ópticamente hablando, que tiene *índice de gradiente*. Si el índice de refracción solamente depende de la longitud de onda λ , i.e., $n = n(\lambda)$, se dice que el medio material es *dispersivo*. Esto último significa que para la luz compuesta o formada con diferentes longitudes de onda, el índice de refracción tendrá diferentes valores para cada una de las longitudes de onda.

Si consideramos una interfase entre dos medios materiales homogéneos e isótropos cuyos índices de refracción son n y n' , la ley fundamental que describe el paso de un rayo luminoso¹ a través de dicha interfaz, que simbolizamos por $[n : n']$, se conoce como la *ley de refracción de Snell-Descartes* la cual establece que

$$n \sin i = n' \sin i', \quad (3)$$

donde i es el ángulo que forma el rayo incidente con la normal al plano de la interfase, e i' es el ángulo que forma el rayo refractado con la normal como se aprecia en la Fig. 1. Es conveniente aclarar, que se está tomando como un hecho comprobado teórica y experimentalmente que los fenómenos de refracción y reflexión ocurren en un plano. En general, al incidir un haz luminoso sobre una superficie dividiendo dos medios, parte de él se refracta y parte se refleja; si consideramos la reflexión de un rayo luminoso como “refracción en el mismo medio material”, entonces la Ec. (3) se simplifica a $\sin i = \sin i'$ puesto que $n = n'$, y consecuentemente, $|i| = |i'|$ lo que se describe diciendo que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión y se conoce como la *ley de reflexión*. Una aclaración importante, es que en general no se asignan signos positivos y negativos a los ángulos en la mayoría de los libros de texto, sin embargo, en libros avanzados de óptica o especializados en diseño óptico, es importante e indispensable adoptar una convención de signos para los ángulos.

1.3 Clasificación de los vidrios

El material que cotidianamente llamamos “vidrio” en óptica, no posee una estructura cristalina sino que es considerado un material amorfo y es común clasificarlo en los siguientes tipos:

¹Es común considerar la propagación de radiación electromagnética como un “frente de onda” y el rayo luminoso corresponde a la dirección de su trayectoria ortogonal. Históricamente el “rayo” fué utilizado primero como una idea descriptiva de la trayectoria de la luz.

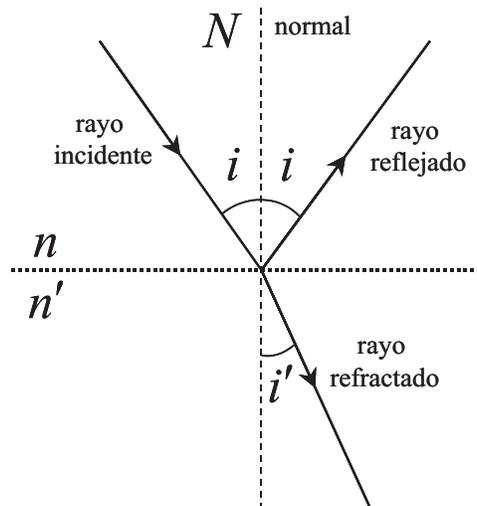


Figura 1: Ley de refracción y reflexión para un rayo de luz incidiendo entre dos medios con índices de refracción diferentes siendo $n' > n$.

- vidrio común (ventanas, vasos, frascos, botellas)
- vidrio oftálmico (anteojos, gafas, lupas)
- vidrio óptico (componentes ópticas para instrumentos como telescopios, microscopios, objetivos fotográficos, binoculares, etc.)

El costo económico de estos vidrios varía, siendo más barato el más común y más caro el denominado óptico. Esto ocurre porque para el último existen métodos de control de calidad más estrictos, así como la medición de los índices de refracción para diferentes longitudes de onda.

En cualquier caso, $n > 1$, y se considera al vidrio como un medio homogéneo. Como los sistemas ópticos basados en el enfoque de la *óptica geométrica* u *óptica de rayos* usualmente se encuentran sumergidos en aire o en algún líquido, como el agua, consideraremos los índices de refracción correspondientes a estos medios:

$$n_{\text{aire}} \approx 1.0 ; n_{\text{agua}} = 1.33$$

$$1.5 \leq n_{\text{vidrio óptico}} \leq 1.8$$

Los aspectos experimentales y prácticos de la medición del índice de refracción corresponden a la ciencia de los materiales; sin embargo, más adelante se comentará algo a este respecto.

1.4 Curvas de dispersión para vidrios

Considerando que los vidrios utilizados son homogéneos, las fórmulas de dispersión expresan la dependencia de n como una función de la longitud de onda λ de la radiación luminosa. En ocasiones y según la literatura, podemos escribir $n = n(\lambda)$ o bien $N = N(\lambda)$. En óptica es común considerar la dispersión de un vidrio en el margen electromagnético que va de la región ultravioleta (UV), pasando por la región visible, hasta el infrarrojo (IR) y en ocasiones las microondas (ver Fig. 2).

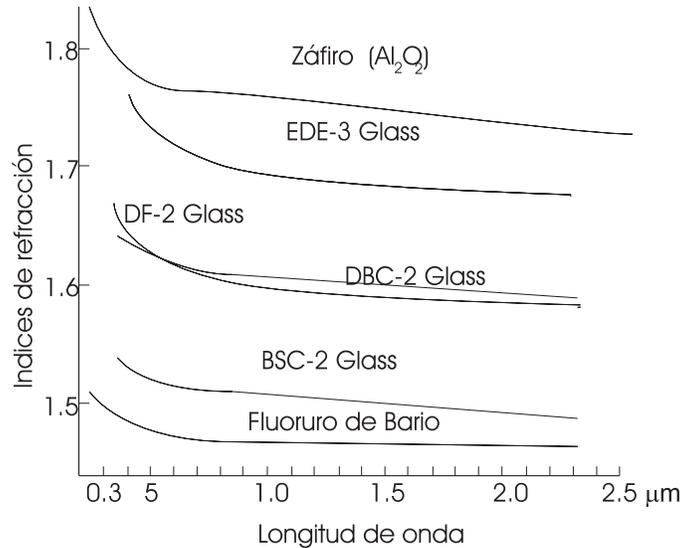


Figura 2: Curvas de dispersión de los vidrios ópticos que muestran la relación y variación entre el índice de refracción con respecto a la longitud de onda de la fuente luminosa. Generalmente, los vidrios ópticos transmiten poco en las regiones UV e IR.

En la práctica, para determinar correctamente las características de un vidrio se requiere conocer el índice de refracción para diferentes longitudes de onda, donde el número mínimo es de tres, es decir, el valor de $N(\lambda_j)$ para $j = 1, 2, 3$. Las funciones de dispersión se obtienen empíricamente por interpolación según el muestreo que se haga en un intervalo determinado de longitudes de onda. Por ejemplo,

a) En la región del visible, se tiene la fórmula de *Herzberg*,

$$N(\lambda) = A + B\lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2 - 0.028} + \frac{D}{(\lambda^2 - 0.028)^2}. \quad (4)$$

Midiendo N en cuatro longitudes de onda $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ se resuelve un sistema lineal de ecuaciones de 4×4 , siendo las incógnitas los coeficientes A, B, C y D .

b) En la región del infrarrojo (IR), tiene la forma,

$$N(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2 - 0.028} + \frac{C}{(\lambda^2 - 0.028)^2} + D\lambda^2 + E\lambda^4. \quad (5)$$

Midiendo N en cinco longitudes de onda $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ se resuelve un sistema lineal de ecuaciones de 5×5 , siendo las incógnitas los coeficientes A, B, C, D y E .

Estas expresiones son de gran utilidad principalmente en el campo denominado como la *espectroscopía óptica*.

Índice de refracción y longitud de onda. La siguiente discusión contesta la pregunta, ¿por qué se pueden encontrar valores para los índices de refracción solamente para determinadas longitudes de onda? Ya hemos comentado que en general, el índice de refracción N , es de hecho una función de la longitud de onda λ , lo que denotamos por $N(\lambda)$; desde un punto de vista teórico es factible expresar N para valores arbitrarios de λ pero hay varias razones por las cuales se seleccionan “ciertas longitudes de onda” con preferencia sobre otras. Entre estas razones pueden considerarse las siguientes:

- los espectros de emisión y absorción para varios elementos y compuestos inorgánicos se conocen muy bien como es el caso del mercurio, el hidrógeno, el helio y el sodio cuyas líneas espectrales en el rango visible y en otras bandas del espectro electromagnético ya se han determinado. Estas líneas espectrales fueron clasificadas por Fraunhofer como F, C, D, etc.,
- las fuentes de luz producidas por flamas, focos y láseres que pueden emplearse para medir N , según su naturaleza, emiten radiación en determinadas longitudes de onda con valores determinados. Recientemente se han considerado longitudes de onda en las bandas IR y UV como se hace para algunos vidrios ópticos especiales,
- una vez conocido el valor de N para algunas λ 's, es posible emplear ajustes empíricos o formulaciones teóricas que proporcionan expresiones matemáticas las cuales permiten calcular $N(\lambda)$ para otras longitudes de onda. Por ejemplo, la fórmula de *Cauchy* está dada por

$$N(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \quad (6)$$

donde A, B y C son constantes positivas. Como una aproximación, si el valor de C es pequeño en comparación con los valores de A y B , la *dispersión* en regiones de dispersión normal se calcula como

$$\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}. \quad (7)$$

Puede verse que las expresiones de carácter empírico proporcionadas por las Ecs. (4) y (5) son un refinamiento práctico de la expresión teórica dada por la Ec. (6).

1.5 Camino óptico

Puesto que la luz cambia de trayectoria al pasar de un medio a otro, es necesario considerar una métrica apropiada. Consideremos para ello una serie de k medios materiales cuyos índices de refracción son n_1, n_2, \dots, n_k y que la trayectoria P_0P_k corta a las interfases respectivamente en P_1, P_2, \dots, P_{k-1} ; además P_1 está en el medio de índice n_1 y P_k está en el medio de índice n_k , como se muestra en la Fig. 3. Entendemos por *camino óptico*, denotado por

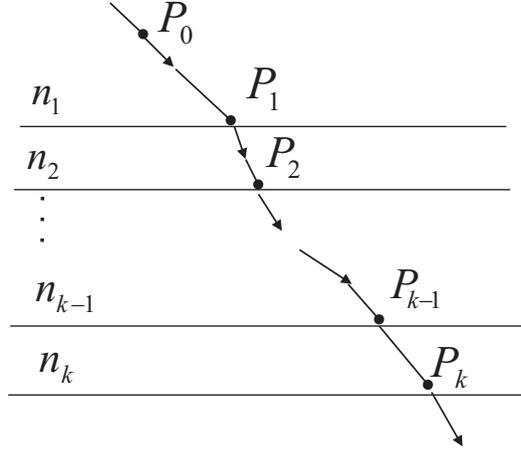


Figura 3: Trayectoria de un rayo de luz através de una serie de medios estratificados con diferentes índices de refracción.

CO , a la distancia óptica expresada como la suma de los productos del índice de refracción por la distancias recorridas,

$$CO = \overline{P_0P_1}n_1 + \overline{P_1P_2}n_2 + \dots + \overline{P_{k-1}P_k}n_k = \sum_{i=1}^k \overline{P_{i-1}P_i}n_i \quad (8)$$

Cuando los estratos de los materiales cambian de punto a punto, entonces el camino óptico puede expresarse como la siguiente integral de línea,

$$CO = \int_A^B n(x, y, z)ds = \int_C nds, \quad (9)$$

donde $A = P_0$ y $B = P_k$, y ds denota el elemento de longitud de arco sobre la curva \mathcal{C} que une los puntos extremos A y B . Estos tipos de materiales reciben el nombre de materiales o vidrios con *índice de refracción gradiente*.

1.6 Dos principios fundamentales

En relación con las leyes básicas de la reflexión y la refracción hay dos principios fundamentales de la óptica clásica que pueden emplearse para deducir estas leyes. A continuación se explican estos dos principios con más detalle.

1.6.1 Principio de Fermat

El trayecto seguido por la luz al ir de un punto A a un punto B en un medio material *heterogéneo* de índice $n(x, y, z)$ corresponde a un valor estacionario del camino óptico en relación a los caminos posibles que unen A con B . En otras palabras, si ds representa el elemento de arco de la curva C que une los puntos A y B entonces el valor numérico dado por la integral de la Ec. (9) es estacionario (ver esquema izquierdo en la Fig. 4).

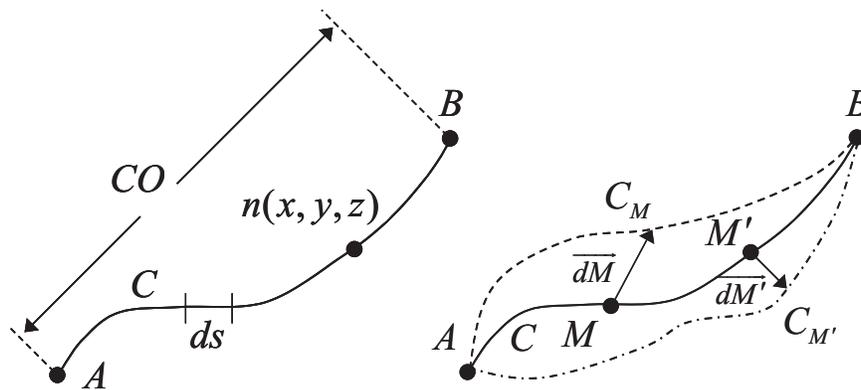


Figura 4: Izquierda, curva C que sigue la luz entre dos puntos A y B inmersos en un medio continuo heterogéneo con índice de refracción $n(x, y, z)$ para determinar el CO ; derecha, posibles trayectorias C_M y $C_{M'}$ entre A y B cercanas a C con valor estacionario para el CO .

Para precisar el significado de este enunciado consideremos la curva C como aquella que en efecto sigue la luz, i. e., un rayo al ir de A a B . Sea M un punto arbitrario en la misma curva con $M \neq A$ y $M \neq B$; los caminos vecinos a C son las curvas C_M obtenidas al desplazar en cierta dirección el punto M de C en una cantidad infinitesimal, denotada por \overrightarrow{dM} y que igualmente comienzan en A y terminan en B . El esquema derecho de la Fig. 4 muestra gráficamente esta situación para dos puntos intermedios distintos M y M' de C . Sea L_{AB} el CO a lo largo de C y sea L'_{AB} el CO a lo largo de C_M , entonces, se dice que L_{AB} es un valor estacionario si

$$|L'_{AB} - L_{AB}| \leq c_0 \left| \overrightarrow{dM} \right|^2$$

siempre que $\left| \overrightarrow{dM} \right| \leq \varepsilon_0$ siendo c_0, ε_0 constantes positivas. Es importante hacer notar que el concepto de *valor estacionario* puede corresponder al caso de un valor mínimo, máximo o constante. Este último caso se ilustra con un espejo elíptico que interiormente es iluminado colocando una fuente en uno de sus focos geométricos. Del principio de Fermat pueden deducirse las leyes de la reflexión y de la refracción de Snell-Descartes, por lo que puede tomarse como fundamento conceptual para desarrollar parte de la óptica geométrica y constituye un *principio variacional* que está formulado de manera independiente en lo que respecta a la naturaleza física de la luz.

1.6.2 Principio de Huygens

Se considera que cada punto P sobre la *superficie de onda* o *frente de onda* Σ_0 generado por la luz emitida por una fuente S en el tiempo t_0 se comporta como una fuente secundaria; el frente de onda Σ , en un instante posterior $t > t_0$ es la envolvente de las superficies de onda secundarias u onditas provenientes de cada P en el instante t_0 . Consideramos en esta descripción del principio de Huygens que S es una fuente puntual que emite luz en una longitud de onda dominante y por ello el frente de onda en P y las onditas emitidas desde él tienen la misma frecuencia.

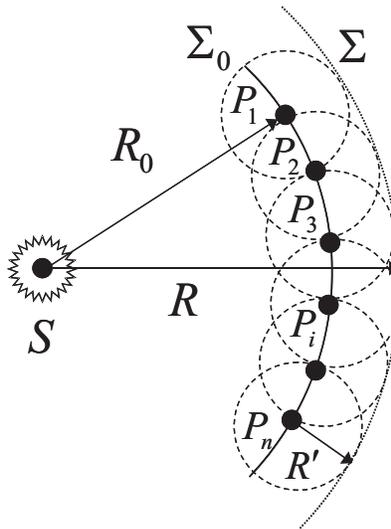


Figura 5: Las “onditas” emitidas por el frente de onda Σ_0 en $t = 0$ determinan el frente de onda Σ en un tiempo posterior siendo éste la envolvente de las ondas secundarias.

Para explicar este principio nos referimos a la Fig. 5 que muestra un diagrama sobre el cuál hacemos suposiciones adicionales. Si una fuente puntual S colocada en un *medio homogéneo e isótropo*, emite luz a partir del instante $t = 0$, en el instante t_0 la luz habrá

alcanzado los diferentes puntos de una esfera Σ_0 de radio R_0 . Sea v la velocidad de la luz en el medio considerado ($v < c$, $n > 1$ cte.), entonces $R_0 = vt_0$. La esfera Σ_0 es un frente de onda luminoso. La idea de Huygens consiste en tomar cada punto P_i de Σ_0 como una fuente secundaria; en el instante posterior $t = t_0 + \Delta t$, las superficies de onda secundarias son pequeñas esferas centradas en cada P_i de Σ_0 , todas con el mismo radio $R' = v\Delta t$. La envolvente de todas estas superficies esféricas producidas por las ondas secundarias es otra esfera Σ' de radio $R = R_0 + R' = vt_0 + v\Delta t = vt$ que corresponde manifiestamente al frente de onda Σ alcanzado por la luz en $t_0 + \Delta t$, i. e., $\Sigma = \Sigma'$. Puesto que se considera que la fuente S es puntual, la onda luminosa es monocromática de modo que tanto el frente de onda en cualquier instante de tiempo $t > 0$ como las onditas que lo forman tienen la misma longitud de onda y en consecuencia todas ellas oscilan con la misma frecuencia.

Este principio es el fundamento de la *teoría ondulatoria de la luz* y también pueden deducirse de él las leyes de la reflexión y de la refracción. Está relacionado íntimamente con las ecuaciones de la teoría electromagnética clásica de Maxwell de las cuales éste principio puede deducirse. Las modificaciones hechas a este principio por Fresnel permiten estudiar los problemas relacionados con el fenómeno físico de la difracción de la luz; al enunciado modificado se le conoce como el *principio de Huygens-Fresnel* y se estudia en detalle en los cursos de Óptica Física.

2 Prismas

2.1 Prisma dispersor y ángulo de desviación mínima

En la Fig. 6 se muestra, en un plano, una sección ABC de un prisma con índice de refracción n' el cual se coloca entre dos medios con índices n_1 y n_2 , a la izquierda del lado \overline{AB} y a la derecha del lado \overline{BC} respectivamente. El ángulo agudo $\angle ABC$ lo denotamos por α , y es el mismo que forman las normales N_1 y N_2 , de los lados \overline{AB} y \overline{BC} ; nos referimos a α como el *ángulo del prisma*. Entonces, un rayo que pasa por el prisma deberá pasar por las dos interfases, $[n_1 : n']$ y $[n' : n_2]$ correspondientes a las caras \overline{AB} y \overline{BC} . Si los ángulos de incidencia y de refracción son i_1, i'_1 en la primera interfaz, e i_2, i'_2 en la segunda interfaz, entonces, aplicando la Ec. (3) y algunas propiedades de ángulos complementarios obtenemos las ecuaciones,

$$n_1 \sin i_1 = n' \sin i'_1 \quad (10)$$

$$n' \sin i_2 = n_2 \sin i'_2 \quad (11)$$

$$\alpha = i'_1 + i_2 \quad (12)$$

$$\delta = i_1 + i'_2 - \alpha, \quad (13)$$

donde δ es el ángulo total de desviación entre el rayo incidente inicial y el rayo refractado en las caras \overline{AB} y \overline{BC} .

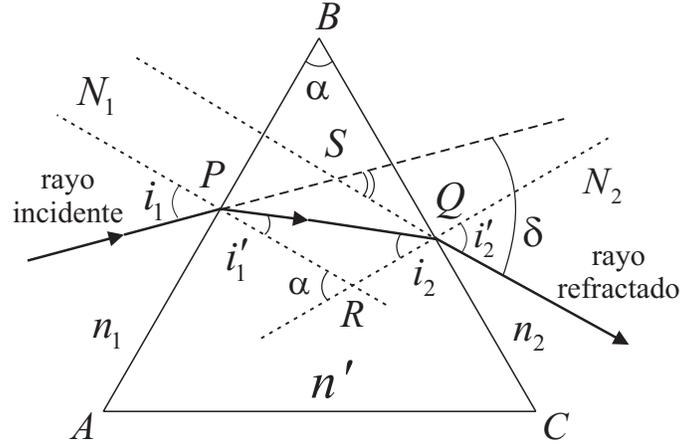


Figura 6: Trayectoria de un rayo luminoso en un prisma refractor. Las rectas \overline{PR} y \overline{QR} son, respectivamente, las normales a las caras \overline{AB} y \overline{BC} ; α es el ángulo del prisma e i, i' son los ángulos de incidencia y refracción correspondientes a las caras \overline{AB} y \overline{BC} ; además, $\angle SPQ = i_1 - i'_1$, $\angle SQP = i'_2 - i_2$ y $\angle PRQ = \pi - \alpha$.

