ISSN: 2594-1011

MEMORIAS
DE LA
REUNIÓN NACIONAL ACADÉMICA
DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Año 23 Número 23 Agosto 2018

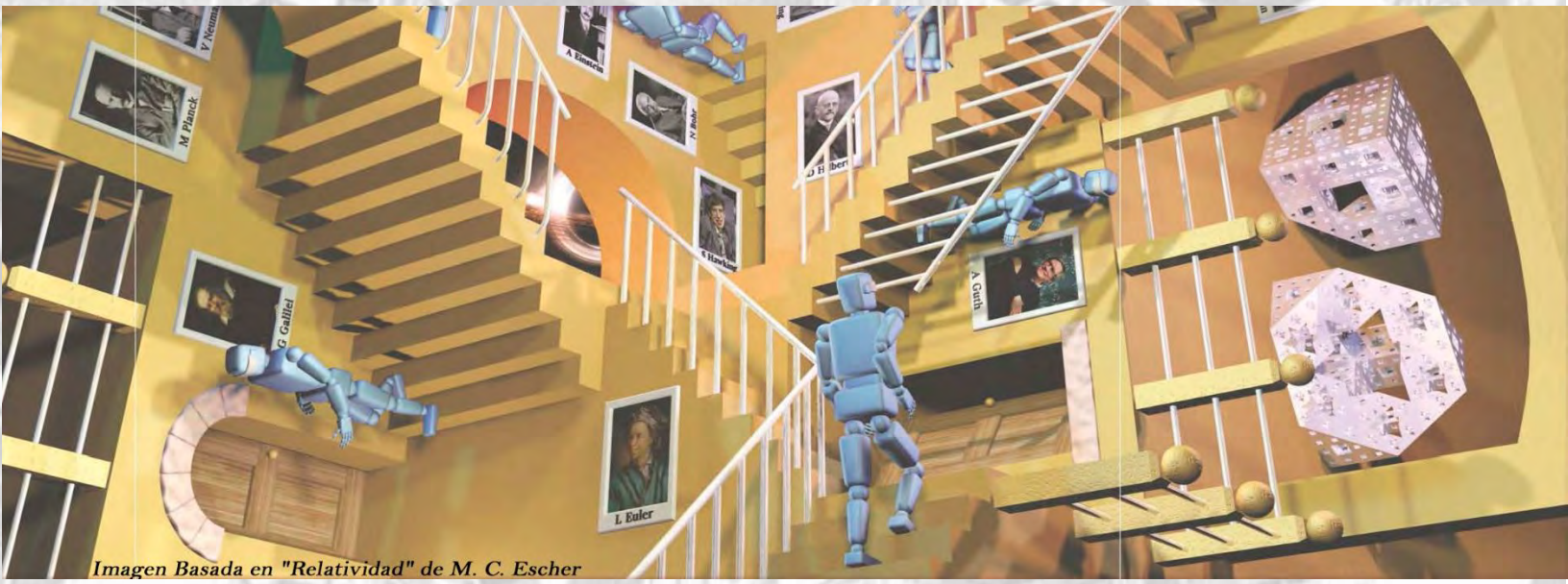


Imagen Basada en "Relatividad" de M. C. Escher

ISSN: 2594-1011

MEMORIAS
DE LA
REUNIÓN NACIONAL ACADÉMICA
DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Editor

Mario Chavarría Castañeda

Compilador

Juan Manuel Figueroa Flores

Ciudad de México, Agosto, 2018

Año: 23, No. 23, Agto. 2018.

ISSN: 2594-1011

Comité Organizador

Miguel Tufiño Velázquez
Director

Mario Chavarría Castañeda
Subdirector Académico

Alfredo Godínez Muñoz
Subdirector Administrativo

María Elizabeth de la Cruz Santiago
Subdirector de Servicios Educativos e Integración Social

Erick Lee Guzmán
Jefe del Departamento de Matemáticas

José Calderón Mendoza
Jefe del Departamento de Física

Abelardo Santaella Quintas
Jefe del Departamento de Departamento de innovación Educativa

Israel Isaac Gutiérrez Villegas
Jefe del Departamento de Ingeniería y Ciencias Sociales

Juan Manuel Figueroa Flores
Jefe del Departamento de UTEyCV

Arturo F. Méndez Sánchez
Académico del Departamento de Física

José Antonio Peralta
Académico del Departamento de Física

ISSN: 2594-1011

Comité Editorial

Miguel Tufiño Velázquez
Editor en Jefe

Mario Chavarría Castañeda
Editor

Israel Isaac Gutiérrez Villegas
Asistente Editorial

José Humberto Ávila Sandoval
Diseño

Juan Manuel Figueroa Flores
Compilador y Desarrollo web

ISSN: 2594-1011

Comité Científico

Dr. Fray De Landa Castillo Alvarado
(ESFM-IPN)

Dr. Gerardo Silverio Contreras Puente
(ESFM-IPN)

Dra. Elvia Díaz Valdés
(ESFM-IPN)

Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas
(UAM-Azcapotzalco)

Dr. Alberto López Trujillo
(ESFM-IPN)

Dr. Arturo Fidencio Méndez Sánchez
(ESFM-IPN)

Dr. Miguel Neri Rosas
(ESFM-IPN)

Dr. Leonor Pérez Trejo
(ESFM-IPN)

Dr. José María Rocha Martínez
(ESFM-IPN)

Dra. Gabriela Lourdes Rueda Morales
(ESFM-IPN)

Dr. Ramón Sebastian Salat Figols
(ESFM-IPN)

Dra. Norma Sánchez Salas
(ESFM-IPN)

Dr. Eliseo Sarmiento Rosales
(ESFM-IPN)

Dr. Manuel Vladimir Vega Blanco
(ESFM-IPN)

Dr. Osvaldo Vigil Galán
(ESFM-IPN)

Dr. Arturo Zuñiga Segundo
(ESFM-IPN)

M. en C. Hernando Efraín Caicedo Ortiz
(Universidad Anáhuac)

M. en C. Alfredo Godínez Muñoz
(ESFM-IPN)

M. en C. Israel Isaac Gutiérrez Villegas
(ESFM-IPN)

M. en C. Javier Norberto Gutiérrez Villegas
(TESE-TecNM)

M. en C. Erick Lee Guzmán
(ESFM-IPN)

M. en C. Francisco Ramírez Reyes
(ESFM-IPN)

M. en C. Abelardo Santaella Quintas
(ESFM-IPN)

Fís. José Antonio Peralta
(ESFM-IPN)

Lic. Mario Chavarría Castañeda
(ESFM-IPN)

Ing. Juan Manuel Figueroa Flores
(ESFM-IPN)

ISSN: 2594-1011

Cintillo Legal

Memorias de la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, año 23, No. 23, agosto 2018, es una publicación anual editada por el Instituto Politécnico Nacional a través de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), Av. Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9 Unidad Profesional “Adolfo López Mateos” Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, Ciudad de México, C.P. 07738. Teléfono 01 (55) 5729 6000, ext. 46135, http://www.esfm.ipn.mx/Documents/RNAFM/MRNAFM2018.pdf, Editor responsable: Lic. Mario Chavarría Castañeda. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2017-050311035400-203, ISSN: 2594-1011, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de éste Número, Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual ESFM, Ing. Juan Manuel Figueroa Flores, Av. "Instituto Politécnico Nacional" S/N, Edificio 9, U.P. Adolfo López Mateos, Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, Ciudad de México, C.P. 07738, fecha de última modificación, 20 de agosto de 2018.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización del Instituto Politécnico Nacional.

ISSN: 2594-1011

Presentación

Apreciables participantes de la XXIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas 2018:

Para el Comité Organizador es un enorme placer darle a cada uno de ustedes la más cordial bienvenida a este evento que tiene un carácter anual en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

La Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas es el lugar de encuentro de la comunidad académica especializada en las áreas de Física, Ciencias de Materiales, Ingeniería Nuclear y Matemáticas de nuestro país, y constituye el espacio para la presentación y discusión de ideas y proyectos en el ámbito de la difusión, la enseñanza e investigación propias de nuestra profesión.

Para esta edición hemos recibido 100 trabajos con igual número de pósteres que fueron sometidos a una selección estricta para garantizar la calidad que se requiere para continuar ofreciendo año tras año un compendio de trabajos científicos de excelente nivel. Adicionalmente, se presentarán 5 conferencias magistrales sobre temas de particular interés en las ciencias Físico – Matemáticas, donde los conferencistas compartirán sus experiencias para enriquecer con ellas nuestro quehacer académico y científico; asimismo, hacemos un reconocimiento a los investigadores quienes constantemente buscan nuevos métodos y técnicas que contribuyen al desarrollo científico y tecnológico de nuestro país.

El Comité Organizador, agradece su participación y los exhorta a continuar investigando, invitándolos a seguir utilizando nuestro evento como su foro de difusión.

"La Técnica al Servicio de la Patria"

Dr. Miguel Tufiño Velázquez
Presidente del Comité Organizador

ISSN: 2594-1011

Índice

Folio	Título	Pág.
XXIIIRNAFM001	**Zona de energía para la cual el Modelo Estándar es consistente** *Vladimir Quijada P, Piotr Kielanowski Ch., S. Rebeca Juárez W.*	1
XXIIIRNAFM002	**Cálculo del valor esperado de la ganancia para diferentes tipos de opciones** *R. S. Salat*	5
XXIIIRNAFM003	**Rendimientos de acciones y distribución normal generalizada.** *R. S. Salat*	9
XXIIIRNAFM004	**Comportamiento caótico de un modelo sobre gasto en publicidad** *R. S. Salat*	14
XXIIIRNAFM005	**Fase de berry del rotor relativista** *Víctor D. Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	20
XXIIIRNAFM006	**Representaciones so(3,c), so(3) en electrodinamica y spin del foton** *Víctor D. Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	24
XXIIIRNAFM007	**Interferencia cuantica en sistemas no inerciales** *Víctor D. Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	28
XXIIIRNAFM008	**Relaciones spinoriales de los métodos de deducción de la ecuación de dirac de van de warden y ryder** *Víctor D. Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	33
XXIIIRNAFM009	**Consideraciónes termoestadísticas del fotón de einstein** *Víctor D. Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	37
XXIIIRNAFM010	**Comentarios al artículo "Realización de estados coherentes no lineales por redes fotónicas"** *Martín J. Nava Callejas, Patricia del Rocio Ornelas Cruces, A. Zúñiga Segundo*	41
XXIIIRNAFM011	**Cálculo de la entropía de la interacción átomo-laser en estados puros** *César Lara Cruz, Angel David Reyes Manuel*	46
XXIIIRNAFM012	**Optimización termodinámica de un motor irreversible usando la "función compromiso"** *S. Levario-Medina, L.A. Arias-Hernández*	49
XXIIIRNAFM013	**Verificación de la ley general de los gases ideales mediante medidas de corriente en un proceso de electrolisis** *José Antonio Peralta, Porfirio Reyes*	56
XXIIIRNAFM014	**Una alternativa a las tradicionales formulas de Cardano-Tartaglia** *E. Salinas-Hernandez, G. Ares de Parga, César R. Martínez García*	60
XXIIIRNAFM015	**Construccion de los polinomios de hermite de forma recurrente al derivar de forma reiterada la ecuación de hemite** *E. Salinas-Hernandez, G. Ares de Parga, César R. Martínez García*	64
XXIIIRNAFM016	**Análisis de diferentes configuraciones geométricas en una superficie de siembra** *Cano García G.V., Salazar Cano J. R., Salazar Cano J. A.*	67
XXIIIRNAFM017	**Síntesis de nanopartículas magnéticas de magnetita con potenciales aplicaciones biomédicas** *David Ravelo Acuña, Hernani Yee Madeira, Carlos Díaz Águila*	71
XXIIIRNAFM018	**Efecto Casimir desde la perspectiva de la electrodinámica estocástica** *H. Betanzos, J. Avendaño*	74
XXIIIRNAFM019	**Esparcimiento y resonancia de paquetes de ondas con perfil Gaussiano al colisionar con una barrera (pozo) de potencial** *Raymundo A. Hernández, J. Avendaño*	77
XXIIIRNAFM020	**Instrumentación para la observación y registro de fenómenos de clima espacial en diferentes regiones del espectro electromagnético** *J. Gama Vázquez, M. Tufiño Velázquez, B. L. Moreno Ley, M. Morales Reséndiz*	85

ISSN: 2594-1011

Índice

XXIIIRNAFM021	**Algunas propiedades físicas de la voz humana y de su percepción** *José Antonio Peralta, Porfirio Reyes*	90
XXIIIRNAFM022	**El método Min-Max para resolver sistemas oscilatorios no lineales** *O. González Gaxiola, J. Ruiz de Chávez*	95
XXIIIRNAFM023	**Incremento de la eficiencia de acreditación de estudiantes mediante grupos experimentales del Sistema de Aprendizaje Individualizado** *Ángel Martínez Meléndez, Ricardo López Bautista, Mario Reyes Ayala, Judith Omaña Pulido, Gerardo Aragón González*	100
XXIIIRNAFM024	**El Grupo Fundamental** *Arturo Cueto Hernández, Héctor Díaz Leal Guzmán*	105
XXIIIRNAFM025	**Superficies** *Rogelio Herrera Aguirre, Héctor Díaz Leal Guzmán*	109
XXIIIRNAFM026	**Solución exacta del oscilador Dunkl bidimensional mediante la factorización de Schrödinger** *Manuel Salazar Ramírez, Didier Ojeda Guillén, Roberto Daniel Mota Esteves*	114
XXIIIRNAFM027	**Fases de TiO2/ZnO evaluadas por difracción de RX y microscopia Raman** *S. Tirado Guerra, L.A. Tavera Carrasco, M.A. Valenzuela Zapata*	118
XXIIIRNAFM028	**Propiedades ópticas de compositos TiO2/ZnO y fotocatálisis** *S. Tirado Guerra, U. Giles Sánchez, M.A. Valenzuela Zapata*	126
XXIIIRNAFM029	**Análisis de espectros multifractales generados por procesos multiplicativos** *José Alberto Zamora Justo, Alejandro Muñoz Diosdado, Paulina Abrica González, Guillermo Rocael Vázquez Martínez*	133
XXIIIRNAFM030	**Estudio sobre la dispersión elástica de partículas en dos discos rígidos** *José Luis del Río Correa, Angelina Nohemi Mendoza Tavera, César Ivan Avila Vasquez*	138
XXIIIRNAFM031	**Fabricación y caracterización de películas delgadas de Co3O4 para aplicaciones de almacenamiento de energía** *A. Martín, G. Georgina, O. Mayahuel, H. Ángeles*	142
XXIIIRNAFM032	**Una forma práctica de calcular la función de Wigner** *Sánchez Rodríguez Julio Cesar, Rodríguez Trejo Luis Adrián*	147
XXIIIRNAFM033	**Entropía para un modelo de Jaynes-Cummings en un medio Kerr** *Antonio Huerta Montellano, Jorge Andrés Anaya Contreras, Arturo Zúñiga Segundo*	152
XXIIIRNAFM034	**Fabricación y Caracterización de Películas Delgadas Hechas con Nanotubos de Carbono de Pared Simple** *I. Jimenez Martinez, G. Ortega Cervantez, G. L. Rueda Morales, E. Díaz Valdes, R. Gomez Aguilar, J. Ortiz López*	157
XXIIIRNAFM035	**Relación entre hemoglobina y glucemia en diabetes tipo 1 experimental** *Lilia Ivonne Olvera Cano, Guadalupe Cleva Villanueva, Alfredo Cruz Orea, Norma Sánchez Salas*	164
XXIIIRNAFM036	**Mini-Módulo Fotovoltaico (5cm2 x10cm2) interconectado y analizado bajo diferentes condiciones** *C. Hernandez Vasquez, M. A. González Trujillo, M.L Albor Aguilera, L. A. Esquivel Mendez, R.C. Ruiz Ortega, F.A. Pulgarín Agudelo*	170
XXIIIRNAFM037	**Influencia del uso de tolueno sobre la dispersión de micropartículas de Ag en PDMS** *Obregón G. Jesús, García P. Georgina, Munguía C. Jacobo Esteban*	174

ISSN: 2594-1011

Índice

XXIIIRNAFM038	**Propiedades Estructurales de películas de CdS dopadas con Zinc** *Uziel Galarza Gutiérrez, María de Lourdes Albor Aguilera, Miguel Ángel González Trujillo, José Manuel Flores Márquez*	176
XXIIIRNAFM039	**Influencia del tiempo de depósito en las propiedades morfológicas y estructurales de películas delgadas de ZnS depositadas por la técnica de baño químico** *J. A. Ortega Cardenas, M. L. Albor Aguilera, H. T. Yee Madeira, M. A. González Trujillo*	178
XXIIIRNAFM040	**Estudio de la recristalización de CdTe por medio de tratamientos tér-micos de CdCl2, MgCl2 y TeCl4** *M. Macías Martínez, M.L. Albor Aguilera, C. Hernández Vásquez*	183
XXIIIRNAFM041	**Simulaciones de galaxias de disco y observaciones artificiales** *Alejandro López Gómez, Isaura Luisa Fuentes Carrera, Ruslan Gabbasov*	186
XXIIIRNAFM042	**Resonador mecánico múltiple como modelo de la Cóclea** *José Antonio Peralta, Héctor Aguilera Trujillo, Pedro Vidales Rosales*	194
XXIIIRNAFM043	**Celdas Solares del tipo CdS/CdTe interconectadas en áreas de 40 cm^2** *L. A. Esquivel Mendez, R. C. Ruiz Ortega, M.L. Albor Aguilera, C. Hernández Vasquez, D. Jiménez Olarte, F. A. Pulgarin Agudelo, M.A. González Trujillo*	198
XXIIIRNAFM044	**Análisis fractal y multifractal de series de terremotos sintéticos** *Ana María Aguilar Molina, Alejandro Muñoz Diosdado, Fernando Angulo Brown*	204
XXIIIRNAFM045	**Crecimiento y caracterización de película delgada de Selenuro de Cadmio, por medio de la técnica CSVT** *J.J. Mireles Olvera, M.L. Albor Aguilera, C. Hernández Vasquez*	210
XXIIIRNAFM046	**Función de Evans en el estudio del efecto de inhibición en la propagación de ondas viajeras corticales en un modelo de campo neural** *Laura R. González Ramírez*	213
XXIIIRNAFM047	**Cálculo, Gravitación y Newton** *Raúl Amezua Gómez, Arturo Cueto Hernández, Rogelio Herrera Aguirre*	218
XXIIIRNAFM048	**Números** *Rogelio Herrera Aguirre, Raúl Amezcua Gómez, Arturo Cueto Hernánez*	223
XXIIIRNAFM049	**Estudio del choque séptico experimental mediante espectroscopia fotoacustica** *Sindy J. Olvera Vazquez, Cleva Villanueva López, Marcos Macías Mier, Margarita Lizeth Alvarado Noguez, Alfredo Cruz Orea*	231
XXIIIRNAFM050	**Síntesis y caracterización DRX y UV-Vis de catalizadores VOCuOx/TiO2-ZrO2** *F. Morales Anzures, P. Salinas Hernández, F. Chávez Rivas*	234
XXIIIRNAFM051	**Cinemática y análisis de imágenes directas en diferentes longitudes de onda del par de galaxias en interacción Arp 82 (NGC2535/36)** *Edgar Sandoval Trejo, Isaura Fuentes Carrera*	239
XXIIIRNAFM052	**Fundamentos de Muestreo Aleatorio, Cómputo de Permutaciones y Combinaciones** *Alejandra Iveth García Pérez, Adrián Alcántar Torres*	251
XXIIIRNAFM053	**Frecuencias cuasinormales del potencial gaussiano** *Jonathan Jaimes Nájera, A. López Ortega*	256
XXIIIRNAFM054	**Caracterización espectroscópica infrarroja a transformada de Fourier de Mordenita natural intercambiada con Hierro** *F. Chávez-Rivas, I. Rodríguez Iznaga, G. Zacahua Tlacuatl*	260
XXIIIRNAFM055	**Microestructura y propiedades mecánicas obtenidas al añadir NPs de SiO2 y Al2O3 al cordón de soldadura formado por SAS** *A. Jiménez Jiménez, A. M. Paniagua Mercado, A. García Bórquez, V. M. López Hirata, A. S. De Ita-De la Torre, E. Miguel Díaz, M. L. Saucedo Muñoz*	266

ISSN: 2594-1011

Índice

XXIIIRNAFM056	**Sistema de monitoreo para campos eléctricos en el suelo y ondas de radio de baja frecuencia en el medio ambiente** *José Antonio Peralta, Porfirio Reyes López, Israel Reyes Ramírez*	273
XXIIIRNAFM057	**Comparación entre la radiación térmica de fotones y neutrinos** *Víctor Granados García, Carlos G. Pavía Miller, Roberto D. Mota Esteves*	277
XXIIIRNAFM058	**Usos versátiles de un simple circuito RC** *José Antonio Peralta, Josué Hernández Torres, Víctor Alberto Ruiz Rodríguez*	280
XXIIIRNAFM059	**Osciladores armónicos en un baño térmico** *H. Betanzos, J. Avendaño*	284
XXIIIRNAFM060	**Grafito con Nanopartículas de Plata** *Rubí Anyra Rosales Ozuna, Gabriela L. Rueda Morales, Gerardo Ortega Cervantez, Jaime Ortiz López*	287
XXIIIRNAFM061	**Entropía de muestreo aplicada al análisis de series de tiempo RR en condiciones de estrés** *Alejandro Muñoz Diosdado, Gonzalo Gálvez Coyt, Eric E. Solís Montúfar*	291
XXIIIRNAFM062	**La Ecuación de Dirac Interactuando con Defectos Topológicos** *Manuel Salazar Ramírez, Didier Ojeda Guillén, Roberto Daniel Mota Esteves, Víctor David Granados García*	296
XXIIIRNAFM063	**Tiempo que emplearon alumnos de ingeniería para completar una cadena de cinco asignaturas de Cálculo en tronco general durante 2017** *Georgina Pulido Rodríguez, Ricardo López Bautista, Josué Figueroa González*	300
XXIIIRNAFM064	**El Resultante y el Discriminante** *Arturo Cueto Hernández, Raúl Amezcua Gómez*	306
XXIIIRNAFM065	**¿Ecuaciones Funcionales?** *Arturo Cueto Hernández, Cesareo García Martínez*	318
XXIIIRNAFM066	**Masa dependiente de la posición: condición de frontera** *Sahory Canseco, J. Avendaño, J. García Ravelo*	326
XXIIIRNAFM067	**Análisis de la dimensión fractal de Higuchi y pérdida de complejidad en tacogramas durante pruebas de esfuerzo** *N. G. Pérez López, A. Salcedo Martínez, J. A. Zamora Justo, G. Gálvez Coyt, A. Muñoz Diosdado*	331
XXIIIRNAFM068	**¿Qué es Relatividad Especial Restringida?** *Ernesto Sánchez Gutiérrez, Héctor Javier Uriarte Rivera*	336
XXIIIRNAFM069	**Descomposición Multifractal utilizando Sistemas de Funciones Iteradas** *José Luis del Río Correa, Jeanett López García, Gabriela Durán Meza*	341
XXIIIRNAFM070	**El electromagnetismo donde todo se puede modelar. Tratamiento multipolar de sistemas vivos como la anguila eléctrica (electrophorus electricus)** *Brenda Elizabet Jiménez Ramos, Rafael Zamorano Ulloa*	346
XXIIIRNAFM071	**Tasa de Formación Estelar en el UV de las Galaxias Coloreadas** *V. Hernández Rosas, A. M. Hidalgo Gómez*	354
XXIIIRNAFM072	**Oscilaciones de neutrinos: un análisis estadístico de los datos de experimento Daya Bay utilizando una matriz de covarianza** *J. García Bello, D. Tun Molina, J. Escamilla Roa, B. Vargas Perez, J. García Ravelo*	359
XXIIIRNAFM073	**La degeneración de la energía y sus funciones de onda asociadas en los procesos de hibridación cuántica del átomo de carbono** *Eduardo Casas Martínez, Berenice N. Castañeda Avila, Rafael Zamorano Ulloa*	363
XXIIIRNAFM074	**Modelado de concentración de contaminantes en la atmósfera mediante la ecuación de difusión-advección** *Y. Medina Quiroz, S. Ramírez Escamilla, R. Zamorano Ulloa, J. Gama Vázquez*	368
XXIIIRNAFM075	**La memoria del electrón clásico** *H. Betanzos, J. Avendaño*	372

ISSN: 2594-1011

Índice

XXIIIRNAFM076	**Matemáticas básicas en un curso de Criptografía para ingenieros** *Ricardo López Bautista, Georgina Pulido Rodríguez*	376
XXIIIRNAFM077	**Pruebas de Fricción en tejido plano de mezclilla** *Edith Cortez Martínez, Leydy Karina Ignacio Luz, Arturo Fidencio Méndez Sánchez, Teresa Ramírez Rodríguez*	382
XXIIIRNAFM078	**Introducción al movimiento Browniano** *Oliver Contreras Vergara, Dra. Norma Sánchez Salas, Dr. José Inés Jiménez Aquino*	386
XXIIIRNAFM079	**Dispositivo para comunicación con velocidad de 9.6 kbd implementando un mapeo del tiempo a los números naturales mediante un láser de helio-neon y un pic** *Hernández Hernández Jaime Vidal, Solis Machorro Iveth*	390
XXIIIRNAFM080	**Origen de la vida: un "well-posed problema"** *Isthar Cahum Marruffo, Diana Patricia Barragán Vázquez, Rafael Zamorano Ulloa*	394
XXIIIRNAFM081	**Soluciones de las ecuaciones Korteweg-de Vries y Schrödinger no lineal por el método de simetrías** *J.F. Hernández Sepúlveda, Pablo Paniagua, Francisco J. Turrubiates*	401
XXIIIRNAFM082	**La función de Wigner en el efecto Aharonov-Bohm** *Oscar J. M. Galindo, Pablo Paniagua, Francisco J. Turrubiates*	407
XXIIIRNAFM083	**El concepto de espín y sus estructuras matemáticas** *Moisés Alfonso, Pablo Paniagua, Francisco J. Turrubiates*	414
XXIIIRNAFM084	**Correcciones radiativas a la polarización del muón en decaimientos y la violación de la simetría temporal T** *M. Sánchez, M. Neri, A. Martínez, J.J. Torres, D.M. Tun*	421
XXIIIRNAFM085	**Implementación de la técnica de anemometría de hilo caliente para determinar los perfiles de velocidad a través de barreras textiles** *Isaac Soltero Ochoa, Arturo F. Méndez Sánchez, Edith Cortez Martínez*	427
XXIIIRNAFM086	**Implementación de retroalimentación automática para matemáticas en un sistema dinámico de evaluación** *Ricardo López Bautista, Georgina Pulido Rodríguez*	433
XXIIIRNAFM087	**Modelo matemático de difusión en la nefrona: problemas de valores en la frontera con impacto biológico** *O.A. Sanvicente, R. Zamorano*	439
XXIIIRNAFM088	**Entendiendo la relatividad con un nuevo enfoque mediante las transformaciones de lorentz. Las implicaciones del cuervo relativista de Einstein** *O.A. Sanvicente, R. Zamorano*	446
XXIIIRNAFM089	**Emission varying at aging in ambient air of ZnO:Ag nanocrystals obtained by ultrasonic spray pyrolysis** *Erick Velázquez Lozada, Tetyana. Torchynska*	451
XXIIIRNAFM090	**Caracterización de los coeficientes de fricción en tela acrílica elaborada mediante tejido de punto** *José Alberto Cortés Martínez, Edith Cortez Martínez, Arturo Fidencio Méndez Sánchez, Beatriz Ruiz Santiago*	455
XXIIIRNAFM091	**El efecto Doppler y los cambios de coloración en los semáforos** *Daniela Ocampo Salgado, José. M. Rivera Rebolledo*	464
XXIIIRNAFM092	**El poder y la profundidad de los invariantes en Relatividad Especial** *Ojeda Castillo Grecia, Zamorano Ulloa. Rafael*	466
XXIIIRNAFM093	**Estudio de la región de formación estelar en Hubble X a través de diferentes técnicas de espectroscopía bidimensional** *Héctor O. Castañeda, Héctor J. Uriarte Rivera, Hernando Caicedo Ortiz*	472
XXIIIRNAFM094	**Estudio de la dinámica del gas ionizado en la región gigante de formación estelar NGC 595** *Javier García Vazquez, Héctor O. Castañeda*	476
XXIIIRNAFM095	**Confrontación de efecto gravitatorio y velocidad del sonido** *Juan C. Ahuactzin Díaz, José M. Rivera Rebolledo*	480

ISSN: 2594-1011

Índice

XXIIIRNAFM096	**Principios físicos de la microscopia confocal** *C. Nicolás Hernández, R. Zamorano Ulloa*	**482**
XXIIIRNAFM097	**Introducción a la Teoría de Categorías** *J. Cárdenas, E. Sarmiento*	**487**
XXIIIRNAFM098	**Algunas distribuciones BT clásicas** *José M. Rocha Martínez*	**490**
XXIIIRNAFM099	**Una visión en perspectiva de la contaminación por ruido en la Ciudad de México** *José Antonio Peralta*	**495**
XXIIIRNAFM100	**Análisis de las anisotropías magnéticas en policristales de Ni0.5Zn0.5Fe2O4 por Resonancia Ferromagnética** *Hernández Santiago Ma. Guadalupe, Zamorano Ulloa Rafael*	**500**

ISSN: 2594-1011

Zona de energía para la cual el Modelo Estándar es consistente

Vladimir Quijada P.[1] Piotr Kielanowski Ch.[2], S. Rebeca Juárez W.[1],
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, CDMX, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55039 E-mail: rebeca@esfm.ipn.mx
[2]Departamento de Física, CINVESTAV-IPN, CDMX, México

Resumen — ***Las* restricciones para los valores de los parámetros del Modelo Estándar (ME), tales como las constantes de acoplamiento, surgen condicionando la teoría al considera los principios de Unitaridad, Trivialidad y Estabilidad del Vacío (EV). Estas ideas han sido consideradas por décadas para establecer la consistencia del modelo. En base al Principio de Estabilidad del Vacío, mostramos que el valor de la masa del quark-top es un elemento determinante para el establecimiento de la zona energética de validez del modelo, y es mediante las Ecuaciones del Grupo de Renormalización (EGR) que determinamos esta zona.**

Palabras Clave — **Modelo Estándar. Estabilidad del Vacío. Masa del quark top.**

Abstract — **The restrictions for the values of the parameters of the Standard Model (SM), such as the coupling constants, arise constraining the theory with the Unitarity, Triviality and Vacuum Stability Principles. These ideas have been considered for decades to establish the model consistency. We show, on the base of the Stability Principle, that the value of the quark-up-mass is determinant to establish the energy-zone for the validity of the model and it is by means of the Renormalization Group Equations (RGE) that we determine this zone.**

Keywords — **Standard Model. Vacuum Stability. Top Quark mass.**

I. INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) [1] es una teoría cuántica de campos de norma (localmente invariante) basada en los grupos de simetría $U(1)\times SU(2)_L \times SU(3)_C$. Estos grupos de simetría determinan la forma de las interacciones básicas entre las partículas elementales.

El modelo Estándar es una teoría que puede ser extrapolada desde la energía correspondiente a la masa del bosón W, M_W . hasta la masa de Planck M_{planck}, dependiendo del valor de la masa del quark top, si todos los acoplamientos del modelo permanecen finitos. (en ausencia de un polo de Landau), como se verá más adelante.

El descubrimiento del bosón de Higgs [2- 5] en el LHC con masas alrededor de $M_H = 125.03$ GeV/c2 y el hecho de que no hay señal de nueva física, dan lugar a la necesidad de revisar con detalle las condiciones para la consistencia del ME.

El ME se describe por medio de un Lagrangiano (L) que se construye inicialmente con partículas hipotéticas que carecen de masa, ya que la introducción del término de masa, de la manera tradicional a este nivel, no permite la invariancia ante las transformaciones de norma locales requeridas. Por lo anterior es necesario adicionar a este L un término con un campo escalar ϕ asociado al Higgs (H) e incluir términos para describir su interacción con los demás campos. La introducción del H en el L requiere: aparte de un término cinético, el de un potencial adecuado, es decir:

$$L_H = \left(D_\mu \phi\right)^+ \left(D^\mu \phi\right) - V\left(\phi\right), \quad V\left(\phi\right) = -\mu^2 \phi^+ \phi + \frac{1}{2}\lambda_H \left(\phi^+ \phi\right)^2 \cdot$$

donde ϕ es un doblete con isospin débil $T = 1/2$ e hypercarga $Y = 1$. A λ_H se le conoce como el acoplamiento cuártico del Higgs.

Debido a su forma, este potencial tiene un mínimo con el cual es determinado el valor del vacío para el Higgs, v=246.2 *GeV* (en la escala de la masa del bosón Z, M_Z =91.187 *GeV*). Además se incorpora el llamado Mecanismo de Higgs conocido como el rompimiento espontáneo de la simetría. Después de expandir el campo ϕ alrededor de su valor mínimo y efectuar un cambio de fase local, se obtiene a nivel árbol, para la masa del Higgs, $M_H = v\sqrt{\lambda_H}$.

La parte del L del MS que corresponde a la interacción de Yukawa de los quarks con el Higgs tiene la siguiente forma

$$L_y = y_u \bar{u}_R \left(f^+ u_L\right) + y_d \bar{d}_R \left(f\, d_L\right) + h.c. \qquad (1)$$

Aquí y_u y y_d son los acoplamientos de Yukawa para los quarks up y down, ϕ es el campo de Higgs; $u_{L,R}$ y $d_{L,R}$ son los campos de los quarks. Los subíndices L y R denotan la helicidad izquierda o derecha de éstos.

Los acoplamientos y_u y y_d son matrices complejas 3×3 las cuales no se observan directamente y que dan lugar a las masas de los quarks mediante la transformación de los campos de norma en los campos físicos.

La parte del L que nos interesa mayormente en este trabajo es la que corresponde al potencial asociado al campo de Higgs ϕ.

Con patrocinio de COFFA, EDI y la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, Proyecto 20180466

Cuando se realizan los cálculos a diferentes órdenes de aproximación, en el marco del ME, para la comparación de los resultados teóricos con los experimentales, surgen integrales que divergen. Sin embargo, para que el resultado preciso sea físicamente aceptable es necesario eliminar (sustraer) estas divergencias, lo cual conduce a una manera de redefinir los parámetros del modelo y a esto se le conoce como el proceso de Renormalización.

II. REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN

Existen varios métodos [6] para eliminar los infinitos de las integrales que divergen, algunos de ellos son: el de corte (*cut-off*), el regulador de Pauli-Villars, la regularización analítica, la regularización de enrejado (*lattice*) y la **regularización dimensional**. Este último procedimiento es el que se usa más comúnmente por la facilidad para llevar a cabo las integraciones en una dimensión D>4, para después regresarlas a D=4 aislando las divergencias. El MS es Renormalizable debido a que todas las integrales divergentes que aparecen pueden ser regularizadas.

Al renormalizar, se reajustan las cantidades físicas por medio de factores multiplicativos los cuales eliminan las posibles cantidades divergentes, pero es importante notar que la forma de eliminar estas divergencias en la teoría de perturbaciones no es única, debido a que existen ambigüedades al definir la parte divergente. Eventualmente, esto conduce también a una ambigüedad al definir la parte finita. Para remover esta ambigüedad se tiene que especificar la cantidad que se sustrae en el proceso de renormalización. La forma de sustraer divergencias se conoce como esquema de renormalización. El esquema de sustracción mínima modificado ($\overline{SM}$) es el que hemos elegido para este trabajo. Por otro lado, al renormalizar se introduce inevitablemente una escala arbitraria de energías μ conocida como escala de renormalización. De acuerdo a esta arbitrariedad se tienen varias posibles expresiones para el mismo parámetro. Estas diferentes expresiones están conectadas por una "renormalización" finita. Las transformaciones entre diferentes parámetros a diferentes escalas forman un grupo. Estas transformaciones generan las ecuaciones funcionales para los parámetros y si uno se restringe a un cambio infinitesimal de la escala de renormalización entonces estas ecuaciones funcionales se reducen a ecuaciones diferenciales, conocidas como Ecuaciones del Grupo de Renormalización (EGR).

III. ECUACIONES DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

En general, para el MS las EGR forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas [7-8].

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{16\pi^2}\beta_x^{(1)} + \frac{1}{\left(16\pi^2\right)^2}\beta_x^{(2)} + \Lambda \ , \qquad (2)$$

Aquí $t = \ln\left(E / M_t\right)$; $x = g_i, y_{u,d}, v, \lambda_H, Z,$ representa a los parámetros del modelo, siendo $y_{u,(d)}$ el acoplamiento de Yukawa para el sector *up* (*down*), la función Z está relacionada con la dimensión anómala del campo de Higgs, M_t es la masa del quark t y [7,8]

$$\beta_x^{(i)} = \beta_x^{(i)}\left(g_i, y_{u,d}, v, \lambda_H, Z\right). \qquad (3)$$

En la aproximación $i = 1$, (a un rizo) es posible encontrar soluciones analíticas para los acoplamientos de norma:

$$g_i^{(1)}(t) = \frac{g_i^0}{\sqrt{1 - \frac{2b_i\left(g_i^0\right)^2(t - t_0)}{(4\pi)^2}}}, \qquad \text{donde} \qquad (4)$$

(b_1, b_2, b_3) = (41/10, -19/6, -7), y $g^0{}_i = g_i(t_0)$, con $t_0 = M_t$, donde la energía inicial corresponde a la de la masa del quark top.

Las soluciones de las EGR más precisas se obtienen numéricamente, debido a su grado de complicación. En la Fig. 1 se muestra la solución a un lazo para la evolución de los acoplamientos de norma en base a los datos anteriormente referidos.

La región de validez del MS en la aproximación de un lazo se obtiene a partir de la solución analítica para el $\lambda_H(t)$. La zona de consistencia del MS corresponde a la región en la cual de acuerdo a la condición de estabilidad el valor del acoplamiento cuártico es positivo, es decir $\lambda_H(t) > 0$; en la zona $M_t < E < E_{\lim}$.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

.

Los resultados que hemos obtenido, referentes a los Acoplamientos de Norma y el Acoplamiento Cuártico $(g_1, g_2, g_3, y\ l_H)$ correspondientes a las EGR descritas en [7] son presentados a continuación en las Figuras 1-5.

Con patrocinio de COFFA, EDI y la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, Proyecto 20180466

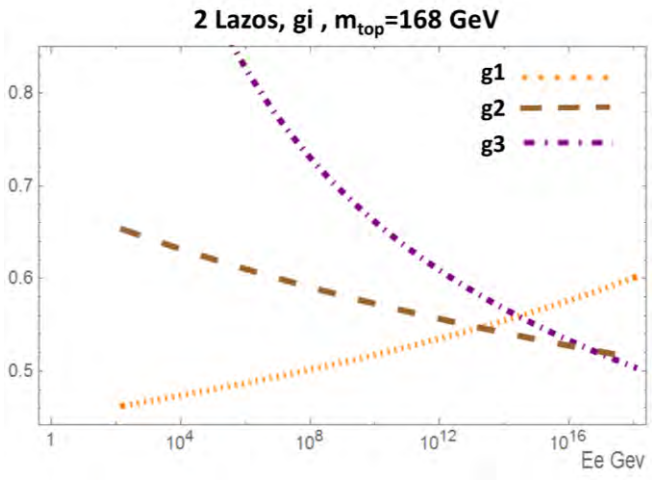


Figura 1. Corrimiento de los tres acoplamientos de norma a dos lazos.

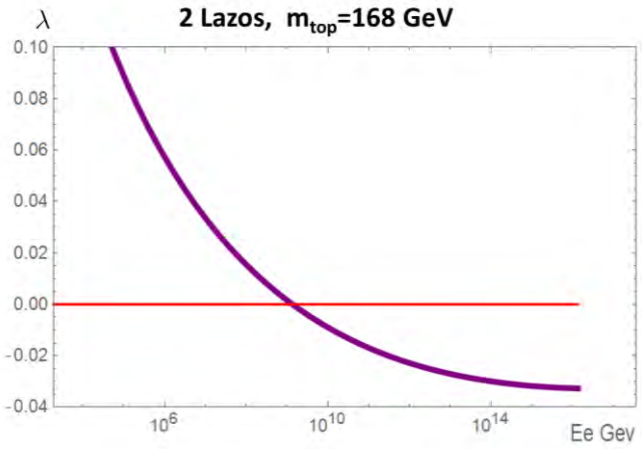


Figura 3. Dependencia en la energía del acoplamiento cuártico del Higgs.para m_{top}=168 GeV a 2 Lazos.