Por conveniencia supóngase que $n_1 = n_2 = n_{\text{aire}} = 1$. Si el medio óptico es dispersivo, entonces $n = n(\lambda)$ y a cada longitud de onda λ , le corresponde un ángulo de desviación δ_λ ; es por esto, que en general a este elemento óptico se le conoce como *prisma dispersor* (en estos prismas, el ángulo α se encuentra entre los 30° y 60° , en cambio, en las *cuñas prismáticas* α tiene valores entre 2° y 10°). Puede demostrarse que, para una sola longitud de onda dada, el índice de refracción para ella puede medirse empleando la ecuación

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_m + \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\alpha}, \quad (14)$$

donde δ_m es lo que se conoce en la espectroscopía óptica como el *ángulo de desviación mínima*. Para éste ángulo de desviación mínima debe cumplirse que $i_1 = i'_2$ e $i'_1 = i_2$; consecuentemente n puede medirse experimentalmente con un refractómetro de prisma al determinar δ_m y α en dicho instrumento. Para ángulos pequeños (teoría paraxial), i.e., si $\theta \leq 5^\circ$, entonces $\sin \theta \approx \theta$, en tal caso, la Ec. (14) se reduce a la siguiente,

$$n = \frac{\delta_m}{\alpha} + 1 \quad \text{o} \quad \delta_m = \alpha(n - 1). \quad (15)$$

Esta misma relación puede justificarse del modo siguiente, mediante la ley de refracción, Ecs. (10) y (11), se obtienen

$$n_1 i_1 = n' i'_1 \quad \text{y} \quad n' i_2 = n_2 i'_2$$

en aire, $n_1 = n_2 = 1$, entonces

$$i_1 = n'i'_1 \quad \text{y} \quad n'i_2 = i'_2$$

de donde,

$$\delta = i_1 + i'_2 - \alpha = n'i'_1 + n'i_2 - \alpha$$

y usando la Ec. (12) queda,

$$\delta = n'i'_1 + n'(\alpha - i'_1) - \alpha = \alpha(n' - 1).$$

Finalmente, despejando para el índice de refracción, obtenemos

$$n' = \frac{\delta}{\alpha} + 1.$$

Igualdad de ángulos internos y externos. Vamos a justificar que en un prisma dispersor la condición de desviación mínima implica la igualdad de los ángulos externos i_1 e i'_2 y la igualdad de los ángulos internos i'_1 e i_2 . Para ello observemos en la Fig. 6 que las prolongaciones del rayo entrante y el rayo saliente se cortan en el punto S y se pone en claro el ángulo de desviación δ subtendido entre ambas prolongaciones. Las normales a las caras del prisma se cortan en el punto R formando un ángulo α que es igual al del prisma en su punta. Del triángulo PQR , $i'_1 + i_2$ y α son ángulos suplementarios ya que $i'_1 + i_2 + (\pi - \alpha) = \pi$, i.e., $\alpha = i'_1 + i_2$ que corresponde a la Ec. (12). Por otra parte, del triángulo PQS se deduce la Ec. (13) como sigue

$$\delta = (i_1 + i'_2) - (i'_1 + i_2) \Rightarrow \delta = i_1 + i'_2 - \alpha.$$

Supondremos por simplicidad, que el prisma está en aire de modo que $n_1 = n_2 = 1$ y aplicando la ley de refracción vemos que

$$\sin i_1 = n \sin i'_1 \quad \text{y} \quad \sin i'_2 = n \sin i_2. \quad (16)$$

Por otra parte, evidencia experimental muestra que para una radiación monocromática con una longitud de onda fija, el valor de δ alcanza un valor mínimo cuando varía el ángulo de incidencia i_1 . Así, considerando δ en función de dicho ángulo tenemos que

$$\frac{d\delta}{di_1} = \frac{d(i_1 + i'_2 - \alpha)}{di_1} = 1 + \frac{di'_2}{di_1}, \quad (17)$$

de la Ec. (16) también vemos que

$$\cos i_1 di_1 = n \cos i'_1 di'_1 \quad \text{y} \quad \cos i'_2 di'_2 = n \cos i_2 di_2, \quad (18)$$

además,

$$di'_1 + di_2 = d\alpha = 0. \quad (19)$$

De las Ecs. (18) y (19) se obtiene,

$$di'_2 = n \frac{\cos i_2}{\cos i'_2} di_2 = -n \frac{\cos i_2}{\cos i'_2} di'_1, \quad (20)$$

nuevamente de la Ec. (18) se obtiene

$$di'_1 = \frac{1}{n} \frac{\cos i_1}{\cos i'_1} di_1 \Rightarrow di'_2 = -\frac{\cos i_2}{\cos i'_2} \frac{\cos i_1}{\cos i'_1} di_1, \quad (21)$$

y substituyendo en la Ec. (17), la expresión queda así

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2}{\cos i'_2} \frac{\cos i_1}{\cos i'_1}. \quad (22)$$

Para obtener un valor mínimo debe anularse la derivada anterior lo cual da lugar a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{di_1} = 0 &\Leftrightarrow \cos i_2 \cos i_1 = \cos i'_2 \cos i'_1 \Leftrightarrow \cos^2 i_2 \cos^2 i_1 = \cos^2 i'_2 \cos^2 i'_1 \\ &\Leftrightarrow (1 - \sin^2 i_2)(1 - \sin^2 i_1) = (1 - \sin^2 i'_2)(1 - \sin^2 i'_1) \\ &\Leftrightarrow (1 - \sin^2 i_2)(1 - n^2 \sin^2 i'_1) = (1 - n^2 \sin^2 i_2)(1 - \sin^2 i'_1) \\ &\Leftrightarrow 1 - \sin^2 i_2 - n^2 \sin^2 i'_1 + n^2 \sin^2 i_2 \sin^2 i'_1 = 1 - \sin^2 i'_1 - n^2 \sin^2 i_2 + n^2 \sin^2 i_2 \sin^2 i'_1 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 i'_1 - n^2 \sin^2 i'_1 = \sin^2 i_2 - n^2 \sin^2 i_2 \\ &\Leftrightarrow (1 - n^2) \sin^2 i'_1 = (1 - n^2) \sin^2 i_2, \end{aligned} \quad (23)$$

de donde siendo $n > 1$, $(1 - n^2) \neq 0$, factor que puede cancelarse en ambos lados de la Ec. (23); de este modo,

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 i'_1 = \sin^2 i_2 \Leftrightarrow i'_1 = i_2. \quad (24)$$

Por lo tanto, empleando la primera relación de la Ec. (16), $\sin i_1 = n \sin i'_1 = n \sin i_2$; de esta igualdad y empleando la segunda relación de la Ec. (16), se obtiene $\sin i_1 = \sin i'_2$. Por lo tanto, $i_1 = i'_2$ como se deseaba demostrar.

2.2 Parámetros de Abbe

Una forma de caracterizar el vidrio que constituye a un prisma, una lente o una placa de vidrio es considerando el comportamiento de su índice de refracción al variar la longitud de onda de la radiación que cruza la muestra de vidrio; para ello, Abbe² introdujo el concepto

²Ernst Abbe, físico alemán del siglo XIX, estableció la teoría de la formación de imágenes en un microscopio convencional por primera vez aplicando el análisis proveniente de la teoría de la difracción que hoy en día se denomina como Óptica de Fourier.

del *poder dispersivo* de un vidrio óptico, el cuál lo definió mediante la siguiente expresión,

$$v_d = \frac{n_F - n_C}{n_d - 1} \quad (25)$$

donde,

- n_F es el índice de refracción para la línea del hidrógeno en 4861 \AA ,
- n_C es el índice de refracción para la línea del hidrógeno en 6563 \AA ,
- n_d es el índice de refracción para la línea del cloruro de sodio en 5876 \AA ,
- n_D es el índice de refracción para la línea del cloruro de sodio en 5893 \AA ;

con la notación de A° como un Armstrong e igual a 10^{-8} cm .

El *número de Abbe*, a su vez, se define como el inverso del poder dispersivo, i.e.,

$$\nu = \frac{1}{v_d} = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}, \quad (26)$$

y lo que se conoce como la *carta de vidrios* o *mapa de vidrios*, Fig. 7, es una gráfica con ejes coordenados representados por los parámetros ν y n_D .

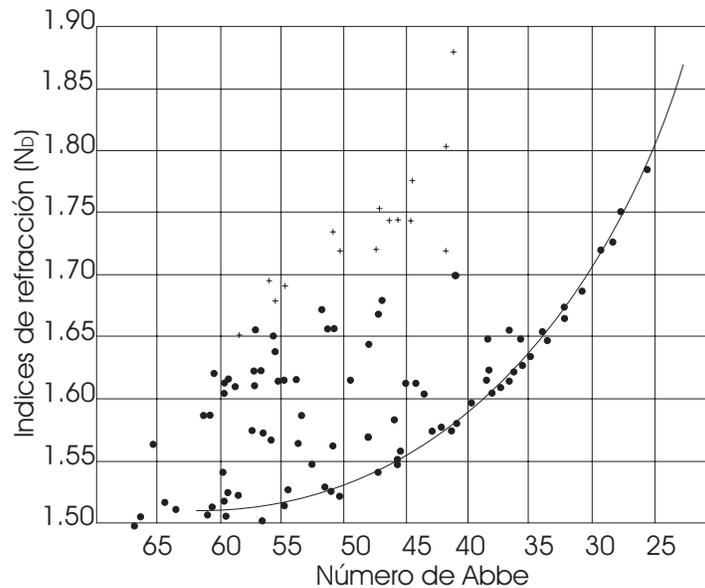


Figura 7: Mapa o carta de vidrios ópticos comerciales. Cada vidrio se caracteriza por su número de Abbe y su correspondiente valor del índice de refracción para n_D .

Como puede observarse de la Ec. (25), para medir n en diferentes longitudes de onda es necesario considerar el tipo de fuente luminosa y por esta razón, tradicionalmente, se emplean como fuentes de emisión aquellas que contienen hidrógeno y cloruro de sodio (sal común). En ambas ecuaciones, Ecs. (25) y (26), $n_d - 1$ es la *refractividad* y $n_F - n_C$ es la *refractividad media*; en general, para dos índices de refracción n_1 y n_2 , $n_1 - n_2$ se conoce como la *dispersión media parcial*. Las letras empleadas como subíndices en el índice de refracción corresponden a la nomenclatura de Fraunhofer empleada en espectroscopía para las líneas espectrales del elemento o compuesto químico bajo consideración (nótese que las longitudes de onda mostradas del NaCl están muy juntas, su diferencia es de 17Å , y bien podría emplearse n_D en vez de n_d). Los nombres de los vidrios ópticos comúnmente se dan en términos de sus compuestos químicos; aproximadamente existen unas diez compañías productoras de vidrio, y la mitad de ellas podría decirse que son de precisión, p. ej. Schott Glass Technologies u O'hara Company.

En el caso de un prisma dispersor, sabemos que, para ángulos pequeños, $\sin \alpha \approx \alpha$, entonces se puede escribir

$$\delta_d = \alpha(n_d - 1) \Rightarrow n_d - 1 = \frac{\delta_d}{\alpha},$$

y de igual manera,

$$\delta_F - \delta_C = (n_F - n_C)\alpha \Rightarrow n_F - n_C = \frac{\delta_F - \delta_C}{\alpha},$$

de modo que, el número de Abbe puede expresarse, para un *prisma delgado*, como:

$$\nu = \frac{\delta_d}{\delta_F - \delta_C}. \quad (27)$$

Esta última ecuación representa al cociente entre lo que se definió como la refractividad y la refractividad media dada en la Ec. (26), pero ahora expresada en términos de los ángulos de desviación mínima para ciertas longitudes de onda.

Como se describirá en la siguiente sección, la Ec. (14) se emplea en el diseño de *prismas acromáticos*, entre los cuales pueden incluirse como casos particulares las *cuñas acromáticas* y los *prismas de visión directa*. Al hecho de que un prisma disperse o descomponga la luz blanca en las diversas longitudes de onda que la componen (espectro visible) se le conoce formalmente como la *dispersión cromática* o *aberración cromática* que no es otra cosa que un “despliegue de los colores”. Esta última aberración está implícita en cualquier sistema óptico refractivo y en algunos sistemas ópticos, sus consecuencias son inevitables en el deterioro que sufren las imágenes.

2.3 Cuña acromática

Una cuña acromática se dispone como se muestra en la Fig. 8, donde el primer prisma está caracterizado por $\alpha_1(n_{d1} - 1)$ y ν_1 , y el segundo prisma por $\alpha_2(n_{d2} - 1)$ y ν_2 , pudiendo escribirse,

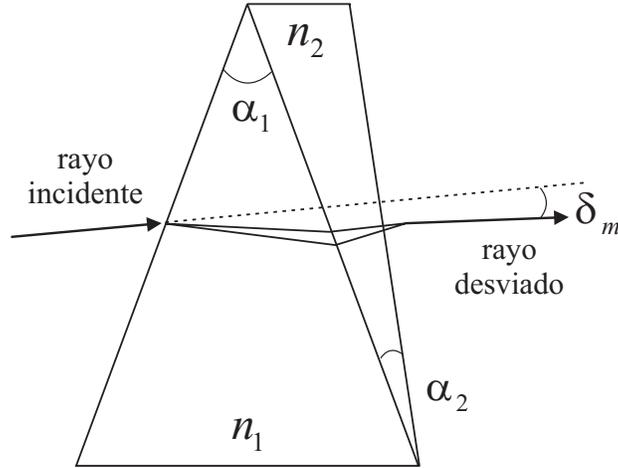


Figura 8: Cuña formada por dos prismas con ángulos α_1 y α_2 e índices de refracción n_1 y n_2 .

$$\nu_1 = \frac{\delta_{d1}}{\delta_{F1} - \delta_{C1}} \text{ y } \nu_2 = \frac{\delta_{d2}}{\delta_{F2} - \delta_{C2}}. \quad (28)$$

La desviación angular total, δ_T , de los rayos cruzando dos prismas y la dispersión total, Δ_T , se calculan de acuerdo a las fórmulas

$$\delta_T = \alpha_1(n_{d1} - 1) + \alpha_2(n_{d2} - 1), \quad (29)$$

$$\Delta_T = \alpha_1 \frac{(n_{d1} - 1)}{\nu_1} + \alpha_2 \frac{(n_{d2} - 1)}{\nu_2}; \quad (30)$$

naturalmente, la condición para que la cuña sea *acromática* o *no dispersiva*, es que $\Delta_T = 0$; despejando α_1 de la Ec. (30), se obtiene

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \frac{(n_{d2} - 1)}{\nu_2} \frac{\nu_1}{(n_{d1} - 1)}, \quad (31)$$

substituyendo la Ec. (31) en la Ec. (29) y despejando α_2 , se obtiene que,

$$\alpha_2 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \right) \frac{\delta_T}{(n_{d2} - 1)} \quad (32)$$

análogamente, para el ángulo α_1 , se tiene

$$\alpha_1 = \left(\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \right) \frac{\delta_T}{(n_{d1} - 1)}. \quad (33)$$

Por lo tanto, para poder obtener una cuña acromática en base a dos prismas de vidrio, de los cuales conocemos sus características como lo es el vidrio homogéneo para diferentes longitudes de onda, los ángulos de ambos prismas deben satisfacer las Ecs. (32) y (33).

Índices de refracción. Vamos a probar que en una cuña acromática se cumple la siguiente relación entre índices de refracción, $(n_F - n_C)_1 = (n_F - n_C)_2$ donde los subíndices se refieren al primer y al segundo prisma respectivamente. Hemos visto que para una cuña acromática debe cumplirse que $\Delta_T = 0$ o equivalentemente que

$$\frac{(n_{d1} - 1)}{\nu_1} \alpha_1 + \frac{(n_{d2} - 1)}{\nu_1} \alpha_2 = 0 \Rightarrow \frac{(n_{d1} - 1)}{\nu_1} \alpha_1 = \frac{(n_{d2} - 1)}{\nu_1} (-\alpha_2). \quad (34)$$

Utilizando la definición del número de Abbe, $\nu = (n_d - 1)/(n_F - n_C)$, vemos que

$$(n_F - n_C)_1 = \frac{n_{d1} - 1}{\nu_1} \quad \text{y} \quad (n_F - n_C)_2 = \frac{n_{d2} - 1}{\nu_2}, \quad (35)$$

que substituyendo en la Ec. (34) queda

$$(n_F - n_C)_1 \alpha_1 = (n_F - n_C)_2 (-\alpha_2). \quad (36)$$

En consecuencia, la relación más general que debe cumplirse entre los índices de refracción está dada por

$$(n_F - n_C)_1 |\alpha_1| = (n_F - n_C)_2 |\alpha_2|. \quad (37)$$

Si en ambos prismas los ángulos son iguales, es decir, si $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \alpha$ entonces obtenemos el resultado deseado

$$(n_F - n_C)_1 = (n_F - n_C)_2, \quad (38)$$

cuya desviación total es $\delta_T = |(n_{d1} - n_{d2})\alpha|$.

2.4 Prisma de visión directa

En este caso la condición que se impone a la combinación de dos prismas refractores es que la desviación total sea nula pero su poder dispersivo exista, i.e., $\Delta_T \neq 0$ y de preferencia se acreciente. Entonces, despejando α_1 de la Ec. (29), tomando en cuenta que $\delta_T = 0$ y

substituyendo en Δ_T , Ec. (30), se obtienen los valores necesarios para los ángulos de los prismas expresados como

$$\alpha_1 = \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)} \frac{\Delta_T}{(n_{d1} - 1)} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_2 - \nu_1)} \frac{\Delta_T}{(n_{d2} - 1)}. \quad (39)$$

Una aplicación de estas componentes ópticas, en las cuales se llegan a incluir dos o tres pares de prismas refractores, corresponde a un *espectroscopio de visión directa*, que además de ser portátil, permite realizar análisis espectrales de campo cualitativos.

Espectroscopio de visión directa. En este ejemplo diseñamos un espectroscopio de visión directa usando dos prismas usando dos de los vidrios más comunes denominados BK7 y F2; la disposición geométrica de estos prismas puede verse en la Fig. 8. Por definición, la desviación total debe anularse, i.e., $\delta_T = 0$ y los ángulos se calculan con las expresiones dadas en la Ec. (39). De la guía Schott de vidrios ópticos, los números de Abbe así como los índices de refracción correspondientes a la línea del cloruro de sodio en ambos vidrios son

$$\begin{aligned} \nu_1(\text{BK7}) &= 64.17, & n_{d1}(\text{BK7}) &= 1.51680, \\ \nu_2(\text{F2}) &= 36.37, & n_{d1}(\text{F2}) &= 1.62004. \end{aligned}$$

Substituyendo estos valores en la Ec. (39), se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(64.17)(36.37)}{36.37 - 64.17} \frac{\Delta_T}{1.51680 - 1} = -162.45\Delta_T \Rightarrow \Delta_T = -\frac{\alpha_1}{162.45} \\ \alpha_2 &= \frac{(64.17)(36.37)}{64.17 - 36.37} \frac{\Delta_T}{1.62004 - 1} = 135.40\Delta_T \Rightarrow \Delta_T = \frac{\alpha_2}{135.40} \end{aligned}$$

Se comprueba que

$$\begin{aligned} \delta_T &= (n_{d1} - 1)\alpha_1 + (n_{d2} - 1)\alpha_2 \\ &= (1.51680 - 1)(-162.45)\Delta_T + (1.62004 - 1)(135.40)\Delta_T \\ &= (-83.95 + 83.95)\Delta_T = 0. \end{aligned}$$

Independientemente del poder total dispersivo dado por Δ_T , los ángulos α_1, α_2 de los prismas deben guardar la siguiente relación donde el valor numérico de 1.2 se ha considerado en vez del valor exacto 1.19978,

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right| = \frac{162.45}{135.40} \simeq 1.2 \Rightarrow |\alpha_2| \simeq \frac{|\alpha_1|}{1.2} \simeq 0.83 |\alpha_1| .$$

Finalmente, el diseño en base a estos parámetros queda resumido en la siguiente tabla:

Prisma BK7	Prisma F2	Poder Dispersivo Total
α_1	$\alpha_2 \simeq 0.83\alpha_1$	$ \Delta_T \simeq \alpha_1 (0.006) \simeq \alpha_2 (0.007)$
4°	3.32°	0.025°
6°	4.98°	0.037°
8°	6.64°	0.049°
10°	8.30°	0.062°
12°	9.96°	0.074°
14°	11.62°	0.086°

2.5 Reflexión total

En la Fig. 9 se muestra la interfase entre dos medios cuyos índices son n y n' . Si se supone que $n' > n$ y que un rayo luminoso inicia su trayectoria en el medio n' y se transmite al medio n ; entonces, si el ángulo de incidencia es i'_1 , el ángulo de refracción es i_1 , del mismo modo si el ángulo de incidencia es ahora $i'_2 > i'_1$ entonces el ángulo de refracción es ahora $i_2 > i_1$. En

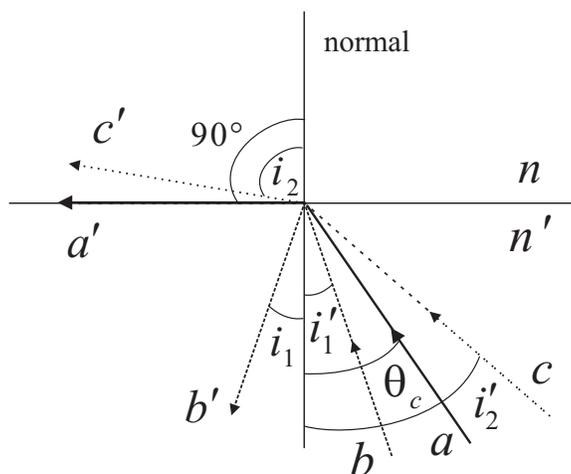


Figura 9: Fenómeno de reflexión total, sucede que para el ángulo crítico θ_c , el rayo no se refracta hacia el otro medio, permaneciendo reflejado en el mismo medio con la condición de que $n' > n$.

consecuencia, existirá un *ángulo crítico* θ_c para el cual ya no hay transmisión de luz pues el ángulo de refracción será precisamente igual a 90° . En tal situación la luz se propaga en la frontera de la interfaz que separa ambos medios y para un ángulo de incidencia $\theta > \theta_c$ habrá reflexión total como se indica en la misma figura. De acuerdo a la ley de Snell-Descartes,

Ec. (3), el valor del ángulo crítico está dado por:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right). \quad (40)$$

En el caso particular de una interfase agua-aire, con $n \simeq 1.33$ y $n' \simeq 1$, se obtiene $\theta_c = 42^\circ$.

2.6 Refractómetros

Un *refractómetro* es un instrumento que se usa para medir índices de refracción; a continuación se describen algunas configuraciones clásicas que emplean prismas refractores.

2.6.1 Refractómetro por autocolimación

El material por analizar, en este caso vidrio, es un prisma recto con ángulo $\alpha = \angle ABC$ cuyo índice de refracción n' es desconocido. Inmerso en aire como se muestra en la Fig. 10, y bajo la condición de autocolimación, esto equivale a medir el ángulo de refracción $i'_1 = \alpha$, con incidencia normal sobre la cara \overline{BC} del prisma. En tal caso, aplicando la Ec. (3),

$$\sin i_1 = n' \sin i'_1 = n' \sin \alpha,$$

de donde,

$$n' = \frac{\sin i_1}{\sin \alpha}. \quad (41)$$

Por lo tanto, medidos i_1 y α , con una base goniométrica, graduada en centésimas de grado, sobre la que descansa el prisma, es posible calcular el índice de refracción n' del vidrio en cuestión.

2.6.2 Refractómetro de Pülfrich

En este refractómetro, una muestra del material con índice de refracción desconocido n_0 se coloca sobre la base de un prisma de referencia con ángulo $\alpha = \angle BAC$ e índice de refracción $n \gg n_0$. Inmersos en aire tanto el prisma como el material, se hace incidir luz en forma rasante a la base del prisma de modo que el rayo refractado en la interfase $[n_0 : n]$ forme un ángulo θ en el interior del prisma (ver Fig. 11); este mismo rayo se vuelve a refractar en la interfaz $[n : n_{\text{aire}}]$ que corresponde al segmento \overline{AC} teniendo a γ como ángulo de incidencia y a φ como ángulo de refracción. Se cumplen entonces las relaciones siguientes:

$$n_0 \sin 90^\circ = n \sin \theta, \quad (42)$$

$$n \sin \gamma = \sin \varphi, \quad (43)$$

$$\alpha = \theta + \gamma. \quad (44)$$

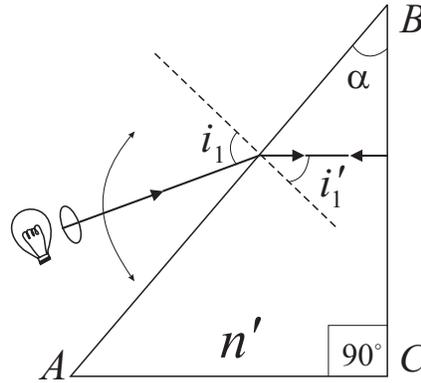


Figura 10: Refractómetro de autocolimación. A cierto ángulo de incidencia i_1 , el rayo incide en forma normal a la cara \overline{BC} reflejándose a lo largo de toda la trayectoria de incidencia, por lo tanto, $i'_1 = \alpha$.

Midiendo experimentalmente los valores de α y φ , el valor de n_0 puede determinarse de acuerdo a la ecuación

$$n_0 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \cos \alpha \sin \varphi. \quad (45)$$

la cual puede ser obtenida a partir de las Ecs. (42) a (44).

Si se considera un prisma de referencia con un ángulo recto, i.e., con $\alpha = 90^\circ$, este nuevo arreglo es conocido como *refractómetro de Pülfrich*, para el cual, la Ec. (45) se simplifica a la siguiente expresión

$$n_0 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}. \quad (46)$$

Con este tipo de refractómetro de Pülfrich solo la medida del ángulo φ , permite determinar el valor del índice de refracción desconocido n_0 del material; por esta razón el refractómetro de Pülfrich es de amplia aplicación en diversas áreas de la investigación y la industria. Cabe aclarar que el material con índice de refracción n_0 , puede ser un sólido o un líquido.

Error en la medición de n_0 . Vamos a deducir una ecuación que nos permita estimar el error al determinar el valor del índice de refracción n_0 cuando la condición de Pülfrich de $\alpha = 90^\circ$ no se cumple. Si en la Ec. (45) mantenemos el ángulo emergente φ como constante y el ángulo α del prisma del refractómetro como variable, realizamos un análisis de primer orden en una variable, pues en este caso n_0 es función de α . Si ε denota el error cometido en la medición del ángulo α entonces el error en la medición del índice de refracción n_0 está dado por

$$\varepsilon_{\text{med}} = n_0(\alpha + \varepsilon) - n_0(\alpha), \quad (47)$$

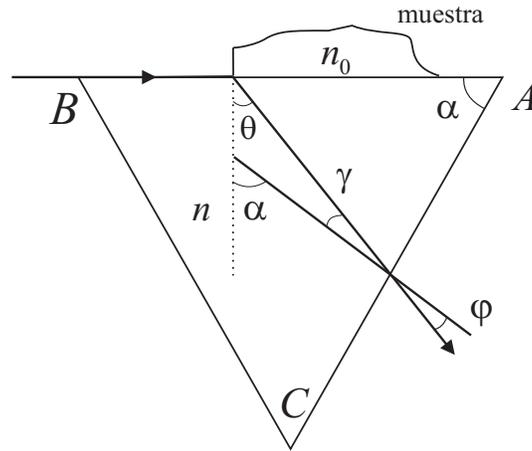


Figura 11: Refractómetro para materiales con índice de refracción desconocido, n_0 . Para $\alpha = 90^\circ$, $n > n_0$ y el refractómetro es conocido como el tipo Pülfrich.

y si $\varepsilon \approx 0$ vemos que

$$\frac{n_0(\alpha + \varepsilon) - n_0(\alpha)}{\varepsilon} \approx \frac{dn_0}{d\alpha} \Rightarrow \varepsilon_{\text{med}} \approx \varepsilon \frac{dn_0}{d\alpha}. \quad (48)$$

Para este refractómetro, consideramos valores del ángulo del prisma en la vecindad de 90° que matemáticamente equivale a evaluar la derivada anterior en $\alpha = 90^\circ$. Así, se obtiene

$$\varepsilon_{\text{med}} \approx \varepsilon \left. \frac{dn_0}{d\alpha} \right|_{\alpha=90^\circ} = \varepsilon (\cos \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sin \alpha \sin \varphi) \Big|_{\alpha=90^\circ} = \varepsilon \sin \varphi. \quad (49)$$

Por ejemplo, si $\varphi = 10^\circ$ es el valor del ángulo emergente y $\varepsilon = 0.5$, el error en la medición de n_0 es $\varepsilon_{\text{med}} \approx (0.5)(0.174) = 0.087$. En sentido más estricto, siendo n constante, la expresión dada en la misma Ec. (45) para n_0 es de hecho una función de dos variables, α y φ . En este caso hacemos un análisis también de primer orden pero en ambas variables de modo que la aproximación al error está dada ahora por la fórmula

$$\varepsilon_{\text{med}} \approx \left(\varepsilon_\alpha \left| \frac{dn_0}{d\alpha} \right| + \varepsilon_\varphi \left| \frac{dn_0}{d\varphi} \right| \right) \Big|_{\alpha=90^\circ} = \varepsilon_\alpha \sin \varphi + \varepsilon_\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}, \quad (50)$$

donde, ε_α denota el error cometido en la medición del ángulo del prisma y ε_φ denota el error cometido en la medición del ángulo emergente.

3 Espejos planos

3.1 El espejo plano

El *espejo plano* es un elemento óptico que permite fundamentalmente desviar los rayos luminosos en una dirección preferente; consta, en general, de un substrato de vidrio recubierto con una capa metálica, generalmente de aluminio, que permite la reflexión de la luz. Los espejos de uso más común tienen el depósito en la parte posterior y los espejos más especializados tienen el depósito al frente. Algunas características importantes de un espejo o serie de espejos planos son las siguientes:

- En términos generales se considera un espejo plano como un “doblador” de haces luminosos y es importante determinar el tamaño del espejo según la aplicación requerida. Como se ve en la Fig. 12, el *campo de visión* corresponde al ángulo entre las prolongaciones de los rayos reflejados provenientes de la fuente virtual situada tras el espejo que a su vez se encuentra a la misma distancia d que la fuente puntual real con respecto al espejo y a lo largo de la normal $\overline{FF'}$.

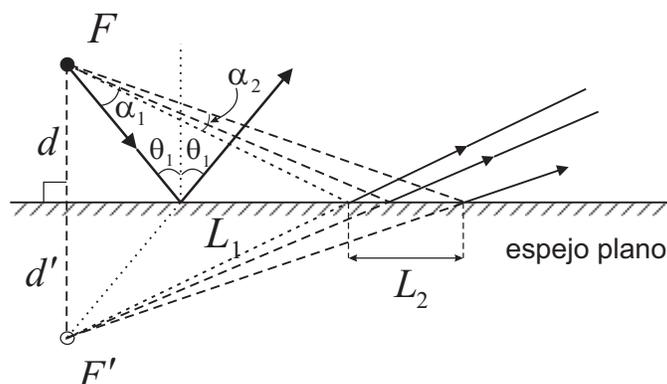


Figura 12: F es una fuente puntual de luz, F' es la imagen virtual de F producida por el espejo plano; α_1 y α_2 son los ángulos de los haces de luz que inciden sobre el espejo, y L_1, L_2 son las longitudes de los haces sobre el espejo.

- Las imágenes se pueden revertir de izquierda a derecha o de derecha a izquierda como se aprecia en la Fig. 13 con la letra **R**, si el observador está colocado en la posición 1. ¿Qué ocurre para el observador 2?
- En términos generales, es útil definir un sistema de coordenadas para determinar si una imagen está revertida o no, como puede concluirse de las posiciones de los observadores

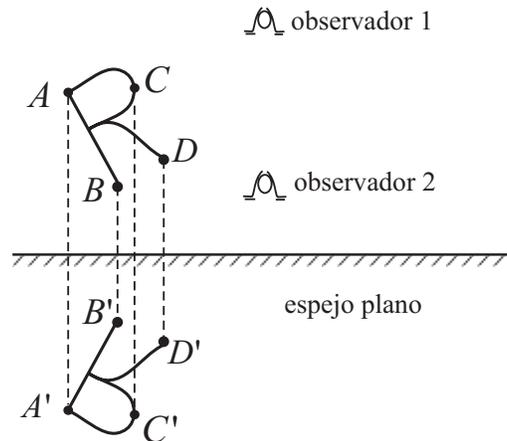


Figura 13: Considerando como objeto a la letra R, la imagen producida por el espejo se obtiene con los trazos de los puntos A, B, C y D, a sus puntos imagen A', B', C' y D' respectivamente.

en la Fig. 13. En ocasiones, abreviaremos “espejo plano” por *EP* o simplemente por *E* o *M*.

Campo angular de un espejo plano. La figura 14 presenta la configuración geométrica de un espejo plano retrovisor que comúnmente empleamos como un auxiliar visual en los automóviles ya sea como espejo interior o como espejo lateral. Suponemos conocidas la longitud l del espejo E , la distancia perpendicular d del observador a la prolongación de la línea que define al espejo, la distancia C que hay del centro del espejo a la perpendicular anterior y la distancia perpendicular D que hay entre el campo angular A y la línea que define E . El objetivo es entonces determinar el valor de A que es la longitud correspondiente al campo angular que ve el observador hacia atrás del espejo.

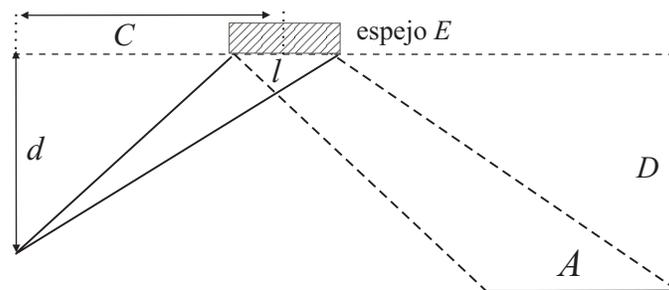


Figura 14: Campo angular A que abarca un espejo plano E para un observador situado a una distancia d perpendicular a la línea del espejo.

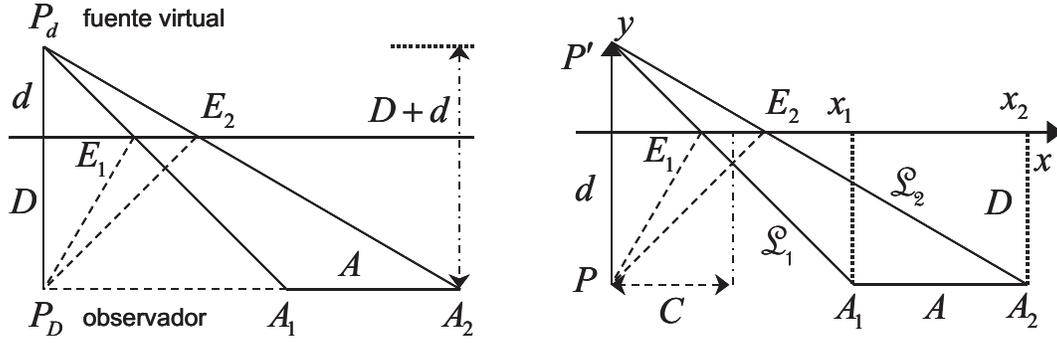


Figura 15: Izquierda, esquema para determinar A por geometría elemental; derecha, esquema para determinar A por geometría analítica.

Consideremos el primer esquema de la Fig. 15 en el cual los puntos P_d y P_D representan respectivamente una fuente virtual a la distancia del observador y una referencia respecto a la línea que define el campo angular; los puntos E_1 y E_2 son los extremos del espejo plano y análogamente los puntos A_1 y A_2 son los extremos del campo angular. Empleando el principio de Herón de la *geometría elemental* relativa a triángulos semejantes vemos que

$$\Delta P_d E_1 E_2 \sim \Delta P_D A_1 A_2 \Rightarrow \frac{A}{l} = \frac{D+d}{d} \Rightarrow A = l \left(\frac{D}{d} + 1 \right). \quad (51)$$

Del segundo esquema en la Fig. 15 y usando coordenadas como en *geometría analítica* tenemos que $P' = (0, d)$ y

$$E_1 = (C - 0.5l, 0); E_2 = (C + 0.5l, 0); A_1 = (x_1, -D); A_2 = (x_2, -D), \quad (52)$$

y las ecuaciones de las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 que pasan, respectivamente por los pares de puntos $P'E_1$ y $P'E_2$ son

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: y = \left(\frac{-d}{C - 0.5l} \right) x + d, \\ \mathcal{L}_2 &: y = \left(\frac{-d}{C + 0.5l} \right) x + d. \end{aligned} \quad (53)$$

Claramente,

$$\begin{aligned} A_1 \in \mathcal{L}_1 &\Rightarrow -D = \left(\frac{-d}{C - 0.5l} \right) x_1 + d \Rightarrow x_1 = (C - 0.5l) \left(\frac{D}{d} + 1 \right) \\ A_2 \in \mathcal{L}_2 &\Rightarrow -D = \left(\frac{-d}{C + 0.5l} \right) x_2 + d \Rightarrow x_2 = (C + 0.5l) \left(\frac{D}{d} + 1 \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Por lo tanto,

$$A = x_2 - x_1 = l \left(\frac{D}{d} + 1 \right). \quad (55)$$

Observemos que en ambas deducciones, el valor de C no aparece en el resultado final. Como un caso particular, supongamos que el campo angular se encuentra a 30 metros, que el espejo mide 10 cm y que la distancia al espejo es de 30 cm. Entonces, $D = 3000$ cm, $l = 10$ cm y $d = 30$ cm; empenado la Ec. (55), el campo angular tendrá un valor de $A = 10(3000/30 + 1) = 10(101) = 1010$ cm equivalentes a 10.1 m.

3.2 Dos espejos planos

Una configuración de *dos espejos planos* se muestra en la Fig. 16, siendo $\alpha = \angle E_1 E_2$ el ángulo entre ellos y δ el ángulo de desviación total, una vez que un rayo incidente es reflejado en ambos espejos. Una situación por demás interesante es que el número de imágenes entre dos espejos planos paralelos es infinito (para $\alpha = 0$); esto se ilustra en la Fig. 17, donde las imágenes producidas por cada uno de los espejos se convierte en objeto para el otro espejo y así sucesivamente.

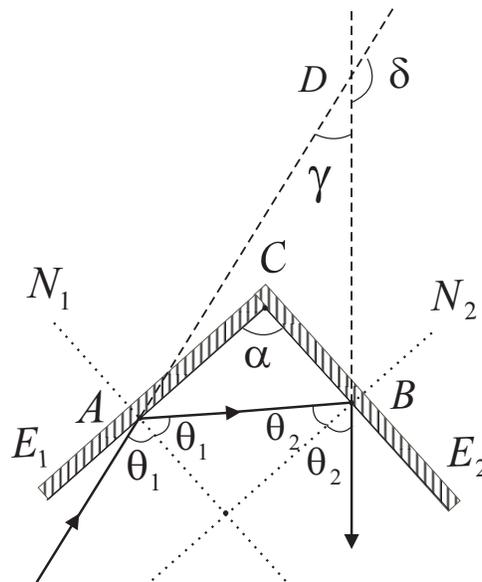


Figura 16: Reflexión de un rayo en dos espejos planos con un ángulo α entre ellos; δ es el ángulo de desviación total.

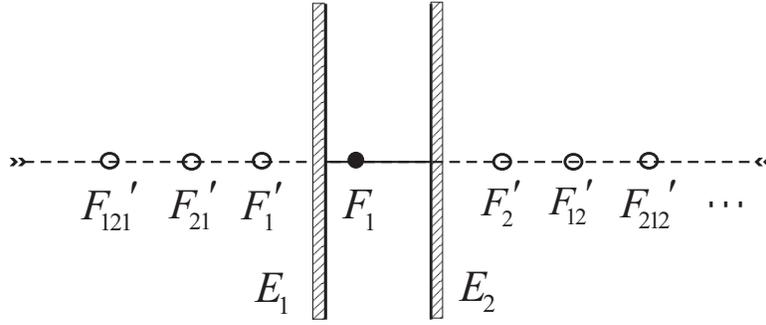


Figura 17: Imágenes puntuales múltiples producidas por dos espejos planos, E_1 y E_2 , paralelos entre sí.

La relación que existe entre los ángulos α y δ se obtendrá en base a la Fig. 16. Del triángulo ACB se tiene que

$$\pi = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \Rightarrow \alpha = \theta_1 + \theta_2; \quad (56)$$

con respecto al vértice D ,

$$\delta = 180^\circ - \gamma. \quad (57)$$

Del triángulo ABD se puede obtener la siguiente relación,

$$\gamma + (\pi - 2\theta_1) + (\pi - 2\theta_2) = \pi, \quad (58)$$

substituyendo γ en la Ec. (57), se obtiene

$$\delta = 2(\theta_1 + \theta_2), \quad (59)$$

y esta última ecuación en función de α , de la Ec. (56), es

$$\delta = 2\alpha. \quad (60)$$

3.3 Prismas reflectores

Los prismas reflectores son elementos ópticos que permiten cambiar la posición geométrica y orientación de una imagen u objeto pero no su tamaño. La posición puede estar formada por traslaciones, inversiones o rotaciones en planos determinados por las caras del prisma o paralelos a estas. Del objeto a la imagen deben tomarse en cuenta el número de reflexiones y el incremento del camino óptico, i.e., $CO = n \times \text{distancia recorrida en el prisma}$. Algunos prismas reflectores se muestran en las Figs. 18–20 y sus características se describen a continuación. En cada una de estas figuras se muestra la orientación de un objeto, después de reflejarse en las caras de los prismas.

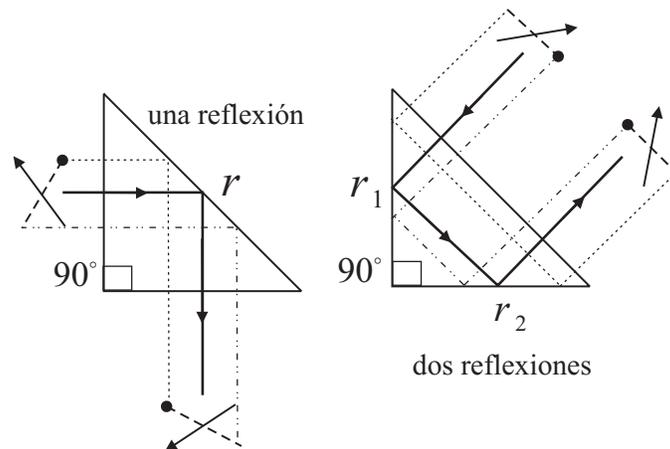


Figura 18: Prismas reflectores. a) Prisma básico y b) Prisma retrovisor.

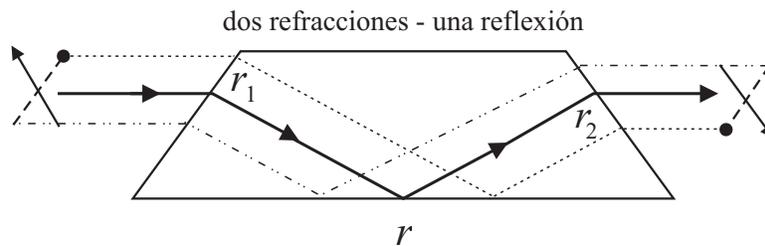


Figura 19: Prisma refractor-reflector Dove.

- El *prisma básico* es un prisma de 90° que opera con una reflexión, r , en la cara hipotenusa del prisma (ver Fig. 18a),
- El *prisma retrovisor* es un prisma de 90° que opera con dos reflexiones, r_1 y r_2 , las cuales ocurren en las caras del prisma que forman el ángulo recto (ver Fig. 18b),
- El *prisma Dove* es un trapecio o prisma truncado que opera con una reflexión, r , en la cara base del trapecio y dos refracciones, r_1 y r_2 , que ocurren en las caras opuestas a su base (ver Fig. 19),
- El *pentaprisma* opera con dos reflexiones, r_1 y r_2 , de modo que el rayo incidente y el rayo emergente formen un ángulo recto (ver Fig. 19b),
- El *sistema Porro* consta de dos prismas de 90° contrapuestos en su cara hipotenusa y desplazados entre sí por mitad. Opera con cuatro reflexiones (r_{11}, \dots, r_{22}), dos en

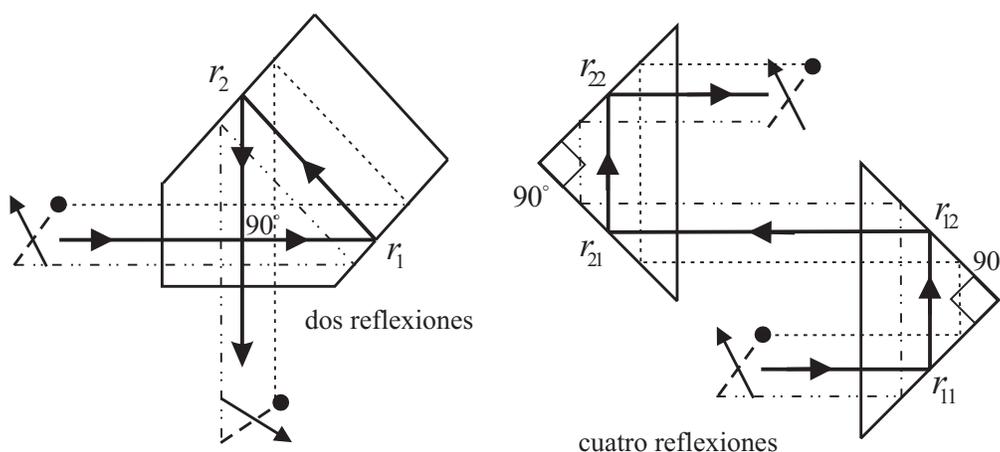


Figura 20: Prismas reflectores. a) Pentaprisma y b) Sistema Porro.

cada prisma. Este arreglo de prismas mantiene la misma orientación para cualquier objeto bajo observación, ya sea en reversión o inversión (ver Fig. 20) y es empleado, por ejemplo, en binoculares.