Las Fig. 2, 3, 4 y 5 muestran cómo evoluciona λ_H (E) con la energía, para dos valores de la masa del quark top con el fin de determinar los límites de estabilidad.

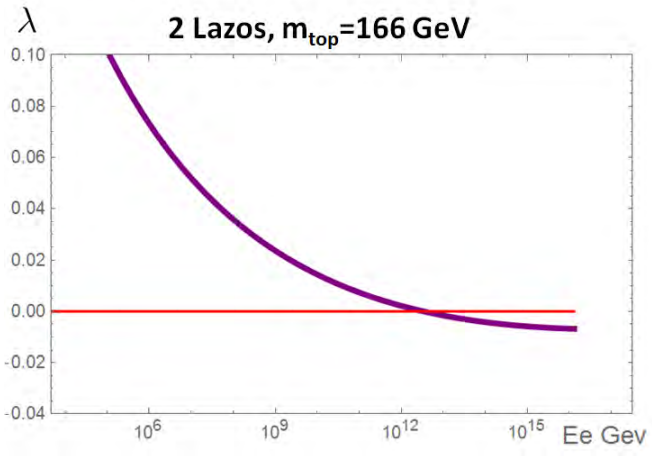


Figura 2. Dependencia en la energía del acoplamiento cuártico del Higgs.para m_{top}=166 GeV a 2 Lazos.

A través de las Figuras: 2, 3, 4 y 5 se encuentra el rango de energía para el cual el MS es válido en términos de λ_H (E) > 0, para 1 y 2 Lazos.

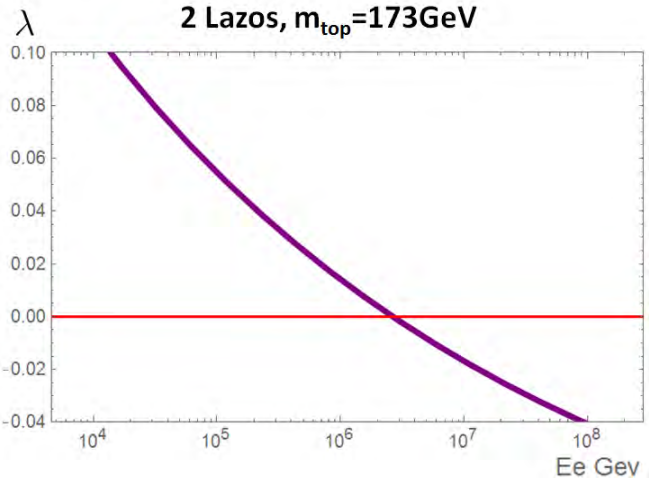


Figura 4. Dependencia en la energía del acoplamiento cuártico del Higgs, para mtop=173 GeV a 2 Lazos.

En resumen:
Los valores límite aproximados en GeV's para el cálculo a 2 Lazos, son para:

m_{top}=165,	Rango válido > M_{Planck}
m_{top}=166,	$m_{top} < E < 10^{12}$
m_{top}=168,	$m_{top} < E < 10^{9}$
m_{top}=173,	$m_{top} < E < 10^{7}$

Con patrocinio de COFFA, EDI y la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, Proyecto 20180466

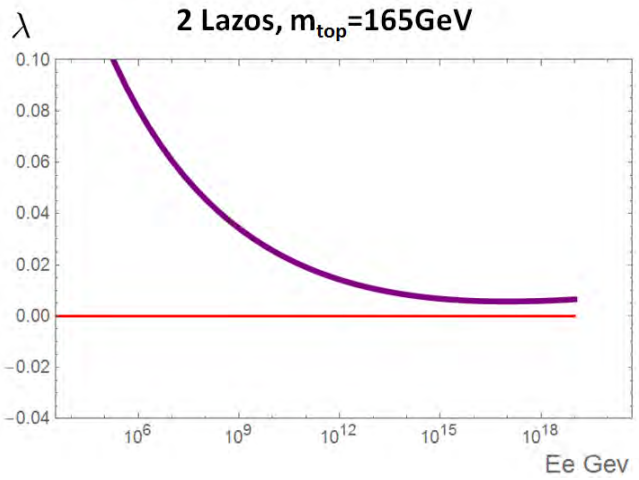


Figura 5. Dependencia en la energía del acoplamiento cuártico del Higgs, para mtop=165 GeV a 2 Lazos.

V. CONCLUSIONES

Por medio de las EGR del ME, a 2 lazos, hemos obtenido la evolución, relativa a la energía, de la constante de acoplamiento cuártico del Higgs, y mostramos su fuerte dependencia en la masa del quark top, tal como se aprecia en las Figuras 2, 3, 4 y 5. Cabe mencionar que el acoplamiento cuártico no se anula incluso más allá de la M_{Planck} para una m_{top}=165 GeV tal como se señala en la Figura 5.

Debido a que existe una gran incertidumbre teórica acerca del valor preciso de m_{top} y un espectro de valores posibles para ella, derivados de los procesos para obtenerla, como dispersiones, colisiones y decaimientos; fue necesario seleccionar algunos valores reportados en la literatura [10] para observar su efecto sobre el acoplamiento cuártico, para la consolidación de la teoría del Modelo Estándar, en particular en base al Mecanismo de Higgs, es necesario que el acoplamiento cuártico sea positivo (estabilidad del vacío). Hemos encontrado que el rango en que esto ocurre es menor que 10^{18} GeV (Masa de Planck) para varios casos. Será interesante comparar nuestros resultados con los de otros, que consideran a las EGR con mayor aproximación (a más lazos) y que determinen nuevas zonas de validez del ME, pero sobre todo que determinen a partir de que energía es necesario introducir una nueva física.

REFERENCIAS.

[1] L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); A. Salam, p. 367 of *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almquist and Wiksells, Stockholm, 1969); S.L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).

[2] Aad G et al. [ATLAS Collaboration] 2012 Phys. Lett. B 716 1 (Preprint 1207.7214).

[3] Chatrchyan S et al. [CMS Collaboration] 2012 Phys. Lett. B 716 30 (Preprint 1207.7235).

[4] CMS Collaboration] 2014 Precise determination of the mass of the Higgs boson and studies of the compatibility of its couplings with the standard model (Preprint CMS-PAS-HIG-14-009).

[5] **G.** Aad et al. [ATLAS Collaboration], Phys. Rev. D 90 052004 (Preprint 1406.3827).

[6] Ryder, L.,(1996). Renormalisation. En *Quantum Field Theory* (pp. 308-329). United Kingdom, Cambridge: Cambridge University Press.

[7] H. Arason et al, Phys. Rev. D 46, 3945 (1992).
D. Castanño *et al.*, Phys. Rev. D **49**, 4882 (1994).

[8] M. Luo, H. Wang y Y. Xiao, Phys. Rev. Lett. 90, 011601 (2003).

[9] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **40** 100001 (2016).

[10] S. Alekhina, A. Djouadi and S. Mochd, Phys. Lett. B716 (2012) 214. ArXiv 1207.0980v3.

Con patrocinio de COFFA, EDI y la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, Proyecto 20180466

ISSN: 2594-1011

Cálculo del valor esperado de la ganancia para diferentes tipos de opciones

R.S. Salat
Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55011 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rsalat@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se presentan métodos para estimar el valor esperado de la ganancia, para varios tipos de opciones, europeas, americanas y asiáticas, para el caso en el que el precio de la acción siga un movimiento Browniano geométrico. Para los casos de opciones europeas y americanas se emplean fórmulas exactas y para el caso de opciones asiáticas, se propone utilizar simulación de Montecarlo. Se extiende el método de simulación, para acciones cuyos rendimientos siguen una distribución de Laplace. Para un caso específico, se comparan los resultados obtenidos para el valor esperado de la ganancia de la opción, al utilizar una distribución normal y una de Laplace para los rendimientos. Se observa que se pueden tener diferencias importantes.**

Palabras Clave – **Opción financiera, ganancia esperada, simulación de Montecarlo.**

Abstract — **The present paper contents methods to estimate the expected value of gain for several types of options, European, American and Asian for the case in which the price of the action follows a geometric Brownian movement. In the case of European and American options, exact formulas are used and for the case of Asian options, it is proposed to use Monte Carlo simulation. The simulation method is extended, for actions whose yields follow a Laplace distribution. For a specific case, the results obtained are compared for the expected value of the option's gain, by using a normal distribution and a Laplace distribution for the returns. It is observed that there can be important differences.**

Keywords — **Financial option, expected profit, Monte Carlo simulation.**

I. Introducción

En el caso de opciones americanas, éstas se pueden ejercer en cualquier momento de un intervalo de tiempo $[0, T]$. El valor esperado de la ganancia si se ejerce la opción al tiempo t, a valor presente, está dado por [1] y [2]:

$$G = e^{-rt}\, máx\{S_t - K, 0\} \tag{1}$$

Este trabajo está patrocinado por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

Suponiendo que el precio de la acción subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico [5], esto es:

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)} \tag{2}$$

Donde S_t es el precio de la acción en el tiempo t, μ es un parámetro y σ es otro parámetro, llamado volatilidad. Dado que el exponente en (2) sigue una distribución normal con media $(\mu - \sigma^2/2)t$ y varianza $\sigma^2 t$, la distribución de S_t es:

$$f_{S_t}(s_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}\, s} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{\sigma^2 t}} \tag{3}$$

Si la opción se ejerce al tiempo t, como es el caso de una opción europea, el valor esperado de la ganancia, a valor presente, es:

$$E(G) = e^{-rt}\int_K^\infty (s - K) f_{S_t}(s) ds \tag{4}$$

Esta integral puede calcularse directamente o usar un programa de cálculo simbólico como Máxima. El resultado del cálculo de la integral es:

$$E(G) = S_0 e^{(\mu - r)t}\Phi(d_1) - e^{-rt}K\Phi(d_2) \tag{5}$$

Donde $d_1 = \left((\mu + \sigma^2/2)t + log(S_0/K)\right)/\sigma\sqrt{t}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ y Φ es la función de distribución de la normal estándar. Una opción americana puede ejercerse en cualquier momento del intervalo en el que esté vigente el contrato. En principio, el tiempo en el que debe ejercerse una opción americana para tener una ganancia esperada máxima, se puede obtener a partir de (5), pero la ecuación a resolver requiere del uso de métodos numéricos. También puede recurrirse a evaluar (5) para diferentes valores de t. Para otro tipo de opciones, se puede estimar el valor esperado de la ganancia usando simulación de Montecarlo.

En un tipo específico de opción asiática, la ganancia a valor presente es:

$$G = e^{-rt}\, máx\{\overline{S_t} - K, 0\} \quad (6)$$

Donde $\overline{S_t}$ es el valor medio de S_t en el intervalo $[0, t]$.
En muchos casos, los rendimientos aproximados $ln(S_t/S_{t-1})$ (aproximados porque $ln(S_t/S_{t-1}) \approx (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$, si estos valores son pequeños), se ajustan mejor a una distribución de Laplace que a una distribución normal. La función de densidad para $r_t = ln(S_t/S_{t-1})$, está dada por:

$$f_{r_t}(r_t) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|r_t - \mu|}{b}} \quad (7)$$

La media y la varianza de esta distribución son μ y $2b^2$, respectivamente. Y los estimadores de máxima verosimi-litud para los parámetros son:

$$\widehat{\mu} = mediana\ muestral \text{ y}$$
$$\widehat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \quad (8)$$

Para simular valores para una variable aleatoria X con una distribución de Laplace con parámetros μ y b, utilizando el método de la inversa, se pueden generar valores para U uniformemente distribuidos en $[0, 1]$ y usar la fórmula:

$$X = \begin{cases} \mu - b\ ln\big(2(1-U)\big)\ si\ U > 1/2 \\ \mu + b\ ln(2U)\ si\ U \leq 1/2 \end{cases} \quad (9)$$

De este modo se pueden simular valores para los rendimientos y también para los precios de la acción. Y, como consecuencia, también se pueden simular las ganancias para diferentes tipos de opciones.

Para simular valores para una variable aleatoria X que sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, se puede utilizar el método de Box-Muller:

$$X = \sqrt{-2ln(U_1)}cos(2\pi U_2) \quad (10)$$

Donde U_1 y U_2 son dos variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en $[0, 1]$.

II. Metodología

A. Para el cálculo de las integrales.

Se utilizó el programa Máxima, ejecutando el siguiente "script":

```
%3 assume(o>0);
%4 fs:(1/(o*s*sqrt(2*%pi*t)))*exp(-(1/2)*((log(s/s0)-(u-o^2/2)*t)^2/(t*o^2)));
%5 integrate(fs,s,0,+inf);
%6 integrate(s*fs,s,0,+inf);
%7 assume(K>0);
%8 assume(s0>K);
%9 integrate((s-K)*fs,s,K,+inf);
```

B. Para la evaluación del valor esperado de una opción.

Se empleó simulación de Montecarlo para estimar el valor esperado de la ganancia de una opción que no sea europea o americana y en el caso en que se supone que los rendimientos siguen una distribución de Laplace. Los programas se escribieron en el lenguaje Python y para elaborar las gráficas se utilizó la librería matplotlib [6].

Las fórmulas dadas por (9) y (10), permiten generar valores para los rendimientos, para los casos en que éstos sigan una distribución De Laplace y normal, respectivamente. Con los valores generados para los rendimientos, se pueden generar valores para los precios de las acciones, por medio de:

$$S_t = S_{t-1}e^{r_t} = S_{t-2}e^{r_t + r_{t-1}} = \cdots = S_0 e^{r_t + r_{t-1} + \cdots + r_1} \quad (11)$$

A partir de los valores generados para el precio de una acción, se puede generar la ganancia de la acción, considerando el tipo de contrato.

III. Resultados

A. Opciones europeas y americanas.

La ganancia esperada a valor presente puede calcularse directamente usando la ecuación (5), para el caso de una opción europea. En la Fig. 1, se muestra el valor esperado de la ganancia en función del tiempo, considerando $S_0 = 10$, $\sigma = 0.02$, $r = 0.00071$ y $\mu = -0.003, -0.002$ y -0.001. Esta opción solamente puede ejercerse al final del periodo.

Para el caso de una opción americana, que puede ejercerse en cualquier día dentro del periodo, empleando los mismos parámetros que en caso anterior, en la Fig. 2, se representa al tiempo en el que se da la máxima ganancia esperada como una función del parámetro μ.

Si el intervalo de tiempo en el que esté vigente la opción americana no contiene el valor del tiempo que da el máximo para el valor esperado en el tiempo $[0, \infty)$, entonces el mayor valor esperado para la ganancia se dará al término del período o al inicio del mismo.

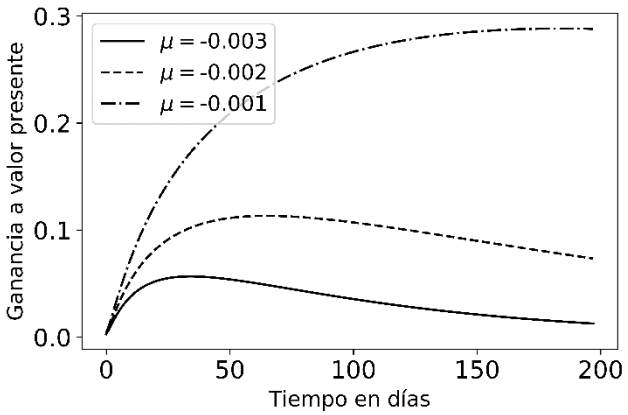


Fig. 1. Ganancia esperada a valor presente para una opción europea o americana; $S_0 = 10, \sigma = 0.02, r = 0.00071$.

B. Para una opción asiática.

El valor esperado de la ganancia a valor presente depende de t . Por ejemplo, para $S_0 = 10, \sigma = 0.02, K = 10.5$ y $r = 0.00071$, en la Fig. 3, se muestra el valor esperado de la ganancia a valor presente, para diferentes valores de μ.

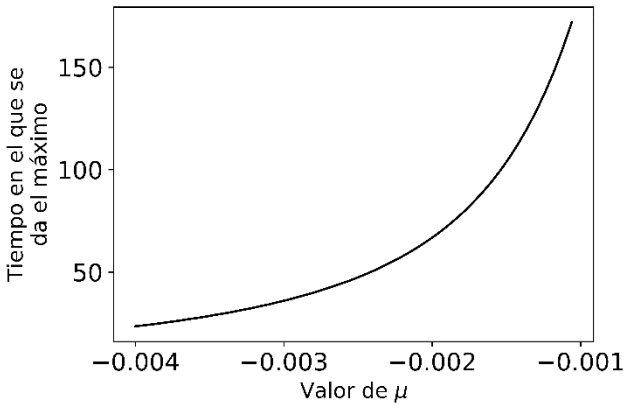


Fig. 2. Tiempo en que se da la máxima ganancia para una opción americana; $S_0 = 10, \sigma = 0.02, r = 0.00071$

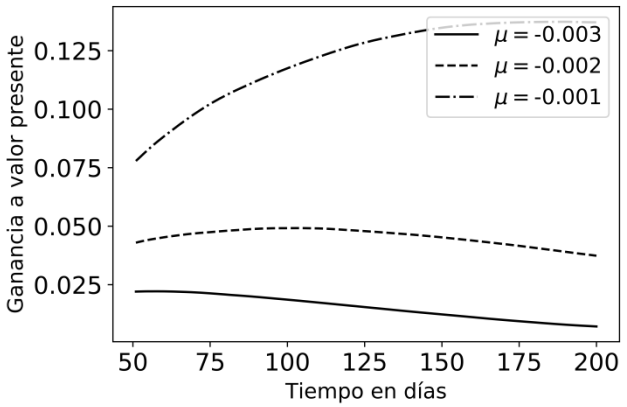


Fig. 3. Ganancia esperada a valor presente para una opción asiática; $S_0 = 10, \sigma = 0.02, r = 0.00071$.

C Distribución normal o de Laplace para los rendimientos.

Se tomó un listado de precios reales al cierre, de una acción. Al tratar de ajustarle una normal a los rendimientos, se obtuvo $\mu = 0.0003327$ y $\sigma = 0.01057$. Mientras que al ajustarles una distribución de Laplace se obtuvieron los parámetros $\mu = 0.0005727$ y $b = 0.007252$. Al aplicar una prueba de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste, se encontró que el p-value para la normal fue de de 1.76×10^{-8}, mientras que, para el caso de una distribución de Laplace, fue de 0.1022. Por lo tanto, en este caso, parece más razonable suponer que los rendimientos siguen una distribución de Laplace, que una normal. El uso de la distribución de Laplace para modelar precios de acciones ya ha sido estudiada [3] y [4].

Si se simulan los precios futuros suponiendo que los rendimientos siguen una distribución de Laplace, los resultados serán diferentes que si se supone una distribución normal; lo mismo ocurrirá al estimar ganancias esperadas de opciones.

En la Fig. 4, se muestran los resultados de simular el valor esperado de la ganancia para una opción europea con un precio inicial de 101.7 y un plazo de 30 días, suponiendo que los rendimientos siguen una distribución normal y suponiendo que siguen una distribución de Laplace, con los parámetros mencionados en el primer párrafo de esta sección, para diferentes valores de K. El valor esperado de la ganancia siempre resultó mayor al suponer que los rendimientos siguen una distribución de Laplace.

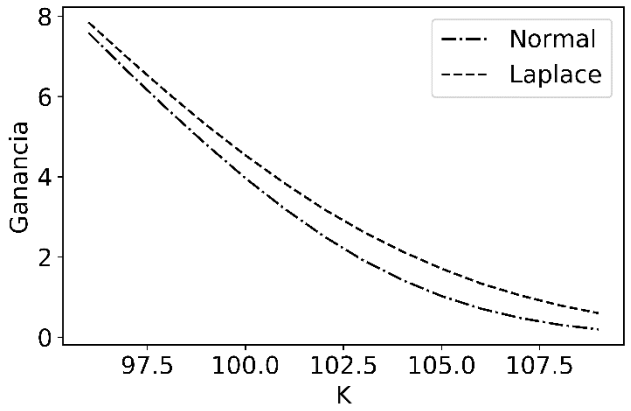


Fig. 4. Ganancia esperada para una opción europea; comparativo suponiendo que la distribución de los rendimientos sea normal o de Laplace.

En la Fig. 5, se muestra la diferencia porcentual en el valor esperado de la ganancia, para diferentes valores de K, para una opción europea. La diferencia puede ser notable dependiendo de los valores de los parámetros y de K.

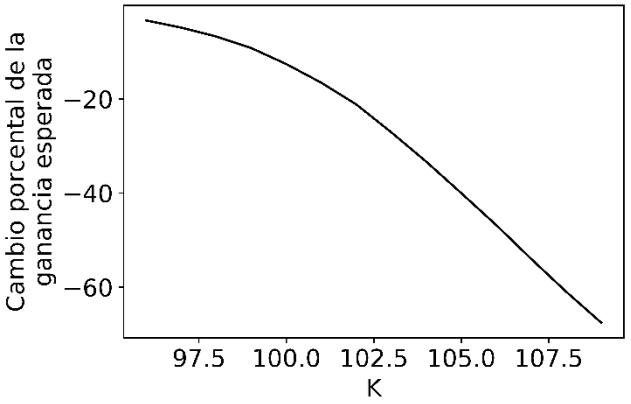


Fig. 5. Diferencia porcentual en los valores esperados de la ganancia suponiendo que los rendimientos siguen una distribución de Laplace o una normal, para una opción europea.

IV. Discusión

Para el caso en el que el precio de la acción siga un movimiento Browniano, el valor esperado de la ganancia de opciones europeas y americanas, puede calcularse directamente a partir de la fórmula (5). Para una opción asiática puede ser difícil obtener una fórmula similar a (5); en este caso, se puede recurrir a simulación para estimar el valor esperado de la ganancia. Para obtener una mayor precisión en el resultado, es posible recurrir a métodos de reducción de la varianza. Empleando simulación, es posible también obtener una estimación para la varianza de la ganancia y aún la distribución empírica de la ganancia, lo cual abre la posibilidad de estudiar el valor en riesgo correspondiente.

En el caso de que exista otra distribución que no sea la normal que se ajuste mejor a los rendimientos, por ejemplo, una distribución de Laplace, es posible simular valores para la ganancia de diferentes tipos de opciones mediante simulación, y así, obtener mejores resultados.

Los programas de cálculo simbólico son un auxiliar muy útil para calcular valores esperados de funciones de variables aleatorias que sigan determinadas distribuciones.

En este trabajo solamente se han considerado los casos en los que los rendimientos sigan una distribución normal o una distribución de Laplace, pero para otras posibles distribuciones, se puede proceder de manera similar.

V. Conclusiones

La simulación en computadora es una herramienta que permite estimar el valor esperado, la varianza y la distribución empírica de una opción. Siempre que sea posible, será mejor usar fórmulas que nos den los valores exactos. Pero, dadas la variedad de opciones existentes y la posibilidad de que los rendimientos sigan distribuciones diferentes de la normal, la simulación tiene un papel importante en la estimación del valor esperado de la ganancia de una opción.

Los programas de cálculo simbólico son un auxiliar importante para calcular el valor esperado de la ganancia de opciones.

Referencias

[1] S.M. Ross, “Introduction to Probability Models”, Elsevier, Academic Press, 2010, ch 10, pp. 631-636.

[2] S. M. Ross, “An Elementary Introduction to Mathematical Finance”. Cambridge University Press, 2011, ch 14, pp. 265-274.

[3] W.J. Reed. “Brownian-Laplace motion and its use in financial modelling”, *Comm. Statist. Theory Methods,* vol. 36, 473–484, 2007

[4] D. Kr ołek, “Non-classical Risk Measures on the Warsaw Stock Exchange-The Application of Alpha-Stable Distributions”, *Acta Universitatis Lodziensis,* 286, pp. 269-276, 2013.

[5] F. Venegas, “Riesgos financieros y económicos”, Cengage Learning, 2011, pp. 204.

[6] J. D. Junter, “Matplotlib: A 2D graphics environment”, *Computing in Science & Engineering,* vol. 9, no. 3, pp 90-95, 2007

ISSN: 2594-1011

Rendimientos de acciones y distribución normal generalizada.

R.S. Salat
Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55011 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rsalat@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se estudia el comportamiento de los rendimientos de acciones para seis casos. Se verifica si siguen un movimiento Browniano, considerando diferentes pruebas sobre sobre las características de sus rendimientos, como son independencia, normalidad y estacionariedad. En todos los casos, se observa una desviación significativa con respecto a la distribución normal. A continuación, se analiza si los rendimientos siguen una distribución normal generalizada. Finalmente, se les aplica un modelo GARCH (1,1), que en todos los casos es bien aceptado.**

Palabras Clave – **rendimiento de acciones, movimiento Browniano, distribución normal generalizada, modelo Garch.**

Abstract — **The present paper contents a study of the behavior of stock returns for six cases. It is verified if they follow a Brownian motion, considering different tests on their characteristics of the yields, such as independence, normality and stationarity. In all cases, a significant deviation is observed with respect to the normal distribution. Next, it is analyzed if the yields follow a generalized normal distribution. Finally, a GARCH (1,1) model is applied, which in all cases is well accepted.**

Keywords — **stock returns, Brownian movement, generalized normal distribution, Garch model.**

I. Introducción

En este artículo se analizan algunas posibilidades para modelar el rendimiento y el precio de una acción, con el propósito de estimar proyecciones de los mismos.

Si P_t es el precio de la acción al tiempo t, entonces el rendimiento R_t en un periodo unitario de tiempo es:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

Ahora bien:

$$ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = R_t \quad (2)$$

Este trabajo está patrocinado por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

Esto es, si el rendimiento es pequeño, lo cual se espera si la unidad de tiempo, es por ejemplo, un día. De ahora en adelante a $ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ se le llamará rendimiento aproximado y se le denotará por R_t^*.

Si el precio de la acción P_t sigue un movimiento Browniano geométrico con deriva μ y volatilidad σ, el rendimiento aproximado sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar σ [1]. Además, los rendimientos aproximados son independientes. Es decir:

$$ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \mu + e_t \quad (3)$$

Donde los e_t son independientes y todos ellos siguen una distribución normal con media 0 y desviación estándar σ. Sin embargo, al considerar precios reales de acciones, es posible que el rendimiento aproximado no siga una distribución normal, y también es posible que los e_t no tengan la misma desviación estándar.

En este trabajo se analiza el comportamiento del rendimiento aproximado para listados de 2,000 valores diarios reales consecutivos de los precios de seis acciones diferentes. Y se proponen métodos alternativos para proyectar los precios de las acciones..

II. Metodología

Para verificar la hipótesis de que el precio de la acción sigue un movimiento Browniano geométrico se utilizan las siguientes pruebas estadísticas:

1) De Shapiro-Wilks, para verificar que los rendimientos siguen una distribución normal.
2) Ljung-Box, para verificar que no existan auto-correlaciones.
3) Dickey-Fuller para verificar la estacionalidad de los rendimientos.
4) Prueba de razón de verosimilitud para verificar la hipótesis nula de que los rendimientos siguen una distribución normal con media y varianza constantes, contra la hipótesis alterna de que los rendimientos siguen un modelo ARIMA.

5) Verificación de si los rendimientos aproximados siguen un modelo GARCH (1,1), para el caso en que las varianzas de los errores no sean constantes.

Para realizar los cálculos se utilizó el lenguaje Python y las librerías statistics y statsmodels,scipy, csv, arch y matplotlib [7].

III. Resultados

A. Análisis preliminar

En la TABLA I se presentan los resultados obtenidos al aplicar las diferentes pruebas a los rendimientos de los seis casos considerados de precios de acciones. La letra N significa que no pasó la prueba a un nivel de significancia del 5 %, mientras que la letra P, significa que si pasó la prueba, es decir, no se pudo rechazar la hipótesis nula al nivel de significancia del 5 %. Dado que no se tiene control del error tipo II, en los casos en que no se puede rechazar la hipótesis nula, no se puede afirmar que dicha hipótesis se cumpla; solamente puede decirse que no hay argumentos para suponer que la hipótesis nula no se cumpla.

TABLA I.

Caso	Shapiro-Wilks	Ljung-Box	Dickey-Fuller	GARCH	ARIMA
1	N	P	P	P	ARMA(4,3)
2	N	P	P	P	ARMA(3,2)
3	N	P	P	P	ARMA(5,4)
4	N	P	P	P	ARMA(5,3)
5	N	P	P	P	ARMA(5,2)
6	N	P	P	P	ARMA(1,1)

Todos los casos pasan las pruebas de Ljung-Box y de Dickey-Fuller. Además, todos los casos admiten significativamente (por medio de una prueba de razón de verosimilitud) un modelo GARCH (1,1). Esto hace pensar, que en todos los casos, la volatilidad no es constante.
Para la determinación de los mejores modelos ARMA, se usaron los métodos suma de cuadrados condicional (ccs) y máxima verosimilitud (ml).

Como puede observarse, en todos los casos, se rechaza la hipótesis nula de que los rendimientos sigan una distribución normal. Pero a excepción del caso 6, no puede rechazarse la hipótesis nula de que los rendimientos sigan una distribución de Laplace. Además en el caso 2, no se puede rechazar que los rendimientos sigan una distribución logística. En las Figs. 1 y 2, pueden observarse las diferencias entre las distribuciones empíricas de los rendimientos y la correspondiente distribución normal, para

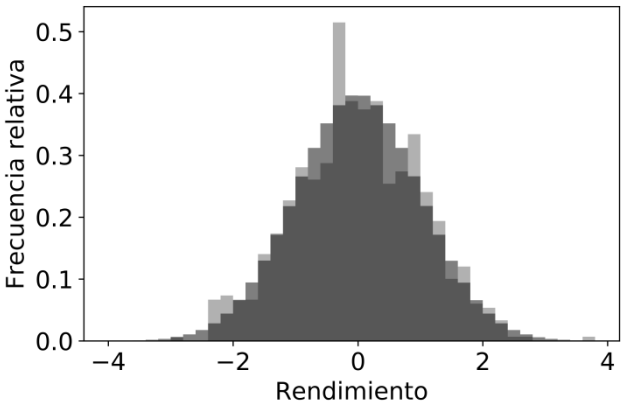


Fig. 1. Distribución empírica de los rendimientos. Caso 1.

los casos 1 y 2; el color gris claro corresponde a los datos, el gris intermedio corresponde a la normal y en gris más obscuro se representan las áreas comunes.

Todos los casos admiten un modelo ARMA(p,q) para los rendimientos, significativamente mejor que ARMA(0,0). Para un estudio detallado de los modelos ARMA, referirse a [3].

En todos los casos, usando el criterio bayesiano de información (BIC), el mejor modelo para los rendimientos es ARMA(0,0).

En los seis casos, si se elabora una gráfica de los logaritmos de los precios contra el logaritmo del precio anterior, se obtiene una nube de puntos concentrados cerca de una recta de pendiente 1, lo cual es congruente con el modelo del movimiento Browniano geométrico. En la Fig. 3, se muestra la gráfica para el caso 1.

Si se considera que el precio de una acción sigue un movimiento Browniano geométrico:

$$P_t = P_{t-1} e^{\mu + \sigma W_{[t-1,t]}} \tag{4}$$

donde P_t es el precio de la acción en el tiempo t, μ y σ son constantes y $W_{[t-1,t]}$ es un movimiento Browniano en el intervalo $[t-1, t]$. De donde:

$$\ln(P_t) = \mu + ln(P_{t-1}) + \sigma W_{[t-1,t]} \tag{5}$$

Es decir, se puede escribir:

$$\ln(P_t) = \mu + ln(P_{t-1}) + e_t \tag{6}$$

donde los e_t tienen una varianza σ^2 y son independientes. Si se ajusta a los datos $ln(P_t)$ por regresión el modelo:

$$\ln(P_t) = \mu + a \cdot ln(P_{t-1}) + e_t \tag{7}$$

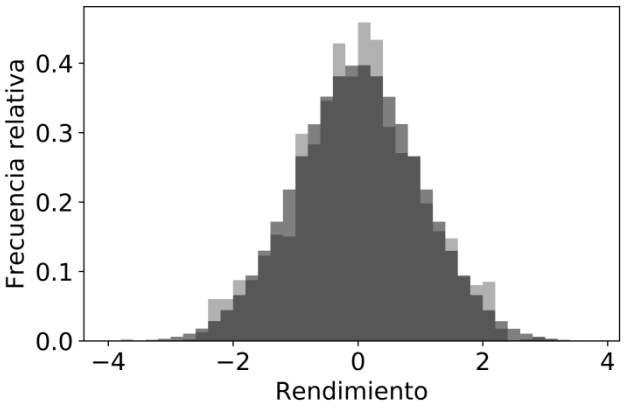


Fig. 2. Distribución empírica de los rendimientos. Caso 5.

para $|a| \geq 1$, el modelo es no estacionario. Pero este modelo puede escribirse como:

$$R_t = ln(P_t) - ln(P_{t-1}) = \mu + (a-1)ln(P_t) + e_t \quad (9)$$

En la Fig. 4, se muestra el diagrama de dispersión de los rendimientos aproximados contra el logaritmo del precio para el caso 1. Puesto que se espera que $a \approx 1$, $a - 1 \approx 0$. Dados $\sigma_t = \sqrt{V(e_t)}$, μ y el tamaño de la muestra y suponiendo que los precios siguen un movimiento Browniano geométrico, se puede obtener por simulación la distribución de a. Con esta distribución, es posible realizar una prueba a la hipótesis nula de $a - 1 = 0$. A un 5 % de nivel de significancia, para todos los casos considerados, se rechaza la hipótesis nula. Este resultado, pone en duda el supuesto de que los rendimientos aproximados sigan un movimiento Browniano.

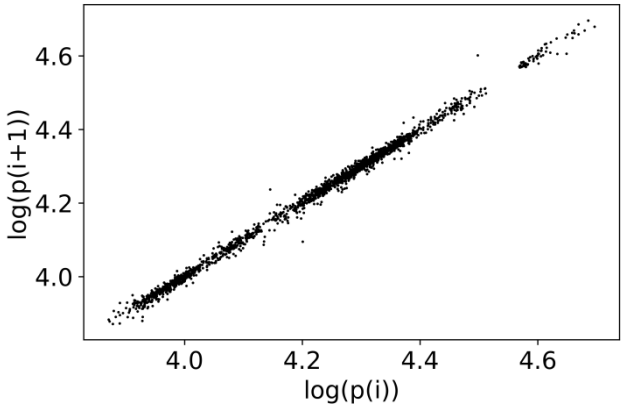


Fig. 3. Diagrama de dispersión. Caso 1

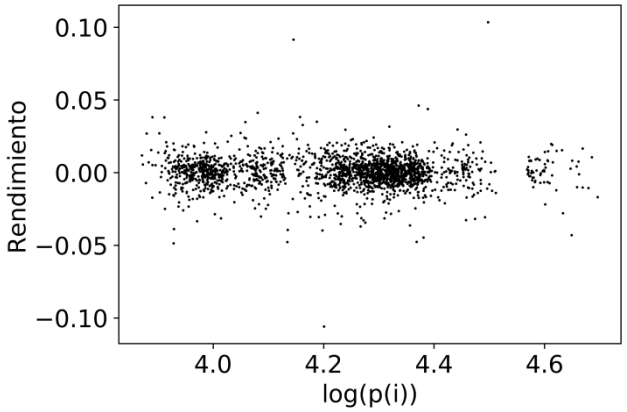


Fig. 4. Diagrama de dispersión. Caso 1.

B. Uso de la distribución normal generalizada

Dado que en todos los seis casos se rechaza la hipótesis nula de que los rendimientos siguen una distribución normal, se buscó otra distribución para los rendimientos que no pudiera ser rechazada; la idea de considerar otras distribuciones ya ha sido estudiada, [5] y [6]. Se probó la distribución normal generalizada, cuya función de densidad está dada por:

$$f(r) = \frac{s}{2\beta\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)} e^{-(|r-\mu|/\beta)^s} \quad (10)$$

En la que s es un parámetro de forma, β es un factor de escala y μ es un factor de localización. Si $s = 2$, la distribución normal generalizada es una distribución normal; si $s = 1$, la distribución normal generalizada es una distribución de Laplace.

En la Tabla II, se muestran los parámetros obtenidos para cada caso, obtenidos por el criterio de máxima verosimilitud.

TABLA II.

Caso	s	μ	β	Valor-p
1	1.052	0.00056	0.0078	0.241
2	1.141	0.00048	0.0125	0.875
3	1.050	0.00027	0.0106	0.216
4	1.110	0.00073	0.0130	0.426
5	1.035	0.00000	0.0102	0.815
6	1.150	0.00044	0.0079	0.517

En todos los caso, el factor de forma s es cercano a 1, es decir, la distribución de los rendimientos se ajusta mejor a una distribución de Laplace que a una normal. En ninguno

de los seis casos se puede rechazar la hipótesis nula de que los rendimientos siguen una distribución normal generalizada. Incluso, en ninguno de los seis casos se puede rechazar la hipótesis nula de que los rendimientos sigan una distribución de Laplace (a un nivel de significancia del 5 %), excepto en el caso 6.

Si dado el precio de la acción P_t al tiempo t, se quiere simular el precio de la acción P_{t+1} al tiempo $t+1$, se puede emplear la relación:

$$P_{t+1} = P_t e^{R^*_{t+1}} \tag{11}$$

Ahora bien, para simular los valores de R^*_t, se puede utilizarla suposición de que los rendimientos siguen una distribución normal o, por ejemplo, una normal generalizada.

Para el caso 1, los parámetros estimados suponiendo que los rendimientos aproximados sigan una distribución normal son: $\mu = 0.00033327$ y $\sigma = 0.0106$. Y suponiendo que los rendimientos aproximados sigan una distribución normal generalizada, los parámetros estimados son: $s = 1.0525$, $\mu = 0.000562$ y $\beta = 0.00778$. Una variable aleatoria que sigue una distribución normal generalizada puede generarse utilizado el método de aceptación y rechazo. En la Fig. 5 se muestran los histogramas sobrepuestos correspondientes a los valores simulados para P_{t+1}, suponiendo que $P_t = 1$ y que los rendimientos siguen una distribución normal y una normal generalizada, para el caso 1.

C. El modelo GARCH(1,1)

El modelo GARCH(1,1) [4], supone que las varianzas de los errores varían de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(R^*_t - \mu)^2 + \beta\sigma^2_{t-1} \tag{12}$$

Y los rendimientos aproximados están dados por:

$$R^*_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \tag{13}$$

Donde los ε_t son independientes.

Ajustado al caso 1 un modelo GARCH(1,1), suponiendo que los errores siguen una distribución normal y una normal generalizada, se obtienen los siguientes parámetros: $\mu = 0.000057$, $\alpha = 0.2$ y $\beta = 0.3$. Pero, usando una distribución normal, el BIC (bayessian information criteria) fue de -12,596; mientras que usando una distribución normal generalizada, fue de -12,852, es decir, el resultado mejora. Las volatilidades obtenidas se muestran en la Fig. 6. La línea horizontal corresponde a la volatilidad suponiendo que ésta sea constante

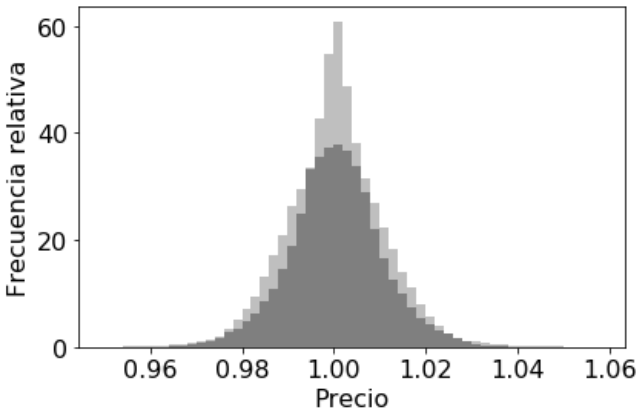


Fig. 5. Histograma comparativo de valores simulados para P_t, distribuciones normal y normal generalizada. Caso 1.

Finalmente, usando el modelo GARCH(1,1) obtenido, se simularon los rendimientos; el resultado se muestra en la Fig. 8, para el caso de una distribución normal y en la Fig. 7, para el caso en el que los rendimientos sigan una normal generalizada; como es de esperarse, en la Fig. 7 se dan mayor cantidad de valores extremos.