Objeto e imagen en prismas Porro. A continuación mostramos esquemáticamente en la Fig. 21 la orientación de la imagen de la letra 'R' que se obtiene cuando este objeto es reflejado en un sistema de dos prismas Porro dispuestos como en la parte b) de la Fig. 20.

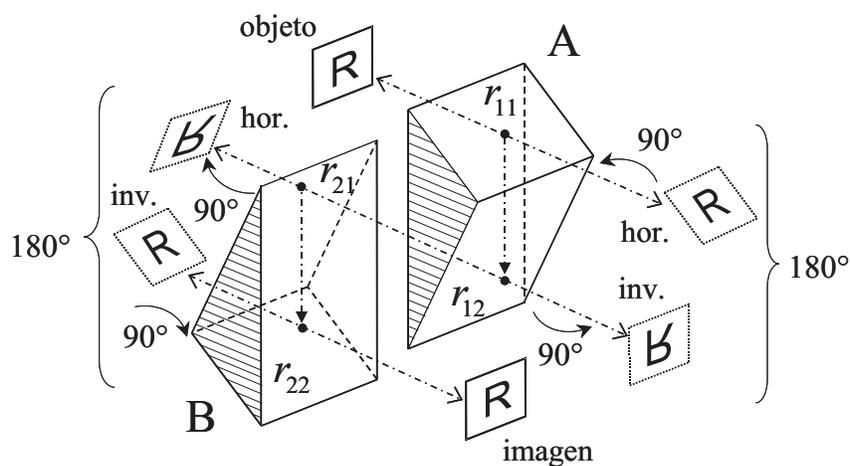


Figura 21: Reflexiones de la letra R en un sistema de dos prismas porro.

Indicamos también la orientación de cada una de las reflexiones que ocurren en las caras de estos prismas en el mismo diagrama así como en la tabla anexa; m-d indica que se usa un sistema tridimensional de “mano derecha” para efectuar el giro correspondiente:

Reflexión	Prisma	Giro	Orientación
r_{11}	A	$+90^\circ$	m-d acostada
r_{12}	A	$+90^\circ$	m-d invertida
r_{21}	B	-90°	m-d acostada
r_{22}	B	-90°	m-d invertida

Una técnica común para cuantificar el número de reflexiones y el camino óptico consiste en hacer el *diagrama túnel* correspondiente al prisma en cuestión. Como puede observarse, el camino total recorrido por un haz luminoso en cada uno de los prismas equivale al mismo trayecto en una placa de vidrio, con un cierto espesor d e índice de refracción n . Las líneas punteadas en cada uno de estos diagramas túnel mostrados en las Figs. 22 y 23 representan un desdoblamiento del prisma en cuestión para hacer patente el número de reflexiones, indicadas con un pequeño círculo, y el camino óptico total recorrido. Este último es “equivalente” a un trayecto rectilíneo en una placa de vidrio de caras paralelas.

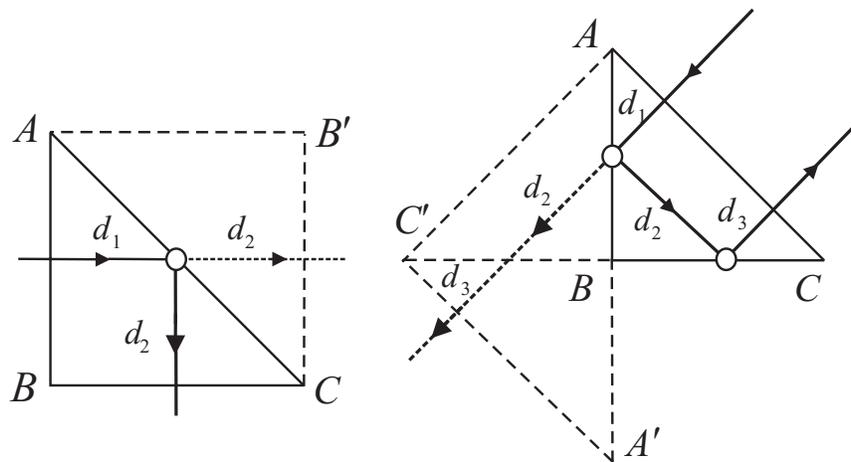


Figura 22: Diagramas túnel. a) En el prisma básico, $d = d_1 + d_2$ y b) en el prisma retrovisor, $d = d_1 + d_2 + d_3$.

3.4 Tratamiento vectorial de la ley de reflexión

Veamos como se describe la ley de la reflexión en forma vectorial. En la Fig. 24, la nomenclatura es la siguiente:

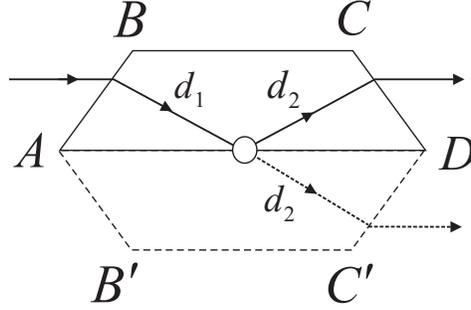


Figura 23: Diagrama túnel del prisma Dove, $d = d_1 + d_2$.

$\hat{\mathbf{s}}_0$ = vector unitario a lo largo del rayo incidente,

$\hat{\mathbf{s}}_1$ = vector unitario a lo largo del rayo reflejado,

$\hat{\mathbf{N}}$ = vector unitario normal a la interfaz,

I = ángulo de incidencia o de reflexión,

Γ = múltiplo escalar del vector normal a la superficie reflectora;

podemos ver que, según el diagrama, se puede escribir la ecuación,

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0 + \Gamma \hat{\mathbf{N}}. \quad (61)$$

Efectuando el producto escalar con $\hat{\mathbf{N}}$ de la ecuación (61), y tomando en cuenta el ángulo I , entonces se tiene

$$\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}} + \Gamma \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{N}}, \quad \text{y} \quad (62)$$

$$\Gamma = \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}, \quad (63)$$

$$= -|\hat{\mathbf{s}}_1| |\hat{\mathbf{N}}| \cos I - |\hat{\mathbf{s}}_0| |\hat{\mathbf{N}}| \cos I, \quad (64)$$

y finalmente,

$$\Gamma = -2 \cos I = -2 \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}. \quad (65)$$

De tal modo que la *ley de reflexión*, en forma *vectorial*, queda expresada como

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0 - (2 \cos I) \hat{\mathbf{N}} \quad \text{ó} \quad \hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0 - 2(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}) \hat{\mathbf{N}}. \quad (66)$$

También es común expresar los vectores unitarios $\hat{\mathbf{s}}_0$, $\hat{\mathbf{s}}_1$, y $\hat{\mathbf{N}}$ en función de sus cosenos directores, es decir,

$$\hat{\mathbf{s}}_0(k_0, l_0, m_0) \quad ; \quad \hat{\mathbf{s}}_1(k_1, l_1, m_1) \quad ; \quad \hat{\mathbf{N}}(K, L, M). \quad (67)$$

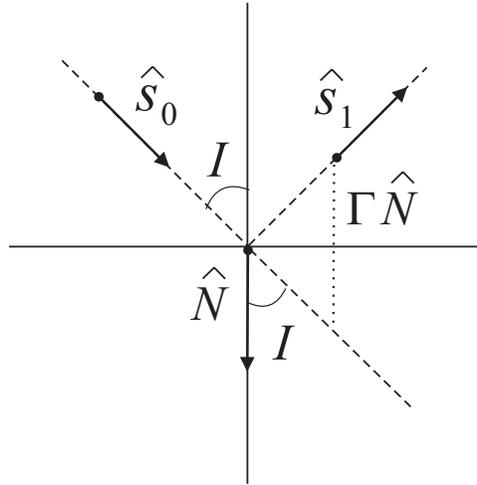


Figura 24: Esquema vectorial para la ley de reflexión.

Cuando esta representación se emplea en la Ec. (66), es posible tener una forma matricial de la misma ecuación, como se verá más adelante.

Cosenos directores del vector normal. Empleando la ley de la reflexión en forma vectorial vamos a encontrar las ecuaciones de los cosenos directores de la normal a un espejo plano cuando se conocen las direcciones del rayo incidente y reflejado.

Denotamos los cosenos directores de la normal $\hat{\mathbf{N}}$ por (K, L, M) , y refiriéndonos a la Fig. 25, calculamos los cosenos directores de los siguientes vectores:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \overrightarrow{P_0O} = (k_0, l_0, m_0) \quad ; \quad \hat{\mathbf{s}}_1 = \overrightarrow{OP_1} = (k_1, l_1, m_1) \quad ; \quad \hat{\mathbf{N}} = \overrightarrow{OP_N} = (K, L, M) \quad (68)$$

de modo que, por tener longitud unitaria, es decir, $|\hat{\mathbf{s}}_0| = |\hat{\mathbf{s}}_1| = |\hat{\mathbf{N}}| = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 &= \frac{0 - k_0}{|\hat{\mathbf{s}}_0|} = -k_0 \quad ; \quad \cos \alpha_1 = k_1 \quad ; \quad \cos \alpha = K, \\ \cos \beta_0 &= \frac{0 - l_0}{|\hat{\mathbf{s}}_0|} = -l_0 \quad ; \quad \cos \beta_1 = l_1 \quad ; \quad \cos \beta = L, \\ \cos \gamma_0 &= \frac{0 - m_0}{|\hat{\mathbf{s}}_0|} = -m_0 \quad ; \quad \cos \gamma_1 = m_1 \quad ; \quad \cos \gamma = M. \end{aligned} \quad (69)$$

De la ley de reflexión en forma vectorial, primera expresión de la Ec. (66), se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= \frac{1}{2 \cos I} (\hat{\mathbf{s}}_0 - \hat{\mathbf{s}}_1) \\ &= \frac{1}{2 \cos I} [(-k_0 - k_1)\mathbf{i} + (-l_0 - l_1)\mathbf{j} + (-m_0 - m_1)\mathbf{k}] \\ &= K\mathbf{i} + L\mathbf{j} + M\mathbf{k} \end{aligned} \quad (70)$$

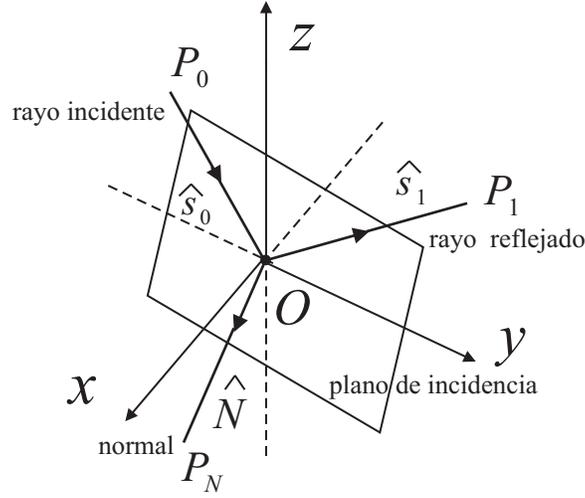


Figura 25: Vectores de dirección \hat{s}_0 del rayo incidente, \hat{s}_1 del rayo reflejado y \hat{N} de la normal que yacen en el mismo plano determinado por los puntos P_0 , P_1 y P_N .

e igualando componentes, los cosenos directores de la normal \hat{N} quedan expresados en función de los cosenos directores de los vectores dirección del rayo incidente \hat{s}_0 , y reflejado \hat{s}_1 ; de esta manera

$$\cos \alpha = K = -\frac{k_0 + k_1}{2 \cos I} \quad ; \quad \cos \beta = L = -\frac{l_0 + l_1}{2 \cos I} \quad ; \quad \cos \gamma = M = -\frac{m_0 + m_1}{2 \cos I}, \quad (71)$$

o equivalentemente,

$$\hat{N}(K, L, M) = -\frac{1}{2 \cos I}(k_0 + k_1, l_0 + l_1, m_0 + m_1). \quad (72)$$

3.4.1 Dos espejos planos ortogonales

Consideremos la Fig. 26; en ésta tenemos tres vectores unitarios correspondientes al rayo incidente \hat{s}_0 , al rayo interno entre reflexiones \hat{s}_1 y al rayo emergente \hat{s}_2 , y los respectivos vectores unitarios normales a cada uno de los espejos, \hat{N}_1 y \hat{N}_2 . Entonces, aplicando la Ec. (62) para cada una de las reflexiones,

$$\hat{s}_1 = \hat{s}_0 - 2(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_1)\hat{N}_1 \quad \text{y} \quad \hat{s}_2 = \hat{s}_1 - 2(\hat{s}_1 \cdot \hat{N}_2)\hat{N}_2 \quad (73)$$

al substituir \hat{s}_1 en \hat{s}_2 ,

$$\begin{aligned} \hat{s}_2 &= [\hat{s}_0 - 2(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_1)\hat{N}_1] - 2([\hat{s}_0 - 2(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_1)\hat{N}_1] \cdot \hat{N}_2)\hat{N}_2 \\ &= \hat{s}_0 - 2(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_1)\hat{N}_1 - 2(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_2)\hat{N}_2 + 4(\hat{s}_0 \cdot \hat{N}_1)(\hat{N}_1 \cdot \hat{N}_2)\hat{N}_2 \end{aligned} \quad (74)$$

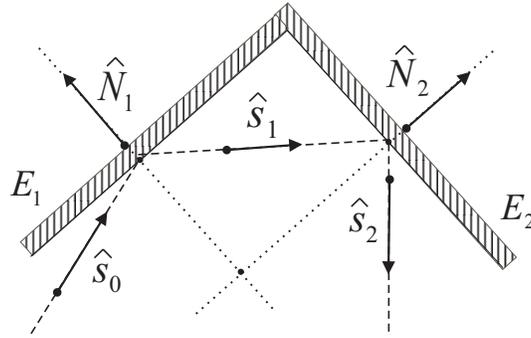


Figura 26: Esquema vectorial de reflexión en dos espejos planos.

Como un caso particular, si se satisface que ambos espejos tienen un ángulo entre sí igual a 90° , esto implica que el producto, $\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 = 0$; entonces, el vector representando el reflejo en los dos espejos es igual a

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_0 - 2[(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)\hat{\mathbf{N}}_1 + (\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2)\hat{\mathbf{N}}_2]. \quad (75)$$

De esta manera, conociendo la dirección $\hat{\mathbf{s}}_0$ del rayo incidente y las normales $\hat{\mathbf{N}}_1$ y $\hat{\mathbf{N}}_2$ de ambos espejos planos se puede calcular la dirección del rayo emergente, i.e., $\hat{\mathbf{s}}_2$.

3.4.2 Retroreflector perfecto

A este reflector también se le conoce como “esquina de cubo” y consta de tres espejos planos E_1, E_2, E_3 dispuestos ortogonalmente entre sí, en un sistema de coordenadas cartesianas xyz , ver Fig. 27. Las normales a los planos yz, zx, xy , donde se encuentran las superficies reflectoras, son respectivamente los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_1 &= (-1, 0, 0) = -K_1 \mathbf{i} = -\mathbf{i} \\ \hat{\mathbf{N}}_2 &= (0, -1, 0) = -L_2 \mathbf{j} = -\mathbf{j} \\ \hat{\mathbf{N}}_3 &= (0, 0, -1) = -M_3 \mathbf{k} = -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (76)$$

Partiendo de las ecuaciones (62) y (63) se obtiene la siguiente expresión matricial para el caso de una sola reflexión,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2K^2 & -2KL & -2KM \\ -2KL & 1 - 2L^2 & -2LM \\ -2KM & -2LM & 1 - 2M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ l_0 \\ m_0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

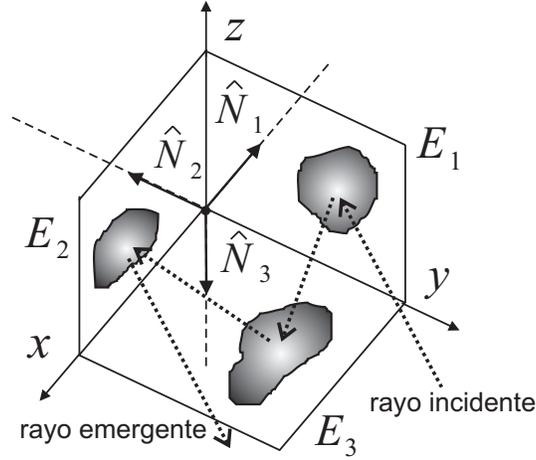


Figura 27: Esquema de un retroreflector de cubo.

donde la matriz R de 3×3 se denomina como la *matriz de reflexión*. Para los tres espejos de una esquina de cubo, se tiene

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Entonces la dirección del rayo emergente $\hat{\mathbf{s}}_3^T$ para un rayo que incide en E_1 , se refleja en E_3 y se vuelve a reflejar en E_2 se calcula usando las matrices (78):

$$\hat{\mathbf{s}}_3^T = ((\hat{\mathbf{s}}_0^T R_1) R_3) R_2 = -\hat{\mathbf{s}}_0^T \quad (79)$$

significando que, finalmente, el rayo “regresa” en la misma dirección.

Si P denota la distancia del origen del sistema de coordenadas xyz al espejo E y $\rho = \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}$, entonces, la *matriz de orientación* en reflexión para un solo espejo según la disposición espacial mostrada en la Fig. 28, está dada por

$$R = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ Pk_0 & 1 - Kk_0 & -Lk_0 & -Mk_0 \\ Pl_0 & -Kl_0 & 1 - Ll_0 & -Ml_0 \\ Pm_0 & -Km_0 & -Lm_0 & 1 - Mm_0 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

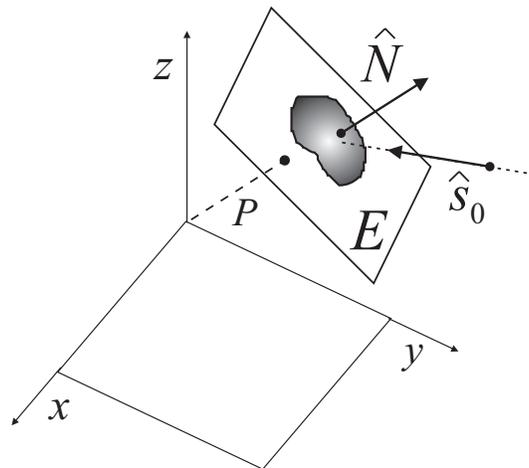


Figura 28: Esquema vectorial de un espejo con orientación arbitraria.

Espejos que no son planos. En la Fig. 29 se muestra la disposición de dos espejos que generalmente conforman un *telescopio*. Vamos a explicar que tipo de curva geométrica deben tener los dos espejos para que los rayos esquematizados viajen en la trayectoria indicada.

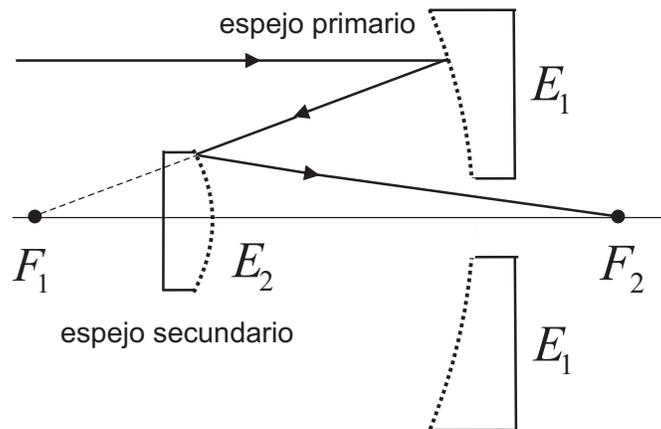


Figura 29: Dos espejos que forman un telescopio.

De hecho esta configuración corresponde a un telescopio Cassegrain con óptica clásica. E_1 es el espejo primario el cual requiere de un forma parabólica y E_2 es el espejo secundario cuya forma es hiperbólica. El rayo incidente en E_1 se refleja hacia su foco F_1 y al encontrarse en su camino al espejo E_2 se vuelve a reflejar hacia el foco F_2 de E_2 puesto que este último es convexo. Esta configuración permite obtener una distancia focal grande aún cuando E_2 es más pequeño que E_1 .

El punto focal F_2 se denomina foco de Cassegrain y es *estigmático*, lo cual significa que está exento de aberración esférica; sin embargo, la aberración de coma producida por E_1 no puede evitarse en esta configuración. Dado que el segundo espejo es convexo se obtienen razones focales altas, p. ej., de $f/8$ y $f/13$ que permiten la observación de objetos extendidos como los planetas de nuestro sistema solar con buena resolución espacial así como el aislamiento de una estrella entre sus vecinas para un estudio detallado.

4 Trazo de rayos

4.1 Nomenclatura

Con el propósito de analizar el paso o la propagación de un haz luminoso através de un sistema óptico, es necesario plantear una teoría de carácter geométrico que consiste en la aplicación de la ley de refracción aplicada a la trayectoria que puede seguir un rayo. Esta técnica generalmente recibe el nombre de “trazo de rayos”, y aquí presentamos los fundamentos para el caso de *superficies esféricas*, centradas en un eje común denominado *eje óptico*. Conceptualmente, en el contexto de la óptica geométrica, un “sistema óptico” es una combinación de superficies esféricas o asféricas, posiblemente construídas con materiales de distinto índice de refracción, y sumergidas en medios gaseosos, líquidos, o en aire; dentro de este texto consideraremos únicamente el aire como medio en el cual opera un sistema óptico cualquiera, sin embargo en las fórmulas que se derivarán en las próximas secciones, no hay que olvidar esta restricción que se está considerando. Para otros medios que no sea el aire, será necesario revisar cuidadosamente la formulación. Todas las superficies que forman el sistema comparten un eje común o eje óptico, como ya se mencionó, el cual sirve como referencia para los parámetros físicos involucrados. Si se emplea la nomenclatura sugerida por Conrady, mostrada en la Fig. 30, se deben tomar en cuenta los siguientes convenios de signos:

- Parámetros de la superficie
 1. Las rectas normales para los diferentes puntos de una superficie esférica se consideran unidas en el punto común denominado *centro de curvatura* de la superficie, abreviado c.c.;
 2. la interfaz entre dos medios se describirá por sus índices de refracción $[N : N']$;
 3. la distancia entre los vértices de dos superficies se denotará por e ,
 4. el *radio de curvatura* r de cada superficie es la distancia del vértice al centro de curvatura de la superficie correspondiente.