IV. DISCUSIÓN

En todos los seis casos, la única prueba que no pasan los rendimientos es la de normalidad. Sin embargo, todos los casos aceptan una distribución normal generalizada. Y en todos los casos, el valor de β es cercano a 1, lo cual significa que la distribución de los rendimientos se ajusta mejor a una distribución de Laplace que a una normal.

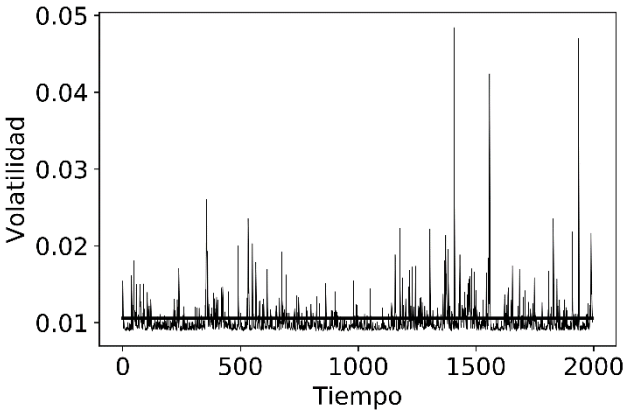


Fig. 6. Volatilidades calculadas según el modelo GARCH(1,1). Caso 1

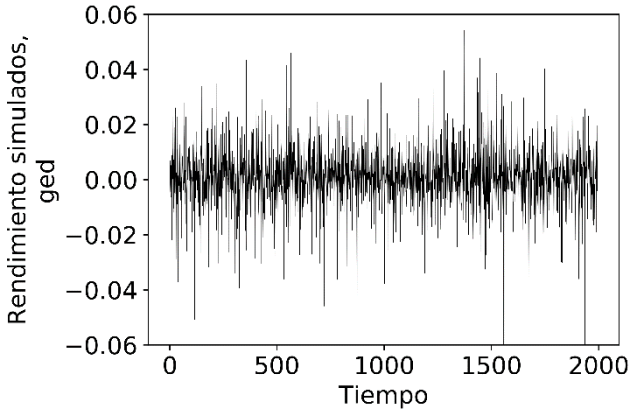


Fig. 7. Histograma comparativo de valores simulados para P_t, distribución normal generalizada. Caso 1.

Estos resultados motivan el estudio de un movimiento Browniano en el que la hipótesis de normalidad sea substituida por una distribución de Laplace [5]. Habiendo simulado los rendimientos, se pueden simular los precios.

Dado que el estudio se realiza solamente sobre seis casos, no puede generalizarse el resultado.

V. Conclusiones

Del análisis de los resultados para los seis casos estudiados, se concluye que los rendimientos aproximados siguen una distribución normal generalizada y no una distribución normal. Por otro lado, no hay evidencia para rechazar que los rendimientos aproximados no sean estacionarios, ni tampoco para suponer que puedan estar auto-correlacionados. Estos resultados tienen consecuencias acerca del método empleado para estimar valores futuros de los rendimientos y de los precios de la acción. Y resulta, entonces, importante crear un modelo modificado del movimiento Browniano en el que se substituya la hipótesis de normalidad por otra, a saber, que los rendimientos aproximados sigan una distribución de normal generalizada o utilizar otros modelos [2].

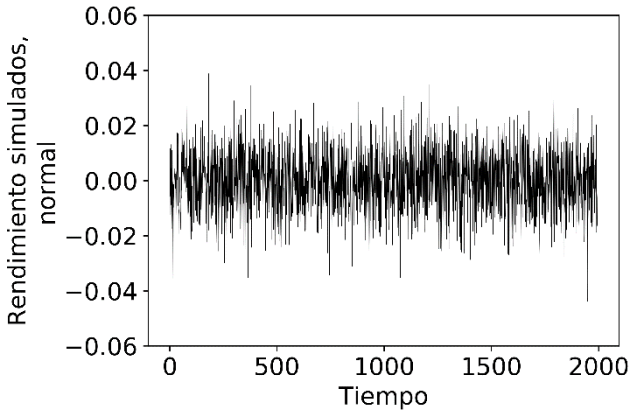


Fig. 8. Histograma comparativo de valores simulados para P_t, distribución normal. Caso 1.

Referencias

[1] S.M. Ross, “Introduction to Probability Models”, Elsevier, Academic Press, 2010, ch 10, pp. 631-636.

[2] S. M. Ross, “An Elementary Introduction to Mathematical Finance”. Cambridge University Press, 2011, ch 14, pp. 265-274.

[3] J.D Hamilton, “Time Series Analysis”. Princeton University Press, 1994, ch 3, pp. 43-64.

[4] J. Johnston, J. Dinardo, ”Econometric Methods”, The McGraw-Hill Companies, Inc, 1997, ch 6, pp. 195-201.

[5] W.J. Reed. “Brownian-Laplace motion and its use in financial modelling”, *Comm. Statist.. Theory Methods* 36, 473–484, 2007

[6] D. Kr ołek, “Non-classical Risk Measures on the Warsaw Stock Exchange-The Application of Alpha-Stable Distributions”, *Acta Universitatis Lodziensis* 286, pp. 269-276, 2013.

[7] J. D. Junter, “Matplotlib: A 2D graphics environment”, *Computing in Science & Engineering,* vol. 9, no. 3, pp 90-95, 2007

ISSN: 2594-1011

Comportamiento caótico de un modelo sobre gasto en publicidad

R. S. Salat
Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55011 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rsalat@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo, se estudia el comportamiento de un modelo sencillo acerca de gasto en publicidad, mediante cálculo numérico y simbólico, bajo la perspectiva de la teoría del caos. Posteriormente, se establece el comportamiento caótico del sistema para ciertos valores de los parámetros, empleando elementos de la teoría del caos, específicamente, el concepto de funciones topológicamente conjugadas, vía homeomorfismo. Finalmente, se estudia, el comportamiento del sistema al introducir una componente aleatoria.**

Palabras Clave – **Gasto en publicidad, teoría del caos, homeomorfismo.**

Abstract — **The present paper contents a study the behavior of a simple model about spending on advertising, through numerical and symbolic calculation, from the perspective of chaos theory. Subsequently, the chaotic behavior of the system is established, for certain values of the parameters using elements of chaos theory, specifically, the concept of topologically conjugated functions via homeomorphism. Finally, the behavior of the system is studied when introducing a random component.**

Keywords — **Spending on advertising, chaos theory, homeomorphism.**

I. Introducción

Varios autores han estudiado la influencia de la teoría del caos en economía. Fedirici y Gandolfo [2], estudian el comportamiento caótico en las tasas de cambio. Kemp [3] enfatiza la importancia de los sistemas no lineales en economía, que conducen a comportamientos caóticos. Vlad, Pascu y Mariu [4] consideran modelos varios económicos que presentan comportamiento caótico.

En el modelo considerado en este trabajo, la ganancia obtenida por una empresa en el tiempo t, G_t se relaciona con el gasto en publicidad P_t en el tiempo t, por:

$$G_t = kP_t(1 - P_t) \tag{1}$$

Este trabajo fue patrocinado por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

Y se supone además, que el gasto en publicidad en el tiempo $t + 1$ es directamente proporcional a la ganancia obtenida en t:

$$P_{t+1} = bG_t \tag{2}$$

Substituyendo (1) en (2):

$$P_{t+1} = kbP_t(1 - P_t) \tag{3}$$

Esta ecuación caracteriza a un sistema discreto:

$$x_{i+1} = f(x_i) \tag{4}$$

Donde:

$$f(x) = ax(1 - x) \tag{5}$$

La función f representa un sistema dinámico en $\mathbb{R}$, ya que f no depende del tiempo t.

Aunque en este caso la función f es bastante sencilla, puede tener comportamientos inesperados, dependiendo del valor del parámetro a. Por ejemplo, puede ocurrir que para cambios muy pequeños en el valor P_0 , la variación en P_t, para t grande, puede ser inesperadamente grande.

Dado que el comportamiento del modelo depende enteramente de la función f y del valor del parámetro a, es necesario estudiar detenidamente el comportamiento de la función f, para diferentes valores de a.

II. Metodología

Para estudiar el comportamiento de la función f, se empleará cálculo numérico en computadora, empleando el lenguaje Python y la librería matplotlib [6], para elaborar las gráficas. También se empleará el marco teórico existente acerca de teoría de sistemas dinámicos discretos [1]. El método utilizado será el deductivo, propio de la Matemática.

III. Resultados

A. Análisis preliminar

Se define f^n del modo siguiente:

$$f^1(x) = f(x) \tag{6}$$

Y:

$$f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) \tag{7}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Definición. El punto x_0 del dominio de una función f es un punto fijo o de equilibrio si $f(x_0) = x_0$. Un punto de equilibrio x_0 de f es atractor si existe un intervalo abierto con centro en x_0, tal que para cualquier punto x en el intervalo, la sucesión $\{f^n(x)\}$ converge a x_0. Un punto de equilibrio x_0 de f es repulsor si existe un intervalo abierto con centro en x_0, tal que para cualquier punto x en el intervalo, existe $k \epsilon N$, tal que $f^k(x)$ está fuera del intervalo.

El siguiente teorema se demuestra utilizando el teorema del valor medio.

Teorema. Si x_0 es un punto de equilibrio de f, con derivada continua en todos los puntos de su dominio y $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un atractor. Y si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un repulsor.

Regresando a la función $f(x) = ax(1-x)$, si $a \leq 4$, $f(x) \in [0,1]$ para cualquier $x \in [0,1]$. Como f es continua, existe por lo menos un punto fijo o de equilibrio para f en $[0,1]$. Las soluciones de la ecuación $ax(1-x) = x$ son $x = 0$, $1 - 1/a$. La derivada de f es $f'(x) = a - 2ax$. Si $1 < a < 3$, $\left|f'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right| < 1$ y el punto de equilibrio $1 - \frac{1}{a}$ es un atractor. Si $a > 3$ o $a < 1$, el punto de equilibrio es repulsor. El punto de equilibrio $x = 0$, es atractor si $|a| < 1$, y repulsor si $|a| > 1$. Por lo tanto, si $a > 3$, ambos puntos de equilibrio serán repulsores.

En la Fig. 1, se observa el comportamiento de un atractor; en esta figura, se muestran las gráficas de $f(x)$, de la recta $y = x$ y el proceso al iterar f. En esta gráfica $x_k = f^k(x_0)$. Y en la Fig. 2, se muestra el caso en el que el punto de equilibrio es un repulsor.

En la Fig. 3 se muestra el diagrama de bifurcación de f. En este diagrama, para cada valor de a, se dibuja el punto $\left(x, f^{100}(x)\right)$, para $x = 0, 0.001, 0.002, 0.003, \ldots, 1$. Para $a \in [0,1]$, todos los valores de x conducen al punto de equilibrio 0; para $a \in [1,3]$, todos los valores de x conducen al punto de equilibrio $1 - 1/a$.

En la Fig. 4, se muestran los valores de f^{1000} para diferentes valores para diferentes valores de x_0 y $a = 3.6$.

Dado $x \in R$, x es periódico de periodo n si n es el menor valor de k tal que $f^{(k)}(x) = x$.

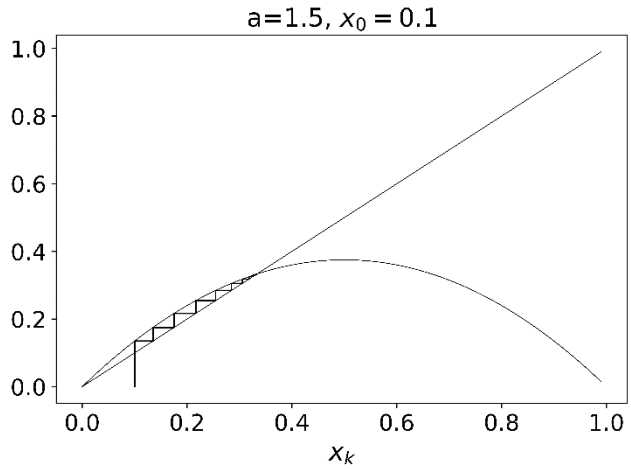


Fig. 1. Iteración de la función $f(x) = ax(1-x)$, con $a = 1.5$ y $x_0 = 0.1$

El conjunto $per(f)$ es el conjunto de todos los puntos periódicos, esto es:

$$per(f) = \left\{x \in R | existe\ n \in N\ tal\ que\ f^{(n)}(x) = x\right\} \tag{8}$$

Gráficamente, los puntos periódicos de periodo n, se visualizan como las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de $f^{(n)}$ con la recta $y = x$. Véase la Fig. 5, para $n = 6$ y $a = 4$. Conforme n crece, la distancia entre las abscisas de los puntos de intersección se acercan.

Para encontrar la máxima distancia entre dos raíces reales consecutivas de $f^n(x) - x$ se empleó el siguiente programa en Máxima:

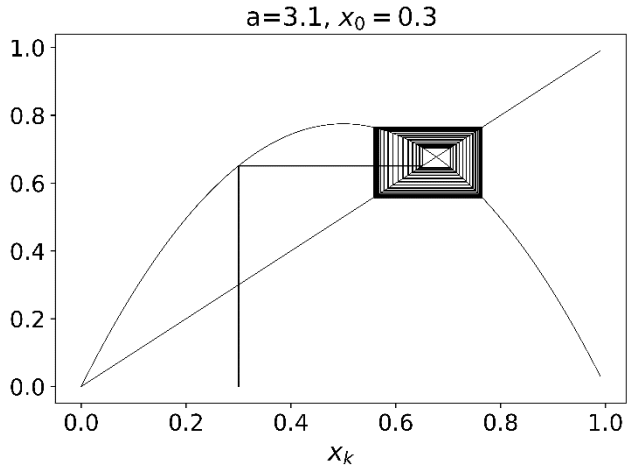


Fig. 2. Iteración de la función $f(x) = ax(1-x)$, con $a = 3.1$ y $x_0 = 0.3$

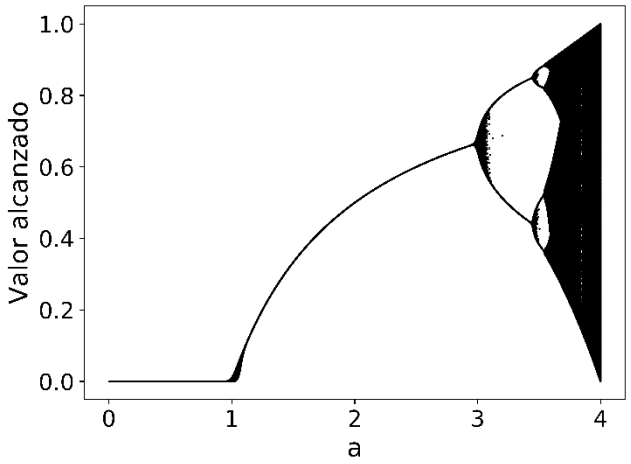


Fig. 3. Diagrama de bifurcación de la función $f(x) = ax(1-x)$ para diferentes valores de a y para diferentes valores de x_0.

```
f:a*x*(1-x);
fa:subst(4,a,f);
f:fa;
h(f,n):=block((for i:1 thru n step 1
do(f:subst(fa,x,f))),return(f));
n:4;
g:h(f,n)$
l:realroots(g-x)$
m:length(l);
l1:[];
for i:1 thru m step 1 do(l1:append(l1,[float(rhs(l[i]))]));
l1:sort(l1)$;
dif:[];
for i:1 thru m do(dif:append(dif,[0]));
m1:m-1;
for i:1 thru m1 step 1 do(dif[i]:l1[i+1]-l1[i]);
```

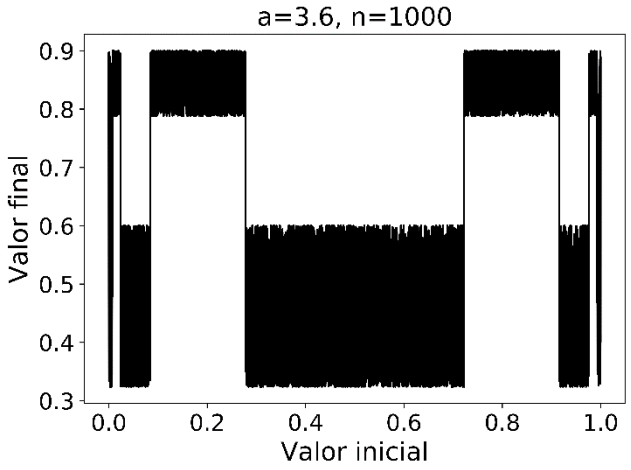


Fig. 4. Valores de f^{1000} para diferentes valores para diferentes valores de x_0 y $a = 3.6$.

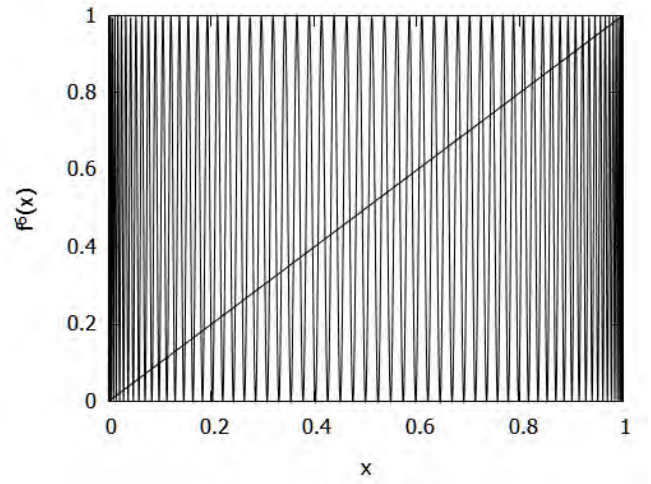


Fig. 5. Valores de f^6 para diferentes valores para diferentes valores de x_0 y $a = 4$.

```
float(lmax(dif));
```

En la Fig. 6 se muestra a dicha máxima diferencia d_n como una función de n. Esta máxima diferencia es una función de n, del siguiente modo:

$$d_m = \frac{\alpha}{2^n} \tag{9}$$

La función f es sensible a las condiciones iniciales, es decir, existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $x_0 \in [0,1]$ y cualquier $\delta > 0$, existe $n \in N$ tal que $|f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0)| > \varepsilon$. Esta condición se ilustra en la Fig. 7.

B. Modelo teórico

Definición. Una función $f: [a,b] \to [a,b]$ es caótica si se cumplen las siguientes condiciones [1]:

1) El conjunto de puntos periódicos de f es un conjunto denso en $[a,b]$.
2) Para cualesquiera intervalos U y V abiertos, con $U, V \subset [a,b]$, existen $x \epsilon U$ y $n \in N$, tal que $f^n(x) \epsilon V$.
3) Existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $x_1 \in [a,b]$ y para cualquier U abierto que contiene a x_1, existen $x_2 \in U$ y $n \in N$ tales que $|f^n(x_1) - f^n(x_2)| > \varepsilon$.

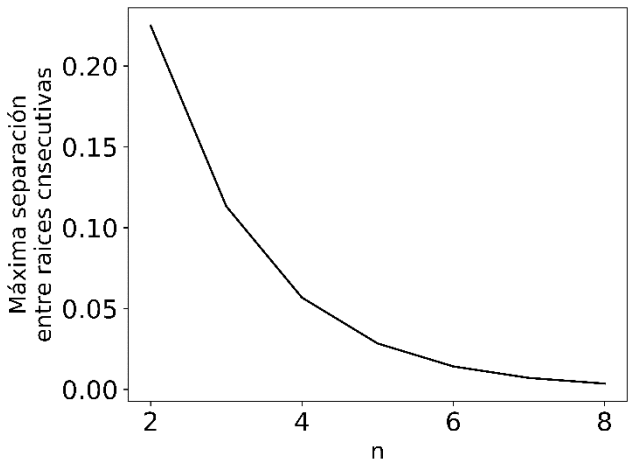


Fig. 6. Máxima separación entre las raíces consecutives de $f^n(x) = x$ para diferentes valores de n, $a = 4$.

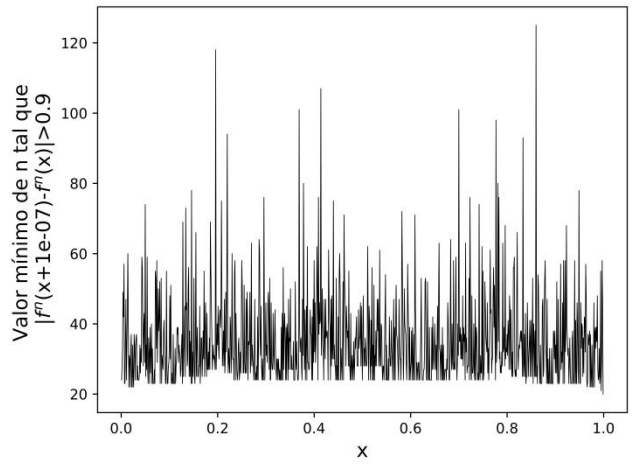


Fig. 7. Valores mínimos de n para los cuales $|f^n(x + 1e^{-7}) - f^n(x)| > 0.9$, $a = 4$.

Ejemplo. La función tienda [5], $T: [0,1] \to [0,1]$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x \le 1 \end{cases} \qquad (10)$$

es caótica.

$$T^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 2i, & \frac{i}{2^n} \le x < \frac{2i+1}{2^{n+1}} \\ -2^{n+1}x + 2i + 2, & \frac{2i+1}{2^{n+1}} \le x < \frac{i+1}{2^n} \end{cases} \qquad (11)$$

Y $T^{(n)}(1) = 1$.

En la Fig. 8, se muestra la gráfica de $T^4(x)$.

Puesto que $2^{n+1}x - 2i$ mapea el intervalo $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right]$ sobre el intervalo $[0,1]$ y $-2^{n+1}x + 2i + 2$ mapea el intervalo $\left[\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^n}\right]$, también sobre el intervalo $[0,1]$, en intervalo $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$ hay dos puntos periódicos de periodo n. Sea $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $k \in N$ tale que $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Entonces si escogemos n tal que $Máx\left\{x - \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} - x\right\} < \varepsilon$, el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, contendrá dos puntos periódicos. Por lo tanto el conjunto de puntos periódicos es denso en el intervalo $[0,1]$.

Considérese ahora dos subintervalos A y B de $[0,1]$. Para cualquier $y \in B$, $y \in [0,1]$. Para n suficientemente grande, existe $k \in N$ tal que el intervalo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \subset A$ y por lo tanto, si $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, $f^n(x) = y \in B$.

Sea $x_0 \in [0,1]$, entonces x_0 pertenece a alguno de los intervalos $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right]$ o a alguno de los intervalos $\left[\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^n}\right]$. En cualquiera de los dos casos, si $x_0 + \delta$ pertenece al mismo intervalo que x_0, entonces $|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \delta)| = 2^{n+1}[\delta]$. Por lo tanto, es posible escoger n tal que $|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \delta)| > \varepsilon$, donde ε es un número positivo previamente dado.

Por los argumentos dados en los tres párrafos anteriores, la función tienda es caótica.

Sean A y B dos intervalos, $f: A \to A$ y $g: B \to B$. f y g son conjugadas si existe un homeomorfismo $h: A \to B$ tal que $h(f(x)) = g(h(x))$ para cualquier $x \in A$.

Teorema. Sean $f: A \to A$ y $g: B \to B$, con A y B intervalos cerrados en R. Y f y g conjugadas por medio del homeomorfismo $h: A \to B$. Si f es caótica entonces g también lo es [1].

Supóngase el conjunto de puntos periódicos de f es denso en A. Sea U un conjunto abierto contenido en B. Entonces $h^{-1}(U)$ es un abierto contenido en A. Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en A, entonces existe $x \in h^{-1}(U)$, tal que $f^{(n)}(x) = x$, para algún $n \in N$. Pero entonces, $g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$ y $h(x)$ es punto periódico de g y $h(x) \in U$. Entonces, el conjunto de puntos periódicos de g es denso en B.

Para la propiedad 2), sean $U, V \subset B$, abiertos. Entonces $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos, contenidos en A. Como f es caótica, existen $x \in h^{-1}(U)$ y $n \in N$, tales que $f^{(n)}(x) \in h^{-1}(V)$. Pero entonces, $h(x) \in U$ y $h(f^n(x)) \in V$, pero $h(f^n(x)) = g^n(h(x)) \in V$.

En cuanto a la propiedad 3), existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $x_1 \in [a,b]$ y para cualquier U abierto que contiene a x_1, existen $x_2 \in U$ y $n \in N$ tales que $|f^n(x_1) - f^n(x_2)| > \varepsilon$.

Sea $x \in B$ y U una abierto que contiene a x. Entonces, existen $\varepsilon > 0$, $n \in N$ y $y \in h^{-1}(U)$, tales que $|f^n(h^{-1}(x)) - f^n(y)| > \varepsilon$. Como h^{-1} es continua en B, entonces es uniformemente continua en B. Luego, existe

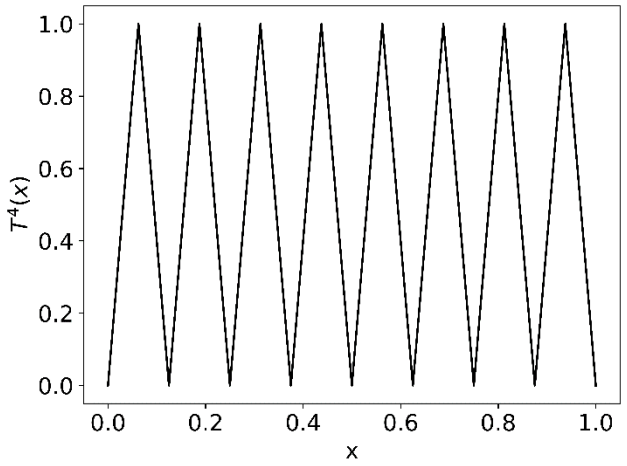


Fig. 8 Gráfica de $T^4(x)$.

$\delta > 0$, tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|h^{-1}(x_1) - h^{-1}(x_2)| < \varepsilon$. Entonces, $|g^n(x) - g^n(h(y))| \geq \delta$, porque si $|g^n(x) - g^n(h(y))| < \delta$, entonces $|f^n(h^{-1}(x)) - f^n(y)| = |h^{-1}(g^n(x)) - h^{-1}(g^n(y))| < \varepsilon$, lo cual, sería una contradicción.

Sea $x_1 \in B$ y U un abierto cualquiera que contenga a x_1. Entonces $h^{-1}(U)$ es un abierto contenido en A, que contiene a $h^{-1}(x_1)$. Como f es caótica, existen $\varepsilon > 0$, $z \in h^{-1}(U)$ y $n \in N$ tales que $|f^n(h^{-1}(x_1)) - f^n(z)| > \varepsilon$

Corolario. La función tienda y $f(x) = 4x(1-x)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $h(x) = sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ definido en $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}(f \circ h)(x) &= f(h(x)) \\ &= 4sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1 - sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= sen^2(\pi x)\end{aligned} \quad (12)$$

Por otro lado:

$$(h^{\circ}T)(x) = \begin{cases} sen^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) & si\ x\epsilon[0, 1/2] \\ sen^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right) & si\ x\epsilon\left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (13)$$

Ambas expresiones son iguales a $sen^2(\pi x)$.

C. Agregando una componente aleatoria

Si al modelo especificado por (2), le agregamos una componente aleatoria:

$$G_t = kP_t(1 - P_t) + e_t \quad (14)$$

Donde las e_t siguen una distribución normal con media 0 y desviación estándar σ. La ecuación para el gasto en publicidad es:

$$P_{t+1} = bG_t \quad (15)$$

Agregando la condición de que no haya gasto negativo, resulta:

$$P_{t+1} = \begin{cases} bG_t & si\ G_t > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \quad (16)$$

En la Fig. 9, se ilustra la evolución del sistema para $kb = 4$, que es similar al caso determinista.

En la Fig. 10, se muestra el diagrama de bifurcación para P_t, que es similar al mostrado en la Fig. 3.

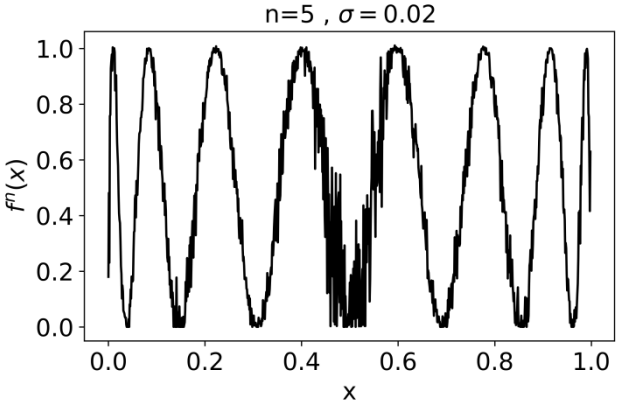


Fig. 9. Gráfica de f^5, $kb = 4$.

IV. DISCUSIÓN

El comportamiento de la función $f(x) = ax(1-x)$ tiene un comportamiento caótico cuando $a = 4$, en el sentido de la definición dada. Este hecho tiene implicaciones importantes para el modelo dado por (3). Por ejemplo, para cambios pequeños en el gasto inicial en publicidad P_0 se tendrán cambios grandes en el gasto en publicidad al tiempo t, para valores grandes de t, lo cual, no es deseable para modelar el comportamiento del gasto en publicidad. Por supuesto, en la práctica será difícil que en la ecuación (3), se tenga que $bk = 4$, pero es posible que el parámetro bk tome valores cercanos a 4, y en tales casos, también se van a presentar comportamientos indeseables, desde el punto de vista de modelación.

Por otro lado, en el caso particular que se estudia, la constante k de la ecuación (1) tiene un valor dado, calculado a partir de datos reales del gasto ejercido en publicidad y de la ganancia obtenida. Pero, la constante b de la ecuación (2) expresa la proporción de la ganancia que se está dispuestos a gastar en publicidad y por lo tanto, dicha constante se puede elegir de entre valores convenientes de acuerdo a diferentes

criterios; seguramente es posible escogerla de tal manera que la constante bk, sea tal, que no se presenten comportamientos caóticos.

Para el caso estocástico, se encuentra que el comportamiento del sistema es similar al caso determinista, para valores moderados de σ. Sin embargo, la preservación de las propiedades del comportamiento del sistema para el caso estocástico, requiere de un estudio completo adicional.

V. Conclusiones

Al construir modelos basados en sistemas dinámicos, es necesario analizar si para ciertos parámetros del modelo se producen comportamientos caóticos, que pueden resultar inesperados.

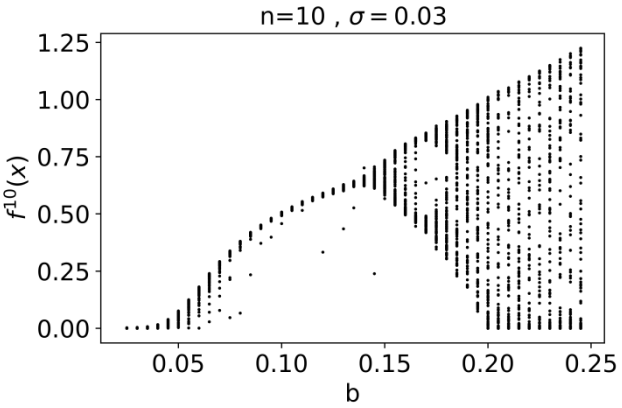


Fig. 10. Diagrama de bifurcación para el modelo estocástico, $kb = 4$.

La simulación numérica y simbólica, así como las representaciones gráficas son de gran ayuda para detectar tales comportamientos, como se ha observado a lo largo de este trabajo. Pero indudablemente, el estudio de la teoría del caos, proporciona una visión precisa y general del tema. Este trabajo es tan solo una introducción al tema, partiendo de un modelo sencillo en Economía.

Referencias

[1] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, Elsevier, 2004, pp. 327-353.

[2] D. Federici, G. Gandolfo, "Chaos in Economics", *Journal of Economics and Development Studies,* vol. 2, no. 1, pp. 51-79, March 2014.

[3] J. Kemp, "New Methods and Understanding in Economic Dynamics? An Introductory Guide to Chaos in Economics", *Economic Issues*, vol. 2, no. 1, March 1997.

[4] S. Vlad, P. Pascu, N. Morariu, "Chaos Models in Economics", *Journal of Computing,* vol. 2, no. 1, pp. 79-83, Jannuary 2010.

[5] J.E. King, H. Méndez, Sistemas dinámicos discretos, Las Prensas de Ciencias, UNAM, Facultad de Ciencias, 2015, pp. 111-120.

[6] J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2D graphics environment", IEEE Computer Soc., vol. 9, no. 3, pp. 90-95, 2007

[7] L. A. Danílov, Lecciones de Dinámica No-lineal, Editorial URSS, 2006, pp. 12-108.

ISSN: 2594-1011

Fase de Berry del rotor relativista

Víctor D. Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **Resolvemos la ecuación de Dirac para el rotor, el cual consiste de una partícula de masa m la cual gira a una distancia fija a de un centro. Demostramos que la expresión para la fase de Berry del caso no relativista, mantiene su forma para el caso relativista de la ecuación de Dirac. Con esta consideración encontramos la fase de Berry para un rotor relativista, que resulta ser la misma para dos estados degenerados.**

Palabras Clave – **fuente, márgenes, tablas**

Abstract — **We solve Dirac's equation for the rotator, wich consist of one particle of mass m wich rotates to a fixed distance a of center. We show that the expresion for the Berry's phase of the non relativistic case maintain their form for the relativistic case of Dirac's equations. With this consideration we find the Berry's phase for a relativistic rotator, that results to be the same for two degenerate states.**

Keywords — **Fonts, margins, tables**

INTRODUCCIÓN

Dentro de los pocos potenciales solubles para la ecuación de Dirac [1], se encuentra el del rotor; consistente de una partícula de masa m que gira a una distancia a de un centro fijo [2], por lo cual está restringido a moverse sobre una superficie esférica de radio a con ese centro. La utilidad de este rotor y otros más complicados es que pueden emplearse como modelos en física molecular [3], física nuclear [4], y en la física de interacciones hadrónicas [5, 6,7]. Pero debido a su simplicidad, el rotor relativista de Dirac puede utilizarse para estudiar la fase de Berry [8], que adquiere la función estado al evolucionar adiabáticamente en un ciclo, para el caso no relativista. La función de estado de este rotor es un espinor de cuatro componentes definido sobre una superficie esférica de curvatura no nula, por lo cual esperamos que se manifieste una fase de Berry en este caso. Sin embargo es necesario primero demostrar que la expresión para la fase de Berry del caso no relativista mantiene su forma para el caso relativista de Dirac [9]. En la sección (2) de este artículo obtenemos las funciones propias y el espectro de energía del rotor relativista de Dirac. El método seguido es el usado para la parte angular del átomo de hidrógeno [10, 11,12] relativista. Encontramos que el espectro está doblemente degenerado con respecto al número cuántico k y reproducimos resultados previamente obtenidos [2] por métodos más complicados. En la sección (3) justificamos la invariancia de la expresión para la fase de Berry en el caso relativista, de acuerdo a Anandan [9]. Con las funciones propias encontradas en la sección (2), calculamos la fase de Berry para el rotor, observándose es que esta fase es la misma para dos estados degenerados. En la sección (4) damos las conclusiones.

*Becario COFFA, EDD, EDI, SIP (20180245) IPN

ROTOR CUÁNTICO RELATIVISTA

A partir de la ecuación de Dirac [11] para una partícula en un campo central $V(r)$ oreja hamiltoneano

$$H = c\alpha \cdot \boldsymbol{p} + \beta mc^2 + V(r) \tag{1}$$

para el cual el momento angular total $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} + \sum \hbar/2$ se conserva, se obtienen los espinores normalizados, clasificados como autofunciones además de los operadores $\boldsymbol{J}$ y J_z , del operador

$$K = \beta(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{J} - \hbar/2) = \beta(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{L} + \hbar) \tag{2}$$

Este operador introducido por Dirac [12], proporcional a $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{J}$ describe la forma de alineación del espín $\boldsymbol{\Sigma}$ y del momento angular total $\boldsymbol{J}$, es decir cuando$j = l + 1/2$ o $j = l - 1/2$, en un estado de momento angular orbital l. Ya que se cumple

$$K^2 = \boldsymbol{J}^2 + \hbar^2/4 \tag{3}$$

Si los autovalores $\boldsymbol{J}^2$ son $j(j+1)\hbar^2$ y k los de K, de (3) podemos asegurar que

$$k = \pm(j + 1/2) \tag{4}$$

Como j un semientero impar, k toma como valores los enteros positivos y negativos, con excepción de cero

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots . \tag{5}$$

El operador K conmuta con los operadores J_i y H

$$[K, J_i] = 0, i = 1, 2, 3 \ , \tag{6}$$

$$[K, H] = 0 \ . \tag{7}$$

Por lo tanto podemos escoger $\boldsymbol{J}^2$, J_z, K y H como un sistema completo de operadores que conmutan. Denotamos entonces una autofunción simultánea de los operadores $\boldsymbol{J}^2$, J_z y K con autovalores $j(j+1)\hbar^2$, $\mu\hbar$, $k\hbar$,

respectivamente por $\boldsymbol{\psi}_{j\mu k}$. De (3) se tiene [11] entonces las siguientes relaciones entre los números cuánticos

$$k = j + 1/2 = l + 1\,,\ \text{para}\ j = l + 1/2\,, \tag{8}$$

$$k = -(j + 1/2) = -l\,,\ \text{para}\ j = l - 1/2\,. \tag{9}$$

Bajo estas consideraciones podemos probar [10], que las funciones propias normalizadas para $k = l + 1 > 0$, están dadas por el espinor

$$\boldsymbol{\psi}_{j\mu k}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{j+\mu}{4j}}\,Y_{j-1/2,\mu-1/2}(\theta,\phi)f(r) \\ \sqrt{\frac{j-\mu}{4j}}\,Y_{j-1/2,\mu+1/2}(\theta,\phi)f(r) \\ \sqrt{\frac{j-\mu+1}{4(j+1)}}\,Y_{j+1/2,\mu-1/2}(\theta,\phi)g(r) \\ -\sqrt{\frac{j+\mu+1}{4(j+1)}}\,Y_{j-1/2,\mu-1/2}(\theta,\phi)g(r) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

y para $k = -(j + 1/2) < 0$ por el espinor

$$\boldsymbol{\psi}_{j\mu k}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{j-\mu+1}{4(j+1)}}\,Y_{j+1/2,\mu-1/2}(\theta,\phi)f(r) \\ -\sqrt{\frac{j+\mu+1}{4(j+1)}}\,Y_{j+1/2,\mu+1/2}(\theta,\phi)f(r) \\ \sqrt{\frac{j+\mu}{4j}}\,Y_{j-1/2,\mu-1/2}(\theta,\phi)g(r) \\ \sqrt{\frac{j-\mu}{4j}}\,Y_{j-1/2,\mu+1/2}(\theta,\phi)g(r) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

en las cuales las funciones $Y_{lm}(\theta,\phi)$ son los esféricos armónicos, y las funciones $f(r)$ y $g(r)$ de la parte radial satisfacen [10] el siguiente par de ecuaciones acopladas

$$\left(E - mc^2 - V(r)\right)f + i\hbar c\left(\frac{dg}{dr} + \frac{g}{r} + \frac{k}{r}g\right) = 0\,, \tag{12}$$

$$(E + mc^2 - V(r))g + i\hbar c\left(\frac{df}{dr} + \frac{f}{r} - \frac{k}{r}f\right) = 0\ . \tag{13}$$

Para el caso del rotor tenemos que en $r = a\,, f(a) = F$ y $g(a) = G$, por lo cual la pareja de ecuaciones diferenciales (12) y (13) se reduce a la pareja de ecuaciones algebraica

$$(E - mc^2)F + i\hbar c\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{a}\right)G = 0\,, \tag{14}$$

$$(E + mc^2)G + i\hbar c\left(\frac{1}{a} - \frac{k}{a}\right)F = 0\,. \tag{15}$$

La condición para que exista soluciones de este sistema de ecuaciones algebraicas, impone que su determinante se anule, de lo cual se sigue que en función del momento de inercia del rotor $I = ma^2$ y de $\varepsilon = mc^2$ se expresa la energía como

$$E_k = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{\hbar^2(k^2-1)}{\varepsilon I}}\,, k = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \tag{16}$$

en la que se observa que existen doble de generación con respecto al número cuántico k. Mediante las relaciones (8) y (9) entre los números cuánticos k y l, (16) se expresa como

$$E_l = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{l(l+2)\hbar^2}{I\varepsilon}}\,, k > 0, l = 0,1,2,\cdots, \tag{17}$$

$$E_l = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{(l+1)(l-1)\hbar^2}{I\varepsilon}}\,, k < 0, l = 0,1,2,\cdots. \tag{18}$$

Similarmente usando la relación (4) entre los números cuánticos k y j, (16) toma la forma

$$E_j = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{\hbar^2[j(j+1)-3/4]}{I\varepsilon}}\,, j = 1/2\,, 3/2\,, 5/2\,, \cdots. \tag{19}$$

Las expresiones (17), (18) y (19) para energía fueron obtenidas previamente [2], pero sin indicar la doble degeneración existente. La degeneración de la energía de las expresiones (17) y (18) se observa al cambiar l de (17) por $l - 1$ con lo cual se obtiene (18). Asi un estado con $k > 0$ y otro con $k < 0$ están degenerados cuando difieren por uno en el número cuantico l de momento angular orbital el cual no se conserva; como es el caso en el átomo de hidrógeno relativista [12]. La degeneración de la energía en la expresión (19) se observa al considerar la relación (4), la cual para un j dado determina los valores de $k = \pm(j + 1/2)$. Es conveniente con objeto de mantener la normalización de los espinores de las expresiones (10) y (11) tomar $F = G = 1$ no teniendo ninguna contradicción con las expresiones (14) y (15), que conducen en este caso también a la misma expresión (16) para la energía. Por lo tanto las funciones propias del rotor dadas por los espinores (10) y (11) quedan definidas en una esfera con curvatura no nula, por lo que resultan ser adecuados para investigar la fase de Berry [8] en el caso de que la evolución de la función de estado esté dada por la ecuación relativista de Dirac y no por la de Schrödinger.

FASE DE BERRY DEL ROTOR RELATIVISTA

Anandan [9] demostró que la fase geométrica de Berry es consecuencia del producto interno en el espacio de Hilbert y que es independiente de la ecuación de movimiento siempre que sea de primer orden en el tiempo. En efecto si la ecuación de evolución temporal es

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle\,, \tag{20}$$

donde H es el hamiltoneano y $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$, entonces con el cambio $|\psi(t)\rangle = C(t)|\Phi(t)\rangle$, en la cual $C(t)$ es una función compleja de modulo uno, de (20) obtenemos

$$i\hbar\left(\frac{d}{dt} + \left\langle\Phi(t)\middle|\frac{d}{dt}\middle|\Phi(t)\right\rangle\right)C(t) = \langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle C(t)\,, \tag{21}$$

ecuación cuya solución para $C(t)$ es

$$C(t) = exp\left(i\int_l i\langle\Phi|d\Phi\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t\langle\psi|H|\psi\rangle dt'\right)C(0)\,, \quad (22)$$

donde $d|\Phi\rangle = |d\Phi\rangle$ es la diferencial de la función $|\Phi\rangle$, y el subíndice l en la primera integral indica una trayectoria en el espacio de parámetros o coordenadas de la función $|\Phi\rangle$. Este término de la exponencial es la fase de Berry [8], el segundo la fase dinámica y su suma, un integral de acción, mediante la cual con un principio extremal se obtiene [13, 14] la ecuación de evolución temporal (20). Todo esto tiene como resultado que la expresión para las base de Berry β

$$\beta = i\int_l \langle\Phi|d\Phi\rangle = i\int_S \langle d\Phi|\wedge|d\Phi\rangle\,, \quad (23)$$

en la que S es el área que encierra la curva l, $B = \langle d\Phi|\wedge|d\Phi\rangle$ la 2-forma de la fase de Berry [15], tenga la misma forma tanto para el caso relativista de Schrödinger como para el relativista de Dirac. Esto es debido a que en ambos casos la ecuación de evolución temporal es de primer orden como requiere la expresión (20); además de que se pueden obtener de un principio variacional [13,14]. Denotamos cualquiera de los espinores (10) y (11) por $|\Phi\rangle = |\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\rangle$,la 2-forma de Berry B toma entonces con sumatoria en índices repetidos, la forma

$$B = \langle d\Phi_1 d\Phi_2 d\Phi_3 d\Phi_4|\wedge|d\Phi_1 d\Phi_2 d\Phi_3 d\Phi_4\rangle =$$

$$= d\Phi_i^*\wedge d\Phi_i\,. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que las componentes $\Phi_i = \Phi_i(\theta,\phi)$, con $i = 1,2,3,4$; tenemos entonces que

$$B = \left(\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\phi} - \frac{\partial\Phi_i^*}{\partial\phi}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\theta}\right)d\theta\wedge d\phi\,. \quad (25)$$

Cada componente Φ_i de los espinores (10) y (11) tiene un factor de normalización C_i multiplicando un esférico armónico de la forma

$$Y_{l_i m_i} = N(l_i,m_i)e^{im_i\Phi}P_{l_i,m_i}(cos\theta)\,, \quad (26)$$

en donde $N(l_i,m_i)$ es un factor de normalización y $P_{l_i,m_i}(cos\theta)$ es una función asociada de Legendre [16]. Así obtenemos la siguiente expresión final para la fase de Berry, calculada a lo largo de un paralelo sobre la esfera, el cual hace un ángulo θ constante con el eje en z

$$\beta = 2\pi m_i C_i^2 N^2(l_i,m_i)P_{l_i m_i}^2(cos\theta)\,. \quad (27)$$

Para $k > 0$ de la expresión (10) obtenemos explícitamente la fase de Berry

$$\beta_{j\mu k} = (j+\mu)(\mu-1/2)P^2_{j-1/2,\mu-1/2}(\theta)\frac{(j-\mu)!}{4(j+\mu-1)!} +$$

$$+(j-\mu)(\mu+1/2)P^2_{j-1/2,\mu+1/2}(\theta)\frac{(j-\mu-1)!}{4(j+\mu)!} +$$

$$+(j-\mu+1)(\mu-1/2)P^2_{j+1/2,\mu-1/2}(\theta)\frac{(j-\mu+1)!}{4(j+\mu)!} +$$

$$+(j+\mu)(\mu+1/2)P^2_{j+1/2,\mu+1/2}(\theta)\frac{(j-\mu)!}{4(j+\mu+1)!}\,, \quad (28)$$

y similarmente de la expresión (11), para $k < 0$

$$\beta_{j\mu-k} = (j-\mu+1)(\mu-1/2)P^2_{j+1/2,\mu-1/2}(\theta)\frac{(j-\mu+1)!}{4(j+\mu)!} +$$

$$+(j+\mu+1)(\mu+1/2)P^2_{j+1/2,\mu+1/2}(\theta)\frac{(j-\mu)!}{4(j+\mu+1)!} +$$

$$+(j+\mu)(\mu-1/2)P^2_{j-1/2,\mu-1/2}(\theta)\frac{(j-\mu)!}{4(j+\mu-1)!} +$$

$$+(j-\mu)(\mu+1/2)P^2_{j-1/2,\mu+1/2}(\theta)\frac{(j-\mu-1)!}{4(j+\mu)!}\,. \quad (29)$$

Para los casos más simples con $k = 1, j = 1/2$ y $\mu = \pm 1/2$ obtenemos de (28) y (29) respectivamente

$$\beta_{1/2,1/2,1} = \frac{1}{4}P^2_{1,1}(\theta) = \frac{1}{4}(1-cos\theta^2)\,, \quad (30)$$

$$\beta_{1/2,-1/2,1} = -P^2_{1,-1}(\theta) = -(1-cos\theta^2)\,. \quad (31)$$

Similarmente para el otro caso simple con $k = -1$, $j = 1/2$, $\mu = \pm 1/2$ de spin antiparalelo a $\boldsymbol{J}$, obtenemos

$$\beta_{1/2,1/2,-1} = \frac{1}{4}P^2_{1,1}(\theta) = \frac{1}{4}(1-cos\theta^2)\,, \quad (32)$$

$$\beta_{1/2,-1/2,-1} = -P^2_{1,-1}(\theta) = -(1-cos\theta^2)\,. \quad (33)$$

En estos casos las fases de Berry que se obtienen como en el caso de una partícula con spin $1/2$ en un campo magnético [8], la fase es proporcional al ángulo solido que se subtiende con un paralelo de ángulo θ sobre la esfera con coordenadas θ y ϕ. Se observa también de las expresiones (28) y (29) que las fases de Berry para dos estados degenerados $\beta_{j\mu k}$ y $\beta_{j\mu-k}$ son iguales. Para otras trayectorias, las expresiones de las fases de Berry serán diferentes a aquellas tomadas sobre un paralelo, pero serán iguales para los dos estados degenerados.

CONCLUSIONES

El método simplificado usado nos permitió obtener las funciones y los valores propios del rotor de Dirac, reproduciendo resultados previos, además de ver que el espectro de energía es doblemente degenerado para las funciones con números cuánticos k y $-k$. Probamos que la expresión para la fase de Berry del caso relativista de Dirac es la misma que la del caso no relativista de Schrödinger.

Encontramos que las fases de Berry para los estados degenerados del rotor de Dirac son iguales.

REFERENCIAS

1. V. G. Bagrov y D. M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations.* Klwer. Dordretch. 1990.
2. K. N. Srinivasa Rao y D. Saroja, The Rigid Rotator according to Relativistic Quantum Mechanics. *Proc. Ind. Acad. Sci*. **A61** (1995) 398-412.
3. G. Herzberg, *Spectra of Diatomic Molecules.* Van Nostrand Reinhold. New York 1950.
4. A. Bohr y B. Mottelson, *Nuclear Structure Vol* II. Benjamin. New York. 1969.
5. H. C. Corben, *Classical and Quantum Theory of Spinning Particles*. Holden-Day. San Francisco. 1968.
6. H. Mukunda, H. Van Dam y L. C. Biedenharn, *Relativistic Models of Extended Hadrins Obeying a Mass Spin Trayectory Constraint.* Springer. New York. 1982.
7. R. Aldinger, A. Bohm, P. Kielanowski, M. Loewe, P. Magnollay, N. Mukunda, W. Drechsler y S. R. Komy, Relativistic rotator. I. Quantum observables and constrined Hamiltonian mechanics. *Phys. Rev*. **D28** (1983) 3020-3031.
8. M. V. Berry, Quantal phase factors accompanying changes. *Proc. Roy. Soc*. **A392** (1984) 45-57.
9. J. A. Anandan, geometric approach to quantum mechanics. *Found. Phys*. **21** (1991) 1265-1284.
10. S. S. Schweber, *External Field Problems, en The Mathematics of Physics and Chemistry* II, H. Margenau and G. M. Murphy Eds. Van Nostrand. Princeton. 1964.
11. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics.* The Clarendon Press. Oxford. 1958.
12. G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics.* Benjamin. Reading. 1969.
13. J. R. Klauder, Continuos-Representation Theory II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics. *Jour. Math. Phys*. **4** (1963) 1058-1073.
14. S. S. Schweber, *Relativistic Quantum Field Theory.* Harper y Row. New York. 1964.
15. M. V. Berry, *The Quantum Phase, Five Years After, in Geometric Phases in Physics.* Eds A. Shapere y F. Wilczek. World Scientific. Singapure. 1989.
16. A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu y J. Zwanziger, The geometric Phase in Quantum Systems. Springer. Berlin. 2003.
17. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicist.* Academic Press. New York. 1970.

ISSN: 2594-1011

Representaciones SO(3,c), SO(3) en el electrodinámica y spin del fotón

Víctor D. Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **Se estudian las transformaciones de Lorentz del campo electromagnético con la representación del grupo SO(3,c). Tambien se prueba con las ecuaciones de Maxwell y onda, y con una representación del subgrupo SO(3) que el spín del fotón es 1.**

Palabras — Clave: **Electrodinámica, representaciones SO(3,c), SO(3), Maxwell, Spín fotón.**

Abstract — **The Lorentz transformations of the electromagnetic field are studied with the representation of the SO(3, c) group. With Maxwell equation and wave equations, and with a representation of subgroup SO(3) that the photon spin is 1.**

Keywords — **Electrodynamics, SO(3,c), SO(3) representations, Maxwell spin, photon.**

INTRODUCCIÓN

La transformación de Lorentz del campo electromagnético $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ y las ecuaciones de Maxwell son tratadas en la teoría de la relatividad con relación al grupo de Lorentz y su representación [1, 2]. Henri Poincaré fue el primero en estudiar el grupo de Lorentz, su algebra de Lie, además de introducir las invariantes de Lorentz $P_1 = E^2 - H^2$, $P_2 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ conocidas como invariantes de Poincaré [3, 4, 5]. Posteriormente Sandoval-Vallarta factorizo las ecuaciones de Maxwell en forma análoga a la de Dirac con matrices de 4×4, introduciendo el vector complejo $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ [6]. Con este vector $\boldsymbol{C}$ se pueden estudiar las transformaciones de Lorentz del campo electromagnético [1, 2], con rotaciones ortogonales de argumento complejo. El conjunto de estas rotaciones ortogonales con tres parámetros forman el grupo ortogonal complejo en tres dimensiones SO(3,c) con una algebra de Lie isomorfa a la del grupo de Lorentz, introducida por Kursunuglu [7, 8]. Los tres parámetros complejos del grupo SO(3,c) corresponden a los seis parámetros del grupo de Lorentz [9, 10]. En particular la transformación de Lorentz del campo electromagnético $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ o $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ se manifiesta con las representaciones de grupo SO(3,c), que es el primer objetivo de este artículo. Con el subgrupo SO(3) con tres parámetros reales, subgrupo SO(3,c), se puede analizar las ecuaciones de Maxwell en el vacío en el sistema MKS con el vector $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ y probar que el spín del foton es 1 [11, 12].

Majorana fue el primero en probar esto [13, 14], pero esta investigación es poco conocida. El segundo objetivo de este artículo es determinar con la ecuación del fotón se escribe con la representación adjunta de la algebra de Lie del grupo SO(3) con una representación de momento angular $\boldsymbol{L}$ [13, 14] y que la ecuación de estado del fotón es la ecuación para el operador de helicidad o chiralidad, ya que la masa del fotón es cero [9, 10].

TRANFORMACIONES DE LORENTZ SO(3,c) DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Debe recordarse que las transformaciones de Lorentz del tiempo-espacio se pueden escribir como rotaciones hiperbólicas [1] en la forma

$$x = x'\cosh\psi + ct'\operatorname{senh}\psi\ , ct = x'\operatorname{senh}\psi + ct'\cosh\psi\ , \quad (1)$$

donde

$$\operatorname{senh}\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \beta\gamma\ , \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\ ,$$

$$\operatorname{tgh}\psi = v/c = \beta, \quad (2)$$

en las cuales v es la velocidad relativa a lo largo del eje x, c la velocidad de la luz y ψ es el parámetro de rapidez. Como es usual para obtener las inversas de la Ec. (1) se cambia β por $-\beta$, se quitan las primas del lado derecho y se ponen en el lado izquierdo. La transformación de Lorentz de las componentes del campo electromagnético en el sistema absoluto de unidades [1] son las siguientes

$$E_x = E'_x\ , E_y = \frac{E'_y+\beta H'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , E_z = \frac{E'_z-\beta H'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad (3)$$

$$H_x = H'_x\ , H_y = \frac{H'_y+\beta E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , H_z = \frac{H'_z-\beta E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\ . \quad (4)$$

Usando las funciones hiperbólicas de la Ec. (2) las transformaciones del campo electromagnético de la Ecs. (3, 4) se escriben ahora como

$$E_x = E'_x\ , E_y = cosh\psi E'_y + \operatorname{senh}\psi H'_z\ ,$$

$$E_z = \cosh\psi - \operatorname{senh}\psi H'_y\ , \quad (5)$$

*Becario COFFA, EDD, EDI, SIP (20180245) IPN

$$H_x = H'_x, H_y = H'_y\cosh\psi - E'_y\operatorname{senh}\psi,$$

$$H_z = H'_z\cosh\psi + E'_y\operatorname{senh}\psi \ . \quad (6)$$

Con estas rotaciones hiperbólicas de las transformaciones de Lorentz del campo electromagnético las del vector de Sandoval-Vallarta $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ [1] son las siguientes

$$C_x = C'_x,$$

$$C_y = C'_y\cosh\psi - iC'_z\operatorname{senh}\psi = C'_y\cos i\psi - C'_z\operatorname{sen} i\psi \ , \quad (7))$$

$$C_z = C'_z\cosh\psi + iC'_y\operatorname{senh}\psi = C'_y\cos i\psi + C'_z\operatorname{sen} i\psi \ , \quad (8)$$

en las que se han usado relaciones simples entre funciones hiperbólicas y circulares. En forma matricial las Ecs. (7, 8) se escriben como

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\psi & -\operatorname{senh}\psi \\ 0 & i\operatorname{senh}\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_x \\ C'_y \\ C'_z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i\psi & -\operatorname{sen} i\psi \\ 0 & \operatorname{sen} i\psi & \cos i\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_x \\ C'_y \\ C'_z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

En estas ecuaciones se observa que la transformación de Lorentz en el espacio-tiempo conduce a una rotación hiperbólica del vector del campo electromagnético $\boldsymbol{C}$ o a una rotación circular con ángulo imaginario en el plano yz del espacio tridimensional. Si se consideran transformaciones de Lorentz en los planos $ct - y$ y $ct - z$ se necesitan dos angulos imaginarios y si además se consideran las rotaciones ortogonales a lo largo de los ejes x, y, z para completar las seis transformaciones del grupo de Lorentz [1] se necesitan seis parámetros.

Del cuadrado del vector de Sandoval-Vallarta $c^2 = (E + iH)^2 = E^2 - H^2 + 2i\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ se prueba la invariancia de Lorentz de las invariantes de Poincaré, $P_1 = E^2 - H^2$, $P_2 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$, mediante las Ecs. (9, 10).

Con estas ideas se puede presentar la representación SO(3,c) del grupo de Lorentz de Kursunuglu [7, 8] para el campo electromagnético. Se denota el espacio vectorial tridimensional de vectores como $\boldsymbol{C}$ por $E_3(c)$ y sus vectores por el ket $|v\rangle = |v_1, v_2, v_3\rangle$ donde $v_i \in \boldsymbol{C}$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces se define en $E_3(c)$ el producto interno ortogonal como

$$\langle v|v\rangle = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \in \boldsymbol{C} \ . \quad (11)$$

El grupo de matrices de 3×3 con determinante uno que deja invariante el producto interno de la Ec. (11) es el grupo SO(3,c). Las matrices de este grupo dependen de seis parámetros que se expresan por el vector complejo $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ y satisfacen la relación

$$R'(\boldsymbol{d})R(\boldsymbol{d}) = R(\boldsymbol{d})R'(\boldsymbol{d}) = I \ . \quad (12)$$

donde la prima denota transpuesta. De manera análoga a las matrices de rotaciones finitas ortogonales del grupo SO(3), las del grupo SO(3,c) se generan por una matriz antisimetrica de 3×3 tal que

$$Z' = -Z \ , \quad (13)$$

que explícitamente se expresa [7, 8] con los parámetros $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$ en la forma

$$Z = i\begin{bmatrix} 0 & -a_3 - ib_3 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & 0 & -a_1 - ib_1 \\ -a_2 - ib_2 & a_1 + ib_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= a_iK_i + ib_iK_i = (a_i + ib_i)K_i \ , \quad (14)$$

en la que los seis generadores infinitesimales del grupo SO(3,c) son

$$K_i \ , \ iK_i \ . \quad (15)$$

Las matrices K_i son las matrices 3×3 de los generadores infinitesimales de la algebra de Lie del grupo SO(3) y se escriben [7, 8] de manera general como

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{i3} & \delta_{i2} \\ i\delta_{i3} & 0 & -i\delta_{i1} \\ -i\delta_{i2} & \delta_{i1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, K_i^+ = K_i \ . \quad (17)$$

Es claro entonces que las matrices K_i generan rotaciones y las iK_i rotaciones hiperbólicas, es decir transformaciones de Lorentz. Así el vector complejo $\boldsymbol{d}$ se expresa con los parámetros $\boldsymbol{d} = (\varphi, \theta, \phi) + i(\psi, \lambda, \varepsilon)$, donde las componentes del vector son ángulos y los de la parte imaginaria parámetros de rapidez a lo largo de los ejes x, y, z. Un ejemplo típico a lo largo del eje x, es decir en el plano yz es el siguiente

$$R_1 = exp\big(i(\varphi + i\psi)\big) \ , \quad (18)$$

y análogamente a lo largo de los ejes y, z. En forma matricial

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi + i\psi) & sen(\varphi + i\psi) \\ 0 & -sen(\varphi + i\psi) & cos(\varphi + i\psi) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

y tal que

$$|\boldsymbol{C}'\rangle = R_1|\boldsymbol{C}\rangle \ . \quad (20)$$

En particular si no hay rotación $\varphi = 0$, la Ec. (20) es la inversa de la Ec. (10). Con las identidades trigonométricas

$$\cos(\varphi + i\psi) = \cos\varphi\cosh\psi - i\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\psi \ , \quad (21)$$

$$\text{sen}(\varphi + i\psi) = \text{sen}\varphi\cosh\psi - i\cos\varphi\,\text{senh}\psi \ . \quad (22)$$

De las Ecs. (19, 20, 21, 22) se obtienen los vectores $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{C}^*$ donde el asterisco significa complejo conjugado, que con un poco de algebra proporcionan la transformación del campo electromagnético

$$E_1' = E_1\ ,\quad E_2' = \gamma[(E_2 - \beta H_3)\cos\varphi + (E_3 + \beta H_2)\text{sen}\varphi],$$

$$E_3' = \gamma[(E_3 - \beta H_2)\cos\varphi + (E_2 + \beta H_3)\text{sen}\varphi]\ , \quad (23)$$

$$H_1' = H_1\ ,\quad H_2' = \gamma[(H_2 - \beta E_3)\cos\varphi + (H_3 + \beta E_2)\text{sen}\varphi],$$

$$H_3' = \gamma[(H_3 - \beta E_2)\cos\varphi + (H_3 + \beta E_2)\text{sen}\varphi]\ . \quad 24)$$

en particular si se toma $\varphi = 0$ las Ecs. (23, 24) se reducen a las inversas de las Ecs. (3, 4) y la matriz de la Ec. (19) es la inversa de la Ec. (10). Si se toma $\beta = 0, \gamma = 1$ la matriz de la Ec. (19) corresponde a una rotación ortogonal en el plano *yz* que deja invariante la norma euclidiana de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. es importante observar que la representación del grupo de Lorentz por el grupo SO(3, c) es muy reducida, ya que solo se aplica a las transformaciones de Lorentz de los vectores del campo electromagnético.

SPÍN 1 DEL FOTÓN

En esta parte la notación de Poincaré [1, 2] para los cuadrivectores y las unidades del sistema MKS. El cuadrivector del potencial se denota como $A^\alpha = (\boldsymbol{A}, i\phi/c)$, donde $\boldsymbol{A}$ es el potencial vectorial y ϕ el potencial escalar. Para soluciones armónicas de onda plana el cuadrivector del potencial es con $\alpha = 1, 2, 3, 4$ expresado en la forma siguiente

$$A^\alpha = A_0^\alpha \text{expi}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) = A_0^\alpha \text{expi}\left(K^\mu X_\mu\right)\ , \quad (25)$$

donde A_0^* es un cuadrivector constante $K^\mu = (k, i\omega/c)$ el cuadrivector de onda y $X_\mu = (\boldsymbol{r}, ict)$ el cuadrivector de espacio tiempo. El cuadrivector A^α satisface la ecuación de onda

$$\sum_{\beta=1}^{4} \partial^2 A^\mu / \partial\left(X^\beta\right)^2\ . \quad (26)$$

Es conveniente introducir las relaciones cuánticas de Planck $E = \hbar\omega$ y la de Broglie entre el momento lineal $\boldsymbol{p} = (2\pi\hbar/\lambda)\boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario en la dirección de propagación, asi se tiene la relación $\boldsymbol{p} = \hbar k\boldsymbol{n} = \hbar\boldsymbol{k}$. El cuadrivector de la Ec. (25) se expresa entonces como

$$A^\alpha = A_0^\alpha \text{expi}\,(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar\ , \quad (27)$$

y al substituir la Ec. (27) en la Ec. (26) de onda, se obtiene

$$-\frac{1}{\hbar^2}(p^2 - E^2/c^2) = 0\ , \quad (28)$$

es decir, $E = cp$. Comparando con la expresión relativista de la energía $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$ se concluye que desde el punto de vista cuántico y relativista los cuantos del campo electromagnético son partículas de masa cero.

En la norma de Lorentz [1, 2] el cuadrivector A^α satisface la condición

$$\partial A^\alpha/\partial X^\alpha = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A} + \omega\phi = 0\ , \quad (29)$$

y en particular con la norma de Coulomb $A_4 = i\emptyset/c = 0$, asi que de la Ec. (29) se tiene

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A} = 0\ . \quad (30)$$

Las ecuaciones para el campo electromagnético en función de los potenciales

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}\ ,\quad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t\ , \quad (31)$$

de acuerdo a la Ec. (25) determinan las ecuaciones

$$\boldsymbol{B} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\text{exp}ikx\ , \quad (32)$$

$$\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{A}\text{exp}ikx\ , \quad (33)$$

donde se denota $k^\mu X_\mu = kx$. Además de las ecuaciones siguientes de Maxwell en el vacío

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\ ,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0\ , \quad (34)$$

para la onda armónica de las Ecs. (25) y (32, 33) se obtienen las condiciones

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A})\text{exp}kx = 0\ , \quad (35)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\omega\text{exp}ikx = 0\ . \quad (36)$$

Estas condiciones son consistentes ya que $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{k}$ y de la condición de Coulomb $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A} = 0$. Las Ecs. (35, 36) determinan relaciones entre los vectores $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ para ondas armónicas y muestran que $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}expikx = 0\ , \quad (37)$$

de acuerdo a la condición de Coulomb de la Ec. (30). Además de las Ecs. (35, 36) se sigue la relación vectorial

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}\ ,\quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}k\ . \quad (38)$$

Por lo tanto los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{k}$ forman un sistema ortogonal derecho. Asi es posible escribir los campos electromagnéticos de la onda armónica en la forma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}_1E_0\ ,\quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}_2E_0/c\ , \quad (39)$$

donde $E_0 = i\omega A\text{exp}ikx$ y los vectores $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}$ forman un sistema ortonormal derecho

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}\ ,\quad \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1\ ,\quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\ . \quad (40)$$

Para determinar la ecuación del fotón con spín 1 [8, 9, 10, 11] se escriben ahora los vectores complejos

$$\boldsymbol{C}_\pm = \boldsymbol{E} \pm ic\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{n}_1 \pm i\boldsymbol{n}_2)E_0\ , \quad (41)$$

de acuerdo a la Ec. (39) las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\ ,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\ , \tag{42}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\ ,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\partial\boldsymbol{E}/\partial t\ . \tag{43}$$

De las Ecs. (41, 42) se tiene

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}_{\pm}=0\ , \tag{44}$$

y de las Ecs. (41, 43) se prueban las ecuaciones

$$\nabla\times\boldsymbol{C}_{\pm}=\frac{i}{c}\frac{\partial\boldsymbol{C}_{\pm}}{\partial t}\ . \tag{45}$$

Tomando la forma explícita de los vectores $\boldsymbol{C}_{\pm}$ de la Ec. (40) y de E_0 llevan a las ecuaciones vectoriales siguientes

$$i\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)=\pm\frac{\omega}{c}(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)\ . \tag{46}$$

Introduciendo nuevamente las condiciones cuánticas de Planck $E=\hbar\omega=c|p|$ y de de Broglie $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ en la forma de las Ecs (46) de Maxwell se tiene entonces

$$i\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}\times(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)=\pm(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)\ . \tag{47}$$

Con el tensor antisimétrico de Levi-Civita $\varepsilon_{jk\ell}$, donde $j,k,\ell=1,2,3$ con suma sobre índices repetidos la Ec. (47) se escribe como

$$i\varepsilon_{jk\ell}\frac{p_k}{|p|}(\boldsymbol{n}_1+i\boldsymbol{n}_2)_\ell=\pm(\boldsymbol{n}_1+i\boldsymbol{n})_j\ . \tag{48}$$

Se introducen ahora las matrices de la representación $\boldsymbol{n}_1$ adjunta de la algebra de Lie SO(3) [15, 16], S_k con elementos

$$(S_k)_{j\ell}=i\varepsilon_{jk\ell}\ , \tag{49}$$

con las cuales las Ecs. (48) se expresan de la forma siguiente

$$(S_k)_{j\ell}\frac{p_k}{|p|}(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)_\ell=\pm(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)_j\ . \tag{50}$$

Tomando el producto con el índice *k* de (50) se escribe como

$$\left(\frac{S\cdot p}{|p|}\right)_{j\ell}(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)_\ell=\pm(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)_j\ . \tag{51}$$

El operador matricial $S\cdot p/|p|$ es el operador de helicidad [9, 10] y desde el punto de vista de la mecánica cuántica sus autovectores son $(\boldsymbol{n}_1\pm i\boldsymbol{n}_2)$, con autovalores ±1 respectivamente de estados de helicidad. De la Ec. (51) se sigue que el spín del fotón es 1, por ser una forma vectorial cuantico relativista de las ecuaciones de Maxwell. La forma explicita de las matrices S_k de la Ec. (49) son

$$S_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$S_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ , \tag{52}$$

corresponden a momento angular 1 que es consistente con spín 1 y son las misma de la Ec. (16).

CONCLUSIONES

Con el vector complejo $\boldsymbol{C}$ de Sandoval-Vallarta para el campo electromagnético se encontró que esté se transforma mediante una transformación de Lorentz con lo que se puede escribir con un parámetro imaginario el cual Korsunoglu generalizó a tres parámetros complejos para dar una representación del grupo de Lorentz con matrices de 3×3 para el grupo SO(3,c). Con las soluciones armónicas de onda plana para las ecuaciones de Maxwell, se usó la representación adjunta del grupo SO(3) con el tensor de Levi-Civita para escribirlas en forma matricial. Así se determinó el operador de helicidad por matrices de e 3×3 de momento angular que determinan el spín del fotón igual a 1. Aunque se usaron las condiciones cuánticas de Planck y de de Broglie estas solo se usan para probar que el fotón tiene masa cero.

REFERENCIAS

1. L. Landau y M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields.* Pergamon. New York. 1987.
2. A. O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. Dover. New York. 1980.
3. W. Schmid, Poincaré and Lie Groups, Buul. *Am. Math. Soc*. **6 (2)** (1982) 175-186.
4. A. A. Logenov, *Curso de la Teoría de la Relatividad y la Gravitación*. Editorial URRS. Moscú. 1998.
5. A. A. Logenov, *Henry Poincaré and Relativity Theory*. Nauka. Moscú. 2005.
6. M. Sandoval-Vallarta, Note on the Statistical Interpretation of Maxwell Equation´s*. *Journal of Mathematics and Physics*. **8 (1-4)** (1929) 155-161.
7. B. Korsunoğlu, Complex Orthogonal and Antiorthogonal Representation of Lorentz Group. *J. Math. Phys*. **2** (1961) 22-32.
8. B. Korsunoğlu, *Modern Quantum Theory*. W. H. Freeman and Co. San Francisco. 1962
9. L. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press. Cambridge. 1985.
10. S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Dover. New York. 2005.
11. J. M. Jauch y F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons. Springer. Berlín. 1976.
12. V. B. Berestetskii,E. M. Lifshitz,L. P. Pitaevskii, Teoría cuántica relativista. Reverte. Barcelona. 2003.
13. E. Majorana, Teoria Relativistica di Particelle Con Momento Intrinseco Arbitrario. *Nuovo Cimento* **9** (1932) 335-344.
14. E. Mignani, E. Recami, M. Baldo, About a dirac-like equation for the photon according to ettore majorana. *Lett. Nuovo Cimento.* **11** (1974) 568-572.
15. M. Hamermesh, Group Theory and Its Application to Physical Probems. Dover. New York. 1989.
16. B. N. Shapukov Grupos y Algebras de Lie en Ejercicios y Problemas. Editorial URSS. Moscú. 2001.

ISSN: 2594-1011

Interferencia cuántica en sistemas no inerciales

Víctor Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **Partiendo de una formulación canónica se describe la ecuación de Schrödinger en sistemas no inerciales con aceleración angular o traslacional uniforme. Los efectos no inerciales de estos sistemas se incorporan en la función de estado mediante una fase de Berry con una teoría de norma $U(I)$. Con esta teoría se explican los experimentos de interferencia de neutrones en sistemas no inerciales de Colella, Overhauser y Wewner y el efecto Josepshon no inercial de Zimmermann y Mercereau.**

Palabras Clave — **Interferencia, no inercial, teoria de norma $U(I)$**

Abstract — **Starting from a canonical formulation, the Schrödinger equation is described in non-inertial systems with uniform angular or translational acceleration. The non-inertial effects of these systems are incorporated into the state function by means of a Berry phase with a theory of norm $U(I)$. This theory explains the experiments of neutron interference in non-inertial systems of Colella, Overhauser and Wewner and the non-inertial Josepshon effect of Zimmermann and Mercereau.**

Keywords — **interference, non-inertial, $U(I)$ gauge theory**

INTRODUCCION

Los experimentos de Colella, Overhauser y Werner, realizados con interferómetros de neutrones para detector el campo gravitacional y la rotación terrestre [1, 2] y el de interferencia de las corrientes de dos juntas Josepshon en paralelo en un sistema en rotación, de Zimmermann y Mercereau [3], conocido también como efecto Josepshon no inercial [4], han probado la importancia del papel desempeñado por la fase de la función de estado en la identificación de esta fase con la de Berry [6], para evoluciones no cíclicas ni adiabáticas [7]. La explicación de estos experimentos requiere una mecánica cuántica en un sistema no inercial, para lo cual existen métodos muy generales [4, 8] basados en ideas de la teoría general de la relatividad, y otros en una cubanización canónica de las hamiltoneanas clásicas [9, 10] los cuales no se emplean adecuadamente, con el objeto de incluir los efectos no inerciales en la fase de la función de estado. Desde que Dirac [11] incorporo la interacción de un campo electromagnético con una partícula cargada en la fase de la función de estado, para generar el acoplamiento mínimo [12]; esta idea no ha sido usada para incorporar los efectos no inerciales en sistemas uniformemente acelerados.

*Becario COFFA, EDD, EDI, SIP (20180245) IPN

En este artículo a partir de una descripción canónica se escribe la ecuación de Schrödinger en un sistema no inercial uniformemente acelerado. El efecto de los potenciales de Coriolis y centrifugo de la rotación, el traslacional uniforme se incorporan como un acoplamiento mínimo en la ecuación de Schödinger. Esto permite incluir los efectos no inerciales en la fase función de estado mediante una teoría de norma pura $U(I)$, con la cual se explican de una forma fundamental loe experimentos de interferencia cuántica mencionados. Esta es la principal ventaja de esta teoría, ya que existen otras formas de explicar los experimentos [13, 14, 15] pero no de una forma general y unificada a partir de principios fundamentales. Después se presenta una descripción canónica de los sistemas con aceleración rotacional o traslacional uniforme, con la cual se puede escribir la ecuación de Schrödinger incorporando los efectos no inerciales mediante un acoplamiento mínimo, después de este acoplamiento se formula como una teoría de norma pura $U(I)$, mediante la cual se explican los experimentos de interferencia cuántica antes mencionados finalmente se dan las conclusiones.

MECÁNICA CUÁNTICA EN SISTEMAS NO INERCIALES

Se tiene un sistema no inercial N que se mueve con velocidad de traslación $\boldsymbol{V}(t)$ con respecto a un sistema inercial I. La lagrangeana en el sistema N con coordenadas primadas [16] es la siguiente

$$L' = \frac{mV'^2}{2} - m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}' \ , \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t) = d\boldsymbol{V}/dt$ esta aceleración relativa entre los sistemas I y N. De esta Lagrangeana se determina el momento lineal y con la forma usual [16] se determina la siguiente función Hamiltoneana.

$$H' = \boldsymbol{p}'^2/2m + m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}' \ . \tag{2}$$

Es importante observar que en las Ecs. (1) y (2) para la Lagrangeana y la Hamiltoneana en sistemas no inerciales aparece el término siguiente, de energía potencial traslacional

$$w = m\boldsymbol{w}(t)\cdot\boldsymbol{r}' \ . \tag{3}$$

De la Ec. (2) la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es la siguiente

$$-i\hbar\frac{\partial f'}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}'\right)f' \ , \tag{4}$$

en la que, si existe algún potencial externo, debe introducirse en la ecuación.

De acuerdo con el principio de equivalencia, la ecuación de movimiento en un campo gravitacional estático y uniforme relativa a un sistema inercial de referencia es equivalente al de una partícula libre relativa a un sistema de referencia uniformemente acelerado [17]. De la Ec. (3) se tiene que la fuerza generada por el potencial es $-m\boldsymbol{w}$, así que cuando la aceleración $\boldsymbol{w}$ no depende del tiempo se cumple clásicamente el principio de equivalencia y también cuánticamente para la Ec. (4) de Schrödinger en un sistema no inercial acelerado. Cuando el sistema N sea un sistema en rotación con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$, con el mismo origen que el sistema I, la relación entre las velocidades [16] está dada por:

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \ . \tag{5}$$

La lagrangeana para una partícula de masa m, es la siguiente:

$$L = mV^2/2 + m\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) \ , \tag{6}$$

Se observa [16] que la rotación del sistema en rotación introduce un término lineal en la velocidad en la Lagrangeana. La ecuación de movimiento es para esta Lagrangeana

$$m\, d\boldsymbol{V}/dt = 2m\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) \ . \tag{7}$$

En esta ecuación $f_c = 2m\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}$ es la fuerza de Coriolis la cual depende de la velocidad y $f = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega})$ la fuerza centrífuga. El momento canónico conjugado para la Lagrangeana de la Ec. (6) está dado por

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = m\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \ . \tag{8}$$

Por lo tanto, la función Hamiltoneana asociada a la Lagrangeana de la Ec. (6) es

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 \ . \tag{9}$$

Si se comparan la Ec. (7) de movimiento con la de la fuerza de Lorentz para una partícula en un campo electromagnético descrito por los potenciales $\emptyset(\boldsymbol{r})$, escalar y el vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})\right) \ , \tag{10}$$

y su función Hamiltoneana

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\emptyset \ , \tag{11}$$

respectivamente con las Ecs. (7) y (9) se puede hacer la analogía entre los potenciales $\emptyset, \boldsymbol{A}$ y los potenciales escalares centrífugo φ y el vectorial de Coriolis $\boldsymbol{C}$, definidos como

$$\varphi = -\frac{m}{2}(\omega \times r)^2 \ , \tag{12}$$

$$C = m\omega \times r \ , \tag{13}$$

los cuales determinan las fuerzas centrifuga y de Coriolis respectivamente como

$$f = -\nabla\varphi \ , \ \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) \ . \tag{14}$$

Así mismo, se observa la analogía entre el campo eléctrico con la aceleración centrifuga, la del campo magnético con la velocidad angular y entre las constantes de acoplamiento *e* y *m* [10]. Se debe notar que en la Hamiltoneana de la Ec. (11) el efecto no inercial de la rotación se incorpora mediante los potenciales de Coriolis y centrifugo. El primero como un acoplamiento o interacción mínima. Así en la ecuación de Schrödinger en un sistema en rotación se escribe en la forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \left(-\frac{i\hbar\nabla}{2m} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)^2 \ . \tag{15}$$

TEORIA DE NORMA $U(I)$ PARA SISTEMAS NO INERCIALES

Dirac [11] usó la indeterminación de la fase de la función de estado para especular sobre la posible existencia de monopolos magnéticos. Asumió que la fase de la función de estado puede ser una función del tiempo-espacio $f(x_0 = -t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. Por lo tanto, la indeterminación de la fase de la función de estado permite escribir

$$\varphi = expif(x_0, x_1, x_2, x_3)\psi \ . \tag{16}$$

Ambas funciones de estado tienen el mismo módulo, pero no satisfacen la misma ecuación. En efecto al aplicar el operador de energía momento $-i\hbar\,\partial/\partial Xr \ \ (r = 0,1,2,3)$ a φ se obtiene

$$-i\hbar\,\partial\varphi/\partial x_r = e^{if'(-ik\partial/\partial x_r + \hbar L_r)\psi} \ , \tag{17}$$

donde las funciones L_r quedan definidas por

$$L_r = \partial f/\partial x_r \ . \tag{18}$$

Dirac asumió que la fase f no es integrable, es decir $\partial L_r/\partial x_n \neq \partial L_n/\partial x_r$ y por lo tanto la integral de L_r en una curva cerrada cualquiera no se anula

$$\oint \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r = \oint K_r d_r \neq 0 \ . \tag{19}$$

Todo esto tiene como consecuencia que para una partícula cargada que interacciona por acoplamiento mínimo [12] con un campo electromagnético descrito por los potenciales $\emptyset$ y $\boldsymbol{A}$, estos se pueden identificar de acuerdo con las ecuaciones en (17) con las funciones L_r en la forma

$$\emptyset = -\hbar L_0/e \ , \quad A_i = c\hbar L_i/e \ . \tag{20}$$

Esta identificación de los potenciales A_r con las funciones L_r, que son derivadas parciales de fase permite determinar ésta en función de los potenciales (11). De las con las ecuaciones (18, 20) se puede escribir

$$f_{12} = \int_1^2 L_r dX_r = \frac{e}{K}\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dr} + \frac{e}{K}\int_{t_1}^{t_2} \emptyset \mathrm{dt} \ . \quad (21)$$

De acuerdo con Dirac esta ecuación indica que la fase no tiene significado en un punto particular y sólo la diferencial de fase entre dos puntos espacios-temporales tiene significado físico. La transformación de la función de onda por una fase para introducir los potenciales electromagnéticos es conocido como una teoría de norma pura $U(I)$ [18]. En particular la integral vectorial de la Ec. (21) desempeña un papel importante en el experimento propuesto por Bohm-Ahranov (BA) [19].