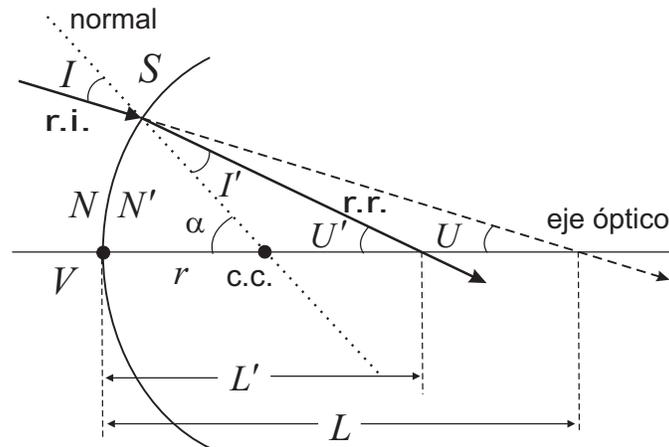


Figura 30: S es la superficie esférica; r es el radio de curvatura, V es el vértice de la superficie y c.c. denota el centro de curvatura de la superficie. I, U son los ángulos del rayo incidente (r.i.) e I', U' son los ángulos del rayo refractado (r.r.)

- Parámetros del rayo

1. El ángulo de incidencia de un rayo sobre un punto de la superficie óptica se denota por I ;
2. el ángulo entre el rayo incidente con el eje óptico es denotado por U ,
3. la distancia entre el vértice de la superficie y el cruce del rayo incidente con el eje óptico denota la distancia L ,
4. para el rayo refractado los parámetros correspondientes serán I', U' y L' .

La idea es entonces determinar el valor del ángulo U' y la distancia L' , que representan la dirección y el cruce del rayo refractado con respecto al eje óptico. De igual forma se pueden encontrar las intersecciones del rayo luminoso con las otras superficies que forman el sistema óptico.

4.2 Fórmulas del trazo exacto

De la Fig. 31 es posible derivar, por simple geometría, y por la ley de los senos aplicada a los triángulos $PccP_2$ y $PccP_1$ las siguientes relaciones,

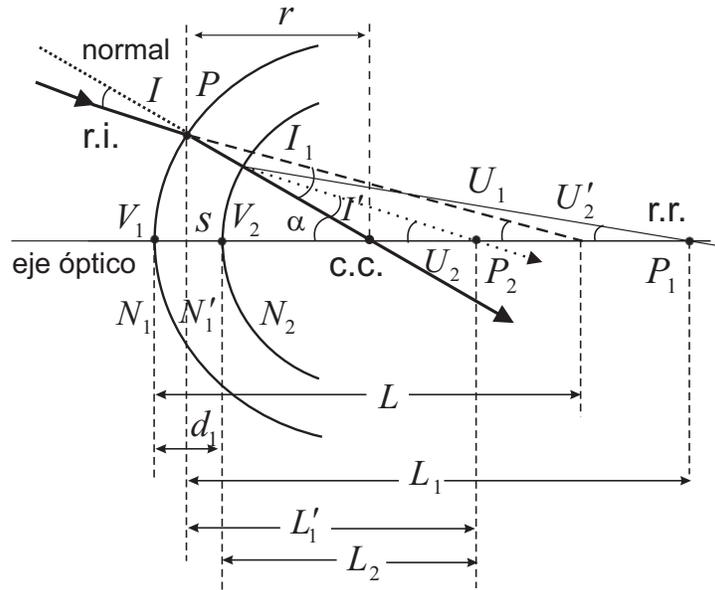


Figura 31: Trazo exacto de rayos meridionales en dos superficies refractoras; con las fórmulas de transferencia: $U'_1 = U_2$, $L_2 = L'_1 - s$, $N'_1 = N_2$.

$$\alpha = I + U = I' + U', \quad (81)$$

$$\frac{\sin U}{r} = \frac{\sin I}{L - r}, \quad (82)$$

$$\frac{\sin U'}{r} = \frac{\sin I'}{L' - r}; \quad (83)$$

además usando la ley de refracción, Ec. (3),

$$N \sin I = N' \sin I'. \quad (84)$$

Conocidos los parámetros de la superficie N , N' y r y los parámetros auxiliares del rayo incidente U , L ; el objetivo es establecer como, matemáticamente, se podrá resolver el sistema de cuatro ecuaciones, Ecs.(81–84) con cuatro incógnitas, a saber: I , I' , U' , L' . Para conocer finalmente los valores de U' y L' consideremos la siguiente argumentación. En primer lugar, de la Ec. (82) se obtiene el valor de I , de la Ec. (84) se puede obtener el valor de I' ; habiendo determinado esos parámetros, de la Ec. (82) se puede deducir el valor de U' , y por último se obtiene el valor de L' de la Ec. (84). Es decir, las ecuaciones anteriores quedarían

organizadas, en forma secuencial, del siguiente modo,

$$\begin{aligned} \sin I &= \frac{\sin U}{r}(L - r) \quad ; \quad \sin I' = \frac{N \sin I}{N'}, \\ U' &= U + I - I' \quad ; \quad L' = r \left(1 + \frac{\sin I'}{\sin U'} \right). \end{aligned} \quad (85)$$

En resumen, conocidos los datos iniciales del rayo incidente U, L y los parámetros de la superficie refractora N, N', r , y por medio de la secuencia mostrada en el conjunto de ecuaciones Ecs.(85) se obtienen los datos finales para U', L' del rayo refractado. Para una segunda superficie se hace uso de lo que se conoce como las *ecuaciones de transferencia* que son $U_2 = U'_1$ y $L_2 = L'_1 - d_1$, donde d_1 es la distancia entre los vértices V_1 y V_2 de las superficies ópticas refractoras que tienen un eje óptico común. En general para un sistema óptico que consta de k superficies con valores de N_j, N'_j, r_j para $j = 1, \dots, k$, se dispone de $k - 1$ ecuaciones de transferencia que son

$$U_{j+1} = U'_j \quad ; \quad L_{j+1} = L'_j - d_j \quad \text{para } j = 1, \dots, k - 1, \quad (86)$$

donde d_j es la distancia entre los vértices V_j y V_{j+1} .

4.3 Convenio de signos

En el tratamiento de problemas relacionados con el trazo de rayos es necesario establecer una convención de signos ya que diferentes autores en la literatura obtienen sus conclusiones o fórmulas en base a esta técnica. Aquí hacemos las consideraciones siguientes tomando en cuenta que la luz viaja de izquierda a derecha (ver Fig. 31):

- las *distancias* son *positivas* (+) para las cantidades r, L, L' si c.c., P_1 y P_2 están a la *derecha* del vértice V ,
- las *distancias* son *negativas* (−) para las cantidades r, L, L' si c.c., P_1 y P_2 están a la *izquierda* del vértice V ,
- los *ángulos* U y U' son *positivos* girando el eje óptico *hacia el rayo* en el sentido de las manecillas del reloj,
- los *ángulos* I e I' son *positivos* girando la normal a la superficie hacia el rayo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

En el presente contexto, entendemos por un sistema óptico un conjunto de superficies que pueden ser refractoras, reflectoras o una combinación de ambas. En cualquier caso existirá esparcimiento entre superficies cuyo índice de refracción sea el aire. Pero en otros casos serán lentes “cementadas”, es decir, una superficie unida con la otra. También es importante

mencionar que el objeto e imagen podrán estar en aire, o en algún otro medio, como por ejemplo, agua o algún gas. La imagen formada por un sistema óptico de este tipo se le conoce usualmente como *imagen aérea* por el hecho de estar inmersa en el espacio.

4.4 Fórmulas del trazo paraxial en superficies esféricas

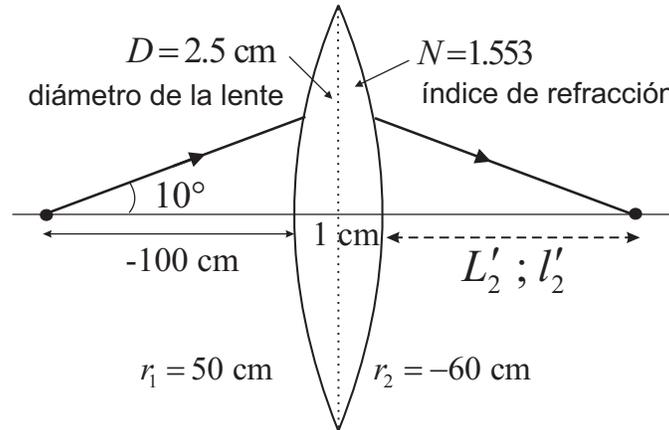
Las expresiones para el trazo exacto de rayos se simplifican siempre que se considere la condición de ángulos pequeños, o sea, cuando los rayos son muy cercanos al eje óptico. En tal caso se dice que el sistema óptico opera bajo las *condiciones de Gauss* o de la *teoría paraxial* de rayos. Esta simplificación geométrica constituye el primer paso en el diseño de un sistema óptico para comprobar sus especificaciones, en el sentido que el comportamiento “ideal” de dicho sistema corresponde a su comportamiento “paraxial”. A un ángulo α se le considera “pequeño” si $\alpha \leq 5^\circ$, entonces $\sin \alpha \approx \alpha$. En este caso y con el propósito de distinguir del trazo exacto de rayos, los parámetros o variables involucradas tanto para las superficies como para los rayos, exceptuando el radio de curvatura, se escribirán en *minúsculas*; de tal modo, las fórmulas para el trazo paraxial se escriben, a partir de las Ecs.(81–84) como

$$\begin{aligned} i &= \frac{u}{r}(l - r) \quad ; \quad i' = \frac{n}{n'}i, \\ u' &= u + i - i' \quad ; \quad l' = r \left(1 + \frac{i'}{u'} \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Ejemplo de trazo de rayos. Dada la Fig. 32 y los datos correspondientes indicados en ella mostramos en seguida como determinar las distancias L'_2 y l'_2 usando respectivamente las ecuaciones de trazo exacto de rayos y las ecuaciones de trazo paraxial. Del mismo modo determinamos la diferencia en grados entre los ángulos U'_2 y u'_2 .

Primero, se emplean las expresiones de la Ec. (85) del trazo exacto de rayos de modo que para la *primera superficie*,

$$\begin{aligned} I_1 &= \arcsin \left(\frac{\sin U_1}{r_1} (L_1 - r_1) \right) = \arcsin \left(\frac{\sin(-10)}{50} (-100 - 50) \right) \\ &= \arcsin(0.521) = 31.396 \simeq 31.4^\circ, \\ I'_1 &= \arcsin \left(\frac{N_1 \sin I_1}{N'_1} \right) = \arcsin \left(\frac{\sin(31.396)}{1.553} \right) \\ &= \arcsin(0.335) = 19.600 \simeq 19.6^\circ, \\ U'_1 &= (I_1 + U_1) - I'_1 = 31.396 - 10 - 19.6 = 1.796 \simeq 1.8^\circ \\ L'_1 &= r_1 \left(1 + \frac{\sin I'_1}{\sin U'_1} \right) = 50 \left(1 + \frac{\sin(19.6)}{\sin(1.796)} \right) \\ &= 50 \left(1 + \frac{0.335}{0.031} \right) = 584.44 \simeq 584.4 \text{ cm.} \end{aligned}$$


 Figura 32: Esquema relativo al cálculo de las distancias L_2 y l'_2 .

Por las relaciones de transferencia dadas en la Ec. (86), vemos que $U_2 = U'_1 = 1.8^\circ$ y $L_2 = L'_1 - d = 584.44 - 1 = 583.44$ cm; además, $N_2 = N'_1 = N = 1.553$ y $N'_2 = 1$. Así, para la *segunda superficie* se tiene que,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \arcsin\left(\frac{\sin U_2}{r_2}(L_2 - r_2)\right) = \arcsin\left(\frac{\sin(1.796)}{-60}(583.44 - (-60))\right) \\
 &= \arcsin(-0.336) = -19.639 \simeq -19.6^\circ, \\
 I'_2 &= \arcsin\left(\frac{N_2 \sin I_2}{N'_2}\right) = \arcsin(1.553(-0.336)) \\
 &= \arcsin(-0.522) = -31.454 \simeq -31.4^\circ, \\
 U'_2 &= (I_2 + U_2) - I'_2 = (-19.639 + 1.796) - (-31.454) = 13.611 \simeq 13.6^\circ, \\
 L'_2 &= r_2 \left(1 + \frac{\sin I'_2}{\sin U'_2}\right) = (-60) \left(1 + \frac{\sin(-31.454)}{\sin(13.611)}\right) \\
 &= (-60) \left(1 + \frac{-0.522}{0.235}\right) = 73.043 \simeq 73 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Ahora, de las expresiones dadas en la Ec. (87) para trazo de rayos paraxiales tenemos para la *primera superficie*

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{l_1 - r_1}{r_1} u_1 = \frac{-100 - 50}{50}(-10) = 30^\circ, \\
 i'_1 &= \frac{N_1}{N'_1} i_1 = \frac{30}{1.553} = 19.317 \simeq 19.3^\circ, \\
 u'_1 &= (i_1 + u_1) - i'_1 = 30 + (-10) - 19.317 = 0.683 \simeq 0.7^\circ, \\
 l'_1 &= r_1 \left(1 + \frac{i'_1}{u'_1}\right) = 50 \left(1 + \frac{19.317}{0.683}\right) = 1464.124 \simeq 1464.1 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

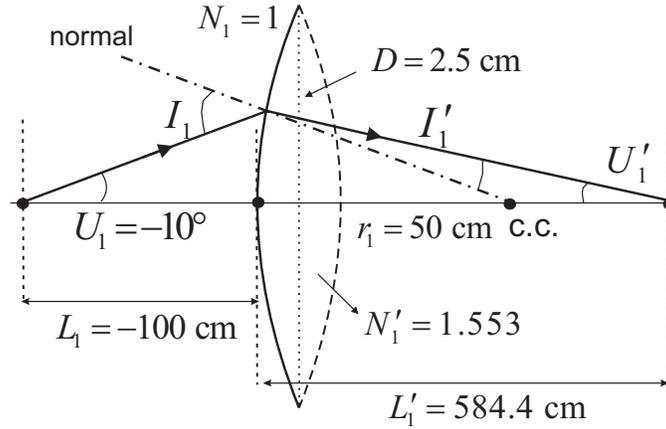


Figura 33: Esquema relativo al trazo exacto de rayos respecto de la primera superficie.

Aplicando otra vez las relaciones de transferencia dadas en la Ec. (86), vemos que $u_2 = u'_1 = 0.7^\circ$ y $l_2 = l'_1 - d = 1464.129 - 1 = 1463.129$ cm. Así, para la *segunda superficie* se tiene que,

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{l_2 - r_2}{r_2} u_2 = \frac{1463.129 - (-60)}{-60} (0.683) = -17.338^\circ \simeq -17.3^\circ, \\ i'_2 &= \frac{N_2}{N'_2} i_2 = (1.553)(-17.338) = -26.926 \simeq -26.9^\circ, \\ u'_2 &= (i_2 + u_2) - i'_2 = (-17.338 + 0.683) - (-26.926) = 10.271 \simeq 10.3^\circ, \\ l'_2 &= r_2 \left(1 + \frac{i'_2}{u'_2} \right) = (-60) \left(1 + \frac{-26.926}{10.271} \right) = 97.293 \simeq 97.3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Es importante hacer notar que las distancias L'_2 o l'_2 referidas a la intersección del eje óptico con los rayos que salen de la lente corresponden a la *distancia de un punto imagen* asociado a un punto objeto frente a la lente que en este caso lo consideramos colocado sobre el eje óptico. Las diferencias longitudinal y angular entre ambos tipos de trazo de rayos, i. e., exacto y paraxial son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta L'_2 &= |L'_2 - l'_2| = |73.043 - 97.293| = 24.25 \simeq 24 \text{ cm}, \\ \Delta U'_2 &= |U'_2 - u'_2| = |13.611 - 10.271| = 3.34 \simeq 3.3^\circ, \end{aligned}$$

las cuales son “grandes” debido a que el ángulo $U_1 = -10^\circ$ *no* es en realidad suficientemente pequeño para aplicar las ecuaciones de trazo paraxial. De hecho, las diferencias $\Delta L'_2$ y $\Delta U'_2$ representan el error absoluto cometido en la distancia del punto imagen así como del ángulo con el eje óptico por haber usado la aproximación paraxial. Veamos ahora que sucede con las distancias L'_2 y l'_2 si los radios de curvatura de ambas superficies aumentan de valor y lo mismo para el espesor d de la lente en cuestión.

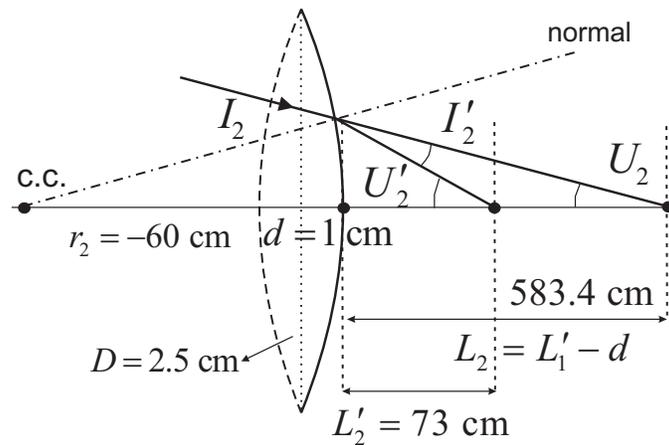


Figura 34: Esquema relativo al trazado exacto de rayos respecto de la segunda superficie.

r_1	r_2	d	L'_2	l'_2	U'_2	u'_2	$\Delta L'_2$	$\Delta U'_2$
50	-60	1	72.98	97.30	13.64	10.27	24.32	3.37
60	-70	1	110.85	140.51	9.10	7.12	29.66	1.98
70	-80	1	165.30	207.67	6.14	4.82	42.37	1.32
80	-90	1	253.18	326.47	4.02	3.07	73.29	0.95
50	-60	5	73.02	97.27	13.55	10.24	24.25	3.30
60	-70	5	110.86	140.48	9.09	7.14	29.61	1.96
70	-80	5	165.12	207.19	6.16	4.90	42.07	1.31
80	-90	5	252.07	323.90	4.06	3.12	71.84	0.94
50	-60	10	73.07	97.24	13.43	10.21	24.17	3.22
60	-70	10	110.88	140.44	9.08	7.16	29.56	1.93
70	-80	10	164.80	206.59	6.20	4.91	41.70	1.29
80	-90	10	250.70	320.81	4.11	3.18	70.11	0.93
50	-60	15	73.17	97.20	13.32	10.18	24.09	3.14
60	-70	15	110.90	140.40	9.07	7.18	29.50	1.90
70	-80	15	164.67	206.00	6.23	4.95	41.33	1.28
80	-90	15	249.37	317.83	4.17	3.24	68.46	0.42

En la tabla mostrada se muestra como los valores de los radios r_1 y r_2 se aumentan simultáneamente cada 10 cm donde se han agrupado estos incrementos con un espesor variable de 1, 5, 10 y 15 cm. Para este ejemplo, se observa que el error en la distancia $\Delta L'_2$ aumenta si los radios de curvatura r_1, r_2 se incrementan y que la contribución del espesor d de la lente es menos significativa. En forma cualitativa, los centros de curvatura CC_1 y CC_2 se alejan sobre el eje óptico y las superficies van siendo cada vez menos esféricas por lo cual esta distancia aumenta. La siguiente tabla da los valores de L'_2 y l'_2 si el ángulo inicial $U_1 = u_1$ queda dentro de la zona

paraxial. Puede verse que si $U_1 \rightarrow 0$, entonces $\Delta L'_2, \Delta U'_2 \rightarrow 0$.

$U_1 = u_1$	d	L'_2	l'_2	U'_2	u'_2	$\Delta L'_2$	$\Delta U'_2$
-10°	1	72.98	97.3	13.64	10.27	24.32	3.37
-5°	1	91.34	97.3	5.48	5.14	5.96	0.34
-3°	1	95.15	97.3	3.15	3.08	2.15	0.07
-1°	1	97.06	97.3	1.03	1.03	0.24	0.00

4.4.1 Método $y-nu$

Este método emplea como parámetros de cálculo para conocer la trayectoria de los rayos, a través de una superficie refractora, la altura y del rayo incidente sobre la superficie y con respecto al eje óptico, y el ángulo u que forma la prolongación de este rayo con el eje óptico como se aprecia en la Fig. 35. Veamos como se emplean las expresiones dadas en la Ec. (87) para encontrar el valor del ángulo u' del rayo refractado, por la superficie en cuestión.

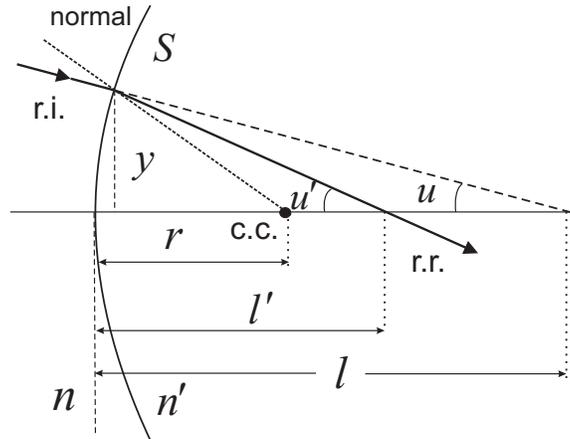


Figura 35: Parámetros y nomenclatura usados en teoría paraxial de la refracción de un rayo en una superficie esférica; trazos $y - nu$ y $l - l'$.

De la primera y cuarta ecuaciones, al multiplicar respectivamente por n y n' , obtenemos

$$ni = \frac{l-r}{r}nu \quad \text{y} \quad n'i' = \frac{l'-r}{r}n'u'. \quad (88)$$

De la tercera expresión que es la ley de refracción, tenemos $ni = n'i'$, y al sustituirla en la Ec. (88) se obtiene,

$$\frac{l-r}{r}nu = \frac{l'-r}{r}n'u', \quad (89)$$

pero, como se observa en la Fig. 35, la altura $y = lu = l'u'$ (para ángulos pequeños otra vez), entonces

$$\frac{(y/u) - r}{r} nu = \frac{(y/u') - r}{r} n'u'. \quad (90)$$

Después de algunos pasos algebraicos, a partir de la Ec. (90), se obtiene la expresión final

$$n'u' = nu + (n' - n) \frac{y}{r}. \quad (91)$$

Esta última ecuación corresponde a lo que se conoce como el método “y-nu”. Otras versiones de la Ec. (91) son estas

$$u' = \frac{1}{n'} \left[nu + \frac{y}{r} (n' - n) \right], \quad (92)$$

o si se define $c = r^{-1}$, entonces

$$u' = \frac{1}{n'} [nu + yc(n' - n)]. \quad (93)$$

4.4.2 Método $l-l'$

Este método emplea como variables de cálculo las distancias l y l' correspondientes a las proyecciones sobre el eje óptico de la prolongación del rayo incidente y del rayo refractado como se indica en la Fig. 35. Puesto que,

$$u = \frac{y}{l} \quad \text{y} \quad u' = \frac{y}{l'}$$

al substituir, u y u' en la Ec. (91) se obtiene la fórmula

$$\frac{n'}{l'} = \frac{n}{l} + \frac{n' - n}{r}. \quad (94)$$

Esta ecuación aparece en un gran número de textos, ya que establece una relación entre la distancia l del objeto y la distancia l' de la imagen expresada mediante los parámetros de la superficie que son n' , n y r .

4.4.3 Tamaño de la imagen e invariante de Lagrange

En el tratamiento de las imágenes ópticas correspondientes a objetos reales y formadas por superficies refractoras y reflectoras, es importante conocer los efectos que éstas superficies le causan a las dimensiones de un objeto. Por ello, vamos a mencionar lo relativo a las dimensiones de la imagen cuando la luz de un objeto pasa por una superficie refractora.

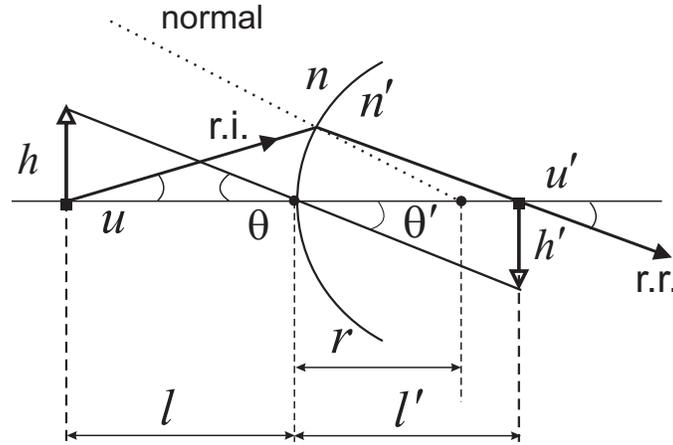


Figura 36: Esquema de rayos para las diversas ampliaciones e invariantes.

En referencia a la Fig. 36 y considerando las expresiones obtenidas en los métodos previos correspondientes al caso paraxial, Ecs. (92) y (94), vemos que las expresiones que definen los conceptos de *aumento* o *amplificación*, lateral o transversal, longitudinal y angular, son

$$\text{aumento lateral} = \frac{h'}{h} = m = \frac{\text{altura imagen}}{\text{altura objeto}}, \quad (95)$$

$$\text{aumento longitudinal} = \frac{\delta l'}{\delta l} = \bar{m} = \frac{\text{longitud imagen (eje óptico)}}{\text{longitud objeto (eje óptico)}}, \quad (96)$$

$$\text{aumento angular} = \frac{u'}{u} = m_\alpha = \frac{\text{ángulo rayo refractado}}{\text{ángulo rayo incidente}}. \quad (97)$$

En todo sistema óptico, como los considerados en éste texto, hay ciertas cantidades formadas por una combinación de productos o cocientes de los parámetros involucrados que se “conservan” o permanecen constantes cuando un haz luminoso pasa por una o varias superficies del sistema. A estas cantidades se les conoce como *invariantes*, y en un sentido geométrico y físico establecen las características y limitaciones del sistema de superficies; además, son de gran utilidad para comprobar los cálculos del trazo de rayos. Usando la nomenclatura de la Fig. 36 y usando la ley de refracción, vemos que

$$n\theta = n'\theta' \quad \text{o} \quad n\frac{h}{l} = n'\frac{h'}{l'}$$

y como $y = lu = l'u'$, al despejar l y l' , y eliminar y resulta que,

$$nhu \equiv n'h'u'. \quad (98)$$

A esta relación, Ec. (98) se le conoce como el *invariante de Lagrange* y significa que el producto nhu se conserva al pasar de una superficie refractora a otra, desde el primer elemento refractivo o reflector del sistema, hasta el último que se tome en cuenta. Resumimos el modo de empleo de este invariante como sigue,

1. Si se conocen las cantidades nhu y n' , al calcular u' , queda unívocamente determinada la altura de la imagen h' para satisfacer la Ec. (98) del invariante de Lagrange, análogamente,
2. Si se conocen las cantidades $n'h'u'$ y n , al calcular u , se determina unívocamente la altura del objeto h .

Cuando se trata de varias superficies, el invariante de Lagrange se aplica en cadena recordando que de acuerdo a las relaciones de transferencia dadas en la Ec. (86), $n_{j+1} = n'_j$ y $u_{j+1} = u'_j$; en tal caso, para k superficies se tiene el siguiente conjunto de identidades,

$$\begin{aligned}
 n_1 h_1 u_1 &\equiv n'_1 h'_1 u'_1 \equiv n_2 h_2 u_2, \\
 n_2 h_2 u_2 &\equiv n'_2 h'_2 u'_2 \equiv n_3 h_3 u_3, \\
 &\vdots \\
 n_k h_k u_k &\equiv n'_k h'_k u'_k.
 \end{aligned} \tag{99}$$

Finalmente se concluye que, para un sistema de k superficies, debe cumplirse que, $n_1 h_1 u_1 \equiv n'_k h'_k u'_k$. Por ejemplo, en el caso de una cámara fotográfica de 35 mm, $h'_k = 35/2$ mm corresponde al formato de la película fotográfica, además como $n_1 = n'_k = 1$ entonces $h_1 u_1 = h'_k u'_k$. Resulta claro que el movimiento de ajuste de las lentes de la cámara fotográfica corresponde a un ajuste del ángulo y de la altura del objeto, de modo que la última igualdad debe satisfacerse. Las ampliaciones mostradas en las Ecs. (95),(96) y (97) se siguen cumpliendo para k superficies en cuyo caso $h' = h'_k$, $\delta l' = \delta l'_k$ y $u' = u'_k$.

4.5 Refracción gráfica en superficies esféricas

Una construcción gráfica interesante, que en algunos casos puede sustituir los cálculos descritos en la sección del trazado exacto de rayos, consiste en representar la refracción en una superficie esférica, Fig. 38 en combinación con el diagrama adicional de la Fig. 37. La siguiente nomenclatura se emplea para ambas figuras.

1. N es la normal a la superficie trazada desde el centro de curvatura, c.c., al punto de incidencia del rayo '1' (superficie convexa) o '4' (superficie cóncava).
2. c.c. y r son, respectivamente, el centro de curvatura y el radio del casquete de la superficie refractora.

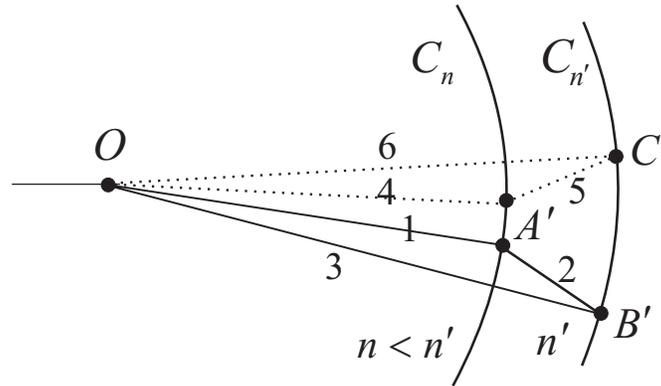


Figura 37: Plano auxiliar de circunferencias concéntricas, $C_n C_{n'}$, para el trazo gráfico de rayos.

3. n y n' son los índices de refracción de los medios a ambos lados de la superficie refractora.
4. r.i. es el rayo incidente ('1' y '4').
5. r.r. es el rayo refractado ('3' y '6').

En el diagrama auxiliar de la Fig. 37, se trazan dos círculos cuyos radios son respectivamente proporcionales a n y n' . Es decir, la circunferencia C_n de radio \overline{on} representa al medio de índice n y la circunferencia $C_{n'}$ de radio $\overline{on'}$ representa al medio de índice n' . Supóngase que $n < n'$, en consecuencia, C_n será concéntrica a $C_{n'}$. Los rayos en la interfaz [$n : n'$] los representamos como segmentos de recta en el espacio $C_n C_{n'}$, los cuales nombraremos de la misma forma pero primados para distinguirlos entre ambas figuras, el de la superficie refractora (Fig. 38) y el diagrama auxiliar (Fig. 37).

Así, por ejemplo, el rayo incidente '1' en la Fig. 38 que corta a la superficie esférica (convexa) en A lo trazamos con el *mismo ángulo de inclinación* en el plano $C_n C_{n'}$ de la Fig. 37 de modo que $1 \parallel OA'$. Análogamente, se traza el segmento correspondiente a la normal a la superficie en el punto A sobre la superficie refractora con el mismo ángulo α que ésta forma con el eje óptico; así, en el plano $C_n C_{n'}$ corresponde al segmento $\overline{A'B'} \parallel 2$ en la Fig. 37, el cual también es paralelo al radio de curvatura y corta a $C_{n'}$ en B' . Resulta de esta construcción que en el diagrama auxiliar Fig. 37, el segmento $\overline{OB'} \parallel 3$ equivale a la dirección del rayo refractado en la Fig. 38. Como otro ejemplo, el rayo incidente '4' en la Fig. 38 que corta a la superficie cóncava en A lo trazamos con el *mismo ángulo de inclinación* en el plano $C_n C_{n'}$ de la Fig. 37 de modo que $4 \parallel OA'$ (línea punteada). El segmento relativo a la normal a la superficie cóncava en el punto A , se traza con el mismo ángulo β que ésta forma con el eje óptico, que en el plano $C_n C_{n'}$ corresponde al segmento $\overline{A'C'} \parallel 5$ en la Fig. 37. Por lo

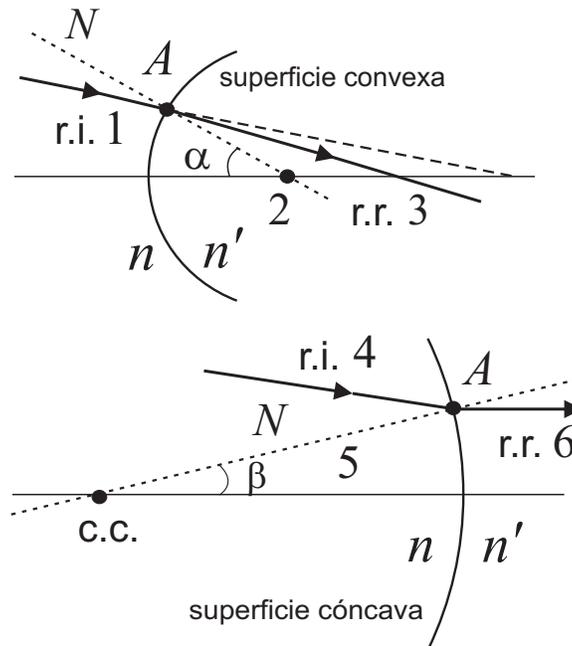


Figura 38: Trazo gráfico de rayos, refracción en superficies convexas y cóncavas.

tanto, en el diagrama auxiliar Fig. 37, el segmento $\overline{OC'}$ \parallel 6 equivale a la dirección del rayo refractado en la Fig. 38.

Pueden usarse las leyes de la reflexión y la refracción en forma vectorial, para dar una justificación matemática de este procedimiento gráfico. Es interesante notar que en la aproximación paraxial, los círculos de la Fig. 37 se convierten en las rectas paralelas L_n y $L_{n'}$. También en este caso, para determinar el ángulo de refracción del rayo refractado, la construcción se hace de la misma forma explicada en base a ambas figuras.

5 Lentes

El elemento óptico refractivo fundamental en su concepto más simplificado es la *lente delgada* que se muestra en la Fig. 39. Está constituida por dos superficies esféricas refractoras de radios r_1 y r_2 hechas de vidrio óptico con índice de refracción n y con una separación o espesor s , entre las superficies igual a cero. Considerando la Ec. (94) del método $l-l'$, las

expresiones correspondientes para cada superficie refractora, son

$$1^{\text{era}} \text{ superficie: } \frac{n'_1}{l'_1} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r_1}(n'_1 - n_1), \quad (100)$$

$$2^{\text{nda}} \text{ superficie: } \frac{n'_2}{l'_2} - \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{r_2}(n'_2 - n_2); \quad (101)$$

de las fórmulas de transferencia, Ec. (86), $l_2 = l'_1 - s$. Considerando el caso de una lente delgada con $s = 0$, resulta que $l_2 = l'_1$ y si $n_2 = n'_1$, entonces sumando ambas Ecs. (100) y (101), se obtiene

$$\frac{n'_2}{l'_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r_1}(n'_1 - n_1) + \frac{1}{r_2}(n'_2 - n_2). \quad (102)$$

Si la lente se encuentra en aire, $n_1 = n'_2 = 1$; además, haciendo $n_2 = n'_1 = n$ (material de la lente) nos queda la expresión final que se encuentra en la mayoría de los libros de texto de óptica y física general, i.e.,

$$\frac{1}{l'_2} - \frac{1}{l_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (103)$$

Es importante remarcar la importancia de las simplificaciones que se han hecho, para llegar

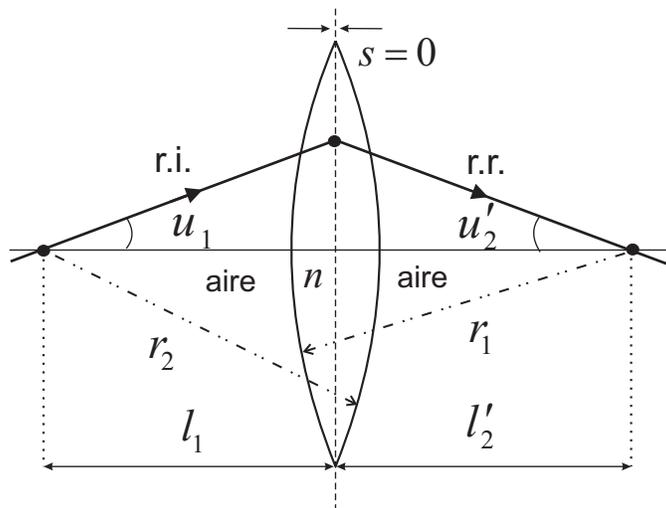


Figura 39: Lente delgada con índice de refracción n inmersa en aire y los parámetros que especifican el trayecto de un rayo luminoso.

a esta ecuación tan sencilla, que está dentro de la teoría paraxial de los sistemas ópticos. La

Ec. (103) se ha obtenido considerando la teoría paraxial (ángulos pequeños), y suponiendo que las lentes son delgadas, con espesores matemáticamente igual a cero; de acuerdo a las ecuaciones de transferencia, esto significa darle un valor de cero a la distancia entre los vértices de las superficies contiguas. Esta fórmula es la base teórica fundamental para el *análisis de primer orden* de cualquier sistema óptico, en el cual todos los elementos se consideran como lentes delgadas y en forma sucesiva se van encontrando las distancias l' como resultado de una l inicial y los parámetros de cada una de las lentes delgadas del sistema.

5.1 Distancia focal

Se define la *distancia focal* f de una lente refractora delgada, ver Fig. 40, como la distancia $l'_2 = f$ cuando $l_1 = \infty$. De aquí surge la famosa ecuación del *constructor de lentes* debida a Gauss, matemático alemán del siglo XIX. Substituyendo en la Ec. (103), $l_1 = \infty$, entonces

$$\frac{1}{l'_2} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (104)$$

En consecuencia, del análisis de la Ec. (104), existen muchas combinaciones posibles de valores de n, r_1, r_2 que proporcionan una misma f . La distancia focal de una lente delgada se toma respecto de un plano transversal al eje óptico representando la lente. En el caso de lentes gruesas o reales, la distancia focal se refiere a la distancia que se mide a partir del plano principal, concepto que se definirá más adelante.

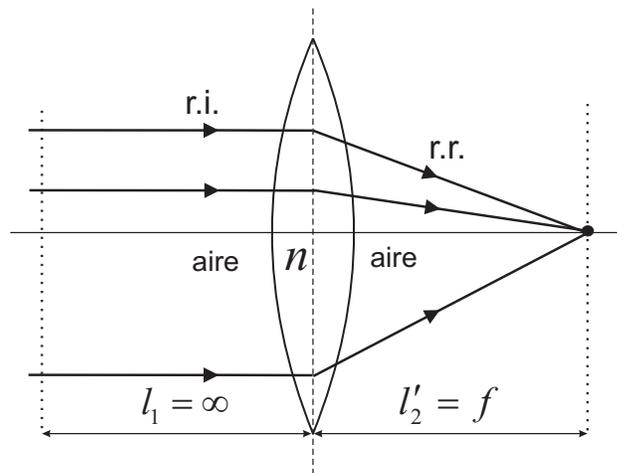


Figura 40: Distancia focal f de una lente delgada para un objeto real lejano (en infinito).

5.2 Lentes positivas y negativas

Como $n - 1 > 0$, el signo de f está determinado por el signo del término $(1/r_1 - 1/r_2)$ de la Ec. (104), lo que permite clasificar a las lentes en “positivas” o “negativas” según el signo de su distancia focal. Explícitamente tenemos los siguientes tres casos que obedecen a la convención de signos establecida anteriormente con respecto a los radios de curvatura y las posiciones del objeto e imagen a partir de la lente delgada.

1. Lentes positivas, *biconvexa* y *plano-convexa*; de la Fig. 41, $r_1 > 0$ o $r_1 = \infty$, y $r_2 < 0$ o $r_2 = \infty$, entonces $(1/r_1 - 1/r_2) > 0$ por lo cual $f > 0$.
2. Lentes negativas, *bicóncava* y *plano-cóncava*; de la Fig. 42, $r_1 < 0$ o $r_1 = \infty$, y $r_2 > 0$ o $r_2 = \infty$, entonces $(1/r_1 - 1/r_2) < 0$ por lo cual $f < 0$.
3. Lentes menisco o *meniscos*; de la Fig. 43, el signo de f se determinará al substituir los valores numéricos de r_1 y r_2 .

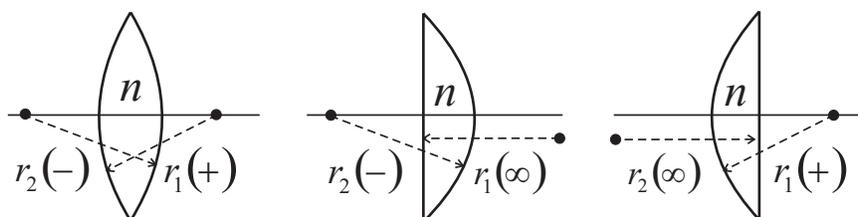


Figura 41: Lentes positivas, $f > 0$: biconvexa y plano-convexas.

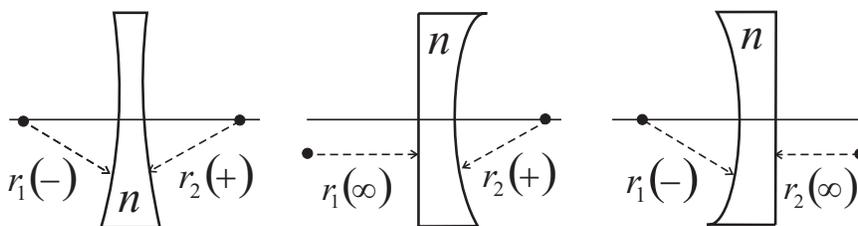


Figura 42: Lentes negativas, $f < 0$: bicóncava y plano-cóncavas.

5.3 Combinación de lentes delgadas

Consideremos un sistema óptico formado por dos lentes delgadas separadas una distancia s entre sí a lo largo del eje óptico como se indica en la Fig. 44. Una pregunta importante a



Figura 43: Lentes menisco: f puede ser positiva o negativa.

satisfacer, es conocer la distancia focal de este sistema o combinación de dos lentes delgadas. La distancia focal combinada f debe ser una función de f_1 , f_2 y s . De las Ecs. (103) y (104), se puede escribir para las dos lentes,

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{l'_1} - \frac{1}{l_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{l'_2} - \frac{1}{l_2} \quad (105)$$

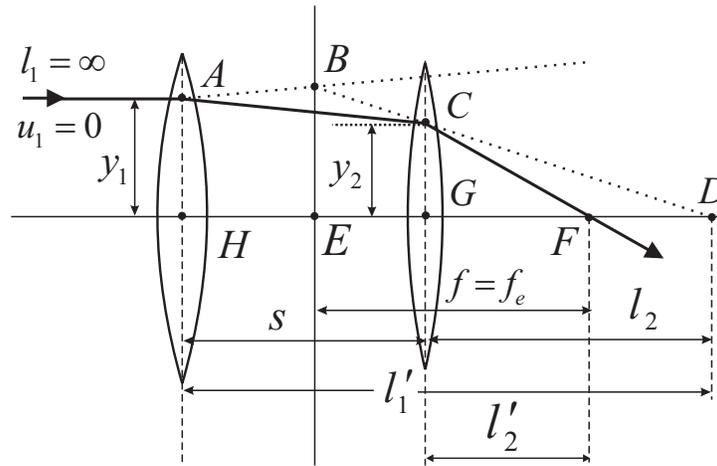


Figura 44: Esquema del trazado de rayos en dos lentes delgadas.