En un sistema en rotación, los efectos no inerciales incorporados mediante los potenciales de C_c en un acoplamiento mínimo en la Ec. (15) de Schrödinger, se puede describir de manera similar al cambio de función de estado con una función de norma $g(t, x_1, x_2, x_3)$ y sus derivadas N_i, similar a la Ec. (16) así se obtienen las relaciones

$$\varphi = -\hbar N_0 = \partial g/\partial t, \quad C_i = KN_i = \hbar\,\partial g/\partial X_i \ . \quad (22)$$

Por analogía con el caso electromagnético de la Ec. (21), la fase en el caso rotacional no inercial cómo teoría de norma pura $U(I)$ está determinado por la expresión

$$g_{12} = \int_1^2 N_i dX_r = \frac{m}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} - \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} (\omega\times r)^2 dt \ . \quad (23)$$

Para un sistema no inercial con aceleración traslacional $\boldsymbol{w}$ constante, la fase adquirida por la función de estado debido al potencial $w = m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}$ es

$$f_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}dt \ . \quad (24)$$

Por lo tanto, la mecánica cuántica en sistemas no inerciales con aceleración rotacional o traslacional constante es una teoría de norma pura $U(I)$.

INTERFERENCIA CUANTICA EN SISTEMAS NO INERCIALES

En una serie de experimentos Colella, Overhauser y Werner (COW) [1,2] observaron el efecto del campo gravitacional terrestre en la función de estado de neutrones térmicos. COW usaron interferómetros de silicio puro análogo al de Mach-Zender para descomponer un haz de neutrones en dos haces y después recombinarlos para producir interferencia, de forma similar como se había hecho con electrones [20]. El interferómetro tiene la forma de un paralelogramo de lados $\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \ell_1$, y $\mathrm{BD} = \mathrm{AC} = \ell_2$. El haz incidente, incide horizontalmente sobre el lado AB del paralelogramo y se descompone en las trayectorias ABD y ACD del mismo. Las trayectorias AB y CD son paralelas. El interferómetro se gira alrededor de AB por un ángulo θ que se mide y la trayectoria CD queda por abajo o hacia arriba del lado AB por una altura $z = \ell_2 \mathrm{sen}\theta$. Si se denotan por ψ_B y ψ_C las funciones de estado de los haces de los neutrones que pasan por los puntos B y C del interferómetro. Así la probabilidad de recombinar estos haces en el punto D es

$$P_D = |\psi_\mathrm{A} + \psi_\mathrm{C}|^2 \ . \quad (25)$$

Debido a la presencia del campo gravitacional estas funciones adquieren una fase dada por la Ec. (24) al viajar los neutrones por las ramas del interferómetro y son de la forma

$$\psi_\mathrm{B} = \psi \mathrm{exp} i f_\mathrm{B} \ , \quad (26)$$

$$\psi_\mathrm{C} = \psi \mathrm{exp} i f_\mathrm{C} \ , \quad (27)$$

donde ψ es la función de estado de una partícula libre y $f_\mathrm{B}, f_\mathrm{C}$ son las fases de origen gravitacional. Así la Ec. (25) se puede escribir con las Ecs. (26, 27) en la forma

$$P_\mathrm{D} = 2(1 + cos f_\mathrm{D}) \ , \quad (28)$$

donde f_D es la diferencial de fase $f_\mathrm{D} = f_\mathrm{C} - f_B$, la fase f_C es la suma de las fases en las ramas AC y CD, igualmente la fase f_B es la suma de las fases en las ramas AB y BD. Las fases de las ramas AC y BD inclinadas por un ángulo θ, son iguales ya que se encuentran en las mismas condiciones físicas y son de la misma longitud ℓ_2. Por lo tanto, la diferencia de fase es $f_\mathrm{D} = f_\mathrm{CD} - f_{AB}$. Para este caso el potencial traslacional y gravitacional de la ecuación (3) está dado por

$$w = mgz \ , \quad (29)$$

para la rama CD y cero para la rama AB con $z = 0$ de referencia gravitacional a partir de la cual se mide z para la rama CD. Así de las Ecs. (24) y (25) se tiene

$$f_\mathrm{CD} = f_{12} = \frac{mgz}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt = mgz(t_2 - t_1) \ , \quad (30)$$

en la que $t_{12} = t_2 - t_1$ es el tiempo empleado por los neutrones en recorrer la rama CD de longitud ℓ_2. En función de la longitud de onda de De Brouglie $\lambda = 2\pi\hbar/mV$ de los neutrones térmicos de masa m que se mueven con velocidad V, la Ec. (30) toma la forma

$$t_{12} = \ell_2/V = \lambda m\ell_2/2\pi\hbar \ . \quad (31)$$

Finalmente, la fase f_CD se escribe de las Ecs. (30, 31) como

$$f_D = f_{CD} = mgzm\ell_2/2\pi\hbar^2 = m^2 g\ell_1\ell_2\lambda sen\theta/2\pi\hbar^2 \ . \quad (32)$$

Esta misma expresión para la fase fue obtenida por Sakurai [15, 21] por otro método. Es proporcional al flujo magnético y la razón $m/\hbar^2$. La probabilidad de la Ec. (28) y la Ec. (32) es la siguiente

$$P_\mathrm{D} = 2\left(1 + \cos(m^2 g\ell_1\ell_2\lambda \mathrm{sen}\theta/\pi\hbar^2)\right) \ . \quad (33)$$

Así, al variar el ángulo θ de inclinación se obtiene un patrón cuántico de interferencia inducido por gravedad, sin embargo, esta expresión de la Ec. (33) no reproduce el patrón de interferencia de COW [1, 2], pero es buena

aproximación, de esta forma, COW aseguran que se prueba la igualdad de la masa gravitacional al depender de m^2 y la validez de la ecuación de Schrödinger para un sistema no inercial. Anadan [22] sugirió que mediante un interferómetro cuántico podría detectarse el efecto de la rotación terrestre sobre la función de estado. En un experimento similar al efectuado por Michelson-Gale [23] mediante un interferómetro óptico, COW [1, 2] detectaron el efecto de la rotación terrestre debido a la fuerza de Coriolis en la función de estado. COW colocaron el interferómetro en posición vertical a lo largo del eje AD en la que dirigieron el haz de neutrones para que realizaran la trayectoria cerrada en la dirección ABDCA. Como el interferómetro se encuentra en un sistema no inercial que gira con la velocidad angular terrestre $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje terrestre, la fase de la función de estado de los neutrones, de acuerdo con la Ec. (23), está dada por

$$f_r = \frac{m}{\hbar}\int_{\mathrm{ABC}} \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\boldsymbol{dr} + \frac{m}{\hbar}\int_{\mathrm{DCA}} \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\boldsymbol{dr} = \frac{m}{\hbar}\oint \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\boldsymbol{dr}\ . \quad (34)$$

Usando el teorema de Stokes. La Ec. (34) se escribe como

$$f_r = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\int d\boldsymbol{A} = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,A\ , \quad (35)$$

donde A es el área del interferómetro y $\boldsymbol{n}$ su vector normal unitario que depende de la latitud y longitud del lugar en la tierra donde se haga el experimento. La distribución de la Ec. (28) de la interferencia es

$$P_r = 2(1+cos2mA\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}/\hbar)\ , \quad (36)$$

de tal manera que al girar la tierra con el interferómetro, también gira el vector $\boldsymbol{n}$, generándose así un factor de interferencia cuántica. Es conveniente aclarar que Werner en 1994 obtuvo la misma expresión para la fase f_r de la Ec. (35), por otro método [2] y la modifica con los resultados experimentales. Werner usa el método de Dirac para calcular propagadores, lo cuál no es lo adecuado, además dice que la interferencia cuántica de los neutrones es un efecto no local [2]. Si se refiere a las fases de la teoría $U(I)$ tratadas aquí, esto es cierto porque las fases dependen del espacio-tiempo, pero si se refiere a una mecánica cuántica no local, es incorrecto, porque la teoría cuántica que se ha usado en este artículo es local.

La forma de la fase f_r de la Ec. (35) es análoga a la fase del efecto BA magnético dado en la Ec. (21), por lo que el patrón de interferencia puede explicarse como un efecto BA mecánico producido por el potencial vectorial de Coriolis. En efecto Aharonov y Carmi (AC) [24], predijeron un efecto de este tipo de sistemas cuánticos y es conocido como efecto AC. Un efecto AC superpuesto con un efecto BA como observaron Semon y Harris [10, 25] fue realizado por Zimmermann y Mercereau [3, 26]. Mediante un interferómetro SQUID [3, 26] formado por dos juntas Josephson en un circuito en paralelo puesto en rotación en un eje perpendicular al plano del interferómetro y en presencia de un campo magnético. Ya que las fases magnética y no inercial de rotación son ambas de norma pura $U(I)$, la fase total es su suma, así se tiene

$$f = f_{\mathrm{A}} + f_r = \frac{e}{\hbar c}\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dr} + \frac{2m}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\boldsymbol{dr}\ . \quad (37)$$

Así la diferencia de fase de las funciones de los electrones de las super corrientes en el circuito cerrado del interferómetro de ZM, de acuerdo con el teorema de Stokes es

$$f_{ZM} = \oint\left(\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dr} + \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{dr}\right) = \left(\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{B} + \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\boldsymbol{n}s\ , \quad (38)$$

donde s es el área del interferómetro y $\boldsymbol{n}$ su vector normal unitario. La probabilidad de interferencia es por lo tanto

$$P_{ZM} = 2\left(1+cos\left(\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{B} + \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\right)\right)\cdot\boldsymbol{n}s\ . \quad (39)$$

Zimmermann y Mercerau obtuvieron la misma fase de la Ec. (38) para la super corriente de interferencia, lo cual les permitió determinar experimentalmente la razón $e/\hbar$. Mediante la teoría de dos niveles del efecto Josephson propuesta por Feynman [26, 27] es posible expresar las super corrientes a partir de las funciones de estado, llegando al mismo resultado de ZM. Posteriormente a los experimentos de interferencia cuántica con neutrones de COW, se han hecho experimentos análogos con haces atómicos o moleculares que permiten una mayor resolución de las franjas de interferencia [28], por lo que se espera que puedan usar como giroscopios cuánticos.

CONCLUSIONES

Se ha probado un formalismo canónico. Se puede formular la ecuación de Schrödinger en sistemas no inerciales con aceleraciones traslacionales o rotacionales constantes. Esto permite tratar los efectos no inerciales en la representación fase de Dirac, como acoplamientos mínimos, que pueden incorporarse en la función de estado como una fase de una teoría de norma pura (I) no es, como lo sugiere Werner, necesario usar la teoría de propagadores de Dirac, así fue posible explicar la interferencia cuántica inducida por gravedad, obteniendo el mismo resultado que Sakurai, y el efecto de Coriolis en la interferencia cuántica de los experimentos con neutrones de COW. También se obtuvo el mismo resultado para la fase de interferencia en el experimento de juntas Josephson de ZM. Todos los experimentos de interferencia cuántica son explicados con una mecánica cuántica en sistemas no inerciales de una forma fundamental y sistemática de norma $U(I)$ pura. Existe la posibilidad de que los interferómetros cuánticos con haces atómicos o moleculares sean usados como giroscopios cuánticos.

REFERENCIAS

1. J. L. Staudenman, S. A. Werner, R. Colella, and A. W. Overhauser, Gravity and inertia in quantum mechanics. *Phys. Rev*. **A21** (1980) 1419.
2. S. A. Werner, Neutron interferometry *Phys. Today*. **33** (1980) 24.; S. A. Werner, Gravitational, rotational and topological quantum phase shifts in neutron interferometry. *Class. Quantum Grav*. **11** (1994) A207.
3. J. E. Zimmerman and J. E. Mercereau, Compton Wavelength of Superconducting Electrons. *Phys. Rev. Lett*. **14** (1965) 887.
4. E. Schumtzer and J. Plebansky, Quantum Mechanics in Non-inertial Frames of Refernce. *Fortschr. Phys*. **25** (1977) 35.
5. J. Anandan, Ed. *Quantum Coherence*. Worrld Scientific. Singapure. 1990.
6. M. V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc*. **A392** (1984) 45.
7. J. Samuel and R. Bhandari, General Setting for Berry′s Phase. *Phys. Rev. Lett*. **60** (1988) 2339.
8. B. S. DeWitt, Superconductors and Gravitational Drag. *Phys. Rev. Lett*. **16** (1966) 1092.
9. G. Panini, London moment of rotating superconductors and lense-thirring fields of general relativity. *Nuov. Cim*. **B45** (1966) 66.
10. J. H. Harris and M. D. Semon, A review of the Aharonov-Carmi thought experiment concerning the inertial and electromagnetic vector potentials. *Found. Phys*. **10** (1980) 151.
11. P. A. M. Dirac, Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc*. **A133** (1931) 60; Direction in Physics. Mc Graw-Hill. New York. 1979.
12. K. Schwarzchild, Zur Elektrodynamik I Zwei Formen des Princips der Action in der Elektronentheorie. *Nachrichten von del Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. (1903) 121-131, 132-141, 245-278.
13. L. A. Page, Effec of Earth′s Rotation in Neutron Interferometry. *Phys. Rev. Lett*. **35** (1975) 543.
14. M. Dresden and C. N. Yang, Phase shift in a rotating neutrón or optical interferometer. *Phys Rev*. **D20** (1979 1846.
15. J. J. Sakurai, Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation. *Phys. Rev*. **D21** (1980) 2993.
16. L. Landau and M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon., New York. 1987.
17. L. Landau and M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon., New York. 1987.
18. G. H. Thomas “Introductory Lecture on Fibre Bundles and Topology for Physicists”. *Riv. Nouv. Cim*. **3 (4)** (1980) 1
19. Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Phys. Rev*. **115** (1959) 485
20. Hetch E. *Optica*, Addison Wesley Latinoamericana. Madrid. 2000.
21. Sakurai J. J. *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley. Reading. Mass. 1994.
22. J. Anandan, Gravitational and rotational effects in quantum interference. *Phys. Rev*. **D15** (1977) 1448.
23. A. Michelson, The Effect of Earth´s Rotation on the Velocity of Light I, *The Astrophysical Journa*l **61** (1925) 137. A. Michelson, H. Gale, Assisted by F. Pearson, The Effect of Earth´s Rotation on the Velocity of Light II, *The Astrophysical Journal* **61** (1925) 140.
24. Y. Aharonov and G. Carmi, Quantum Aspects of the Equivalence Principle, *Found. Phys*. **3** (1973) 493.
25. M. D. Semon, Experimental verification of an Aharonov-Bohm effect in rotating reference frames, *Found. Phys*. **12** (1982) 49.
26. R. P. Feynman, The Feynman Lectures on Physics V III. Addison Wesley. Reading. Mass. 1964.
27. R. P. Feynman, *Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc. Reading, Massachusetts, 1972
28. J. F. Clauser, Ultra-high sensitivity accelerometers and gyroscopes using neutral atom matter-wave interferometry, *Physica B+C* **151** (1988) 262.

ISSN: 2594-1011

Relaciones spinoriales de los métodos de deducción de la ecuación de Dirac de Van de Warden y Ryder

Víctor D. Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **Con las representaciones de Weyl $(1/2\,,0)$ y $(0,1/2)$ del grupo de Lorentz y sus spinores se da la descripción de la derivación de Van der Waerden y de Ryder de la ecuación de Dirac. Se comparan dos métodos y se resalta que la ecuación de Dirac se tiene en la representación chiral de Weyl.**

Palabras Clave – **Grupo de Lorentz, Spinores, Van der Waerden, Ryder ecuación de Dirac.**

Abstract — **With Weyl's representations $(1/2\,,0)$ and $(0,1/2)$ of the Lorentz group and their spinores, the derivation of Dirac equation of Van der Waerden and Ryder is given. The two methods compared and it is remarked that the Dirac equation is obtained in the chiral o Weyl representation.**

Keywords — **Lorentz group, spinors, Van der Waerden, Ryder, Dirac equation.**

INTRODUCCION

En 1927 Pauli introdujo el spin electrónico en la ecuación de Schrödinger con sus marices y 2-spinores, para explicar dobletes observados experimentalmente en espectroscopía [1]. Para 1928 Dirac introdujo una ecuación covariante relativista de Lorentz para partículas con masa no nula y funciones de estados descritos por 4-spinores [2]. Weyl consideró el caso covariante relativista de Lorentz para partículas de masa nula y con 2-spinores para la función de estado [3] que Pauli rechazó por no ser invariante bajo inversiones espaciales [4]. Como sugerencia de Ehrenfest Van der Waerden creó el análisis spinorial en 1929 y dio un método para, a partir de las ecuaciones desacopladas de 2-spinores de Weyl para masa nula, acoplarlas de forma inversa mediante una masa no nula y construir la ecuación de Dirac para 4-spinores [5]. Pauli observó que hay un número infinito de representaciones de las matrices de Dirac y en particular son las representaciones de Weyl y Majorana [6] las otras alternativas usadas, aparte de la representación estándar de Dirac. Estas últimas representaciones son usadas en teorías supersimétricas por considerarse más fundamentales y con mayor contenido físico [7, 9]. Ryder [8], basados en las representaciones $D^{(1/2,0)}$ y $D^{(0,1/2)}$ del grupo $SL(2,C)$ de Lorentz, proporcionan otro método semejante al de Van der Waerden para deducir la ecuación de Dirac [9, 10]. En este artículo contrastamos los dos métodos con base a las representaciones $SL(2,C)$ del grupo de Lorentz. Encontramos que la ecuación de Dirac obtenida está en la representación de Weyl o chiral [9, 11]

*Becario COFFA, EDD, EDI, SIP (20180245) IPN

REPRESENTACIÓN $SL(2,C)$ DEL GRUPO DE LORENTZ

El grupo de Lorentz consiste de tres rotaciones espaciales y tres boosts o rotaciones espacio-temporales [9, 11], cuyos respectivos generadores M_i, N_i satisfacen el álgebra de Lie $(i,j=1,2,3)$ [9, 11]

$$[M_i,M_j]=\epsilon_{ijk}M_k\,,\qquad [N_i,N_j]=-\epsilon_{ijk}M_k\,,$$

$$[M_i,N_j]=\epsilon_{ijk}N_k\,. \tag{1}$$

Para hacer más clara y simplificar esta álgebra, se introducen los operadores siguientes $(k,l,m=1,2,3)$

$$J_l=\frac{i}{2}(M_l+iN_l)\,,\ K_l=\frac{i}{2}(M_l-iN_l)\,, \tag{2}$$

los cuales satisfacen la siguiente álgebra

$$[J_k,J_l]=i\epsilon_{klm}\,,\ [K_l,K_m]=i\epsilon_{lkn}K_n\,,\ [J_l,K_m]=0\,. \tag{3}$$

De estas relaciones de conmutación se sigue que las representaciones irreducibles de dimensión finita en el espacio $V^{jj'}$ se pueden expandir por un conjunto de $(2j+1)(2j'+1)$ vectores base $(jm,j'm')$, donde j, m, j', m' son enteros o semienteros. Con los operadores J_l, K_m se tiene entonces de acuerdo a las Ec. (3) que el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, se ve como la del grupo $SU(2)\otimes SU(2)$ [9, 11]. Así las representaciones $D^{jj'}$ son indicadas por el par de índices (j,j'), $j,j'=0,1/2\,,1,3/2\,,\cdots$. Los vectores base de las representaciones $D^{(n/2,m/2)}$ y $D^{(m/2,n/2)}$ se pueden escoger de tal forma que las matrices respectivas de sus representaciones sean complejo conjugadas unas de otras. Una cantidad que se transforma bajo $D^{(0,0)}$ es un escalar, una ante $D^{(½,½)}$ un vector de 4-componentes, una se trasforma con la representación $(½,0)$ es un spinor de 2-componentes y otra con la representación $(0,½)$ un 2-spinor conjugado [9, 11]. Para estas representaciones spinoriales $D^{(½,0)}$ y $D^{(0,½)}$, se pueden dar representaciones de los generadores infinitesimales por medio de las matrices de Pauli respectivamente:

$$M_i^{(½,0)}=i\sigma_i/2\,,\quad N^{(½,0)}=\sigma_i/2\,,$$

$$M^{(0,½)}=-i\sigma_i/2,\quad N_i^{(0,½)}=\sigma_i/2\,. \tag{4}$$

Así los vectores de la representación $(½,0)$ son llamados 2-spinores ζse transforman ante transformaciones de Lorentz finitas con parámetros $(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})$, que corresponden a las 3 rotaciones espaciales y 3 boosts o rotaciones de Lorentz puras están definidas por las transformaciones

$$\zeta \to \zeta' = \exp(i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi}))\zeta \ , \tag{5}$$

y los de la representación $(0,½)$ por

$$\dot{\eta} \to \dot{\eta}' = \exp(i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi}))\dot{\eta} \ , \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ y σ_i son las matrices de Pauli [8, 10]. Las representaciones de Lorentz por los términos $-i\boldsymbol{\phi}$ e $i\boldsymbol{\phi}$, son compleja conjugada una de otra y son representaciones no equivalentes del grupo de Lie $SL(2,C)$ introducido por Weyl [3] y usada por Van der Waerden para introducir el análisis spinorial [5, 7]. Los spinores base de la representación $(½,0)$ se denotan por ζ y los de la $(0,½)$ por el símbolo puntado $\dot{\eta}$. Ante inversiones espaciales generadas por el operador de paridad P, $P\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}$, los spinores ζ y $\dot{\eta}$ se transforman en la forma siguiente

$$P\zeta=\dot{\eta}\ ,\ P\dot{\eta}=\zeta\ . \tag{7}$$

Esto es debido a que le parámetro $\boldsymbol{\phi}$ de los boosts de Lorentz están relacionados con el vector $\boldsymbol{v}$ dela velocidad entre dos sistemas inerciales en la forma $tanh\phi_i=v_i/c$ y al aplicar el operador P a $\boldsymbol{v}$ se tiene $P\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$, que implica el intercambio de los spinores en (7) [5, 9], de acuerdo a (5) y (6). A partir de los 2-spinores Van der Waerden creó tensores spinoriales de orden mayor con k spinores η^i y l spinores $\dot{\eta}^i$. De particular interés para construir una representación spinorial de la ecuación de Dirac probó que se puede formar un spinor de 2° orden mixto que se hace corresponder a un 4-vector $A_\mu=(A^0,-\boldsymbol{A})$ relativista de Lorentz en la forma siguiente [5, 9]

$$\begin{aligned} A^{1\dot{1}}&=A_{2\dot{2}}=A_z+A_0, & A^{2\dot{2}}&=A_{1\dot{1}}=A_0-A_z,\\ A^{1\dot{2}}&=-A_{2\dot{1}}=A_x-iA_y, & A^{2\dot{1}}&=-A_{1\dot{2}}=A_x+iA_y \end{aligned}\ . \tag{8}$$

REPRESENTACIÓN SPINORIAL DE VAN DER WAERDEN DE LA ECUACIÓN DE DIRAC

De la correspondencia entre el operador del 4-vector de momento lineal $p_\mu=i\partial_\mu$ y los correspondientes tensores spinoriales de segundo orden Van der Waerden con la condición de invariancia relativista propone el sistema de ecuaciones de los spinores ζ y $\dot{\eta}$ acoplados por la masa de la partícula

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\dot{\eta}_{\dot{\beta}}=mc\zeta^\alpha\ ,\quad p^{\alpha\dot{\beta}}\dot{\eta}_{\dot{\beta}}=mc\zeta^\alpha\ ,\quad \alpha,\beta=1,2. \tag{9}$$

Eliminando las Ecs. (9) alguno de los spinores y substituyendo en la otra se obtiene por ejemplo

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\dot{\eta}_{\dot{\beta}}=\frac{1}{mc}p^{\alpha\dot{\beta}}p_{\gamma\dot{\beta}}\zeta^\gamma=\ mc\zeta^\alpha\ , \tag{10}$$

ya que se satisface (5), (6) y (9) $p^{\alpha\dot{\beta}}p_{\gamma\dot{\beta}}=\delta^\alpha_\gamma p^2$, donde $p^2=m^2c^2=p^\mu p_\mu$ es la norma al cuadrado de 4-vector p^μ, se puede escribir la Ec. (10), en la forma

$$(p^2-m^2c^2)\zeta=0\ , \tag{11}$$

e igualmente para el spinor $\dot{\eta}$

$$(p^2-m^2c^2)\dot{\eta}=0\ . \tag{12}$$

Se observa que para considerar a la vez los dos spinores ζ y $\dot{\eta}$ es necesario acoplarlos mediante la masa m de la partícula. Por lo tanto no es posible construir una representación con un solo spinor para una partícula con masa. La ecuación relativista de las Ecs. (9) para una partícula de masa m es la ecuación lineal de Dirac [2, 5, 9].

Recordando [5, 7, 9] que a cada 4-vector relativista $(p^0,-\boldsymbol{p})$, $p^0=E/c$ se le asocian a los spinores de segundo orden $p^{\alpha\dot{\beta}}$ y $p_{\dot{\beta}\alpha}$ respectivamente las matrices

$$(p_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\ ,\qquad (p_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\ , \tag{13}$$

la ecuación de Dirac (9) se puede escribir en forma matricial como

$$(p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\dot{\eta}=mc\zeta\ ,\quad (p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\zeta=mc\dot{\eta}\ . \tag{14}$$

Ante inversiones espaciales $P^{-1}\boldsymbol{p}P=-\boldsymbol{p}$, $P\boldsymbol{\sigma}P=\boldsymbol{\sigma}$ y de la Ec. (6) para los 2-spinores, se observa que la ecuación de Dirac matricial (14) es invariante ante inversiones espaciales. Con el 4-spinor o bispinor ψ de la suma directa de los 2-spinores ζ y $\dot{\eta}$

$$\psi_W=\zeta\oplus\dot{\eta}=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\dot{\eta}_{\dot{1}}\\ \dot{\eta}_{\dot{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \dot{\eta}_{\dot{1}}\\ \dot{\eta}_{\dot{2}}\end{pmatrix}_W=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}_W\ , \tag{15}$$

la Ec. (14) de Dirac se representan ahora en la forma matricial de 4×4

$$\begin{pmatrix}0 & p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=mc\begin{pmatrix}\zeta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}. \tag{16}$$

de la forma más general covariante la Ec. (16) se escribe en la forma

$$p_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta=\psi_\alpha\ , \tag{17}$$

donde

$$\gamma p=\gamma^\mu p_\mu=p_0\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{i}\gamma^0\,\partial/\partial ct+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ ,$$

$$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)\ , \tag{18}$$

y las matrices gamma de 4×4 son

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

La representación spinorial de Van der Waerden para la ecuación de Dirac es diferente a la estándar o típica de

Dirac, y es conocida como chiral o de Weyl [8]. En forma Hamiltoneana

$$i\partial\psi/\partial ct = H\psi\,, \tag{20}$$

el operador Hamiltoneano toma la forma

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\beta}mc^2\,, \tag{21}$$

donde se introducen las matrices hermitianas

$$\alpha = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0\,, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Se observa de la Ec. de Dirac (14) que en el sistema propio $\boldsymbol{p} = 0$ y en el límite no relativista $\boldsymbol{p} \to 0$ los 2-spinores ζ y $\dot{\eta}$ son iguales $\dot{\eta} = \zeta$. Por lo tanto para conectar con la representación típica de Dirac, se define el 4-spinor

$$\psi_D = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad \varphi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \dot{\eta})\,,\ \chi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\zeta - \dot{\eta})\,. \tag{24}$$

Así para una partícula con $p = 0$, en el sistema propio y en el límite no relativista $\chi = 0$, en la representación de la Ec. (21) conocida como típica o estándar de Dirac. Ante una inversión espacial de acuerdo a las Ecs. (7) y (24) se tiene entonces

$$P\psi_D = \begin{pmatrix}P\varphi\\ P\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi\\ -\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}_D\,. \tag{25}$$

Sumando y restando las Ecs. (14) de la representación chiral de Weyl, se obtiene la ecuación de Dirac en la representación estándar

$$p_0\varphi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi = mc\varphi\,, \quad -p_0\chi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi = mc\chi\,. \tag{26}$$

Así las matrices de Dirac en la forma estándar son

$$\gamma_D^0 = \beta = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \gamma_D = \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Para partículas de masa nula $m = 0$, las Ecs. (14) de la representación de Weyl, se desacoplan en la forma siguiente

$$p_0\dot{\eta} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\dot{\eta}\,, \quad -p_0\zeta = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\zeta\,. \tag{28}$$

Es claro que estas ecuaciones de Weyl no son invariantes ante paridad por lo cual Pauli la rechazó [4]. Así las representaciones $D^{(½,0)}$ y $D^{(0,½)}$ no son irreducibles ante paridad, pero si lo es la suma directa $D^{(½,0)} \oplus D^{(0,½)}$ cuando $m \neq 0$ de acuerdo a las Ecs. (15). De las Ecs. (28) de Weyl multiplicando por $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ se obtiene que si $\dot{\eta} \neq 0 \neq \zeta$, $p_0^2 = p^2$ así que la energía es $p_0 = \pm|p|$. Resalta una ventaja la representación de Weyl sobre la Ec. (26) de Dirac, porque en esta representación cuando $m = 0$ las ecuaciones para los 2-spinores no se desacoplan, como las Ecs. (28). Se define la matriz de spin, que es independiente de la representación

$$\boldsymbol{\Sigma} = i\gamma_5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

donde γ_5, si depende de la representación [8, 10].

REPRESENTACIÓN DE RYDER

Esta representación se obtiene aplicando un boost de una transformación pura de Lorentz con $\theta = 0$ de las Ecs. (5) y (6) a los 2-spinores $\zeta = \phi_R$ y $\dot{\eta} = \phi_L$ de la siguiente forma

$$\phi'_R = e^{\sigma\cdot\boldsymbol{\phi}/2}\phi_R = [cosh\,\phi/2 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}sinh\,\phi/2]\phi_R(0)\,, \tag{30}$$

donde $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{n}\phi = (\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)\phi$, $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{p}}$ y $\boldsymbol{p}$ es la parte vectorial del 4-momento de la partícula. Se considera que el 2-spinor de la Ec. (30) se refiere a un 2-spinor en el sistema propio o en reposo $\phi_R(0)$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, que se transforma a uno de una partícula con momento $\boldsymbol{p}$, $\phi'_R(\boldsymbol{p})$. El parámetro $\boldsymbol{\phi}$ de la transformación y la magnitud de la velocidad $\boldsymbol{v}$ entre dos sistemas inerciales satisface $tanh\phi = v/c = \beta$, $cosh\phi = 1/\gamma$, $sinh\phi = \beta/\gamma$, $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$ de las que se sigue entonces

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \left[(\gamma + 1/2)^{1/2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}(\gamma - 1/2)^{1/2}\right]\phi_R(0)\,. \tag{31}$$

Para una partícula relativista de masa m, momento lineal $\boldsymbol{p}$, $c = 1$, energía E, $\gamma = E/m$ entonces

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \tfrac{E+m+\sigma\cdot\boldsymbol{p}}{[2mE+m]^{1/2}}\phi_R(0)\,. \tag{32}$$

Análogamente el spinor conjugado ϕ_L evoluciona cambiando $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ en (32), así se tiene

$$\phi_L(\boldsymbol{p}) = \tfrac{E+m-\sigma\cdot\boldsymbol{p}}{[2mE+m]^{1/2}}\phi_L(0)\,. \tag{33}$$

En el sistema propio de una partícula como se vio, los spinores $\phi_L(0)$ y $\phi_R(0)$ son idénticos, es decir su spin no se puede definir, así que $\phi_L(0) = \phi_R(0)$ y por las Ecs. (32) y (33) se escriben en la forma pura $\phi_L(\boldsymbol{p})$ y $\phi_R(\boldsymbol{p})$.

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = (E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,/m)\phi_L(\boldsymbol{p})\,, \tag{34}$$

$$\phi_L(\boldsymbol{p}) = (E - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,/m)\phi_R(\boldsymbol{p})\,, \tag{35}$$

que son las Ecs. (14) de la ecuación de Dirac en la representación chiral de Van der Waerden

$$(E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\phi_L(\boldsymbol{p}) = m\phi_R(\boldsymbol{p})\,, \tag{36}$$

$$(E - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\phi_R(\boldsymbol{p}) = m\phi_L(\boldsymbol{p})\,. \tag{37}$$

Estas en forma matricial análoga a la Ec. (16) son las siguientes

$$\begin{pmatrix}-m & p_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ p_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_R(\boldsymbol{p})\\ \phi_L(\boldsymbol{p})\end{pmatrix} = 0\,. \tag{38}$$

Con la definición del cuadriespinor

$$\psi(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix}\phi_R(\boldsymbol{p})\\ \phi_L(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}, \tag{39}$$

y la matrices de 4x4 siguientes

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

la Ec. (38) se escribe como

$$(\gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i - m)\psi(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{41}$$

Que es la ecuación de Dirac para una partícula con masa y spin ½. También en la representación chiral de Weyl. Es importante observar la similitud entre las Ecs. (14]) de Van der Waerden y las Ecs. (36, 37) de Ryder.

CONCLUSIONES

Con las representaciones $(1/2\,,0)$ y $(0,1/2)$ del grupo de Lorentz $SL(2,C)$ de Weyl, Van der Waerden creo la teoría de los spinores relativistas de Lorentz. Esto le permitió acoplar mediante la masa diferente de cero los spinores de segundo orden de la ecuación de Weyl para partículas de masa nula. Una representación matricial de los spinores de segundo orden para el cuadrivector relativista de momento, con las matrices de Pauli le permitió obtener la ecuación de Dirac en la representación de Weyl o chiral. Ryder uso también la representación spinorial del grupo $SL(2,C)$ pero el construyo a partir de los spinores en reposo con $\boldsymbol{p} = 0$, los hace evolucionar mediante la aplicación de un boost o transformación matricial de Lorentz del grupo SL(2,C) y la teoría de la relatividad. Así identifica el vector de momento lineal del cuadrivector de momento. Aunque el método de Ryder es mas físico y fundamental que el de Van der Waerden llega a las ecuaciones acopladas para dos spinores similares a los de Van der Waerden. Por lo tanto obtiene la ecuación de Dirac también en la representación chiral de Weyl. Ambas deducciones proporcionan alternativas para la deducción de la ecuación de Dirac.

REFERENCIAS

1. W. Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **43** (1927) 601-623.
2. P. A.M. Dirac. Relativistic quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. A*. **136** (1932) 453-464.
3. H. Weyl, H. Elektron und Gravitation. I. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **56** (1929) 330-352.
4. W. Pauli. *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik, 2nd ed. Hans Geiger and Karl Scheel, eds. Vol. 24, Part 1, Quantentheorie. Adolf Smekal, ed. Julius Springer. Berlin. 1933.
5. B. L. Van der Waerden, Spinoranalyse, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1929** (1928) 100-110.
6. Majorana E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. *Nuoevo Cimento* **14**, (1937), 171-184.
7. P. Labelle. *Supersymetry Demystified*. Mc Graw-Hill. New York. 2010.
8. L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press. 1996.
9. B. L. Van der Waerden. *Group Theory and Quantum Mechanics*. Springer, Berlín, 1980.
10. S. S. Schwebers. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Harper y Row. 1961.
11. V. B. Berestetkii, E. M. Lifshits, L. P. Pitaevskii. *Teoría cuántica relativista*. Reverte. Barcelona. 2003.

ISSN: 2594-1011

Consideraciones termoestadísticas del fotón de Einstein

Víctor D. Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **En 1905 Albert Einstein en el artículo sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz introdujo el concepto de cuanto de energía $h\nu$ conocido como fotón. Para esto la fórmula de Boltzmann para un peso estadístico del consciente de dos volúmenes V/V_0 y con termodinámica probó que sus cuantos de energía satisfacen la ecuación de un gas ideal clásico. Así concluyó que los cuantos de energía de la radiación de cuerpo negro son o se comportan como partículas. También usó la distribución de Wien para determinar que el energías de estos cuantos es $3kT$. El objetivo de este artículo es hacer una revisión crítica del artículo de Einstein y comparar desde la termodinámica estadística de un gas ideal clásico y de otro de radiación térmica de cuerpo negro en el límite de Wien. Se concluye que el fotón heurístico de Einstein es solamente incidental, pero incorrecta.**

Palabras Clave – **Fotón, Einstein, heurístico, relativista, gas.**

Abstract — **In 1905 Albert Einstein in the article on a heuristic point of view concerning the production and transformation of light introduced the concept of how much energy known as photon. For this the Boltzmann formula for a statistical weight of the conscious of two volumes and with thermodynamics proved that its quanta of energy satisfy the equation of a classical ideal gas. So he concluded that the energy quanta of blackbody radiation are or behave like particles. He also used the Wien distribution to determine that the energies of these quanta is. The objective of this article is to make a critical review of Einstein's article and to compare from the statistical thermodynamics of a classic ideal gas and another of black body thermal radiation at the Wien limit. It is concluded that Einstein's heuristic photon is only incidental, but incorrect.**

Keywords — **Photon, Einstein, heuristic, relativist, gas.**

INTRODUCCIÓN

En el artículo de Albert Einstein sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz, publicado en 1905 [1, 2], introdujo el concepto de cuanto de energía $h\nu$. El gran físico-químico estadounidense Gilbert N. Lewis, consideró como una particula de energía $h\nu$ pero con masa [3] que nombró fotón. Para introducir estos cuántos de energía o fotones, Einstein usó la ecuación para la entropía de Boltzmann con un peso estadístico $w = (V/V_0)^n$, donde V y V_0 son dos volúmenes y n es el número de partículas. Con una relación entre la energía de Helmholtz y el producto PV, probó de manera heurística que sus cuantos de energía satisfacen la ecuación de estado de un gas ideal clásico $PV = nkT$. De esta ecuación surgió la idea de partícula con masa o fotón de Lewis, aunque los fotones por viajar a la velocidad de la luz no tienen masa, como se prueba en teoría de la relatividad especial [4]. Por este motivo el artículo de Einstein es conocido como el artículo del fotón [5] aunque la parte más importante del artículo es la explicación del efecto fotoeléctrico, que le valió el premio Nobel a Einstein en 1922. Einstein argumento más con la entropía de Boltzmann y el peso termodinámico por lo que llegó a la siguiente conclusión: "concluimos además que la radiación monocromática de baja densidad (dentro del rango de validez de la fórmula de Wien) se comporta dinámicamente como si consistiera de cuantos de energía mutuamente independientes de magnitud $h\nu$" [1, 2]. También probó Einstein con la fórmula de Wien de la energía promedio de sus cuantos es $3kT$, de manera análoga como es por partículas en un gas ideal clásico $3kT/2$.

El objetivo de este artículo es hacer un análisis crítico conceptual del artículo de Einstein del fotón heurístico. Comparar desde la termodinámica estadística un gas ideal de partículas con energía $\epsilon = \boldsymbol{p}^2/2m$ y la de otro de radiación térmica de cuerpo negro de Wien con partículas de energía $\epsilon = cp = h\nu$, donde c es la velocidad de la luz y p el momento de los cuantos de energía. Se observa que aunque la termodinámica estadística se realiza con la distribución canónica para las dos energías y distribuciones se obtiene en ambos casos como ecuación de estado la de un gas ideal $PV = nRT$, pero las restantes funciones termodinámicas difieren. Aunque esto es conocido en la termodinámica estadística [6, 7] no se ha discutido como se hace en este artículo. Con la distribución de Planck de la radiación térmica de cuerpo negro se obtiene una ecuación de estado que sí es consistente con que el fotón de Planck se comporta como partícula [8, 9]. Se concluye que el fotón heurístico de Einstein es sólo un resultado incidental, pero es consistente el fotón de Planck.

*Becario COFFA, EDD, EDI, SIP (20180245) IPN

FOTON HEURÍSTICO DE EINSTEIN

En el artículo sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz, en 1905 Einstein analizó la distribución de Wien [1, 2], sin entrar en más detalles, Einstein justifica que si en el gas de radiación de Wien, cuando se pasa de un volumen v_0 a otro menor v, para n partículas, se determina un peso estadístico

$$w = (V/V_0)^n \ , \tag{1}$$

y de aquí aplicando el principio de Boltzmann [8, 7] se obtiene la entropía

$$S - S_0 = R(n/N)\ lnV/V_0 \ , \tag{2}$$

donde R es la constante de los gases ideales, N es el número de Avogadro y $R/N = k$ la constante de Boltzmann. Luego considera la siguiente relación termodinámica y la Ec.(2) de la entropía y se obtiene

$$d(E - TS) = p\ dV = TdS = R(n/N)T\ dV/V \ , \tag{3}$$

de la que se obtiene la ecuación de un gas ideal

$$PV = R(n/N)T \ . \tag{4}$$

Lo primero que se puede deducir es que la Ec. (1) no determina estrictamente un peso termodinámico y segundo de la energía libre de Helmholtz $F = E - TS = PV$ para bosones [8] al tomar la diferencial asume Einstein que la energía interna E y la presión P son constantes, con lo cual pierde generalidad. También Einstein compara la energía cinética de un gas ideal $3(R/N)\,T/2 = 3k\,T/2$ por partícula con la energía promedio de los cuantos de energía de radiación de cuerpo negro obtenido con la fórmula de Wien que es la siguiente

$$\frac{\int \alpha v^3\ exp(-\beta v/T)dv}{\int_0^\infty \frac{N}{k\beta v}\alpha v^3\ exp(-\beta v/T)dv} = 3(k/N)T \ , \tag{5}$$

donde α es una constante y $\beta = h/k$. Así Einstein de la Ec.(4) de gas ideal y de la Ec.(5), concluye que sus cuantos de energía se comportan como partículas sin interacción, que aquí se nombra fotón heurístico.

TERMODINÁMICA ESTADÍSTICA DEL GAS IDEAL EN EL COLECTIVO CANONICO

En este caso se trata de un sistema en el espacio con N partículas de masa m, asi que la energía total es

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{3N} p_i^2/2m \ , \tag{6}$$

la función de partición en el canónico con el factor de Gibbs [7, 10, 11] es

$$Z(V,N,T) = (1/N!\,h^{3N}) \int dq^{3N} dp^{3N}\ exp\big(-\beta H(q_i,p_i)\big) \ , \tag{7}$$

donde h es la constante de acción de Planck y $\beta = 1/kT$. Con la Ec.(6) de la energía en la Ec.(7) se obtiene

$$Z(T,V,N) = (1/N!\,h^{3N}) V^N \prod_{i=1}^{3N} \int_{-\infty}^{\infty} dp_i\ exp\big(-\beta p_i^2/2m\big) \ , \tag{8}$$

en la que la integral de las coordenadas de partículas que no interacciona es el volumen V^N. La integral Gaussiana de la Ec. (8) toma el valor $\sqrt{\pi}$,asi se obtiene

$$Z(T,V,N) = (V^N/N!\,h^{3N})(2\,\pi m/\beta)^{3N/2} =$$

$$= (V^N/N!)(2\,\pi mkT/h^2)^{3N/2} \ . \tag{9}$$

Con la aproximación de Stirling para N muy grande $\ln N! \sim N - NlnN$, se determina la expresion para la energía libre de Helmholtz siguiente

$$F(T,V,N) = -kT\ lnZ(T,V,N) =$$

$$= -NkT(1 + ln(V/N)(2\pi mkT/h^2)^{3/2} \ , \tag{10}$$

de esta Ec.(10) para la energía de Helmholtz se obtienen las variables termodinámicas

$$p = -\partial F/\partial V\big]_{T,H} = NkT/V \ \ , \ PV = NkT \ , \tag{11}$$

$$S = -\partial F/\partial T\big]_{V,N} = Nk\big(5/2 + ln(V/N)\big)(2\pi mkT/h^2)^{3/2} \ , \tag{12}$$

$$\mu = \partial F/\partial N\big]_{T,H} = -kT\ ln\left(\frac{V}{N}\right)(2\,\pi mkT/h^2)^{3/2} \ . \tag{13}$$

Para determinar la energía interna se usa la definición de la energía de Helmholtz y las Ecs.(10) y (11), así se obtiene

$$U = F + TS = 3NkT/2 \ . \tag{14}$$

Esta expresión para un gas ideal es la que hace referencia Einstein para la energía promedio por partícula $U/N = 2kT/2$.Es importante observar que las Ecs. (11) y (14) de estado y de la energía interna no dependen de la masa de las partículas del gas ideal, pero F, S y μ si dependen de ella.

FOTON HEUISTICO ULTRA RELATIVISTA DE EINSTEIN.

Para considerar la distribución de la radiación térmica del cuerpo negro de Wien que Einstein usó en su concepto de cuantos de acción o fotones es necesario partir de la distribución espectral de energía de Planck siguiente

$$dE = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{exp(\hbar\omega\beta - 1)} \ , \tag{15}$$

en esta expresión V es el volumen de la radiación, $\hbar$ es la constante de Planck-Dirac, ω la frecuencia angular, c la velocidad de la luz y como caso particular en el limite en que se satisface la condición $\hbar\omega \gg kT$, se obtiene [8] la distribución de Wien

$$dE = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\,\omega^3\ exp(-\hbar\omega\beta)\ d\omega \ . \tag{16}$$

Esta expresión es la que usó Einstein en la Ec.(5) para calcular el valor medio de sus cuantos de energía con la

frecuencia $\nu = 2\pi\omega$ y $2\pi\hbar = h$. El termino ultra relativista se refiere al caso de partículas que viajan a velocidades cercanas o iguales a la velocidad de la luz y por lo cual su masa de acuerdo a la teoría de la relatividad especial se anula $m = 0$ [4]. En este caso la energía de la particula, cuanto de acción o fotón tiene la energía $E = h\nu = \hbar\omega = cp$, donde p es la magnitud del vector de momento lineal $\boldsymbol{p}$ [12, 13]. Entonces con el cambio de variable $\omega = cp/\hbar$, en el espacio de momentos la distribución de Wien de cuantos de acción es la siguiente

$$dE = (V/\pi^2\hbar^2)p^3\, exp(-cp\beta)\, c\, dp/\hbar\,. \quad (17)$$

Aunque se puede evaluar fácilmente esta integral para determinar la energía, es más conveniente tratar la termodinámica estadística con la distribución canónica para un gas ultra relativista como sugiere la Ec. (17) para los cuantos de energía de Einstein. Aunque en la literatura esto es conocido [6, 7] no ha sido relacionado con la distribución de Wien, ni mucho menos con los cuantos de energía o el fotón heurístico de Einstein. Así para un gas de cuantos de energía que no interaccionan con momento lineal $p_i\,,\ i = 1, 2, \cdots, N,\ \ p_i = |\boldsymbol{p}_i|$ estos tienen la energía expresada por la hamiltoniana

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{N} cp_i\,. \quad (18)$$

La función de partición con el factor de Gibbs $N!$ de forma análoga a la Ec. (7) para la distribución canónica con la hamiltoniana de la Ec. (18), proporciona la siguiente función de partición

$$Z(T, V, N) = (V^N/N!\,h^{3N}) \prod_{i=1}^{N} \int d^3p_i\, exp(-cp_i\beta)\,, \quad (19)$$

donde como en el gas ideal el volumen es la integral en el espacio, ya que los cuantos de energía no interaccionan. Para evaluar la integral de la Ec. (19) es conveniente usar coordenadas esféricas, así se obtiene

$$Z(T, V, N) = (V^N/N!\,h^{3N}) 4\pi \int_0^{\infty} p^2 dp\, exp(-\beta cp)^N\,. \quad (20)$$

Con el cambio de variable $\beta cp = x$ la integral en la Ec. (20) se reduce a una función gamma, por lo cual se tiene

$$\int_0^{\infty} p^2\, dp\, exp(-\beta cp) = (1/\beta c)^3 \int_0^{\infty} x^2\, dx e^{-x} =$$

$$= (1/\beta c)^3 \Gamma(3)\,, \quad (21)$$

en la que $\Gamma(3)$ con la propiedad $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}!$, da el factor $\Gamma(3) = 2$, con lo que la Ec. (20) es ahora

$$Z(T, V, N) = (V^N/Nh^{3N})(8\pi(1/\beta C)^3)^N =$$

$$= (1/N!)(8\pi V(kT/hc)^3)^N\,. \quad (22)$$

Con la aproximación de Stirling para $N!$ usada antes, la energía libre de Helmholtz es

$$F(T, V, N) = -kT\, ln\, Z(T, V, N) =$$

$$= -NkT\left[1 + ln\frac{8\pi V}{N}(kT/hc)^3\right]. \quad (23)$$

Con esta energía libre de Helmholtz se determinan las siguientes variables termodinámicas

$$p = -\partial F/\partial V\big]_{T,N} = NkT/V\ ,o\ \ PV = NkT\,, \quad (24)$$

$$S = -\partial F/\partial T\big]_{V,N} = Nk\left[4 + \ln\left(\frac{8\pi V}{N}\right)(RT/\hbar c)^3\right], \quad (25)$$

$$\mu = \partial F/\partial N\big]_{T,V} = -kT \ln\left[\frac{8\pi V}{N}(RT/hc)^3\right], \quad (26)$$

La energía interna del gas de cuantos de energía ultra relativista es

$$U = F + TS = 3NkT\,, \quad (27)$$

por lo que la energía interna por cuanto de energía es $u = U/N = 3kT$, como obtiene Einstein en la Ec. (5), ya que $R/N = k$.

Es muy importante observar que ninguna de las variables termodinámicas del gas ultra relativista depende de una masa, ya que para los cuantos de energía es nula, a diferencia del gas ideal. Además es sorprendente que las Ecs. (11) y (24) de estado para el gas ideal y el gas ultra relativista respectivamente sean las mismas, aunque sus hamiltonianas de las Ecs. (6) y (18) sean diferentes. Esto es algo incidental o accidental, ya que las restantes variables termodinámicas son diferentes y en particular la Ec. (26) para el potencial químico del gas ultra relativista de cuantos de energía o fotones debe anularse [7, 11, 14, 15]. Se aclara además el error de Lewis al suponer que el gas de cuantos de energía de Einstein tienen masa, ya que se prueba que es incorrecto.

ECUACION DE ESTADO DE UN GAS DE FOTONES DE PLANK

Con el objeto de comparar el fotón heurístico de Einstein con la distribución de Wien, se dan sin demostración algunas variables termodinámicas para un gas de fotones con la distribución de Planck [8, 9]. La expresión para la energía interna es

$$U = \frac{8\pi^5 V(RT)^4}{15(hc)^3}\,, \quad (28)$$

y la relación entre la energía interna y la presión es

$$PV = U/3\,. \quad (29)$$

Por otra parte, el número de fotones en el gas está dado por

$$N = 16\pi\zeta(3)\, V(RT/hc)^3\,, \quad (30)$$

donde $\zeta(3) = 1.202$ despejando V de la Ec. (30) y sustituyendo en la Ec. (28) y con la Ec. (29) se obtienen las siguientes expresiones

$$U = \frac{\pi^4 NkT}{30\,\zeta(3)} = 2.701\,NkT\,, \tag{31}$$

$$PV = U/3 = 0.900NkT\,. \tag{32}$$

Por lo tanto para los fotones descritos por la distribución de Plank, de acuerdo a la Ec. (32) de estado si forman un gas de partículas sin masa que no interactúan.

CONCLUSIÓNES

En fotón de Einstein basado en la distribución de Wien presenta inconsistencias. Aunque coincide su derivación de la ecuación de estado con la de un gas ideal, esta no es formalmente, ya que supone presión constante. Además la probabilidad termodinámica, no lo es en el estricto sentido introducido por Boltzmann. Al comparar la termodinámica estadística de un gas ideal con la de un gas ultra relativista de partículas con masa cero, sorprendentemente coinciden sus ecuaciones de estado. Pero las restantes variables termodinámicas difieren y las del gas ideal dependen de la masa de las partículas. La coincidencia de la misma ecuación de estado de gas ideal es algo incidental o accidental. Probar que el límite de Wien de la radiación térmica coincida con el fotón ultra relativista es importante, sobre todo porque permite ver que su potencial químico no es cero como debiera ser. Con los resultados de la termodinámica de la radiación térmica de Planck, se probó que los fotones de Planck como partículas obedecen una ecuación de estado similar de forma exacta, a la de un gas ideal, por lo que los fotones correctamente pueden considerarse como partículas con masa cero.

REFERENCIAS

1. A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. ,″On a heuristic point of view concerning the production and transformation of Light.″ *Annalender Physik.* **17** (1905), 132-148
2. J: Stachel, (ed.) *Einstein 1905. Un año milagroso*. Critica. Barcelona. 2001.
3. M. Jammer, *The conceptual development of Quantum Mechanics*. Mc Graw-Hill. New York. 1966.
4. L. Landau y M. Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos*. Reverté. Barcelona. 1976.
5. L. García–Colín S., *Teoría Estadística de los Cuantos*. Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa.
6. R. Kubo, *Statistical Mechanics*. North Holland. Amsterdan. 1971.
7. W. Greiner, L. Neise y H. Stoker, *Thermodynamics and Stadistical Mechanics*. Springer, New York. 1994.
8. L. Landau y M. Lifshitz, *Física estadística*. Reverté. Barcelona. 1969.
9. T. L. Hill, *Introducción a la Termodinámica Estadística*. Paraninfo. Madrid. 1970.
10. R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press., Oxford. 1972.
11. K. Huang, *Statistical Mechanics*. John Wiley New York.1987.
12. A. Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung. ″On the quantum theory of radiation.″ *Physikalische Zeitschrift*. **18** (1917) 121-128.
13. H. Wilson, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Cambridge U.P. Cambbridge. 1966.
14. M. Zemansky, *Calor y Termodinámica*. Aguilar. Madrid. 1968.
15. F. W. Sears y G. L. Salinger, *Termodinámica, Teoría Cinética y Termodinámica Estadística*. Reverté. Barcelona. 2002.

ISSN: 2594-1011

Comentarios al artículo "Realización de estados coherentes no lineales por redes fotónicas"

Martín J. Nava Callejas[1,a], Patricia del Rocio Ornelas Cruces[2,b] , A. Zúñiga Segundo[2,c]
[1]Estudiante de Lic. En Física y Matemáticas, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F.,México
[a]navacallejasm@gmail.com; [c]azuniga@esfm.ipn.mx

Resumen — **Como parte de las actividades del curso de Óptica Cuántica, se revisaron las gráficas y las ecuaciones presentadas en el artículo "Realización de estados coherentes no lineales por redes fotónicas", detectando los errores presentes en la definición de estado coherente deformado, y las gráficas de distribución de probabilidad. Los detalles del álgebra y las correctas expresiones se presentan en este documento. Adicionalmente, se incluyen dos gráficas: una, considerando la amplitud de distribución cuando el segundo canal es excitado, y otra incluyendo la presencia de un solitón en la distribución.**

Palabras Clave – **Estados coherentes, redes fotónicas, parámetro de Mandel, solitones.**

Abstract — **The equations and graphics of the article "Realization of non-linear coherent states by photonic lattices" were reviewed, as one of the activities for a one-semester Quantum Optics course. Several mistakes were found, concerning the definition of the deformed coherent states and graphics of the probability distribution. The details of the algebra and the correct expressions are presented in this paper. In addition, we include two plots: in the first, the amplitude probability distribution when the second channel is excited; the second, the presence of a soliton in the distribution.**

Keywords — **Coherent states, photon lattices, Mandel parameter, solitons.**

I. Introducción

El proceso dinámico de propagación de la luz en guías de onda tiene estrecha relación con una ecuación similar a la de Schrödinger. Debido a ello, ha sido posible el estudio de la generación de estados Glauber-Fock, estados coherentes, estados coherentes SU(1,1) y SU(2). La distribución de probabilidad en cualquier canal corresponde a estados de número y estados deformados de número, de acuerdo a coeficientes de acoplamiento entre canales vecinos de la guía de ondas.

Matemáticamente, los estados coherentes deformados α, como estados no lineales [7], son la generalización de estados coherentes de SU(1,1) y SU(2). En la realización física, el algebra de los estados α-deformados describe osciladores armónicos confinados al centro de un pozo de potencial, que dependen del signo de α. Esta propagación de ondas en un medio no lineal permite la aparición de solitones [8].

En su artículo original [1], se define la representación generalizada de Holstein-Primakoff de estados α-deformados, y se obtiene un desplazamiento como caso especial de estados coherentes no lineales. Se generan además simulaciones de dichos estados en una red fotónica, considerando los coeficientes de acoplamiento entre canales vecinos, y estudiando la distribución del campo mediante el parámetro de Mandel. Sin embargo, al realizar una evaluación tanto de sus expresiones propuestas para dichos estados coherentes no lineales, así como de las gráficas que ilustran la distribución del campo de probabilidad, se encuentran discordancias entre sus expresiones y estos resultados, así como en la conservación de la probabilidad. En la sección de resultados se describen y evalúan las expresiones que los autores [1] proponen a lo largo de su artículo, enfatizando en los detalles entre ecuaciones; se incluyen las gráficas corregidas, posponiendo para las secciones de discusión y conclusión las observaciones relevantes respecto a la discrepancia de resultados.

II. Metodología

Como parte de los contenidos programados del curso de Óptica Cuántica, impartido durante el semestre 2018/2 en la Escuela Superior de Física y Matemáticas, se revisaron minuciosamente los resultados presentados en [1], efectuando los pasos intermedios entre las ecuaciones presentadas, así como la reproducción de las gráficas indicadas. Estas actividades permitieron identificar errores dentro del artículo, que deben ser considerados a fin de que la propuesta de los autores de [1] sea practicable. Adicionalmente, se realizaron modificaciones a dos expresiones presentadas en [1], derivando de ello dos gráficas que se presentan en la sección siguiente.

III. Resultados

A. *Operadores y sus álgebras*

Los autores introducen los siguientes operadores

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}(2N - sgn(\alpha)\hat{n})^{1/2}\hat{a} \quad (1)$$

$$\hat{A}^{+} = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\hat{a}^{+}(2N - sgn(\alpha)\hat{n})^{1/2} \quad (2)$$

$$\widehat{M} = \frac{\alpha}{2}(\hat{n} - sgn(\alpha)N) \quad (3)$$

Con $\hat{a}^+$ y $\hat{a}$ los operadores de ascenso y descenso del oscilador armónico respectivamente, $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ el operador de número, α un número real y N un número entero.

Inmediatamente después, señalan que los operadores así definidos satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\widehat{A}^+, \widehat{A}] = 2\widehat{M} \quad (4)$$
$$[\widehat{M}, \widehat{A}] = -\frac{\alpha}{2}\widehat{A} \quad (5)$$
$$\left[\widehat{M}, \widehat{A}^+\right] = \frac{\alpha}{2}\widehat{A}^+ \quad (6)$$

Para el caso en que $\alpha > 0$, los operadores satisfacen el álgebra SU(2), es decir

$$\left[\widehat{J_-}, \widehat{J_+}\right] = -2\widehat{J_z} \quad (7)$$
$$\left[\widehat{J_z}, \widehat{J_\pm}\right] = \pm\widehat{J_\pm} \quad (8)$$

Mientras que para $\alpha < 0$, el álgebra es aquella de SU(1,1)

$$\left[\widehat{K_-}, \widehat{K_+}\right] = 2\widehat{K_0} \quad (9)$$
$$\left[\widehat{K_0}, \widehat{K_\pm}\right] = \pm\widehat{K_\pm} \quad (10)$$

B. Operador de desplazamiento

Adicionalmente, los autores del artículo introducen un operador de desplazamiento generalizado

$$\widehat{D_\alpha}(\beta) = \exp[\beta\widehat{A}^+ - \beta^*\widehat{A}] \quad (11)$$

En donde $\beta = -|\beta|e^{-i\varphi}$. De acuerdo al álgebra de Weyl-Heisenberg, este operador puede ser descompuesto en tres exponenciales, es decir, que adopte la forma

$$\widehat{D_\alpha}(\beta) = \exp\left[\gamma\widehat{A}^+\right]\exp[\vartheta\widehat{M}]\exp[-\gamma^*\widehat{A}] \quad (12)$$

Donde los coeficientes que acompañan a los operadores dependen de $sgn(\alpha)$. Efectuando el álgebra correspondiente, para el caso $\alpha > 0$:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}e^{-i\varphi}\tan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,|\beta|\right) \quad (13)$$
$$\vartheta = -\frac{4}{\alpha}\ln\left[cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,|\beta|\right)\right] \quad (14)$$

Mientras que, para $\alpha < 0$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{2}{|\alpha|}}e^{-i\varphi}\tanh\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\,|\beta|\right) \quad (15)$$
$$\vartheta = -\frac{4}{|\alpha|}\ln\left[cosh\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\,|\beta|\right)\right] \quad (16)$$

C. Desplazamiento del estado base

Consideremos un estado coherente $|\beta, \alpha>$. Claramente, (12) tiene la estructura de un operador de desplazamiento. Al aplicarlo sobre el estado de número $|0>$ (estado base), es posible recobrar el estado coherente. El cálculo se efectuó para ambos casos, y se obtuvo, para $\alpha > 0$

$$\widehat{D_\alpha}(\beta)|0>= C^{-N}\sum_{n=0}^{2N} F_n\, tan^n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,|\beta|\right)|n> \quad (17)$$

Con

$$C = 1 + tan^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,|\beta|\right) \quad (18)$$

$$F_n = (-e^{-i\varphi})^n\sqrt{\binom{2N}{n}} \quad (19)$$

Mientras que para $\alpha < 0$

$$\widehat{D_\alpha}(\beta)|0>= D^N\sum_{n=0}^{\infty} G_n\, tanh^n\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\,|\beta|\right)|n> \quad (20)$$

Con

$$D = 1 - tanh^2\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\,|\beta|\right) \quad (21)$$

$$G_n = (-e^{-i\varphi})^n\sqrt{\frac{(2N+n-1)!}{n!(2N-1)!}} \quad (22)$$

En ambos casos el estado coherente se obtuvo al aplicar el operador de desplazamiento al estado base. Difieren significativamente en los términos de la suma, debido a que en el caso positivo, el signo de α impone una restricción respecto al número de veces que podemos aplicar el operador de ascenso. En el caso del signo negativo esta restricción no aplica, por lo cual hay infinitos términos en la serie.

En disposición de una expresión para un estado coherente, las secciones siguientes se enfocan en estudiar el comportamiento de la amplitud de probabilidad al asignar un número de guías.

D. Redes fotónicas

En las secciones anteriores, el número β fue arbitrario. Si escogemos $\beta = -iZ$, con Z número real, entonces se cumple la siguiente igualdad respecto a nuestro estado coherente

$$i\frac{\partial}{\partial Z}|Z> + \widehat{A}|Z> + \widehat{A}^+|Z>= 0 \quad (23)$$

De (17) y (20) es claro que podemos proponer

$$|Z>= \sum_m E_m\,|m> \quad (24)$$

Donde E_m es una función que depende explícitamente del parámetro Z de acuerdo a (17) y (20). Al efectuar las operaciones sobre el estado coherente $|Z>$, se obtiene una relación de recurrencia para las funciones E_m:

$$i\frac{\partial}{\partial Z}E_m + f(N,m)E_{m-1} + f(N,m+1)E_{m+1} = 0 \quad (25)$$

Donde

$$f(N,k) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\sqrt{k(2N + 1 - ksgn(\alpha))} \quad (26)$$

Con la condición que $E_{-1} = 0$.

La ecuación (25) es soluble numéricamente, tal como lo muestran las Figs. 1 y 2, donde se empleó el método de Runge-Kuta a orden 4, considerando 30 canales (N=30) y siendo el estado base, $m=0$, el primer canal. Esta última condición se modifica en la Fig. 3, donde se escogió para el primer canal $m=2$.

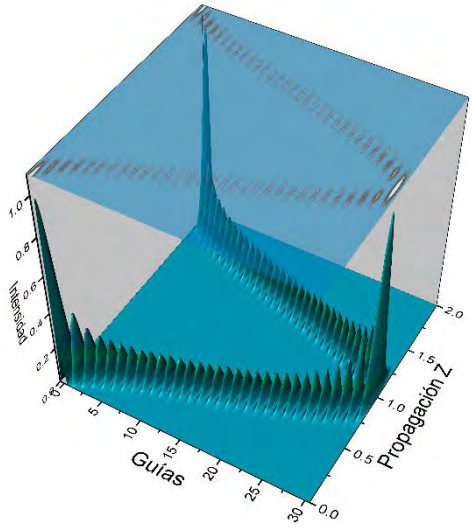


Fig. 1. Propagación del estado coherente para 30 canales, $\alpha = \pi^2/2$.

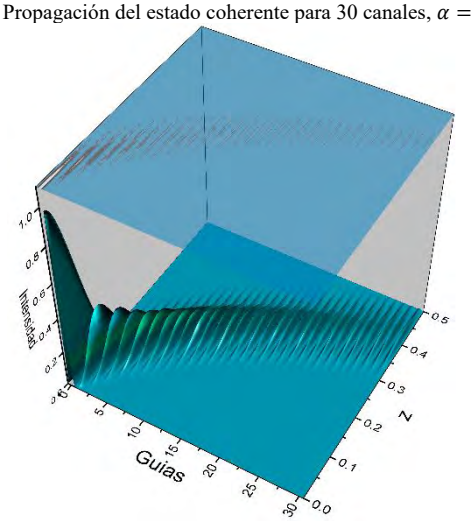


Fig. 2. Propagación del estado coherente, 30 canales y $\alpha = -\pi^2/2$

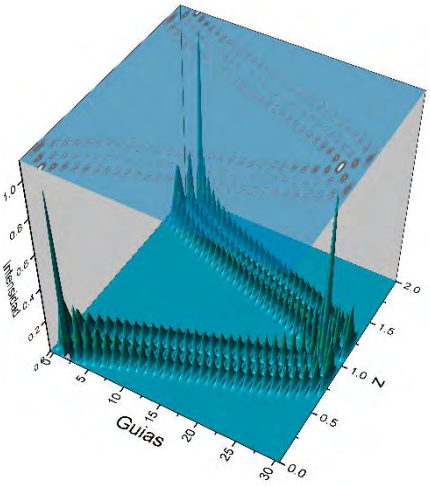


Fig. 3. Propagación del estado coherente, 30 canales y $\alpha = \pi^2/2$, considerando el comienzo en el segundo canal.

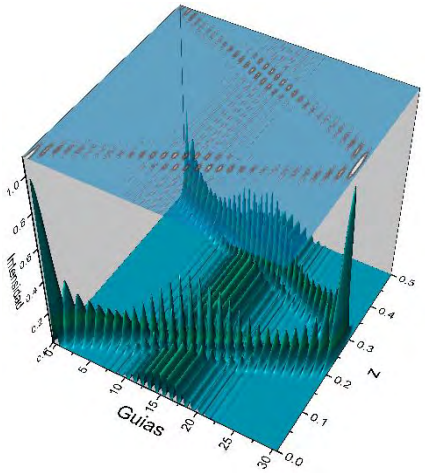


Fig. 4. Aparición de un solitón en la distribución.

E. Parámetro de Mandel

Para estudiar la naturaleza de la distribución de la densidad, se calculó el parámetro de Mandel, definido por

$$Q_{\beta,\alpha^{\pm}} = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1 \tag{27}$$

Donde el subíndice denota el estado coherente sobre el cual se calculan los valores esperados del operador de número y del operador de número al cuadrado. El parámetro de Mandel es negativo para distribuciones sub-poissonianas (fotones antiaglomerantes), positivo para distribuciones super-poissonianas (agrupamiento de fotones) y nulo para distribuciones poissonianas.

Se calculó el parámetro de Mandel para ambos casos, es decir, $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$, recurriendo al cálculo simbólico mediante Mathematica para reducir las expresiones que resultaron de obtener los valores esperados del operador de número.

Para $\alpha > 0$, se determinó que

$$\langle \hat{n} \rangle = 2N sen^2 x \tag{28}$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = 4N^2 sen^4 x + 2N sen^2 x cos^2 x \tag{29}$$

$$Q_{\beta,\alpha^{+}} = -sen^2 x \tag{30}$$

En donde $x = \sqrt{\alpha/2}\, Z$. Para $\alpha < 0$

$$\langle \hat{n} \rangle = 2N senh^2 y \tag{31}$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = 4N^2 senh^4 y + 2N senh^2 y cosh^2 y \tag{32}$$

$$Q_{\beta,\alpha^{-}} = senh^2 y \tag{33}$$

Con $y = \sqrt{|\alpha|/2}\, Z$. De nuestra definición de parámetro de Mandel, es claro que la distribución es sub-poissoniana para $\alpha > 0$, mientras que es super-poissoniana para $\alpha < 0$.En las Figs. 4 y 5 se ilustran las distribuciones respectivas para tres valores de α.

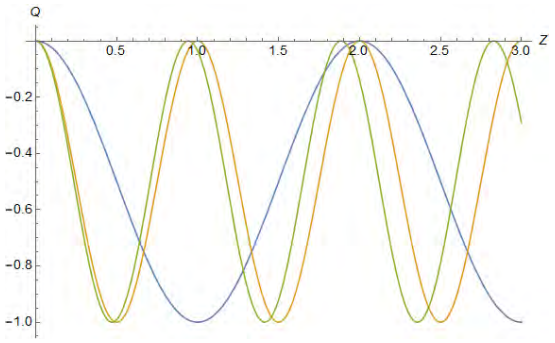


Fig. 5. Parámetro de Mandel para el caso positivo. $\alpha = 2\pi^2$(Línea roja); $\alpha = 9\pi^2/4$ (línea verde); $\alpha = \pi^2/2$ (línea azul).

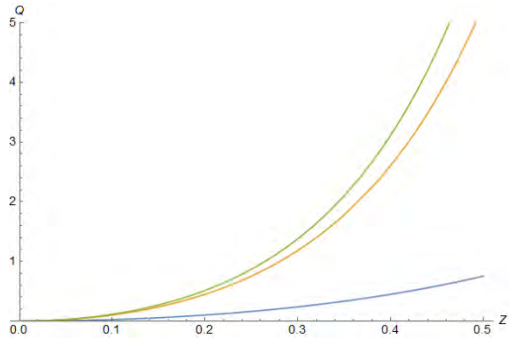


Fig. 6. Parámetro de Mandel para el caso negativo. $\alpha = -2\pi^2$(Línea roja); $\alpha = -9\pi^2/4$ (línea verde); $\alpha = -\pi^2/2$ (línea azul).

IV. Discusión

Las ecuaciones (1),(2) y (3) ciertamente satisfacen las relaciones de conmutación (4), (5) y (6). Para demostrarlas, resulta útil tener en cuenta las siguientes igualdades entre funciones cuyos argumentos son los operadores de ascenso, descenso y número:

$$[\hat{n}, f(\hat{n})] = 0 \tag{34}$$

$$f(\hat{n})\hat{a}^+ = \hat{a}^+ f(\hat{n}+1) \tag{35}$$

$$\hat{a} f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1)\hat{a} \tag{36}$$

Las relaciones de conmutación ciertamente son similares a las de las álgebras SU(2) y SU(1,1), aunque difieren en la constante α. Sin embargo, es posible vincular los operadores aquí definidos con los de ambas álgebras, mediante las siguientes expresiones:

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\widehat{J_-}\ ;\ \widehat{A}^+ = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\widehat{J_+}\ ;\ \widehat{M} = \frac{\alpha}{2}\widehat{J_z} \tag{37}$$

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\widehat{K_-}\ ;\ \widehat{A}^+ = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}\widehat{K_+}\ ;\ \widehat{M} = -\frac{|\alpha|}{2}\widehat{K_0} \tag{38}$$

Con ellos, la descomposición puede ser efectuada. Respecto al artículo original, nuestro resultado difiere en el hecho de que para (13)-(16) el autor señala que es β el argumento, y no $|\beta|$. Sin embargo, una revisión de la expresión para la descomposición, así como de los conmutadores definidos, nos llevó a deducir que el argumento debe ser $|\beta|$.

Respecto a la prueba del desplazamiento del estado base, es conveniente recordar que

$$\hat{a}|0> = 0 \tag{39}$$

$$f(\hat{n})|n> = f(n)|n> \tag{40}$$

$$\hat{a}^+|n> = \sqrt{n+1}|n+1> \tag{41}$$

Así como notar la conveniencia de, al momento de descomponer el operador en tres exponenciales, permitir que el operador de descenso sea el primero en actuar sobre el estado base.

Esencialmente, (25) y (26) poseen la misma estructura que las ecuaciones que el autor señala en su artículo, sin embargo, su definición de la función auxiliar $f(N,k)$ tiene por argumento el valor de *2N* en vez de *2N+1*. El resultado de esta diferencia se traduce en una variación importante de la distribución de probabilidad, como lo ilustran las Figs. 1 y 2 del presente trabajo al ser comparadas con las Figs. del artículo original.

En su Figura 2, el autor muestra las gráficas del campo de distribución de amplitudes de $|Z, \alpha^{\pm}>$ para 2N=30 canales y los casos $\alpha^{\pm} = \pm 0.02, \pm 0.2, \pm 2$. Debido a que la densidad de probabilidad es constante, debe ser esta una cantidad preservada, algo que claramente no ocurre en sus gráficas (debe aclararse que en el caso de $\alpha < 0$, por tratarse de funciones exponenciales, se espera que el comportamiento sea divergente. Sin embargo, en sus gráficos desaparece en menos de 10 canales, algo que no debería ocurrir). Sin embargo, en las Fig. 1 y 2 ilustramos las correctas distribuciones de probabilidad. Para el caso en que $\alpha > 0$, se ve reflejada la reconstrucción esperada, mientras que para $\alpha < 0$, la divergencia ocurre con mayor lentitud, permitiendo que aun en la guía 20 sea notoria la intensidad.

De manera general, disponemos de 2N+1 canales en los cuales iniciar la propagación. Tanto el autor del artículo original como en el presente trabajo (Figs. 1 y 2) se representa el inicio en el canal cero. Adicionalmente, se efectuó la simulación para el inicio en el canal 2, resultando de ello la Fig. 3: la información se distribuye en una secuencia que avanza según el caso original, y también hay propagación en los dos canales anteriores, donde la secuencia en que avanza es paralela a la esperada. Permitiendo reconstrucción en los puntos máximos y mínimos de la distribución.

Respecto a los parámetros de Mandel, los argumentos son distintos por un factor de ½. Esta omisión por parte del autor original proviene de su definición de estado coherente, en donde este factor está presente. Sin embargo, la evaluación minuciosa del álgebra hecha por los autores del presente trabajo permite descartar dicho factor. Es relevante observar que en su artículo original, las gráficas del parámetro de Mandel no están de acuerdo con su definición de estado coherente, pero sí con la aquí expuesta.

V. Conclusiones

Se estudió la generalización de la representación de Holstein-Primakoff presentada por [1], y al revisar las ecuaciones del artículo se encontraron errores respecto a los argumentos de las funciones. Además, al analizar (25), es decir, la representación de la evolución del sistema respecto al parámetro Z, se encontraron diferencias significativas en los coeficientes de la relación de recurrencia, lo cual impactó directamente al momento de efectuar la simulación numérica de la distribución de probabilidad para una guía de ondas de 30 canales. Adicionalmente a las modificaciones a sus resultados, se graficó la distribución de probabilidad para el caso en que el canal excitado es el segundo, y en el caso en que aparece un solitón en la distribución.

De la distribución dada, podemos encontrar tanto sus valores como sus funciones propias. Por ser no lineal, las funciones propias se llaman solitones, uno de los cuales se muestra en la figura 4, en donde desplegamos la interacción con la distribución original. Como resultado de ello, la distribución original experimenta un desfase entre los canales 10 y 25, y en contraste con la situación independiente, no se reconstruye en $Z=0.5$.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo de la Escuela Superior de Física y Matemáticas por la apertura del curso de Óptica Cuántica, Unidad de Aprendizaje con enfoque moderno que nos acerca a las nuevas tecnologías y los artículos más recientes en la rama de la Mecánica Cuántica.

Referencias

[1] S. Dehdashti, R. Li, J. Liu, F. Yu, H. Chen, “Realization of non-linear coherent states by photonic lattices”, AIP Advances 5,067165 (2015).

[2] U. Leonhardt, “Essential Quantum Optics: From Quantum Measurements to Black Holes”, Cambridge University Press, 2010.

[3] S. Dehdashti, A. Mahdifar, R. Roknizadeh, “Analogue special and general relativity by optical multilayer thin films: The Rindler space case”, J. Mod. Opt. 60, 233 (2013).

[4] A.Zúñiga-Segundo, B.M. Rodriguez-Lara, C. Fernández, J. David, and H.M. Moya-Cessa, “Jacobi ptotonic lattices and their SUSY partners”, Opt. Exp. 22, 987(2014).

[5] A. Pérez-Legia, H. Moya-Cessa, F. Soto-Eguibar, O. Aguilar-Loreto and D.N. Christodoulides, “Clasical analogues to quantum nonlinear coherent states in photonic lattices”, Opt. Comm, 284, 1833 (2011).

[6] A.A. Sukhorukov, A.S. Solntsev, and J.E. Sipe, “Classical simulation of squeezed light in optical waveguide arrays”, Phys. Rev. A 87, 053823 (2013).

[7] S. Dehdashti, A. Mahdifar, R. Roknizadeh, “Coherent states of α-deformed Weyl-Heisenberg algebra”. Int. J. Geom. Method Mod. Phys 10, 1350014 (2013).

[8] G.P.Agrawal, R.W.Boyd, “Contemporary nonlinear optics”, Academic Press Inc, 1992.

ISSN: 2594-1011

Cálculo de la entropía de la interacción átomo-laser en estados puros

César Lara Cruz[1], Ángel David Reyes Manuel[2]
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[1]E-mail: cesar_lc206@hotmail.com [2]E-mail: adavid.reyman@gmail.com

Resumen —**La entropía ha sido un término acuñado usualmente a la termodinámica, sin embargo, una versión moderna de esta, es la entropía cuántica. En el presente trabajo se calculó la entropía de la interacción átomo-laser (átomo de dos niveles) para un estado puro partiendo del modelo de Jaynes-Cummings para dicha interacción.**

Palabras Clave – **Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, enredamiento, entropía**

Abstract — **Entropy is a commonly used term in thermodynamics, nevertheless, a modern version of it, is the quantum entropy. In the following, the entropy of interaction atom-laser (two-level atom) was calculated starting with Jaynes-Cummings model for coherent state.**

Keywords — **Jaynes-Cummings Hamiltonian, Entropy, Entanglement**

I. Introducción

Uno de los modelos más comunes para trabajar con la interacción de un campo cuantizado (luz) con la materia (átomo de dos niveles) es el modelo de Jaynes-Cummings, donde al aplicársele la aproximación de onda rotante se logra obtener el Hamiltoniano de interacción.

La entropía (S) en la mecánica cuántica fue introducida por John Von Neumann (1932) la cual resultó ser una de las herramientas más útiles para poder medir el enredamiento para estados puros y mezclados.