De la Fig. 44, $l_2 = l'_1 - s$, y $l_1 = \infty$, implican que $l'_1 = f_1$, y por lo tanto,

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{l'_2} - \frac{1}{f_1 - s}. \quad (106)$$

De los triángulos semejantes BEF y CGF , así como de los triángulos AHD y CGD , respectivamente, se puede escribir

$$\frac{y_1}{f} = \frac{y_2}{l'_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{f}{l'_2}, \quad (107)$$

$$\frac{y_1}{f_1} = \frac{y_2}{l_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{f_1}{l_2} = \frac{f_1}{f_1 - s}. \quad (108)$$

Tomando la igualdad de y_1/y_2 de las Ecs. (107)-(108), se puede obtener

$$\frac{f}{l'_2} = \frac{f_1}{f_1 - s}. \quad (109)$$

Despejando l'_2 de la Ec. (109) y substituyendo en la Ec. (106), se tiene

$$\frac{1}{f_2} = \frac{f_1}{f(f_1 - s)} - \frac{1}{f_1 - s}. \quad (110)$$

Finalmente, se puede obtener la fórmula, debida a Gullstrand, para la distancia focal f , de la combinación de dos lentes delgadas con longitudes focales respectivas f_1 y f_2 del modo siguiente

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 f_2}. \quad (111)$$

Para el caso de un par de lentes “pegadas” o cementadas, donde $s = 0$, la fórmula anterior se simplifica a la siguiente

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (112)$$

Ahora bien, para definir la “distancia focal efectiva”, denotada por f_e , de la combinación de dos lentes delgadas, es necesario e indispensable definir a partir de que plano se medirá dicha distancia focal. La definición de este plano, llamado *plano principal* se atribuye a Gauss; es un plano “equivalente” o “sintetizador” capaz de reproducir la refracción que producen las dos lentes por separado. Luego entonces, este plano es la intersección, en el punto B , de las proyecciones de los rayos incidente inicial (paralelo al eje óptico) y el refractado por la dos lentes (ver Fig. 44). Este último rayo, a su vez, interseca el eje óptico en el punto F , que se denomina el *punto focal*. La distancia sobre el eje óptico, $EF = f_e$, es lo que se conoce con el nombre de *distancia focal efectiva*. Es importante y conveniente aclarar que el plano principal, de acuerdo a su definición, estará en posiciones no solo dentro de los planos de las lentes, sino a la derecha o a la izquierda, dependiendo de las características de las lentes que conforman al sistema de dos lentes.

Cálculo de distancias focales. Calcularemos el valor de la distancia focal para el caso de una lente biconvexa para la cual los radios de curvatura son iguales, es decir, $r_1 = r_2 = r$ y considerando que está formada por dos lentes plano-convexas una hecha con vidrio BK7 y la otra con vidrio F2, ambas cementadas por su cara plana. Supondremos que se trata de una lente delgada como se ilustra en la Fig. 39; en este caso, $N_1 = N'_2 = 1$ (aire) y $N'_1 = N_2 = N$ (vidrio); los índices de refracción para los vidrios propuestos BK7 y F2 son respectivamente $N_{\text{BK7}} = 1.51680$ y $N_{\text{F2}} = 1.62004$. Entonces, para una lente biconvexa,

$$\frac{1}{f} = (N - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = (N - 1) \frac{2}{r} \Rightarrow f = \frac{r}{2(N - 1)},$$

de modo que, en forma general,

$$f_{\text{BK7}} = \frac{r_{\text{BK7}}}{2(1.51680 - 1)} = 0.96749 r_{\text{BK7}},$$

$$f_{\text{F2}} = \frac{r_{\text{F2}}}{2(1.62004 - 1)} = 0.80640 r_{\text{F2}}.$$

Así, la distancia focal de la lente queda en función del radio de curvatura para cada vidrio. Una tabla numérica con distintos valores para el radio de curvatura r se presenta a continuación:

r cm	f cm	f cm
	BK7	F2
10	9.7	8.1
20	19.3	16.1
30	29.0	24.2
40	38.7	32.3
50	48.4	40.3
60	58.0	48.4
70	67.7	56.4
80	77.4	64.5
90	87.1	72.6
100	96.7	80.6

Si fuese necesario obtener un mismo valor para la distancia focal con ambos tipos de vidrio entonces $f_{\text{BK7}} = f_{\text{F2}}$, condición de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{r_{\text{BK7}}}{2(N_{\text{BK7}} - 1)} &= \frac{r_{\text{F2}}}{2(N_{\text{F2}} - 1)} \\ \Rightarrow \frac{r_{\text{BK7}}}{r_{\text{F2}}} &= \frac{N_{\text{BK7}} - 1}{N_{\text{F2}} - 1} = \frac{1.51680 - 1}{1.62004 - 1} = 0.83349 \end{aligned}$$

de donde los radios de curvatura estarían relacionados por $r_{\text{BK7}} = 0.83349 r_{\text{F2}}$ y no es difícil comprobar que

$$f_{\text{BK7}} = 0.96749 r_{\text{BK7}} = (0.96849)(0.83349) r_{\text{F2}} = 0.80640 r_{\text{F2}}.$$

Iluminación colimada en un sistema de lentes. Supongamos dado un sistema de dos lentes positivas y otro de una lente positiva seguido de una lente negativa. Vamos a ver que condiciones se requiere imponer a los puntos focales en cada una de las lentes para que el haz de iluminación de salida esté colimado como a la entrada; la Fig. 45 muestra un diagrama general de esta situación.



Figura 45: Sistema óptico colimado.

En la Fig. 46 se muestran ambos sistemas de dos lentes que supondremos delgadas. En ambos sistemas, f_1 es la distancia focal de la primera lente L_1 , f_2 es la distancia focal de la segunda lente L_2 y s es la separación entre las dos lentes L_1 y L_2 .

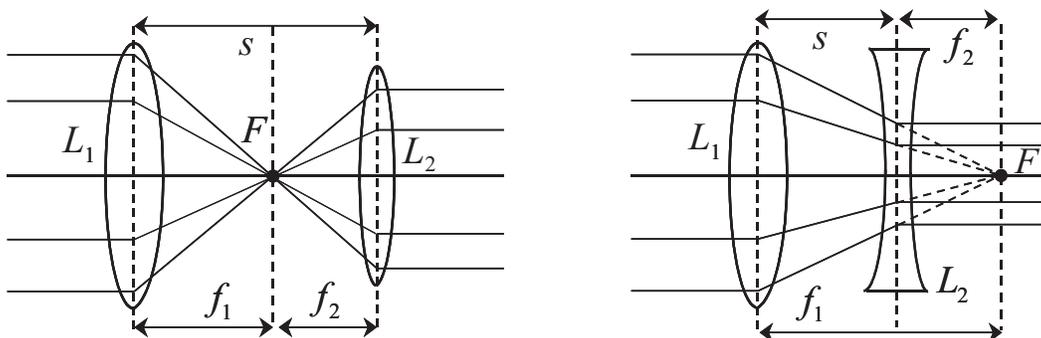


Figura 46: Colimación con dos lentes; izquierda, dos lentes positivas; derecha, una lente positiva combinada con una lente negativa.

La distancia focal efectiva para la combinación de dos lentes está dada por la Ec. (111); para obtener un haz colimado a la salida de cualquiera de estos sistemas, se requiere que $f = \infty$ o equivalentemente que $1/f = 0$, de donde

$$0 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 f_2} \Rightarrow \frac{s}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow s = f_1 + f_2$$

que viene siendo la condición aritmética que deben satisfacer las distancias focales de las lentes. En el primer sistema, $f_1 > 0$ y $f_2 > 0$ de modo que $s > 0$; análogamente, en el segundo sistema, $f_1 > 0$ pero $f_2 < 0$ y $s > 0$ siempre que $|f_1| > |f_2|$. En la primera combinación de lentes, el punto focal F_1 de la primera lente positiva está a su derecha y el punto focal F_2 de la segunda lente positiva se encuentra a su izquierda. En la segunda combinación de lentes, el punto focal F_1

de la lente positiva está a su derecha y después de la lente negativa cuyo punto focal F_2 también se encuentra a su derecha. En cuanto a la posición relativa de los puntos focales, es claro que en ambas configuraciones, están sobrepuestos en el mismo punto sobre el eje óptico de modo que $F_1 = F_2 = F$ como se ha indicado en la figura anterior.

5.4 Construcción gráfica de rayos y ecuación de Newton.

Vamos a derivar otros resultados para las lentes delgadas que se formulan en base a una construcción gráfica del trazo de algunos rayos importantes. La Fig. 47 muestra los parámetros empleados y varios triángulos semejantes determinados por los rayos señalados y las rectas contenidas en los planos focales. De izquierda a derecha denominamos estos triángulos por T_1, T_2, T_3 y T_4 siendo los puntos focales F y F' . Entonces tenemos las siguientes proporciones geométricas simples:

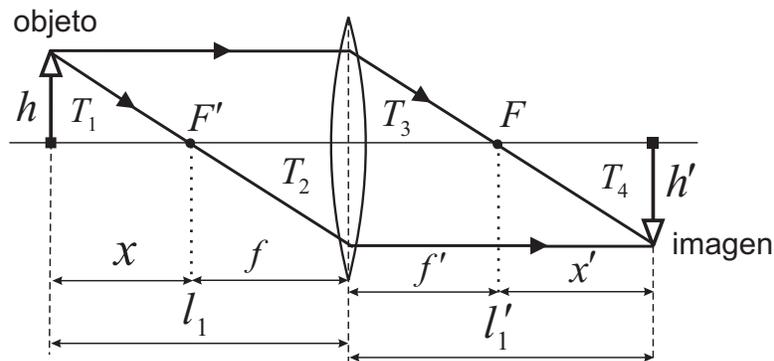


Figura 47: Construcción gráfica de rayos en una lente delgada según la notación de Newton.

$$T_1 \cong T_2 : \frac{h}{-x} = \frac{-h'}{f} \Rightarrow \frac{f}{x} = \frac{h'}{h}, \quad (113)$$

$$T_3 \cong T_4 : \frac{h}{f'} = \frac{-h'}{x'} \Rightarrow \frac{x'}{-f'} = \frac{h'}{h}, \quad (114)$$

de ambas expresiones, se desprende inmediatamente que

$$\frac{f}{x} = \frac{x'}{-f'} \text{ o } xx' = -ff', \quad (115)$$

y como en general $f = f'$, entonces se obtiene la *ecuación de Newton* para las lentes delgadas

$$xx' = -f^2. \quad (116)$$

En la Ec. (116), las distancias ahora involucradas x, x' , como se aprecia de la Fig. 47, no se miden a partir de los vértices de las superficies, sino a partir de los puntos focales o planos focales localizados perpendicularmente sobre estos puntos. El diagrama mostrado en la Fig. 47 permite hacer un trazo gráfico de rayos. Si se conoce la distancia focal de la lente l , la posición del objeto con respecto a la lente y la altura h del objeto, entonces, trazando un rayo paralelo al eje óptico partiendo del extremo de h y en acuerdo a la definición de distancia focal, éste pasará por el punto F a partir del plano representando a la lente. A continuación, desde el mismo punto h del objeto, se traza un rayo que pase por F' ; continuando con este rayo hasta el plano de la lente, nuevamente este rayo tendrá una dirección paralela al eje óptico. Los dos rayos, trazados se intersectarán en un punto determinado definiéndose así la posición y la altura de la imagen del objeto original. El dibujo presenta una escala arbitraria para los valores de f, l , y h ; de este modo se logra tener un método gráfico que describe el funcionamiento de una lente delgada.

5.5 Lentes gruesas

Cuando la separación s entre los vértices de las superficies refractoras de una lente es diferente de cero, entonces se habla de una *lente gruesa*. Como se indica en la Fig. 48 se considera que $n'_1 = n = n_2$ y que, en principio, los índices de refracción que rodean la lente, n_1 y n'_2 pueden ser distintos entre sí. Para analizar la refracción en este tipo de lentes utilizamos el método 'y-nu' para calcular f_e , que es la distancia focal efectiva y que se mide con respecto al plano principal que en la figura dada es perpendicular al eje óptico pasando por el punto P . Este punto P es la intersección de la prolongación del rayo incidente paralelo al eje óptico y el rayo que sale al final, después de las refracciones en A y B en cada una de las superficies de la lente. Recordemos que este plano se puede considerar como un plano que sintetiza la refracción en las dos caras de la lente. En la misma Fig. 48, el rayo que viene del infinito, especificado por $u_1 = 0$, se prolonga a través de la lente como si no hubiera superficie alguna; por otra parte se considera la prolongación del rayo refractado por las dos superficies y estas prolongaciones se cortan en el punto P del cual se traza una recta perpendicular al eje óptico. Entonces, el *plano principal*, representado por PP_0 , se define como el plano transversal al eje óptico que contiene al segmento perpendicular $\overline{PP_0}$; estrictamente hablando, éste plano principal tiene cierta curvatura pero para fines de aplicación no se toma en cuenta el valor tan grande que tiene la curvatura de dicho plano.

Partiendo de la Ec. (91) (método 'y-nu') para las dos superficies refractoras, se puede escribir

$$nu'_1 - n_1u_1 = (y_1/r_1)(n - n_1), \quad (117)$$

$$n'_2u'_2 - nu_2 = (y_2/r_2)(n'_2 - n). \quad (118)$$

Usando la ecuación de transferencia $u'_1 = u_2$, Ec. (86) y substituyendo la Ec. (117) en la

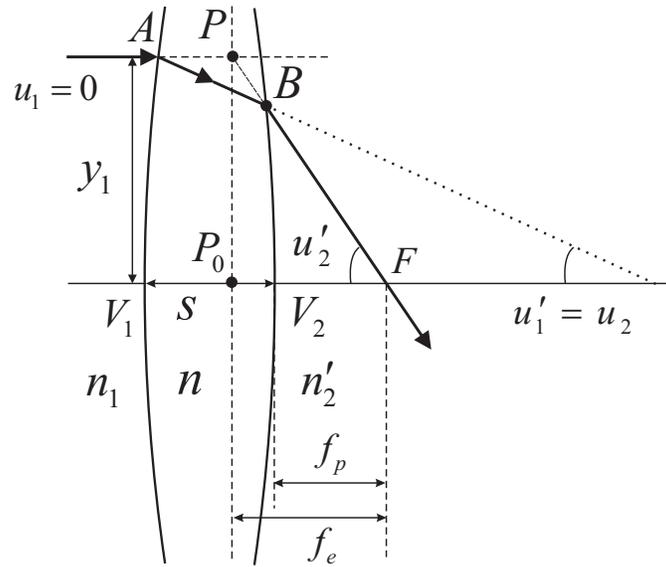


Figura 48: Trazo de rayos en una lente gruesa con $s \neq 0$. La distancia focal efectiva f_e se mide a partir del plano principal PP_0 ; la distancia focal posterior f_p se mide desde el segundo vértice V_2 .

Ec. (118), se obtiene

$$\begin{aligned}
 n'_2 u'_2 &= n u_2 + \frac{y_2}{r_2} (n'_2 - n) = n u'_1 + \frac{y_2}{r_2} (n'_2 - n), \\
 &= \left[n_1 u_1 + \frac{y_1}{r_1} (n - n_1) \right] + \frac{y_2}{r_2} (n'_2 - n), \\
 &= \frac{y_1}{r_1} (n - n_1) + \frac{y_2}{r_2} (n'_2 - n). \tag{119}
 \end{aligned}$$

Del diagrama en la Fig. 48, se observa, de los triángulos internos en la lente, que $y_2 = y_1 - s u'_1$, pero además, de la Ec. (117) $u'_1 = y_1 (n - n_1) / r_1 n$. Substituyendo los valores de y_2 y u'_1 en la última expresión de la Ec. (119) resulta que

$$\begin{aligned}
 n'_2 u'_2 &= \frac{y_1}{r_1} (n - n_1) + \frac{(y_1 - s u'_1)}{r_2} (n'_2 - n), \\
 &= \frac{y_1}{r_1} (n - n_1) + \frac{y_1}{r_2} (n'_2 - n) - \frac{s}{r_2} (n'_2 - n) \frac{y_1 (n - n_1)}{r_1 n}, \\
 &= y_1 \left[\frac{1}{r_1} (n - n_1) + \frac{1}{r_2} (n'_2 - n) - \frac{s}{r_2} (n'_2 - n) \frac{1}{r_1} \frac{(n - n_1)}{n} \right],
 \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\frac{u'_2}{y_1} = \frac{1}{n'_2} \left[\frac{1}{r_1}(n - n_1) + \frac{1}{r_2}(n'_2 - n) - \frac{s}{r_2}(n'_2 - n) \frac{1}{r_1} \frac{(n - n_1)}{n} \right]. \quad (120)$$

Ahora, del triángulo rectángulo PP_0F , vemos que $u'_2 = y_1/f_e$, por tanto, $1/f_e = u'_2/y_1$, por lo tanto la Ec. (120) puede reescribirse como,

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{n'_2} \left[\frac{(n - n_1)}{r_1} + \frac{(n'_2 - n)}{r_2} - \frac{s(n'_2 - n)(n - n_1)}{nr_1r_2} \right]. \quad (121)$$

Esta ecuación se emplea para el caso de una lente gruesa con índices de refracción a la izquierda y derecha de la lente con valores n_1 y n'_2 , respectivamente. Si la lente está sumergida en aire, implica que $n_1 = n'_2 = 1$, entonces la Ec. (121) se simplifica así

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_e} &= \frac{(n - 1)}{r_1} + \frac{(1 - n)}{r_2} - \frac{s(1 - n)(n - 1)}{nr_1r_2}, \\ &= (n - 1) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{s(1 - n)}{nr_1r_2} \right], \end{aligned}$$

que finalmente, se puede escribir en su forma más conocida como

$$\frac{1}{f_e} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{s(n - 1)^2}{nr_1r_2}. \quad (122)$$

De la Ec. (122) es fácil obtener el caso correspondiente a las lentes delgadas, pues haciendo $s = 0$ se obtiene la expresión dada en la Ec. (104). Para una lente delgada, el plano principal PP_0 se encuentra a la mitad de la lente si ésta es biconvexa o bicóncava, o coincide con la cara plana si la lente es plano-convexa o plano-cóncava. Para un menisco, el plano principal puede estar fuera del menisco dependiendo de los radios de curvatura. A diferencia de las lentes delgadas en las cuales se considera un solo plano principal, en las lentes gruesas existen *dos* planos principales cuya posición depende de la curvatura de las superficies esféricas que forman la lente. En la Fig. 49 se esquematiza para tres configuraciones de ejemplo, la posición relativa de los planos principales PP_0 y $P'P'_0$. Para distinguir entre ambos planos, PP_0 recibe el nombre de *primer plano principal* y $P'P'_0$ se conoce como el *segundo plano principal*. Es conveniente recordar la posición de los planos principales, porque en algunos casos se pueden encontrar localizados fuera de la lente.

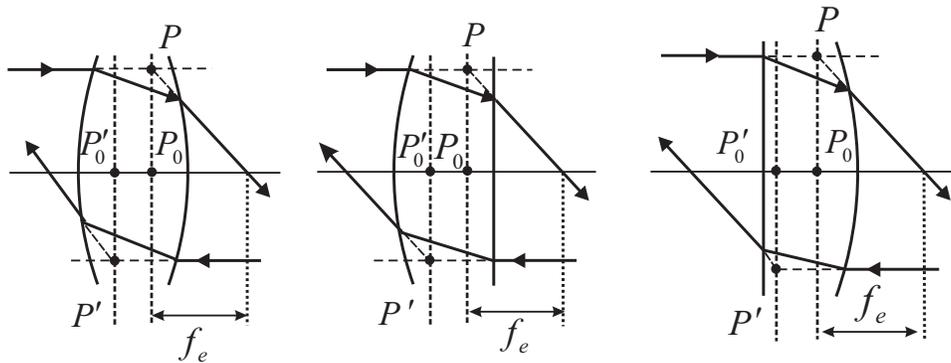


Figura 49: Posición de los planos principales PP_0 y $P'P'_0$ para diferentes lentes gruesas.

Cálculo de distancias focales. Ahora, respecto de las combinaciones de lentes mostradas en la Fig. 50 calculamos la distancia focal efectiva correspondiente.

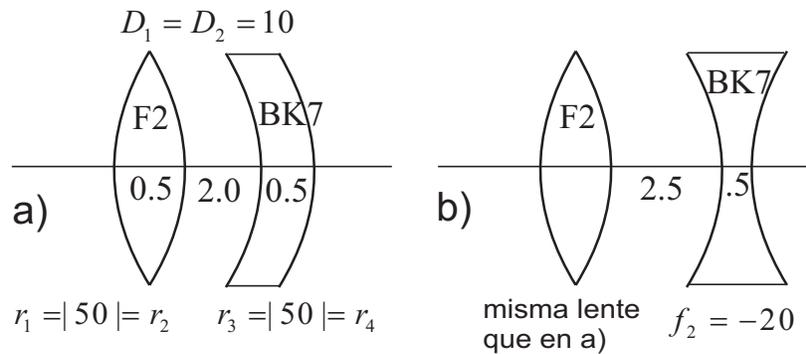


Figura 50: Combinaciones de lentes para determinar su distancia focal efectiva.