Considerando un sistema cuántico $\mathcal{S}$ compuesto de dos partes A y B, los cuales sus respectivos estados pertenecen a dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ con sus respectivas variables dinámicas, y, considerando las matrices de densidad para cada parte del sistema pueden ser escritas como:

$$\hat{\rho}_A = Tr_B\{\hat{\rho}\},$$

$$\hat{\rho}_B = Tr_A\{\hat{\rho}\},$$

donde $\hat{\rho}$ es la matriz de densidad del sistema.

II. Desarrollo

Para un átomo de dos niveles cuyos estados son $|e\rangle$ y $|g\rangle$ los cuales representan al estado base y excitado respectivamente, podemos escribir el Hamiltoniano de la interacción átomo-laser (de 2-niveles) como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (1)$$

al cual se le conoce como el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings; es uno de los modelos más sencillos para poder resolver de manera exacta la interacción de un campo cuantizado (luz) con la materia [1].

Empleando la aproximación de onda rotante, i. e., utilizando la transformación de onda rotante $\hat{T} = \exp[-i\omega t\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2}\right)]$, tal que:

$$|\psi\rangle = \hat{T}|\phi\rangle\,. \quad (2)$$

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger es:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle = \hat{H}_I|\phi\rangle\,, \quad (3)$$

donde $\hat{H}_I$ es el Hamiltoniano de la interacción: $\hat{H}_I = \frac{1}{2}\delta\hat{\sigma}_z + g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)$ con g es la frecuencia de Rabi y $\delta = (\omega_0 - \omega)$ es la desintonía (detuning).

Por otra parte, podemos expresar el propagador de evolución temporal unitario $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}_I}$como:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) & -i\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})\hat{V} \\ -i\hat{V}^\dagger\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) & \cos(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

con $\hat{V}$ y $\hat{V}^\dagger$ los Operadores de London y $\delta = 0$.

Considerando $|\alpha\rangle$ un estado coherente, podemos escribir a un estado puro $\hat{\rho}$ como $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Así, un estado puro (coherente) en el estado excitado se escribe de la siguiente forma:

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle\langle\alpha| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5)$$

La evolución temporal de $\hat{\rho}$ se escribe como:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^{\dagger}(t) , \quad (6)$$

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |c\rangle\langle c| & |c\rangle\langle s| \\ |s\rangle\langle c| & |s\rangle\langle s| \end{pmatrix} , \quad (7)$$

donde hemos definido:

$$|c\rangle = \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}})\,|\alpha\rangle \quad , \quad (8)$$

$$|s\rangle = -i\hat{V}^{\dagger}\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}})\,|\alpha\rangle \ . \quad (9)$$

Entonces el valor esperado para todo tiempo (en mecánica cuántica) es:

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{A}\}. \quad (10)$$

Trazando la matriz de densidad en el campo, conmutando y utilizando la relación de completez llegamos a:

$$\hat{\rho}_a(t) = Tr_c\{\hat{\rho}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\langle k|\begin{pmatrix} |c\rangle\langle c| & |c\rangle\langle s| \\ |s\rangle\langle c| & |s\rangle\langle s| \end{pmatrix}|k\rangle,$$

$$= \begin{pmatrix} \langle c|c\rangle & \langle s|c\rangle \\ \langle c|s\rangle & \langle s|s\rangle \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde de manera explícita cada entrada de la matriz, se encuentra en el apéndice.

En la mecánica cuántica, la entropía está definida como [2]:

$$S = \langle\hat{S}\rangle = -\langle\ln\hat{\rho}\rangle = -Tr\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} . \quad (12)$$

Utilizando el teorema de Araki-Lieb [3]:

$$S_{átomo} = S_{campo} \ , \quad (13)$$

donde esto solamente será válido para estados puros.

Entonces, de manera similar a (6):

$$\hat{\rho}_a(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \hat{R}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\hat{R}^{\dagger} = \hat{R}\hat{\rho}_{\lambda}\hat{R}^{\dagger} , \quad (14)$$

por lo tanto:

$$S_a = -Tr\{\hat{\rho}_{\lambda}\ln\hat{\rho}_{\lambda}\},$$

$$S_a = S_c = -\lambda_1\ln\lambda_1 - \lambda_2\ln\lambda_2 , \quad (15)$$

donde λ_1 y λ_2 son, los eigenvalores de ρ, así:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (\rho_{11}\rho_{22} - |\rho_{21}|^2)} , \quad (16)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - (\rho_{11}\rho_{22} - |\rho_{21}|^2)} \ . \quad (17)$$

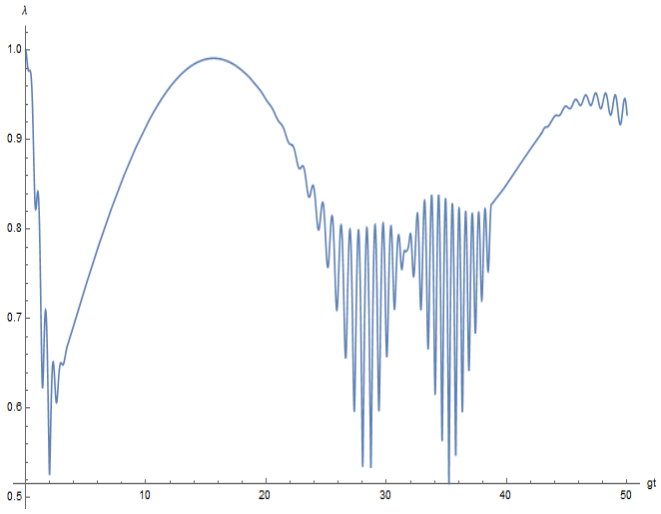


Fig. 1 Gráfica para el eigenvalor λ_1 para $\alpha = 5$

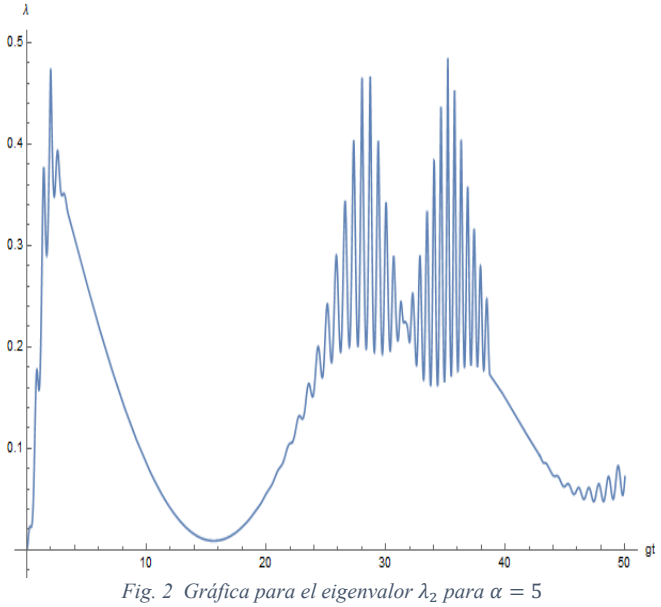


Fig. 2 Gráfica para el eigenvalor λ_2 para $\alpha = 5$

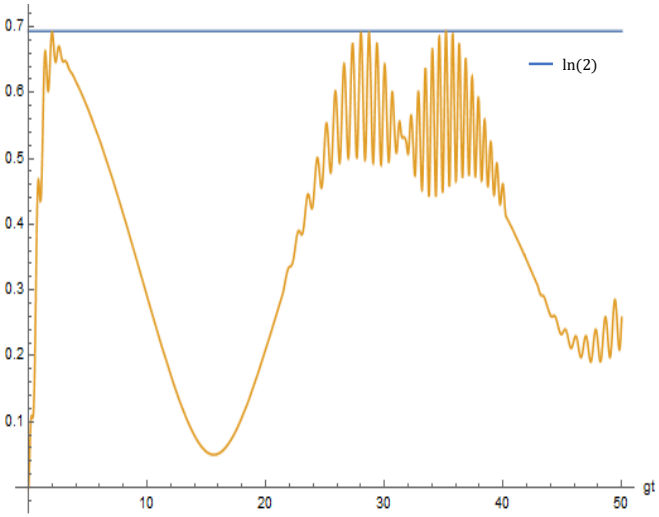


Fig. 3 Gráfica de la entropía para $\alpha = 5$ donde la línea constante indica para que valores se obtiene la máxima entropía (estado de máximo enredamiento)

Nótenos que para el estado de máximo enredamiento (S_{max}) es:

$$S_{max} = \ln(2),$$

cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

IV. Conclusiones

Con el desarrollo del formalismo de la matriz de densidad es posible extender las herramientas de la mecánica estadística al ámbito cuántico. Con esto fue posible calcular la entropía cuántica de la interacción átomo-laser en estados puros partiendo del modelo de Jaynes-Cummings. Como se observa en la Fig.3, la entropía tiene un valor inicial cero, esto no es así para estados mezclados [4], en los que el valor inicial es mayor a cero, por lo tanto, la entropía es también un indicador de si la interacción es de estados puros o mezclados, así como su grado de enredamiento.

Apéndice

Calculo de las entradas de la matriz $\hat{\rho}(t)$:

$$\langle c|c\rangle = \left\langle \alpha \left| cos^2\left(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}\right)\right| \alpha \right\rangle$$

$$= \langle\alpha| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} cos^2 gt\sqrt{\hat{n}+1}\,|n\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2} cos^2 gt\sqrt{n+1}\langle m|n\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!} cos^2 gt\sqrt{m+1}$$

De manera análoga:

$$\langle s|s\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!} sen^2 gt\sqrt{m+1}$$

Ahora para $\langle s|c\rangle$:

$$\langle s|c\rangle = \langle\alpha|i\sin(gt\sqrt{\hat{n}+1})\hat{V}\cos(gt\sqrt{\hat{n}+1})\,|\alpha\rangle$$

Como $\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a} = \hat{a}\frac{1}{\sqrt{\hat{n}}}$ entonces:

$$\langle s|c\rangle =$$
$$= i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sin\left(gt\sqrt{n}\right)\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{\hat{n}}}\,\langle\alpha|\hat{a}|n\rangle$$

$$= i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2} \sin\left(gt\sqrt{n}\right)\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\langle m|n-1\rangle$$

$$= i\alpha e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!\ \sqrt{m+1}} \sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+2}\right)$$

De manera similar:

$$\langle c|s\rangle = -i\alpha^* e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!\ \sqrt{m+1}} \sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+2}\right)$$

Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Arturo Zúñiga Segundo por la oportunidad de realizar el servicio social con él, así como toda la ayuda que nos ha brindado durante el curso de óptica cuántica. De igual forma agradecemos a la Escuela Superior de Física y Matemáticas por realizar eventos como la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas para que con esto comencemos nuestra travesía en el mundo de la investigación.

Referencias

[1] *R. Juárez-Amaro, A. Zúñiga-Segundo, H. M. Moya-Cessa,* Several Ways to Solve the Jaynes-Cummings Model. Appl. Math. Inf. Sci. 9, No. 1, 1-5 (2015)

[2] H. M. Moya-Cessa, F. Soto-Escobar. Introduction to Quantum Optics. Rinton Press. Inc.

[3] H. Araki, E. H. Lieb "Entropy Inequalities" Commun. math. Phys. 18, 160—170(1970) © by Springer-Verlag 1970

[4] *R. Juárez-Amaro, A. Zúñiga-Segundo, H. M. Moya-Cessa, O. Aguilar-Loreto*, Field´s Entropy in the Atom-Field Interaction: Statistical Mixture of Coherent States. Annals of Physics 379 (2017) 150-158

ISSN: 2594-1011

Optimización termodinámica de un motor irreversible usando la "función compromiso"

S. Levario-Medina[1], L.A. Arias-Hernández[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono: (55) 57 29 60 00 Ext. 52041 E-mail: sergio_lm_5106@hotmail.com, larias@esfm.ipn.mx

Resumen — **Muchos autores han mostrado que los modelos de motores térmicos fuera de equilibrio pueden someterse a procesos de optimización, los cuales implican un compromiso entre la potencia de salida del motor (P) y su disipación (Φ), surgiendo algunos regímenes óptimos de operación. Estos regímenes pueden alcanzarse mediante el uso de algunas funciones objetivo tales como la función ecológica, la función omega, la potencia eficiente o sus respectivas generalizaciones. En estas últimas se ha empleado a la "función compromiso" ($C_{P\Phi}$) como un criterio para medir la calidad del compromiso entre P y Φ, seleccionando así al parámetro de generalización de cada una de estas funciones. En este trabajo se muestra cómo la función $C_{P\Phi}$ puede ser usada como una función objetivo, y que las generalizaciones, bajo el criterio de la función compromiso son casos especiales de $C_{P\Phi}$. Este hecho se presenta para un convertidor de energía irreversible empleando el calor no compensado de Clausius e incorporando una fuga de calor.**

Palabras Clave – **Optimización, funciones objetivo, regímenes óptimos, función de compromiso.**

Abstract — **Several authors have shown that the engine models out-of-equilibrium can be subjected to optimization processes involving a trade-off between the output power of the engine (P) and its dissipation (Φ), arising some optimal regimens of operation. These operating regimes are achieved by using some objective functions such as ecological function, omega function or efficient power and their generalizations. For these last functions, the "compromise function" ($C_{P\Phi}$) has been used like a criterion to measure the quality of the commitment. Besides this function help us to choose the parameter of generalization of each of them. In this work we show how the function $C_{P\Phi}$ can be used directly as an objective function, and the three mentioned functions are special cases of $C_{P\Phi}$. This fact is presented here for an irreversible energy converter including the Clausius non-compensated heat and a heat leakage.**

Keywords — **Optimization, objective functions, optimal regimens, compromise function.**

I. INRODUCCIÓN

Cuando se menciona la palabra "optimizar", es posible considerar diferentes escenarios en los cuales llevar a cabo dicha acción. Todo dependerá de los objetivos que se pretendan alcanzar. Tal como S. Carnot escribe en "Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas aptas para desarrollar potencia" [1]:

"En la práctica nunca se debe de esperar aprovechar toda la potencia motriz de los combustibles. Las tentativas que se hicieran para aproximarse a este resultado serían más perjudiciales que útiles, porque harían olvidar otras consideraciones importantes. La economía de combustibles no es sino una de las condiciones que tienen que cumplir las máquinas de fuego; en muchas circunstancias, no es sino secundaria y debe con frecuencia ceder el paso a la seguridad, a la solidez, a la duración de la máquina, a la limitación del lugar que debe ocupar, al poco costo de su montaje, etc. Saber apreciar, en cada caso, en su justo valor, las consideraciones de conveniencia y de economía que pueden presentarse, saber distinguir y compensarlas todas entre sí convenientemente, con el fin de llegar por los medios más fáciles al mejor resultado, debe ser el principal don del hombre llamado a dirigir, a coordinar entre sí los trabajos de sus semejantes y a hacerlos concurrir hacia un fin útil de cualquier clase que sea".

En este trabajo, la idea de optimizar está enfocada hacia la mejora en el desempeño de los motores, los cuales pueden ser estudiados bajo las perspectivas de la Termodinámica Clásica de Equilibrio (TCE), la Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) o mediante la Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF). Siendo esta última, la rama de la termodinámica con la cual se analizan las implicaciones de usar a la "función compromiso", no como un elemento para fijar los diferentes parámetros de generalización de algunas funciones objetivo si no como una de ellas.

Dentro de la TTF, las funciones objetivo son una herramienta fundamental para su desarrollo. A través de estas, se puede realizar un estudio y caracterización de la forma en la que operan los diferentes convertidores de energía, más aún, se pueden encontrar condiciones para mejorar los resultados que se obtengan de estos. Sin

embargo, existe una cantidad relativamente pequeña de esta clase de funciones. La generalización de la función ecológica (E_G), propuesta en 1997 por F. Angulo-Brown y L.A. Arias-Hernández [2], es el resultado de este hecho. Para fijar el parámetro de generalización, en 2001 se utilizó a la "función compromiso" $(C_{P\Phi})$ [2,3]. Función que ha permitido caracterizar a la conocida "Función Ecológica Generalizada", que cumple con diferentes propiedades como la semisuma y el Corolario 75/25 [4] (con el que se obtiene un 75 % de potencia con un 25% de disipación con respecto al régimen de máxima potencia [5]). En 2006 y 2016, la "función compromiso" se volvió a empelar con el mismo objetivo sobre las funciones: Omega Generalizada (Ω_G) [6], y k–Potencia Eficiente $(P\eta_k)$ [7]. Obteniendo condiciones sobre sus respectivos parámetros de generalización que les permiten hacerse equivalentes con respecto a sus regímenes máximos, aun siendo funciones algebraicamente diferentes. Por otro lado, cuando se exploró la Zona Económica de Interés de un motor térmico (Z.E.I.) [7, 8, 9], se encontraron indicios de que la "función compromiso" (FC) es una función objetivo, cuyas propiedades son particulares.

En este trabajo se muestra como la FC es una función objetivo por sí misma. Para esto, se emplea el modelo desarrollado por Curzon y Ahlborn (C.A.) [3] que consiste en dos reservorios de temperatura (uno a temperatura T_1 y el otro a T_2, tal que $T_1 > T_2$); dos componentes irreversibles (conductancias térmicas α y β) y una máquina de Carnot reversible (producción de entropía cero) entre dos reservorios intermedios (a temperatura de trabajo T_{1t} y T_{2t}, donde $T_{1t} > T_{2t}$) tal como se muestra en la Fig. 1. Aunque en el modelo original de C.A. se considera una máquina de Carnot (operando con una cierta substancia de trabajo). Aquí se emplea el calor no compensado de Clausius [10] como una medida de las irreversibilidades que se dan dentro del ciclo interno, que en este caso es irreversible y, al igual que en el trabajo de C.A., se considera una ley de transferencia de calor tipo Newtoniana o lineal.

II. Metodología

Cualquier proceso que se lleva a cabo en la naturaleza tiene una duración finita, debido a esto en años recientes la TTF ha surgido como una herramienta, cuyo principal objetivo ha sido el desarrollo de modelos para los diferentes tipos de convertidores de energía. La mayoría de estos modelos se han propuesto en el contexto de la optimización cómo: la minimización de la entropía [11,12], la maximización de la potencia [3], minimización de costos [13, 14], etc. Uno de los modelos más famosos de la TTF para motores es el de Curzon y Ahlborn [3], donde la hipótesis de endorreversibilidad juega un rol muy importante. Lo cual les permitió obtener su ya conocida ecuación para la eficiencia.

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau}\,, \qquad (1)$$

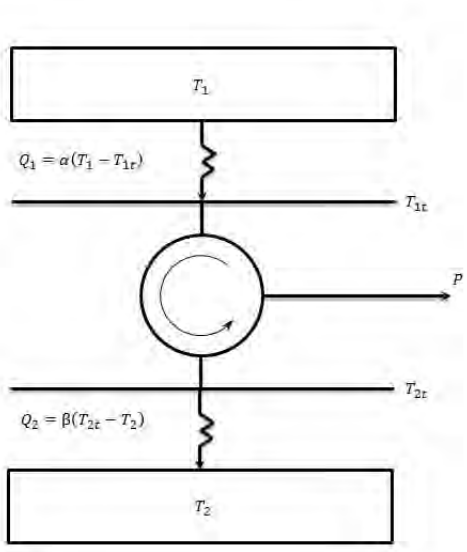


Fig. 1. Modelo de un motor endorreversible, propuesto por Curzon y Ahlborn (C.A.)

donde $\tau = T_2/T_1$ (con $0 < \tau < 1$). En 1985 De Voss mostró en [15] que un motor tipo Curzon-Ahlborn-Novikov (CAN) endorreversible tiene una eficiencia máxima dada por la ecuación (1). Este modelo es muy sensible a la ley de transferencia de calor que se maneje, y (1) sólo es válido cuando ésta es de tipo Newtoniana (Lineal). El motor que nosotros consideramos es muy parecido al modelo de C.A., con la diferencia que en este se incorpora un corto circuito entre los dos reservorios de temperatura e irreversibilidades internas. Esto se sustenta en el hecho de que, como Watt notó durante sus experimentos, los materiales de los que están construidos los motores tiene mucho que ver con el posible desempeño que éstos tengan, pues aquellos materiales que resultan ser efectivos para aislar la cámara de combustión, en realidad tienen poca resistencia a los esfuerzos que debe soportar un motor. Sin embargo, aquellos materiales que son capaces de soportar dichos esfuerzos, resultan conducir el calor [16] y por ende, lo disipan más. Con esto en mente, los flujos de calor que entran y salen de nuestro motor estarán dados por:

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_{1t}), \qquad (2a)$$
$$Q_2 = \beta(T_{2t} - T_2), \qquad (2b)$$
$$Q_{cc} = \delta(T_1 - T_2). \qquad (2c)$$

Cuando consideramos un modelo totalmente irreversible, donde la producción de entropía en el ciclo interno se mide mediante el calor no compensado de Clausius, es necesario partir de las ecuaciones (2a, 2b y 2c) para llegar a que estos flujos de calor se pueden rescribir como:

$$Q_1 = \alpha T_1(1 - a_h)\,, \tag{3a}$$
$$Q_2 = T_1\frac{\tau\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{a_c} - 1\right), \tag{3b}$$
$$Q_{cc} = T_{1\delta}(1 - \tau)\ , \tag{3b}$$

donde a_h es la temperatura reducida alta (T_{1t}/T_1), a_c es la temperatura reducida baja (T_2/T_{2t}), $\gamma = \alpha/\beta$ y τ como ya se ha definido anteriormente. Si consideramos un motor como el mostrado en la Fig. 2, de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, es posible escribir la entropía como:

$$\sigma_T = \sigma_a + \sigma_{st} \geq 0, \tag{4}$$

donde σ_T es la entropía total del sistema, σ_a es la entropía de los alrededores y σ_{st} es la entropía de la substancia de trabajo. Teniendo así que para el motor de la Fig. 2, las entropías pueden escribirse como:

$$\sigma_a = \frac{Q_2 + Q_{cc}}{T_2} - \frac{Q_1 + Q_{cc}}{T_1}, \tag{5a}$$
$$\sigma_{st} = \frac{Q_1}{T_{1t}} - \frac{Q_2}{T_{2t}} + \sigma_i = 0\,, \tag{5b}$$

donde σ_i es la entropía del ciclo interno. Además, las variables de proceso como la potencia, eficiencia y disipación están dados por:

$$P = Q_1 - Q_2, \tag{6a}$$
$$\Phi = (Q_2 + Q_{cc}) - \tau(Q_1 + Q_{cc})\,, \tag{6b}$$
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_{cc}}. \tag{6c}$$

Estas ecuaciones son importantes pues es a través de ellas que podemos describir el comportamiento de nuestro convertidor de energía.

Aquí hemos considerado que la substancia de trabajo opera en ciclos. El calor de entrada $(Q_e = Q_1 + Q_{cc})$ y de salida $(Q_s = Q_2 + Q_{cc})$ pueden escribirse a través de estas ecuaciones:

$$Q_e = T_1[\alpha(1 - a_h) + \delta(1 - \tau)], \tag{7a}$$
$$Q_s = T_1\frac{\alpha\tau - a_c[\alpha\tau - \gamma\delta(1 - \tau)]}{a_c\gamma}. \tag{7b}$$

De la ecuación (5b) es posible establecer una relación entre las temperaturas reducidas alta y baja , dada por:

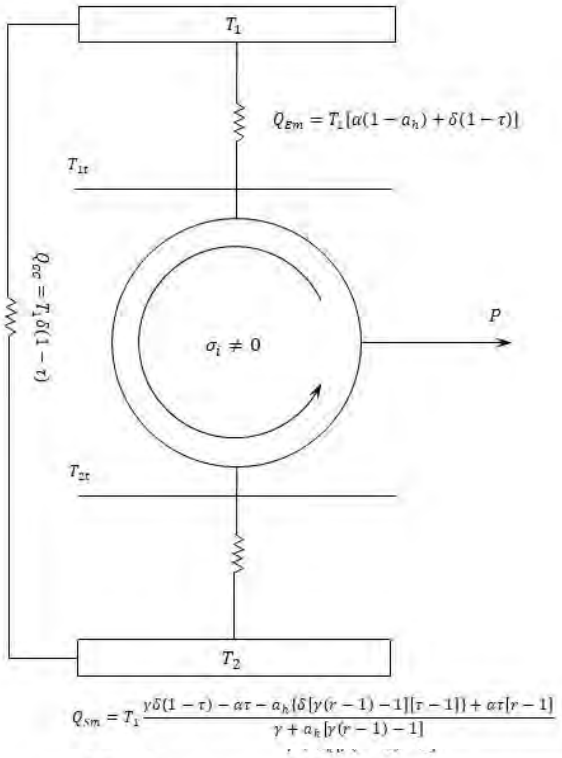


Fig. 2. Motor tipo CAN totalmente irreversible

$$a_c = \frac{a_h[1 + \gamma(a - r)] - \gamma}{a_h}, \tag{8}$$

donde $r = \sigma_i/\alpha$. Con la relación de la ecuación (8), el calor de salida puede escribirse como:

$$Q_s = T_1\frac{\gamma\delta(1 - \tau) - \alpha\tau - a_h\{\delta[\gamma(r - 1) - 1][\tau - 1] + \alpha\tau[r - 1]\}}{\gamma + a_h[\gamma(r - 1) - 1]}. \tag{9}$$

Con lo cual, la forma funcional de las variables de proceso será:

$$P = T_1\alpha\left\{1 - a_h + \frac{\tau[1 + a_h(r - 1)]}{\gamma + a_h[\gamma(r - 1) - 1]}\right\}, \tag{10}$$

$$\eta = \frac{\alpha\{1 - a_h\}\{\gamma + a_h[\gamma(r - 1) - 1]\} - \alpha\tau[1 - a_h(r - 1)]}{\{\gamma + a_h[\gamma(r - 1) - 1]\}\{\alpha[1 - a_h] + \delta[1 - \tau]\}}, \tag{11}$$

$$\Phi = T_1\frac{a_h^2\alpha\tau[\gamma(r - 1) - 1] + a_h\Phi_1 - \alpha\tau + \gamma[\delta(1 - \tau)^2 - \alpha\tau]}{\gamma + a_h[\gamma(r - 1) - 1]}, \tag{12}$$

donde

$$\Phi_1 = \delta[1 - \tau]^2[\gamma(r - 1) - 1] - \alpha\tau[1 + \gamma][r - 2]\}. \tag{12a}$$

Puede observarse en la Fig. 3 que, tanto la potencia como la eficiencia poseen una temperatura reducida alta que las maximiza. Dichas temperaturas reducidas altas son:

$$a_m^{mP} = \frac{\gamma + \sqrt{\tau}}{1 + \gamma(r-1)}, \quad (13)$$

$$a_h^{m\eta} = \frac{\alpha\tau + \gamma\{\alpha\tau(1-r) + \delta[1-\tau][\gamma(r-1)-1]\} - r_{m\eta}}{\{\gamma[r-1]-1\}\{\delta[\tau-1][\gamma(r-1)-1] + \alpha\tau[r-1]\}}, \quad (14)$$

con:

$$r_{m\eta} = \sqrt{\tau\{1-\gamma(r-1)\}\{r\tau\alpha^2 + \delta^2[1-\tau]^2[1+\gamma(1-r)] - \alpha\delta[1-\tau][\tau-1+r(\gamma-\tau)]\}} \quad (14a)$$

Estas temperaturas reducidas se obtienen de encontrar los máximos de la potencia y de la eficiencia. Si bien estas son variables de proceso, aquí las hemos empleado como funciones objetivo, esto es así pues ellas permiten realizar un buen compromiso entre los flujos de calor. En el caso de la potencia: entre los flujos de calor que entran y salen del motor; en el caso de la eficiencia, el compromiso se da entre la potencia y el flujo de calor que entra. Como es posible apreciar, existen funciones objetivo, como en el caso de la potencia, donde la relación entre sus variables de proceso es sencilla de ver, o como en el caso de la eficiencia, donde la relación no es tan clara, aun así, resulta ser una función objetivo y por tanto de nuestro interés. Recordando, que las funciones objetivo de nuestro interés son aquellas que posean un máximo. El cual caracterizara al régimen óptimo. Siendo así por el hecho de que pueden plantearse funciones que permitan alcanzar un objetivo distinto al de alcanzar una buena relación máxima entre las variables de proceso que la constituya.

En la búsqueda de las funciones objetivo que nos permitan caracterizar a los regímenes óptimos de operación, diferentes funciones objetivo han sido propuestas, funciones

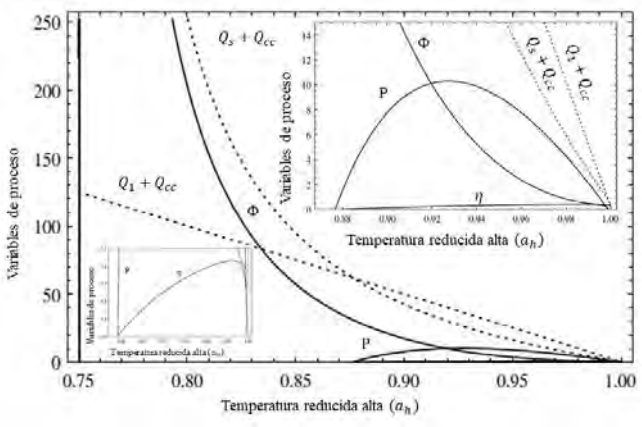


Fig. 3. Variables de proceso de un motor irreversible con corto circuito al considerar: $\boldsymbol{\alpha = 1\frac{MW}{K}}$, $\boldsymbol{\gamma = 3}$, $\boldsymbol{\tau = 0.5}$, $\boldsymbol{T_1 = 500K}$, $\boldsymbol{\delta = 0.001MW}$ y $\boldsymbol{r = 0}$.

como la función ecológica (E) [17], la función omega (Ω) [18], la potencia eficiente (P_η) [19] dadas por:

$$P_\eta = P\eta, \quad (15)$$

$$E = P - \Phi, \quad (16)$$

$$\Omega = E_{u,e} - E_{u,p}, \quad (17)$$

donde $E_{u,e}$ es la energía útil de entrada y a $E_{u,p}$ se le conoce como energía útil perdida. Estas se definen como:

$$E_{u,e} = E_u - z_{min}E_e, \quad (18)$$

$$E_{u,p} = z_{max}E_e - E_u. \quad (19)$$

E_e es la energía de entrada, E_u es la energía útil y z el rendimiento del convertidor definido por:

$$z = \frac{E_u}{E_e}. \quad (20)$$

En el caso del motor, la energía útil es la potencia, la energía de entrada es el flujo de calor que entra al motor, el rendimiento es la eficiencia. El rendimiento mínimo es cero y el máximo sería la eficiencia evaluada en el régimen de máxima eficiencia.

Dada la dificultad que existe para poder plantear funciones objetivo, que permitan caracterizar modos de operación óptimos. En 1997 se plantea la generalización de la función ecológica [2,3], función que fue definida como:

$$E_G = P - \epsilon\Phi. \quad (18)$$

Esta función objetivo da lugar a un conjunto de funciones objetivo, cada una de ellas con características propias [9]. Sin embargo, con el propósito de seleccionar a la "mejor" de ellas, es que se propone una función auxiliar que fue llamada "función compromiso" [2,3], definida como:

$$C_{P\Phi} = \frac{P^{mE_G}}{P^{mP}} - \frac{\Phi^{mE_G}}{\Phi^{mP}}, \quad (19)$$

P^{mE_G} y Φ^{mE_G} representan a la potencia y a la disipación evaluadas en el régimen de máxima generalización ecológica. De forma similar, el súper índice mP representa al régimen de máxima potencia. Esta función, permitió seleccionar un épsilon particular, el cual fue $1/\sqrt{\tau}$ (para un modelo endorreversible) y mediante el que se pudo

establecer a la ecológica generalizada (E_g) [3], una función que permite alcanzar un 75% de la potencia con respecto al régimen de máxima potencia, con un 25% de disipación con respecto al régimen antes mencionado [2,3,4]. En 2006 se propone a la generalización de la función omega [6], dada por:

$$\Omega_G = E_{u,e} - \lambda E_{u,p}. \tag{20}$$

En donde se empleó un método similar al que se usó con la generalización de la ecológica para fijar al parámetro λ. En 2016 se planteó la generalización de la potencia eficiente, a la cual se le llamo k-Potencia Eficiente [7], definida como:

$$P\eta_k = P\eta^k. \tag{21}$$

Aunque en 2016 [7] se encontraron más usos para los parámetros de $\epsilon, \lambda\ y\ k$ de estas tres funciones generalizadas, a esta nueva función objetivo también se le aplicó la función compromiso, tal como a las generalizaciones de la función omega y ecológica. Encontrando así que las tres generalizaciones se hacían equivalentes al seleccionar sus parámetros de generalización a través de la función compromiso (Fig. 4). Además, en el trabajo realizado en 2016 [7], se encontraron condiciones sobre los tres parámetros de generalización con el propósito de caracterizar una infinidad de modos de operación óptimos, y así caracterizar una zona específica de operación del motor conocida como Zona Económica de Interés (ZEI)[7,8,9]. Entre ellos el de la ecológica generalizada.

III. Resultados

Al considerar a la función compromiso como una

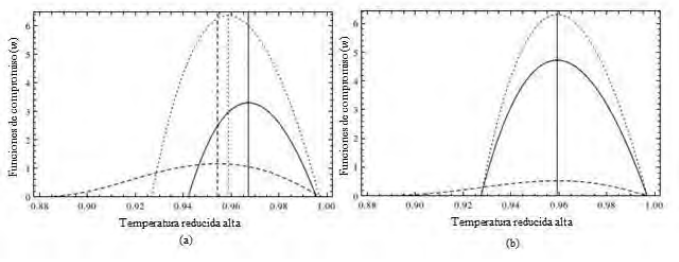


Fig. 4. Aquí mostramos la forma de: la k-Potencia Eficiente (línea discontinua), la generalización de la ecológica (línea sólida) y la generalización de la función omega (línea punteada), tomando los parámetros $\alpha = 1\frac{MW}{K},\ \gamma = 3,\ \tau = 0.5,\ T_1 = 500K,\ \delta = 0.001MW\ y\ r = 0.001$ y en (a) $\epsilon = \lambda = k = 2,$ y en (b) $\epsilon = 1.2926,\ \lambda = 2.06250\ y\ k = 2.8174,$ valeres que se obtuvieron tal como se describe en [6].

función de la temperatura reducida alta (a_h). Se tiene a $C_{P\Phi}$ de la forma:

$$C_{P\Phi} = \frac{P(a_h)}{P^{mP}} - \frac{\Phi(a_h)}{\Phi^{mP}}, \tag{22}$$

Es posible mostrar que esta es una función objetivo por sí misma. Bajo el modelo totalmente irreversible, deberemos usar la definición de la ecuación (22) con la forma funcional de la potencia y la disipación dada por las ecuaciones (10) y (12) respectivamente, teniendo así que la función compromiso será de la forma:

$$C_{P\Phi} = \frac{[\gamma(r-1)-1][\tau-1][\gamma + a_h\{\gamma(r-1)-1\}]n_c}{\{\gamma + a_h[\gamma(r-1)-1]\}\left\{r[\gamma+\tau] - \left[\sqrt{\tau}-1\right]^2\right\}d_c}, \tag{23}$$

dónde:

$$d_c = \{\delta[\tau-1]^2[\gamma(r-1)-1] - \sqrt{\tau}\alpha[1 + (r[1+\gamma]-2) + \tau]\}, \tag{23a}$$

y

$$n_c = \gamma\delta(\tau-1) + \sqrt{\tau}\left[\alpha\sqrt{\tau} + \delta\tau - (\alpha-\delta)\right] + a_h\left[\delta(\tau-1)(\gamma[r-1]-1) + \alpha\sqrt{\tau} + \alpha\tau(r-1)\right]. \tag{23b}$$

Tal como puede observarse en la Fig. 5, esta función posee una temperatura reducida alta que le permite alcanzar su máximo y con ello un régimen de operación "óptimo". Dicha temperatura es:

$$a_h^{mC_{P\Phi}} = \frac{1}{1-\gamma(r-1)}\left\{\gamma + \sqrt{\frac{\tau\{\delta[\tau-1][\gamma(r-1)-1] - \alpha[r\gamma+\sqrt{\tau}-1]\}}{\delta[\tau-1][\gamma(r-1)-1] + \alpha[\sqrt{\tau}+\tau(r-1)]}}\right\}, \tag{24}$$

que es precisamente la misma temperatura reducida alta, que permite caracterizar a la función ecológica generalizada en este modelo, o a cualquiera de las otras dos generalizaciones, cuando se selecciona su respectivo parámetro de generalización mediante la función compromiso (al emplearse de forma análoga a como se describió en la sección anterior, ecuación 19).

IV. Discusión

Dentro de la TTF las funciones objetivo son importantes porque permiten caracterizar modos "óptimos"

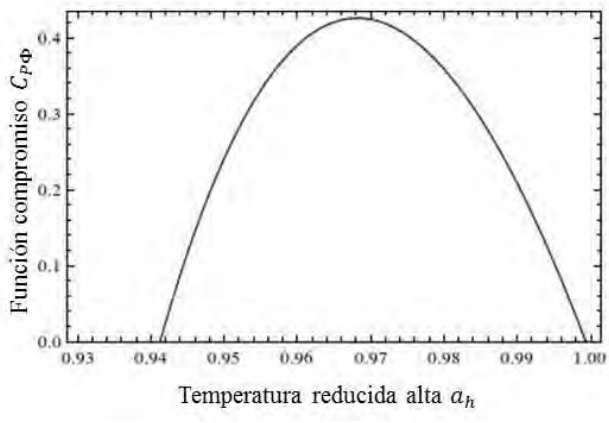


Fig. 5. Comportamiento de la función compromiso en función de su temperatura reducida alta cuando se considera a: $\alpha = 1\frac{MW}{K}$, $\gamma = 3$, $\tau = 0.5$, $T_1 = 500K$, $\delta = 0.001MW$ y $r = 0.001$

de operación. Si bien el método para encontrar estos puntos no es complicado, el plantear las funciones si lo es, pues como se ha podido apreciar, existen funciones muy sencillas como la potencia o muy complejas como el caso de la función omega, en donde la relación que nos permite considerarla una función objetivo no es fácil de ver. Algo similar pasa con la función compromiso, pues hasta ahora, se había utilizado como un criterio para seleccionar a la que se creía era la mejor de las fusiones ecológicas. Sin embargo, el hecho de que posea una temperatura reducida alta que la maximice, le permitirá tener el estatus de función objetivo (en el contexto de nuestro interés). Además, esta temperatura característica no es cualquier temperatura, sino que es la temperatura reducida alta que se consideraba propia de la ecológica generalizada [3]. Esto es importante pues resulta que esta función no requiere de ningún paso extra para su caracterización y nos permite llegar a un modo de operación óptimo nuevo.

Bajo las condiciones adecuadas ($r = 0$ y $\delta = 0$), la función compromiso será quien exhiba las características atribuidas a la ecológica generalizada y otras dos funciones (omega generalizada y k-potencia eficiente) cuyos parámetros de generalización se ha fijado mediante la función aquí estudiada.

V. Conclusiones

Como se ha podido apreciar en este trabajo. Resulta que la función compromiso es una función objetivo, no un elemento más mediante el cual poder seleccionar un parámetro de generalización. Como ya se ha mencionado, hasta hace poco se pensaba que la ecológica generalizada era aquella función que cumplía, en el caso del modelo endorreversible con el corolario 75 – 25 (75 % de potencia y 25% de disipación con respecto al régimen de máxima potencia) [4], pero, dado que la temperatura reducida alta que maximiza a la función compromiso es la misma que la de la ecológica generalizada, tendremos en realidad, que la función que cumple con el corolario es la función compromiso. Esto es así, debido a que, como se explica en el trabajo de 2016 [7], los parámetros de generalización permiten recorrer cualquier punto de la curva potencia vs eficiencia (curva donde se pueden apreciar los modos de operación a los que un motor puede acceder). Si consideramos a la generalización de la ecológica, cuando épsilon toma el valor de 1, recuperamos al régimen de máxima ecológica, cuando épsilon es 0 se puede hacer que el régimen de máxima generalización ecológica sea equivalente al régimen de máxima potencia. Algo similar ocurre con cualquiera de las otras generalizaciones y con cualquier otro punto de la curva potencia vs eficiencia. Dado que la ecológica generalizada resulta de haber dado condiciones sobre épsilon, para hacer a su modo óptimo de operación equivalente con el de la función compromiso. Será $C_{P\Phi}$ quien caracterice ha dicho modo de operación.