Sean f_1 y f_2 las distancias focales de cada componente de la combinación de lentes gruesas. Para el sistema de dos componentes del inciso a), el valor de la distancia focal de la primera lente el siguiente valor

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_1} &= (N_{F2} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{s_1(N_{F2} - 1)^2}{N_{F2} r_1 r_2} \\ &= (1.62004 - 1) \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{(-50)} \right) + \frac{0.5(1.62004 - 1)^2}{1.62004(-50)(50)} \\ &= 0.024754138 \Rightarrow f_1 \simeq 40.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

y el valor de la distancia focal para la segunda lente se encuentra de modo similar, i. e.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_2} &= (N_{\text{BK7}} - 1) \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{s_2(N_{\text{BK7}} - 1)^2}{N_{\text{BK7}} r_3 r_4} \\ &= (1.51680 - 1) \left(\frac{1}{(-50)} - \frac{1}{(-100)} \right) + \frac{0.5(1.51680 - 1)^2}{1.51680(-50)(-100)} \\ &= -0.005150392 \Rightarrow f_2 \simeq -194.2 \text{ cm}, \end{aligned}$$

mediante las cuales, la distancia focal efectiva es

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - s_a} = \frac{(40.4)(-194.2)}{40.4 - 194.2 - 2} = 50.35 \text{ cm}. \quad (123)$$

Para el sistema de dos componentes del inciso b) en la misma figura, vemos que $f_1 \simeq 40.4$ cm ya que se trata de la misma lente con vidrio F2 de la parte a); por otra parte, la distancia focal dada para la lente bicóncava es $f_2 = -20$ cm, de donde la distancia focal efectiva de esta segunda combinación de lentes tiene por valor

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - s_b} = \frac{(40.4)(-20.0)}{40.4 - 20.0 - 25} = 175.5 \text{ cm}. \quad (124)$$

5.6 Planos cardinales de un sistema

En la sección anterior hemos mencionado el concepto de plano principal y recordando que un sistema óptico lo consideramos como un conjunto de superficies, es posible determinar los planos principales de todo el sistema como si éste fuera una sola superficie refractora equivalente a todo el conjunto de sus superficies refractoras. Por lo tanto, puede hablarse de la *distancia focal del sistema* medida a partir del plano focal al plano principal. En general vamos a tener dos planos focales y dos planos principales según la dirección del haz luminoso. Consideremos la Fig. 51 en la cual suponemos que se dan las condiciones paraxiales. Ahora, la distancia del plano principal $P'P'_0$ al plano del objeto es $X = x + f$; la distancia del plano principal PP_0 al plano imagen es $X' = f' + x'$ y por triángulos semejantes de la misma Fig. 51, se puede escribir

$$\frac{f}{X} = \frac{-h'}{h - h'} \text{ y } \frac{f'}{X'} = \frac{h}{h - h'}, \quad (125)$$

por lo tanto, sumando ambas expresiones, se obtiene

$$\frac{f}{X} + \frac{f'}{X'} = 1. \quad (126)$$

Para cualquier sistema óptico, la *distancia mínima* entre *planos conjugados* (objeto-imagen) es de $4f$ pues si $x = f$ entonces $x' = -f$ (ecuación de Newton); así, $X = 2f$ y $X' = 2f$,

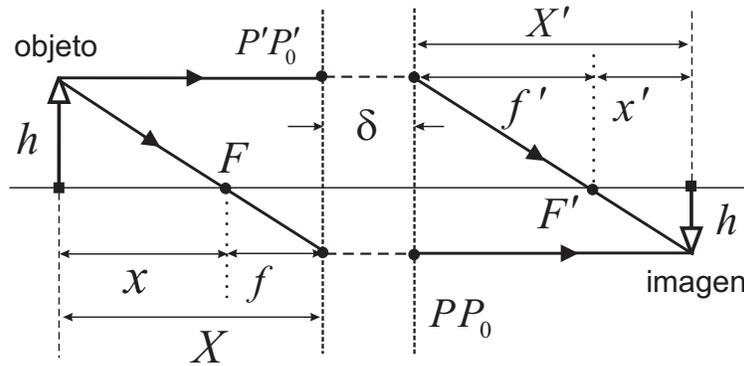


Figura 51: Esquema de planos principales equivalentes a un sistema óptico; δ representa la distancia variable que puede existir entre ambos planos.

i.e., $X + X' = 4f$. Considerando que $nf' = n'f$, entonces de la Ec. (125) se desprenden las siguientes relaciones,

$$\frac{1}{X} + \frac{f'}{f} \frac{1}{X'} = \frac{1}{f}, \quad (127)$$

$$\frac{f}{f'} \frac{1}{X} + \frac{1}{X'} = \frac{1}{f'},$$

y consecuentemente, para un sistema inmerso en aire donde $n = n' = 1$ se tendrá $f' = f$. Con esta igualdad de distancias focales, las ecuaciones Ecs. (127) pueden escribirse ahora como,

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X'} = \frac{1}{f} \quad \text{y} \quad \frac{1}{X} + \frac{1}{X'} = \frac{1}{f'}. \quad (128)$$

La definición de plano principal en términos de la intersección de las trayectorias del rayo incidente y el rayo emergente es de suma importancia porque no solo se aplica a una lente gruesa, sino a cualquier sistema con un número finito de superficies refractoras y reflectoras. Es decir, el plano principal PP_0 se define como se hizo ahora para la lente gruesa. La distancia focal medida del vértice de la segunda superficie V_2 al punto focal F se conoce como *distancia focal posterior* que denotamos por f_p . De la Fig. (48) se tiene que $f_p = y_2/u'_2$; por otra parte, de los triángulos PP_0F y V_2BF se ve que, $y_1/f_e = y_2/f_p$. Y de esta última relación se tiene

$$f_p = \frac{y_2}{y_1} f_e, \quad (129)$$

substituyendo el valor de $y_2 = y_1 - su'_1$ y u'_1 de la Ec. (121), se puede ver que

$$f_p = \left[1 - \frac{s(n-1)}{r_1}\right] f_e \quad (130)$$

Para el caso de las lentes delgadas la distancia focal efectiva es lo mismo que la distancia focal posterior ya que $s = 0$ y evidentemente, de la Ec. (130), $f_p = f_e$.

La igualdad $n'f = nf'$. Por definición, en los planos principales como planos conjugados, la amplificación es unitaria. En tal situación vamos a justificar que la relación $n'f = nf'$ se mantiene.

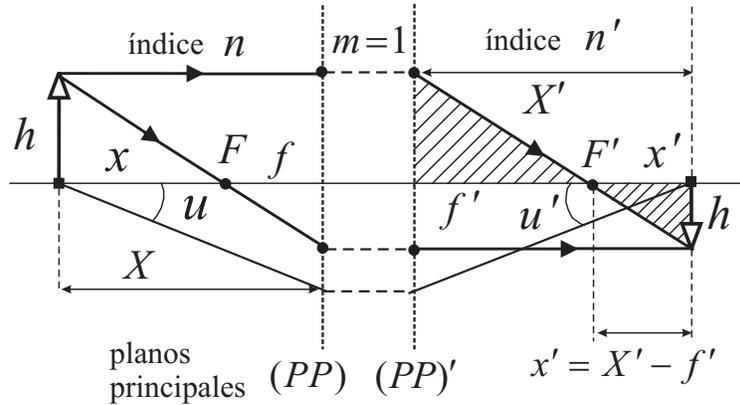


Figura 52: Parámetros asociados al espacio objeto e imagen en relación a los planos principales de un sistema óptico.

Considérese el diagrama mostrado en la Fig. 52 donde se ha indicado la posición de los planos principales del sistema y los respectivos índices de refracción n y n' . De los triángulos rectángulos indicados a la derecha del plano principal $(PP)'$, se ve que

$$\frac{h}{f'} = \frac{h'}{x'} = \frac{h'}{X' - f'} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{X' - f'}{f'} \quad (131)$$

De la Ec. (126), se obtiene

$$\frac{f}{X} + \frac{f'}{X'} = 1 \Rightarrow X'f + Xf' = XX' \Rightarrow \frac{X'}{X}f + f' = X'$$

de donde

$$X' - f' = \frac{X'}{X}f \quad (132)$$

y substituyendo está expresión en la Ec. (131) queda

$$\frac{h'}{h} = \frac{X'f}{Xf'} \quad (133)$$

y del invariante de Lagrange (caso paraxial) sabemos que $h'/h = nu/n'u'$; además, $uX = u'X'$ de donde $u/u' = X'/X$ y con esto,

$$\frac{h'}{h} = \frac{nX'}{n'X} \quad (134)$$

Al igualar las expresiones dadas en las Ecs. (133) y (134) se obtiene

$$\frac{X'f}{Xf'} = \frac{nX'}{n'X} \Rightarrow \frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \Rightarrow n'f = nf'. \quad (135)$$

Notemos que si la primera y la última superficie están rodeadas por aire, entonces $n = n'$ y consecuentemente $f = f'$ como ya se había hecho notar antes.

5.6.1 Invariante de Helmholtz

En este apartado se deduce un invariante general para sistemas ópticos y el cual está estrechamente relacionado con los planos principales discutidos anteriormente. Partimos del diagrama mostrado en la Fig. 53, donde se cumplen las relaciones siguientes.

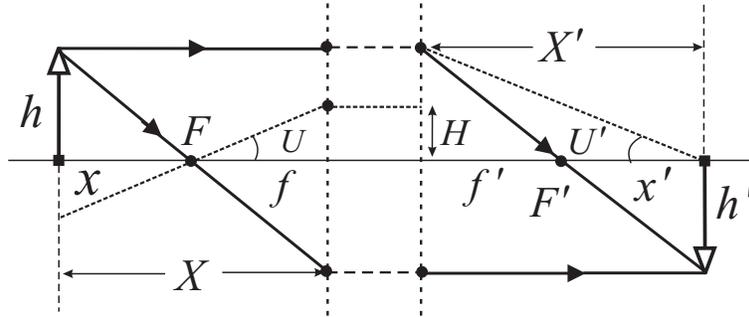


Figura 53: Esquema para deducir el invariante de Helmholtz.

$$\tan U = H/f \text{ o } H = f \tan U, \quad (136)$$

$$\tan U' = H/x' \text{ o } H = x' \tan U', \quad (137)$$

Siendo que, $h/f' = h'/x'$ por triángulos semejantes, se sigue que

$$f \tan U = x' \tan U' = \frac{f'h'}{h} \tan U' \Rightarrow hf \tan U = h'f' \tan U'.$$

Utilizando nuevamente el hecho de que, $nf' = n'f$, obtenemos el *invariante de Helmholtz*,

$$nh \tan U \equiv n'h' \tan U' \quad (138)$$

que se reduce al invariante de Lagrange del caso paraxial, Ec. (98), ya que $\tan \alpha \approx \alpha$ para ángulos α pequeños. Este invariante se dá entre los planos principales $P'P'_0$ y PP_0 cuya amplificación lateral es *unitaria*. Por analogía, esta característica es utilizada para los *planos nodales* PN y $P'N'$ de un sistema óptico, que se definen como el par de planos conjugados cuya *amplificación angular* es *unitaria*. Es importante mencionar, que la amplificación angular, dada en la Ec. (97), es un parámetro cuantitativo de importancia en instrumentos como telescopios y microscopios. Finalmente, los planos focales, principales y nodales conforman los llamados *planos cardinales*. Las distancias entre PP_0 , PN y $P'P'_0$, $P'N'$ se denotan comúnmente por l_n , l'_n y las ecuaciones que ligan los planos nodales con los planos principales están dadas por,

$$\frac{f}{l_n} + \frac{f'}{l'_n} = 1 \quad ; \quad x_n = f' \quad ; \quad x_{n'} = f. \quad (139)$$

En general, $l_n = l_{n'}$, y en el caso de que los índices de refracción de la primera y última superficies sean iguales, i.e., que $n = n'$, resulta entonces que los planos principales y nodales coinciden o se sobreponen, así $PP_0 = PN$ y $P'P'_0 = P'N'$.

Apéndice

FÓRMULAS BÁSICAS			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$n = N = c/v \geq 1$	(1)	1	índice de refracción; c es la velocidad de la luz en el vacío, v es la velocidad de la luz en el medio.
$n \sin i = n' \sin i'$	(3)	2	ley de la refracción; i es el ángulo de incidencia e i' es el ángulo de refracción; n es el índice del 1er medio y n' es el índice del 2do medio.
$i = i'$	(3)	2	ley de la reflexión en forma escalar.
$N = A + B\lambda^2 + CL + DL^2$	(4)	4	interpolación de Herzberg (región visible); dá lugar a un sistema de 4×4 ecs. lineales; $L = 1/(\lambda^2 - 0.028)$.
$N = A + BL + CL^2 + D\lambda^2 + E\lambda^4$	(5)	5	interpolación (región IR); dá lugar a un sistema de 5×5 ecs. lineales; L como en (4).
$CO = \sum_{i=1}^k d_i n_i$	(8)	6	camino óptico en un medio homogéneo estratificado con k capas; d_i es la distancia recorrida en el medio de índice n_i .
$CO = \int_A^B n(x, y, z) ds$	(9)	6	camino óptico en un medio heterogéneo; s es la longitud de arco de la trayectoria que une los puntos A y B .

PRISMAS Y REFRACTÓMETROS			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$n = \sin \frac{1}{2}(\delta_m + \alpha) / \sin \frac{1}{2}\alpha$	(14)	10	índice n del material de un prisma dispersor; δ_m es el ángulo de desviación mínima y α es el ángulo del prisma.
$n = (\delta_m/\alpha) + 1$	(15)	10	caso paraxial del prisma dispersor; dados n y α , entonces $\delta_m = \alpha(n - 1)$.
$v_d = (n_F - n_C)/(n_d - 1)$	(25)	13	poder dispersivo de un vidrio óptico; n_X es el índice relativo a la línea espectral X.
$\nu = 1/v_d$	(26)	13	número de Abbe.
$\nu = \delta_d/(\delta_F - \delta_C)$	(27)	14	número de Abbe en un prisma delgado; δ_X es la desviación mínima obtenida en la línea espectral X.
$\alpha_1 = \nu_1 \delta_T / (\nu_1 - \nu_2)(n_{d1} - 1)$	(33)	16	cuña acromática, dispersión total $\Delta_T = 0$, α_1, α_2 son los ángulos de los prismas y δ_T es la desviación total.
$\alpha_2 = \nu_2 \delta_T / (\nu_2 - \nu_1)(n_{d2} - 1)$	(32)	15	$\delta_T = (n_{d1} - 1)\alpha_1 + (n_{d2} - 1)\alpha_2$.
$\alpha_1 = \nu_1 \nu_2 \Delta_T / (\nu_1 - \nu_2)(n_{d1} - 1)$	(39)	17	prisma de visión directa, desviación total $\delta_T = 0$, α_1, α_2 son los ángulos de los prismas y Δ_T es la dispersión total.
$\alpha_2 = \nu_2 \nu_1 \Delta_T / (\nu_2 - \nu_1)(n_{d2} - 1)$	(39)	17	$\Delta_T = [(n_{d1} - 1)/\nu_1]\alpha_1 + [(n_{d2} - 1)/\nu_2]\alpha_2$.
$n' = \sin i_1 / \sin \alpha$	(41)	19	refractómetro de autocolimación; n' es el índice del prisma, i_1 es el ángulo de incidencia y α es el ángulo del prisma.
$n_0 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \cos \alpha \sin \varphi$	(45)	20	refractómetro universal, mide el índice n_0 de cierta substancia; α es el ángulo del prisma, φ es el ángulo emergente y n es el índice del prisma.
$n_0 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$	(46)	20	refractómetro de Pülfrieh donde $\alpha = 90^\circ$; se supone que $n \gg n_0$.

ESPEJOS PLANOS			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$d = d'$	Fig. 12	22	espejo plano; d es la distancia al objeto y d' es la distancia a la imagen (virtual).
$A = l[(D/d) + 1]$	(55)	25	campo angular (espejo retrovisor); l es la longitud del espejo, D es la distancia al campo de visión y d es la distancia al observador.
$\delta = 2\alpha$	(60)	26	dos espejos planos; δ es el ángulo de desviación y α es el ángulo entre ambos espejos.
$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0 - 2 \cos I \hat{\mathbf{N}}$	(66)	30	ley de la reflexión en forma vectorial (dos formas); $\hat{\mathbf{s}}_0, \hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{N}}$ son vectores unitarios en la dirección del rayo incidente, el rayo reflejado y la normal; I es el ángulo de incidencia.
$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0 - 2(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}$	(66)	30	
$\hat{\mathbf{s}}_1 = \mathcal{M}_R \hat{\mathbf{s}}_0$	(77)	33	ley de la reflexión matricial; los vectores unitarios de los rayos reflejado e incidente son $\hat{\mathbf{s}}_1 = (k_1, l_1, m_1)^T$ y $\hat{\mathbf{s}}_0 = (k_0, l_0, m_0)^T$. La matriz \mathcal{M}_R se muestra al pie de la tabla.
$R = \mathcal{M}_O/\rho$	(80)	34	matriz de reflexión para un espejo con orientación arbitraria siendo $\rho = \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{N}}$. La matriz \mathcal{M}_O se da al pie de la tabla.

$$\mathcal{M}_R = \begin{pmatrix} 1 - 2K^2 & -2KL & -2KM \\ -2KL & 1 - 2L^2 & -2LM \\ -2KM & -2LM & 1 - 2M^2 \end{pmatrix}$$

matriz de reflexión; K, L, M son los cosenos directores del vector normal $\hat{\mathbf{N}}$.

$$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Pk_0 & 1 - Kk_0 & -Lk_0 & -Mk_0 \\ Pl_0 & -Kl_0 & 1 - Ll_0 & -Ml_0 \\ Pm_0 & -Km_0 & -Lm_0 & 1 - Mm_0 \end{pmatrix}$$

matriz de orientación; P es la distancia del sistema de coordenadas al espejo.

TRAZO DE RAYOS EXACTO Y PARAXIAL			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$\sin I = \sin U(L - r)/r$	(85)	39	trazo exacto de rayos en una superficie refractora esférica,
$\sin I' = N \sin I/N'$	(85)	39	I, I' son los ángulos de incidencia y de refracción,
$U' = U + I - I'$	(85)	39	U, U' son los ángulos que forman los rayos con el eje óptico y N, N' son los índices de refracción,
$L' = r(1 + \sin I'/\sin U')$	(85)	39	L, L' son las distancias al vértice de la superficie medidas sobre el eje óptico y r es el radio de curvatura de la superficie.
$U_{j+1} = U'_j; L_{j+1} = L'_j - d_j$	(86)	39	ecuaciones de transferencia para varias superficies; d_j es la distancia entre los vértices V_j y V_{j+1} . Se conocen los valores de N_j, N'_j y r_j .
$i = u(l - r)/r; i' = Nu/N'$	(87)	40	trazo paraxial en una superficie refractora esférica, son para ángulos pequeños con el eje óptico (aproximación de Gauss),
$u' = u + i - i'; l' = r(1 + i'/u')$	(87)	40	las ecs. de transferencia son las mismas.
$y = lu = l'u'$	Fig. 35	44	método $y-nu$ paraxial; y es la altura del rayo y u es el ángulo del rayo incidente con el eje óptico.
$u' = [nu + y(n - n')/r]/n'$	(92)	45	
$u = y/l; u' = y/l'$	Fig. 35	44	método $l-l'$ paraxial.
$(n'/l') - (n/l) = (n' - n)/r$	(94)	45	

AMPLIFICACIONES E INVARIANTES			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$m = h'/h = \frac{\text{altura imagen}}{\text{altura objeto}}$	(95)	46	amplificación lateral; normal al eje óptico.
$\bar{m} = \delta l'/\delta l = \frac{\text{longitud imagen}}{\text{longitud objeto}}$	(96)	46	amplificación longitudinal; paralela al eje óptico.
$m_\alpha = u'/u$	(97)	46	amplificación angular (inclinación de los rayos).
$Nh \sin U = N'h' \sin U'$			invariante del seno (caso general).
$nhu = n'h'u'$	(98)	46	invariante de Lagrange (caso paraxial).
$Nh \tan U = N'h' \tan U'$	(138)	65	invariante de Helmholtz; amplificación angular referida a los planos principales.

LENTES DELGADAS Y GRUESAS			
Ecuación	No.	Pág.	Descripción
$(1/l'_2) - (1/l_1) = (n - 1)[(1/r_1) - (1/r_2)]$	(103)	50	lentes delgadas en términos de distancias objeto l_1 e imagen l'_2 .
$1/f = (n - 1)[(1/r_1) - (1/r_2)]$	(104)	51	ecuación del constructor de lentes; f es la distancia focal y r_1, r_2 son los radios de curvatura.
$1/f_e = (1/f_1) + (1/f_2) - s/f_1f_2$	(111)	54	fórmula de Gullstrand para combinación de lentes delgadas o gruesas; s es la separación entre ambas lentes.
$xx' = -f^2$	(116)	57	ecuación de Newton del caso paraxial; x es la distancia del objeto al primer foco (foco objeto) y x' es la distancia de la imagen al segundo foco.
$f_e = y_1/u'_2$		60	distancia focal efectiva; y_1 es la altura del rayo con la 1era superficie y u'_2 es la inclinación del rayo refractado en la 2da superficie.
$1/f_e = (n - 1)[(1/r_1) - (1/r_2)] + s(n - 1)^2/nr_1r_2$	(122)	60	lentes gruesas; f_e es la distancia focal efectiva donde s es el espesor de la lente.
$1/f = (1/X) + (1/X')$	(128)	63	distancia focal f referida a los planos principales según distancias objeto X e imagen X' .
$X + X' = 4f$		63	distancia mínima entre planos conjugados.
$f_p = [1 - s(n - 1)/r_1]f_e$	(130)	63	distancia focal posterior; para lentes delgadas, $f_p = f_e$.
$n'f = nf'$	(135)	65	relación entre planos principales de un sistema óptico; si está inmerso en aire, $n = n' = 1$ y por tanto $f = f'$.
$(f/l_n) + (f'/l'_n) = 1$	(139)	66	relación entre planos principales y planos nodales; l_n, l'_n son las separaciones respectivas entre PP 's y PN 's.
$x_n = f' ; x'_n = f$	(139)	66	x_n, x'_n son las distancias referidas a los planos nodales.

Referencias

- [1] Baker, James G. “Geometrical Optics” en *Fundamental Formulas of Physics, Vol.II*, Menzel D. H. ed., Dover, 1960. Pág. 16.
- [2] Born, Max & Emil Wolf. *Principles of Optics. Electromagnetic Theory of Propagation, Interference, and Diffraction of Light, 7th (expanded) Ed.*, Cambridge University Press, 1999. Cáp. III y IV.
- [3] Cabrera, J. Manuel, Fernando J. López & Fernando A. López. *Fundamentos de Óptica Electromagnética*, Addison-Wesley Iberomericana, 1993. Pág. 11.
- [4] Feynman, P. Richard, Robert B. Leighton & Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, Addison-Wesley, 1975. Cáp. 26 y 27.
- [5] Hecht, Eugene. *Óptica, 3ra Ed.*, Addison-Wesley, 2000. Cáp. 5 y 6.
- [6] Hecht, Eugene. *Theory and Problems of Optics*, McGraw-Hill Book Company, Schaum’s Outline Series, 1974. Pág. 4.
- [7] Jenkins, Francis A. & Harvey E. White. *Fundamentals of Optics, 4th Ed.*, McGraw-Hill Book Company, Physics Series, 1981. Cáp. 1–8.
- [8] Landsberg, G. S. *Óptica*, Tomo I, MIR, 1983. Pág. 12.
- [9] Sears, Francis W. *Fundamentos de Física III, Óptica, 3era Ed.*, Aguilar, 1963. Cáp. I–IV.
- [10] Smith, Warren J. *Modern Optical Engineering. The Design of Optical Systems, 2nd Ed.*, McGraw-Hill Book Company, Optical and Electrooptical Engineering Series, 1991. Cáp. 2 y 4.
- [11] Malacara, Daniel. *Óptica Básica*, SEP y Fondo de Cultura Económica, 1989. Cáp. I–IV.
- [12] Meyer-Arendt, Jurgen R. *Introduction to Classical and Modern Optics, 4th Ed.*, Prentice Hall, 1995. Cáp. 1–4 y 8.
- [13] Stravroudis, O. “Basic Ray Optics,” en *Handbook of Optical Engineering*, Optical Eng. Series Vol. 73, Eds. D. Malacara and B. J. Thompson, New York, 2001.
- [14] Young, Hugh D. *Fundamentos de Óptica y Física Moderna*, McGraw-Hill, 1971. Pág. 4.
- [15] Yu, T. S. Francis & Xiangyang Yang. *Introduction to Optical Engineering*, Cambridge University Press, 1997. Cáp. 1 y 2.