Referencias

[1] S. Carnot, *"*Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las maquinas aptas para desarrollar esta potencia*"*, 1976, IPN, México.
[2] L.A. Arias–Hernández and F. Angulo–Brown, "A general property of endoreversible thermal engienes", J. Appl. Phys. 81, 2973 (1997).
[3] L.A. Arias-Hernández and F. Angulo Brown, Reply to ""Comment on "A general property of endorreversible thermal engienes"", J. Appl. Phys. 89,1520 (2001).
[4] L. A. Arias-Hernández, M. A. Barranco and F. Angulo Brown, "Comparative analysis of two ecological type modes of performance for a simple energy converter"*, J. Ener. Inst.* 82, 223 (2009).
[5]F.L.Curzon and B.Ahlborn, "Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output", Am. J. Phys., 43, 22 (1975).
[6] L. Partido-Torrez , "Aplicación de los criterios omega y ecológico generalizados a diferentes convertidores de energía", Tesis de Maestría, ESFM-IPN, México (2006).
[7] S. Levario-Medina , "Estudio del desempeño energético de un motor térmico operando a potencia eficiente generalizada", Tesis de maestría, ESFM-IPN, México (2016).
[8] S. Levari-Medina, L. A. Arias-Hernández, "Energética de un motor no endorreversible trabajando a diferentes regímenes de operación ", Memorias del XXXI congreso nacional de termodinámica, Durango, Dgo. (2016).
[9] S. Levari-Medina, L. A. Arias-Hernández, "Zona económica de interés de un convertidor de energía", Memorias del XXI Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, Distrito Federal, D.F. (2016).
[10] R. Clausius, "The mechanical theory of heat", (Bibliobar, 2009).
[11] A. Bejan,"Entropy generation minimization", (CRC Press,1996).
[12] A. Bejan, "Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes", J. Appl. Phys., 79,1191 (1996).
[13] N.C. Bera, S. Bandyopadhyay , "Effect of combustion on the economic operation of endoreversible Otto and Joule-Brayton engine", Int. J. Energy Res., 2, 249 (1998).
[14] S. Bandyopadhyay , N.C. Bera, S. Bhattacharyya , "Thermoeconomic optimization of combined cycle power plants", Energy Convers Mgmt., 4, 359 (2001).
[15] A. De Vos, " Efficiency of some heat engines at maximum power conditions ", Am. J. Phys., 53, 570(1985).
[16] D.S.L Cardwell, "From Watt yo Clausius the rise of thermodynamics in the early industrial age"; (1ª edición, Cornell University Press, 1971).

[17] F. Angulo-Brown, “An ecological optimization criterion for finite-time heat engines”, J. Appl. Phys., 69, 7465 (1991).
[18] A. Calvo-Hernández, A, Medina, J.M.M. Roco, J.A. White and S. Velasco. “Unified optimization criterion for energy convertes”. Phys. Rev. E., 63, 037102-1 (2001).
[19]] T. Yilmaz, “A new performance criterion for heat engines: efficient power”, J. Energy. Inst. 79, 38 (2006).

ISSN: 2594-1011

Verificación de la ley general de los gases ideales mediante medidas de corriente en un proceso de electrolisis

José Antonio Peralta y Porfirio Reyes
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono 5729-6000 Ext. 55007 E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

Resumen— **Se presenta en este trabajo la comparación de 2 procedimientos para medir el número de partículas de un gas bajo ciertas condiciones de presión, temperatura, volumen y número de moles. En uno de ellos hacemos uso de la ley general de los gases ideales, en el otro la carga transportada en un proceso de electrolisis aplicado a una solución de bicarbonato de sodio. Esta sustancia en solución se ioniza y la reacción que se efectúa en uno de los electrodos genera hidrógeno molecular. Puesto que se requieren 2 electrones por cada molécula formada la carga total transportada, que se mide con un programa específicamente elaborado para este fin, nos permite calcular el número de moléculas formadas. Finalmente se compara el número obtenido por ambos métodos.**

Palabras Clave – **Ley general de los gases ideales, número de moléculas, electrolisis**.

Abstract — **The comparison of 2 procedures to measure the number of particles of a gas under certain conditions of pressure, temperature, volume and number of moles is presented in this paper. In one of them we make use of the general law of ideal gases, in the other the load transported in an electrolysis process applied to a solution of sodium bicarbonate. This substance in solution is ionized and the reaction that takes place in one of the electrodes generates molecular hydrogen. Since 2 electrons are required for each molecule formed, the total transported electric charge, which is measured with a program specifically developed for this purpose, allows us to calculate the number of molecules formed. Finally, the number obtained by both methods is compared.**

Keywords — **General law of ideal gases, number of molecules, electrolysis.**

I. Introducción

A la fecha no se hace en nuestra escuela ninguna práctica cuyo objetivo sea el medir el número de partículas contenidas en un gas a determinadas condiciones de presión P, volumen V y temperatura T. En realidad hacer esta práctica es factible recurriendo a la ley general de los gases ideales. Pero una vez calculado este número, imposible de visualizar, surge la pregunta de si es posible corroborarlo por métodos que no sean los de la termodinámica. La electrolisis es otra técnica alternativa y también es factible de llevarse a la práctica en los laboratorios de los primeros semestres ya sea de Física II o Física III. Aplicar un segundo método a este tipo de cálculo es útil desde el punto de vista pedagógico ya que, tal como ocurre con otras propuestas en el mundo de la ciencia, una ley adquiere más veracidad mientras más se la someta a prueba con diferentes técnicas; en este aspecto del método científico se puede hacer énfasis a los alumnos al hacer esta práctica.

Que la materia, y en particular los gases están compuestos por partículas muy pequeñas es un punto que ha estado en discusión desde la época de los griegos, así es que no está demás hacer un repaso histórico sobre este tema.

II. Antecedentes Históricos

En el comienzo de la era industrial entre otras ramas de la producción se dio una gran explotación de las minas, la minería se desarrolló a tal nivel que llegó un momento en que la excavación se topó con el problema de los mantos freáticos, surgió entonces el problema de cómo desalojar el agua que inundaba las minas, y es así que se propusieron varias técnicas para solucionar este problema [1,2].

Si un recipiente se llena con vapor de agua, al enfriarse súbitamente se condensa el vapor y baja la presión dentro del recipiente. Si este se conecta con un contenedor agua que esté en un nivel más bajo el agua será absorbida. Esta propuesta fue patentada y aplicada a nivel industrial; por el mecánico inglés Thomas Savery [1,2] quien llevó a la práctica una máquina que funcionaba en ciclos ofreciendo así a la industria minera una forma de desaguar las minas. Luego de Savery Watt inventó una máquina que funcionaba también con la expansión y contracción de un volumen de vapor, pero con una capacidad de funcionamiento más versátil que iba más allá de la pura extracción del agua [2]. **Con ello dio comienzo el estudio por parte no solo de los técnicos sino de los científicos del comportamiento térmico del vapor en términos de su volumen, de su presión, de su temperatura y de la cantidad de vapor.**

Boyle y Mariotte establecieron que la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente, cuando la temperatura es constante [3]. Por otra parte Gay Lussac así como Charles y Dalton encontraron que un gas se expande en forma proporcional a su temperatura si se mantiene constante la presión [3,4]. Estos hallazgos culminaron con una formulación completa

del comportamiento de los gases que se conoce como la ley general de los gases ideales: PV=nRT [2, 3, 4] en donde P es la presión, V el volumen, n el número de moles del gas, R la constante universal de los gases y T la temperatura en grados Kelvin.

En contra de los estudiosos que afirmaban la continuidad de la materia, la formulación de la ley de los gases afirma de manera implícita la existencia de las partículas, ya que el número de moles solo se puede hallar suponiendo que las sustancias están compuestas de partículas elementales a las que se dio el nombre de átomos o de moléculas por investigadores como Bernoulli, Dalton y Avogadro [2, 3, 4]. Posteriormente, para tratar de deducir de una manera teórica más rigurosa la ley general de los gases ideales, se propuso una explicación mecánica analizando la dinámica de las supuestas partículas contra las paredes del recipiente que contenía al gas, de esta manera se llegó a establecer que la energía de las partículas era función exclusiva de la temperatura; luego de ello Maxwell propuso una distribución estadística de las velocidades de las partículas [5], finalmente Boltzmann no solo dedujo de manera más rigurosa esta distribución sino que encontró que en un estado de equilibrio termodinámnico esta distribución era la única posible al margen de las condiciones iniciales del gas. Y no solo eso, sino que logró dar una expresión de la entropía en términos estadísticos [5].

En tanto no hubiese una prueba experimental de que, en efecto, los gases y la materia en general estaban compuestos de partículas las conclusiones del análisis mecánico quedaban como solo una hipótesis. Einstein aportó la primera evidencia de la existencia de partículas al desarrollar el análisis del movimiento browniano [6], posteriormente se construyeron dispositivos mecánicos para medir las velocidades de salida de las partículas de un gas con los cual no solo se comprobó de manera tangible su existencia, sino que la misma distribución de Maxwell-Boltzmann fue verificada con gran exactitud [7].

Luego de esta breve introducción histórica, en este trabajo se ofrece, especialmente para los alumnos de primeros semestres de la carrera de Física, una forma accesible de medir el número de partículas que conforman un gas a partir de medidas de corriente y carga en un proceso de electrolisis, y luego comparar este número con el que indica la ley general de los gases a partir de medidas de volumen, presión y temperatura.

III. Método experimental

Generación de hidrógeno molecular mediante electrolisis

La electrolisis consiste en disolver una sustancia ionizable en agua de tal forma que al estar en solución uno de sus componentes adquiera carga positiva y el otro componente carga negativa. Posteriormente al aplicar un campo eléctrico dentro de la solución las cargas negativas se dirigirán al ánodo y las cargas positivas al cátodo. En base a estos principios se disuelve bicarbonato de sodio en agua [7] y esto hace que esta sustancia se ionice de la siguiente manera

$$Na+ \ +HCO_3- \ . \qquad (1)$$

Y el sodio al reaccionar con el agua produce Hidrógeno molecular de acuerdo a la siguiente reacción

$$2\,Na \ + 2H_2O\text{----}2N_aOH+ H_2 \ . \qquad (2)$$

Esto es que se necesitan 2 iones de sodio para formar una molécula de Hidrógeno. Es este el proceso de generación de Hidrógeno molecular que ocurre en la electrolisis de la solución de bicarbonato en agua.

Captura del hidrógeno molecular

Como electrodos se utilizaron 2 cables de cobre recubiertos y solamente a unos 2 cm de los extremos se les quitó la cubierta para establecer el debido contacto con la solución. El Hidrógeno molecular se captura en el cátodo colocando justamente encima de él un tubo de ensaye, el cual previamente ha sido llenado de agua, para que capture las burbujas que se forman con el gas de H_2, hasta que se acumule un cierto volumen V. La fuente DC que se ha utilizado es de 5 Volts. Para medir la corriente se inserta una resistencia R de 10 ohms en serie con el circuito que polarizará los electrodos sumergidos en la solución, se mide el voltaje en los extremos de la resistencia R y por tanto se tiene una medida de la corriente simplemente dividiendo la caída de voltaje V entre la resistencia R, el esquema del dispositivo se muestra en la figura 1.

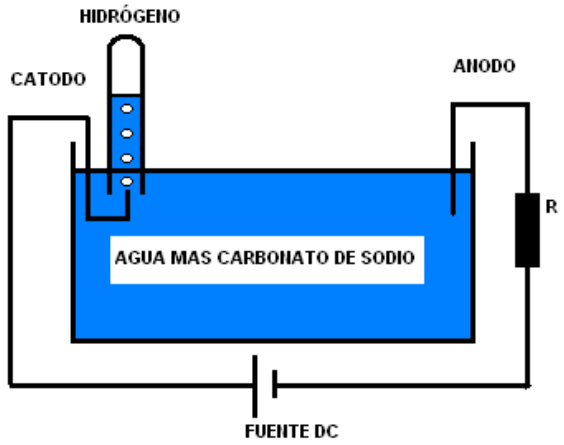


Figura 1. Arreglo experimental para el experimento de electrolisis. En los extremos de R se ha medido el voltaje con una tarjeta de captura y el programa indicado.

Programa para medir la carga

Para medir de manera continua el voltaje se ha recurrido a una tarjeta de captura y a un programa de uso general diseñado en lenguaje G de LabVIEW, el cual primero registra el voltaje en función del tiempo con una frecuencia de muestreo de 100 muestras por segundo y guarda los datos

en un archivo. Posteriormente otro programa diseñado específicamente para este experimento, nos proporciona el número de partículas contenidas en el tubo de ensaye una vez que se le proporcionan los siguientes datos: el número de iones que se necesitan para formar una molécula de H_2, la presión P, el volumen lleno de gas del tubo de ensaye V, la temperatura en grados Kelvin, el valor de la resistencia R, el valor de la constante universal de los gases ideales, y el valor de la carga de un electrón.

Con los datos del archivo el programa automáticamente mide el valor del área bajo la curva para la gráfica del voltaje en función del tiempo; para ello se usan 2 cursores separados por el tiempo en que duró el experimento. Este valor se divide entre el valor de R ya que de acuerdo a la ley de Ohm I = V/R; este valor se divide entre el valor de las cargas necesarias para formar una molécula de H_2,, y con ello se obtiene el valor de N_2. Por otra parte se mide el valor del número de moléculas N_1 a partir del valor del número de moles obtenido con los valores de P, V, y T, multiplicado por el número de Avogadro. Finalmente se comparan ambos valores del número de moléculas y se obtiene el error porcentual. El panel del programa se muestra en la figura 2.

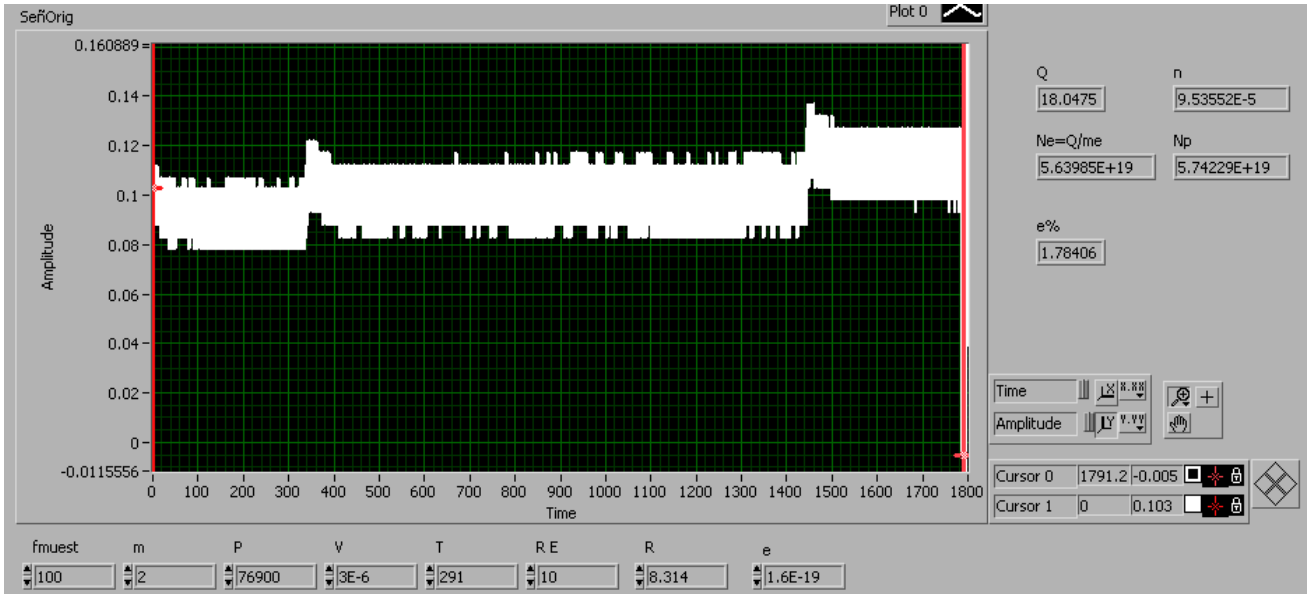


Figura 2. Panel del programa que mide el número de partículas en un volumen dado.

IV. Resultados

Los resultados muestran que el acuerdo entre los 2 métodos utilizados es bueno, la medida utilizando la ley general de los gases ideales con una presión de 76900 Pa, un volumen de $3x10^{-6}$ m^3, una temperatura de 291 K, con una ***n*** de 9.59 moles, es de N= 5.64 x 10^{19} moléculas, mientras que las medidas de carga nos dan un valor de 5.74 x 10^{19} moléculas, por tanto entre ambas medidas hay un error porcentual de 1.78 %.

V. Discusión

En este trabajo solo nos hemos propuesto presentar 2 modos diferentes de medir el número de moléculas de un gas bajo ciertas condiciones de presión, volumen y temperatura. Los métodos propuestos se pueden aplicar en los cursos de laboratorio de Física II o Física III, El hecho de haber obtenido un buen acuerdo puede ser útil desde el punto de vista pedagógico por las siguientes razones:

1) Que los gases a unas ciertas condiciones de volumen, temperatura y presión tienen un número definido de partículas es una proposición que es difícil comprobar por métodos directos. Con esta técnica los alumnos pueden verificar el grado de veracidad de la ley general de los gases ideales.
2) Permite mostrar a los alumnos el hecho de que el método científico exige que una determinada ley tiene que ser comprobada por la mayor cantidad de métodos experimentales para verificar una y otra vez su congruencia.
3) Liga 2 campos de la física que en general no se unen en la enseñanza de los laboratorios básicos como son el de la electricidad y la termodinámica.
4) Incita a los alumnos a utilizar métodos más actuales de medición, como son el uso de programas de captura y procesamiento de datos, ya que son estos nuevos procedimientos los que se imponen en las diferentes áreas de trabajo e investigación modernas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA la ayuda prestada para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] V. Danilevsky, ***Historia de la Técnica***, Editorial Lautaro, Argentina, 1941.
[2] Desiderio Papp, ***Historia de la Física***, Editorial Espasa Calpe, 1961.
[3] John D. Bernal, ***La ciencia en la historia***, Editorial Nueva Imagen, México, 1991.
[4] Enrique Jóven Álvarez, ***Dalton: la teoría atómica***, Editorial National Geographic, 2012.
[5] Eduardo Arrollo Pérez, ***Boltzmann***, Editorial National Geographic, 2012.
[6] Francisco Javier Sevilla Instituto de Física, ***El movimiento browniano a más de un siglo de Einstein***, fjsevilla@fisica.unam.mx
[7] H.S Taylor y S. Glasstone, A treatise on Physical Chemistry, D. Van Nostrand Co. Inc., Nueva York, 1951.

.

ISSN: 2594-1011

Una alternativa a las tradicionales formulas de Cardano-Tartaglia

E. Salinas-Hernandez[1], G. Ares de Parga[2], César R. Martínez García[1]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55041 E-mail: esalinas@ipn.mx

Resumen — **En este trabajo proporcionamos un mecanismo que nos permite obtener un conjunto de soluciones, distintas a las tradiciones propuestas por Cardano-Tartaglia, dichas soluciones provienen de la extensión del mecanismo original sugerido por Niccolo Tartaglia.**

Palabras Clave – **Ecuación cúbica, Cardano-Tartaglia.**

Abstract — **In this work we provide a mechanism that allows us to obtain a set of solutions, different from the traditions proposed by Cardano-Tartaglia, these solutions come from the extension of the original mechanism suggested by Niccolo Tartaglia.**

Keywords — **Cubic equation, Cardano-Tartaglia.**

INTRODUCCIÓN

Históricamente las soluciones a las ecuaciones algebraicas de tercer grado tuvieron un proceso muy lento para poder lograr la obtención de formulas explícitas, las cuales dieran solución a cualquier tipo de ecuación, de hecho durante todo este proceso intervinieron matemáticos como Fibonacci , Scipione del Ferro que por cierto se le atribuye como el primero en proporcionar el método que da solución a la ecuación cúbica, hasta llegar a Nicolo Fontana "Tartaglia" (Tartamudo) y Gerolamo Cardano a quienes históricamente se les atribuye las soluciones a la ecuación de tercer grado, aunque cabe resaltar el hecho de que "Tartaglia " fue quien desarrollo el método y se lo proporciono a su mentor Gerolamo Cardano, quien a su vez las obtuvo de manera independiente por parte del yerno de Scipione del Ferro (no queda muy claro en que condiciones logro obtenerlas), finalmente las publica bajo el argumento de que los dos métodos eran prácticamente el mismo, y lo expone en su obra "Ars Magna" en el año de 1545, en donde además aparecen las soluciones a la ecuación de cuarto grado, desarrolladas por su alumno Lodovíco Ferrari, la publicación de esta obra desato una de las más grandes enemistades en la historia de las matemáticas, ya que "Tartaglia", nunca acepto que la técnica desarrollada por Scipione del Ferro era la misma que el había obtenido.

En este trabajo lo que hacemos es extender la técnica desarrollada por Niccolo "Tartaglia", de tal forma que a diferencia del planteamiento original de resolver la ecuación reducida: $y^3+\gamma y+\lambda=0$, nosotros resolvemos la nueva estructura reducida: $y^3+\beta y^2+\lambda=0$., y para lograrlo de manera natural obtenemos un sistemas de ecuaciones el cual al desacoplarlo nos permite poder construir el nuevo conjunto de soluciones.

I. EL MECANISMO ORIGINAL DESARROLLADO POR TARTAGLIA

El método empleado por Niccolo Tartaglia, para resolver la ecuación algebraica de tercer grado, fue la siguiente.

A partir de la expresión:

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

Si $x=y-\frac{a}{3}$ entonces la expresión anterior se reduce a

$$y^3+\gamma y+\lambda=0 \qquad (2)$$

En donde

$$\gamma=3(\frac{a^2}{3^2})-2a(\frac{a}{3})+b \qquad (3)$$

Y

$$\lambda=(-\frac{a}{3})^3+a(\frac{a}{3})^2-b(\frac{a}{3})+c \qquad (4)$$

Es la famosa expresión reducida de la cual partió Niccolo Tartaglia para poder resolver, la ecuación cúbica general, de hecho para resolverla hace precisamente el cambio $y=u-v$ y transformar (3) en una expresión prácticamente como (2)

$$u^3-v^3+(u-v)\{-3uv+\gamma\}+\lambda=0 \qquad (5)$$

Para poder resolver (5), impuso que se cumpliera $-3uv+\gamma=0$, lo cual implica que

$$u^3-v^3+(u-v)\{0\}+\lambda=0 \qquad (6)$$

Es decir se tendrá que resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} u^3-v^3+\lambda&=0 \\ -3uv+\gamma&=0 \end{aligned} \qquad (7) \text{ y } (8)$$

Si de (8) despejamos $v = \frac{\gamma}{3u}$, sustituirlo en (7)

$$u^3 - \frac{\gamma^3}{27u^3} + \lambda = 0 \qquad (9)$$

Es decir al multiplicar por u^3 tendremos

$$u^6 + u^3\lambda - \frac{\gamma^3}{27} = 0 \qquad (10)$$

Cuya solución está dada por la fórmula estándar de la ecuación cuadrática, al considerar el cambio $w = u^3$

$$w = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}2} = u^3 \qquad (11)$$

Es decir

$$u = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}}} \qquad (12)$$

Para hallar el valor de v simplemente se sustituye (7)

$$-\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 + \frac{u\gamma^3}{27}} - v^3 + \lambda = 0 \qquad (13)$$

Lo que implica

$$v^3 = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}} \qquad (14)$$

Es decir

$$v = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}}} \qquad (15)$$

Por lo tanto, las soluciones que obtiene Niccolo Tartaglia para la expresión son

$$y = u - v = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \frac{4\gamma^3}{27}}} \qquad (16)$$

Como puede observarse, la ecuación (6), no tuvo un seguimiento distinto al camino trazado por Niccolo Tartaglia para resolver la ecuación cúbica.

II. Propuesta de factorización

Ahora bien, supóngase que en la expresión

$$\xi^3 + a\xi^2 + b\xi + c = 0 \qquad (17)$$

Al hacer uso del cambio de variable $\xi = u - v - \alpha$, y simplificando la expresión, llegamos a la factorización

$$\begin{aligned}&(u-v)\{u^2 + v^2 - 2uv + (3\alpha + 9)(u - v)\\ &+3\alpha^3 + 2\alpha a + b\}\\ &+\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\end{aligned} \qquad (18)$$

Nuevamente definimos por simplicidad

$$\begin{aligned}\beta &= 3\alpha + a\\ \gamma &= 3\alpha^2 + 2\alpha a + b\\ \lambda &= \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c\end{aligned} \qquad (19,20,21)$$

Además consideremos también que

$$\begin{aligned}y &= u - v\\ z &= uv\\ u^2 + v^2 &= (u - v)^2 + 2uv\end{aligned} \qquad (22,23,24)$$

Con ello la expresión (18) se reduce a

$$y\{y^2 + 2z - 2z + \beta y + \gamma\} + \lambda = 0 \qquad (25)$$

Analicemos los casos siguientes, impongamos que $\gamma = 0$, lo cual implica según (20)

$$\alpha = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6} \qquad (26)$$

Así como $y^2 + 2z + \beta y = 0,$ ello implica que

$$y\{0-2z\}+\lambda=0 \qquad (27)$$

Entonces se obtiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y^2+2z+\beta y&=0\\ -2zy+\lambda&=0 \end{aligned} \qquad (28,29)$$

Si despejamos a y (29), $y=\frac{\lambda}{2z}$, al sustituir en (28), obtenemos

$$(\frac{\lambda}{2z})^2+2z+\beta(\frac{\lambda}{2z})=0 \qquad (30)$$

Es decir

$$z^3+\beta\lambda 4z+\frac{\lambda^2}{8}=0 \qquad (31)$$

Ahora si de (29) se despeja $z=\frac{\lambda}{2y}$, al sustituir en (28) y simplificando se obtiene

$$y^3+\beta y^2+\lambda=0 \qquad (32)$$

Es decir podemos asumir que del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z^3+\frac{\beta\lambda}{4}z+\frac{\lambda^2}{8}&=0\\ y^3+\beta y^2+\lambda&=0 \end{aligned} \qquad (33,34)$$

En otras palabras, si hubiera una forma de hallar la solución de (33), que por cierto si la hay ("Las fórmulas de Cardano-Tartaglia"), entonces con el cambio de variable, $y=\frac{\lambda}{2z}$, se puede obtener las soluciones de (34), la cual es una estructura que precisamente no tiene solución, al menos bajo algún mecanismo de este tipo.

Ya por último, como una segunda situación la expresión

$$y\{y^2+2z-2z+\beta y+\gamma\}+\lambda=0 \qquad (35)$$

Imponiendo ahora que $\beta=0,$ así como

$$y^2+2z+\gamma=0 \qquad (36)$$

Y la ecuación (25) se reduce a

$$-2yz+\lambda=0 \qquad (37)$$

Entonces al combinar adecuadamente las expresiones (36) y (37), estas se reducen al sistema

$$\begin{aligned} z^3+\frac{\gamma}{2}z^2+\frac{\lambda^2}{8}&=0\\ y^3+\gamma y+\lambda&=0 \end{aligned} \qquad (38,39)$$

III. Construcción de la formula explicita para la ecuación $y^3+\beta y^2+\lambda=0$

A partir de las ecuaciones (34) y (35)

$$\begin{aligned} z^3+\frac{\beta\lambda}{4}z+\frac{\lambda^2}{8}&=0\\ y^3+\beta y^2+\lambda&=0 \end{aligned}$$

Es claro que la primera ecuación, admite soluciones tipo Cardano-Tartaglia para z, bajo el reemplazamiento $\frac{\beta\lambda}{4}\to\gamma$ y $\frac{\lambda^2}{8}\to\lambda$ y además si recordamos que $y=\frac{\lambda}{2z}$

Es decir

$$y=\frac{\frac{\lambda}{2}}{\sqrt[3]{-\frac{\lambda^2}{16}+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\lambda^4}{4}+\frac{\beta^3\lambda^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{\lambda^2}{16}-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\lambda^4}{4}+\frac{\beta^3\lambda^3}{27}}}} \qquad (40)$$

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se lograron obtener soluciones analíticas a la ecuación algebraica de tercer grado, una vez transformada en la forma $y^3 + ay^2 + y = 0$, cabe señalar que esta nueva estructura no esta analizada en la literatura convencional y por lo tanto las soluciones son originales, además de que se corroboraron dichos resultados en el paquete de MATHEMATICA.

REFERENCIAS

[1] V. Uspensky "Teoría de Ecuaciones", Editorial Limusa (1987), 387 Paginas.

[2] Irving Ronald S. "Integers,polinomials and rings" , Editorial Spring-Verlang, New York, Inc. ISBN 0-387-40397-3

[3] Sara Confalonieri "The Unattainable Attempt to Avoid the Casus Irreducililis for Cubic equations" (2013) Editorial Spring-Spektrum, ISBN 978-3-658-09274-0, DOI 10.1007/978-3-658-09275-7

[4] Gerolamo Cardano "Artis Magnae,sive reugulis algebraicis", (1545) En Latin

ISSN: 2594-1011

Construcción de los polinomios de Hermite de forma recurrente al derivar de forma reiterada la ecuación de Hemite

E. Salinas-Hernandez[1], G. Ares de Parga[2], César R. Martínez García[1]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55041 E-mail: esalinas@ipn.mx

Resumen — **En este trabajo damos un mecanismo para lograr la construcción de los polinomios de Hermite, a partir de la derivación de la ecuación de Hermite, en donde siguiendo una relación de recurrencia, la construcción del polinomio k, depende del polinomio k-1., al final se dan algunas conclusiones.**

Palabras Clave – **Polinomios, Hermite, Ecuación**

Abstract — **In this work we give a mechanism to achieve the construction of the Hermite polynomials, from the derivation of the Hermite equation, where following a recurrence relation, the construction of the polynomial k, depends on the polynomial k-1., final some conclusions are given.**

Keywords — **Polynomials, Hermite, Equation**

INTRODUCCIÓN

Los Polinomios de Hermite, que son solución a la famosa ecuación de Hermite (en honor a Charles Hermite 1822-1901), corresponde como caso partícular a un problema más general, conocido como el problema de Sturm-Liuville, Dicha ecuación es muy importante, ya que aparece por ejemplo, al resolver el problema del Oscilador Armónico Cuántico. Existen una gran variedad de alternativas para lograr obtener dichos polinomios, de hecho también existen algunas relaciones bien conocidas que permiten la construcción de dichos polinomios, de hecho este hecho es nueva alternativa original, en donde partiendo de la ecuación de Hermite para n=1, al irla derivando y posteriormente al realizar un poco de algebra se logra la construcción de su solución, el cual es precisamente el primer polinomio de Hermite; posteriormente al hacer n=2 en la ecuación, y nuevamente al hacer un poco de algebra se logra reproducir una estructura matemática correspondiente al caso n=1, entonces al tomar su solución asociada y nuevamente de realizar algunos cálculos se logra obtener la solución correspondiente a n=2, y así, si de la misma forma se hace lo mismo para n=3, n=4,…,n=k, etc. se logra la construcción de todos los polinomios de Hermite. Aunque cabe destacar que para la deducción de la fórmula (muy conocida) que genera los polinomios de Hermite (la cual involucra derivadas n-ésimas), también está en términos de derivadas, este mecanismo propuesto es distinto y original, a pesar de que en el proceso también se involucran las derivadas.

I. DESARROLLO DEL TRABAJO

Sea la ecuación de Hermite

$$y''-2xy'+2ny=0 \tag{1}$$

Consideremos el caso $n=1$, entonces la expresión (1) se puede expresar como

$$y''-2xy'+2y=0 \tag{2}$$

En donde claramente $y_1(x)=x$ será solución, ya que si $y_1(x)=ax+b$, al sustituir en (2).

$$y_1(x)=a,\quad y_1''(x)=0$$
$$0-2xa+2(ax+b)=0 \therefore a(-2x+2x)+b=0$$

En donde claramente

$a(0)=0,\quad a\in\square$ cualquier valor puede tomar
$2b=0,\quad b=0$ claramente

Así $y=ax$, en particular tómese $a=2$

$$y_1(x)=2x$$

Para $n=2$

$$y''-2xy'+4y=0 \tag{3}$$

Derivemos una vez

$$y'''-2xy''-2y'+4y'=0$$
$$y'''-2xy'+2y'=0,$$

Ahora hagamos el cambio de variable $y' = z$, luego la expresión anterior se expresa como:

$$z'' - 2xz' + 2z = 0$$

De acuerdo con lo estructura dada por (2) $y \to z$, la solución tiene la forma $z' = 2x + b$, con b una constante de integración a encontrar, pero además recordemos que $z = y'$, entonces

$$y' = 2x + b,$$
$$y = x^2 + bx \therefore$$
$$y_2(x) = x^2 + bx + c$$

Entonces al sustituir en la expresión (3) tendremos que

$$y_2(x) = x^2 + bx + c$$
$$y_2'(x) = 2x + b$$
$$y_2''(x) = 2$$

Así

$$y'' - 2xy' + 4y = 0 \Rightarrow 2 - 2x(2x + b) + 4(x^2 + bx + c) = 0$$

$$2 + 4c + 2bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2b = 0 \therefore b = 0 \\ 2 + 4c = 0 \therefore c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$y_2(x) = x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(4x^2 - 2) \therefore$$
$$y_2(x) = \frac{1}{4}(4x^2 - 2)$$

Que corresponde al segundo polinomio de Hermite.

Para $n = 3$

$$y'' - 2xy' + 6y = 0 \qquad 1$$

Derivemos una vez

$$y''' - 2xy'' - 2y' + 6y' = 0 \Rightarrow y''' - 2xy'' + 4y' = 0$$

Sea $z = y'$, por lo tanto se tendrá que

$$z'' - 2xz' + 4z = 0 \qquad (5)$$

Por lo tanto de acuerdo con la estructura (3) la solución tendrá la forma

$$z = 4x^2 - 2$$

Y como $z = y'$ entonces

$$y' = 4x^2 - 2 \Rightarrow y_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x + b$$
$$y_2(x) = 8x$$

Entonces al sustituir en (4)

$$8x - 2x(4x^2 - 2) + 6(\frac{4}{3}x^3 - 2x + b) = 0$$

simplificando

$$6b = 0 \therefore b = 0$$

Entonces la solución es de la forma

$$y_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x = \frac{1}{6}(8x^3 - 12x)$$

Por lo tanto

$$y_3(x) = \frac{1}{6}(8x^3 - 12x)$$

Para $n = 4$, la ecuación está dada por

$$y'' - 2xy' + 8y = 0 \qquad (6)$$

Derivemos

$$y''' - 2xy'' - 2y' + 8y' = 0 \Rightarrow y''' - 2xy'' + 6' = 0$$

Sea $z = y'$, entonces la ecuación queda expresada como

$$z'' - 2xz' + 6z = 0$$

Ahora bien, de acuerdo con la estructura (4), la solución está dada por:

$$z' = 8x^3 - 12x, \text{ y como } z = y' = 8x^3 - 12x$$

$$\therefore y = \frac{8}{4}x^4 - \frac{12}{2}x^2 + b \Rightarrow y_4(x) = 2x^4 - 6x^2 + b$$

Que al sustituir en (6)

$$y_4''(x) = 24x^2 - 12 \therefore b = \frac{3}{2}$$

Así

$$y_4(x) = 2x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2} \therefore$$

$$y_4(x) = \frac{1}{8}(16x^4 - 48x^2 + 12)$$

Como puede observarse, sin miedo a generalizar, nosotros podemos expresar el Polinomio de Hermite en términos de la solución general, en la forma

$$y(x) = \frac{1}{2n}P_n(x)$$

Donde $H_n(x)$ corresponde al polinomio de Hermite, es decir

$$H_n(x) = 2n\, y_n(x)$$

Las cuales También corresponden a soluciones de la ecuación de Hermite,, como era de esperarse.

II. Conclusiones

En este trabajo se logró implementar un mecanismo el cual a partir de la derivación a la ecuación de Hermite y con cálculos algebraicos adecuados, se van construyendo de manera recurrente los Polinomios de Hermite.

REFERENCIAS

[1] Spiegel, Murray R.; Abellanas, Lorenzo (1992). McGraw-Hill, ed. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*

[2] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2002 (2nd edition).

[3] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Ratón, 2003 (2nd edition).

[4] J. D. Pryce, *Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[5] Burden, Richard L.; J. Douglas, Faires (2004). *Numerical Analysis*. Belmont: Brooks/Cole.

[6] Spitzbart, A. (enero de 1960). «A Generalization of Hermite's Interpolation Formula». *American Mathematical Monthly*

ISSN: 2594-1011

Análisis de diferentes configuraciones geométricas en una superficie de siembra

Cano García G.V.[1], Salazar Cano J. R.[2] Salazar Cano J. A.[3]
[1]Departamento de Fitotecnia, Universidad Autónoma Chapingo, Estado de México.
[2]Departamento de Biofísica, ENCB-IPN, Ciudad de México
[3]Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, Ciudad de México.
E-mail: gloria.cano@correo.chapingo.mx

Resumen — **La labranza es considerada la operación agrícola de trazar surcos. Optimizar la superficie de siembra evita densidades muy bajas que limiten el potencial de rendimiento, ya que bajas poblaciones ocasionan pérdidas considerables tanto para el productor, en la humedad del suelo así como también favorece el desarrollo de malezas. La búsqueda de diferentes configuraciones geométricas para los surcos que logre optimizar la extensión lineal del cultivo fue el objetivo de esta investigación. Se encontraron diferencias significativas en cada una de las combinaciones propuestas, como el número de surcos, su longitud, la forma de los mismos. El método tradicional de siembra basado en surcos rectos se observa que es poco viable para el productor, ya que arroja la menor extensión lineal de siembra en comparación con las otras configuraciones geométricas, siendo el surcado triangular, el que arrojó una mayor superficie lineal de siembra.**

Palabras Clave – **surcos, optimizar, densidad**

Abstract — **Tillage is considered the agricultural operation of tracing groove. Optimizing the planting area avoids very low densities that limit the yield potential, since low populations cause considerable losses both for the producer, in the humidity of the soil as well as favors the development of weeds. The search for different geometric configurations for the grooves that optimizes the linear extension of the crop was the objective of this investigation. Significant differences were found in each of the proposed combinations, such as the number of grooves, their length, and the shape of the grooves. The traditional method of planting based on straight rows is observed that is not viable for the producer, since it yields the least linear extension of sowing in comparison with the other geometric configurations, being the triangular groove, which gave a greater linear surface of sowing.**

Keywords — **Grooves, optimize, density**

I. Introducción

La labranza es considerada la operación agrícola de trazar surcos en la tierra con una herramienta de mano o con un arado. Se considera que previo al diseño y trazo, el retiro de obstáculos o cambios en los linderos o forma de los terrenos, mejoran la eficacia de la práctica y la facilidad de realizar el trazo del surcado. [1]

El uso de profundidades, anchos y longitudes de los surcos se considera, que está en función del cultivo a sembrar, el tipo de maquinaria a utilizar el área donde se va a trabajar, sin embargo, poco se toma en cuenta la optimización del área en donde se va a sembrar.

II. Metodología

En el estudio de la geometría clásica, las líneas se pueden definir o construir, correspondiendo a nuestra noción intuitiva de ellas (que no varía en nada de la de los griegos)

Lema: Dados dos puntos **p** y **q** en R^n, existe una recta que pasa por ellos

Dados dos puntos p,q ϵ R^n se puede definir su distancia euclidiana, como la norma de su diferencia

$$d(p,q) = |p - q|$$

Explícitamente en coordenadas R^2

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Además, dados los vectores x,y,z ϵ R^n se cumple

i. $d(x,y) \geq 0$
ii. $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x=y$
iii. $d(x,y) = d(y,x)$
iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Teorema (de Pitágoras): Dado un triángulo rectángulo, si los lados que se encuentran en un ángulo recto (llamados catetos) miden a y b, y el tercero (la hipotenusa) mide c, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si a los vectores que poseen norma igual a uno, se les llaman vectores unitarios, al conjunto de todos los vectores unitarios en R^2se le llama el círculo unitario y se denota con S^1

En general se puede definir la esfera de dimensión n como

$$S^n = \{x \epsilon R^{n+1} || x| = 1\}$$

Consideremos ahora cualquier otro circulo C, con centro p = (h,k) y radio r > 0, el cual es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a p es r. Es decir,

$$C = \{x \epsilon R^2 | d(x,p) = r\}$$

O bien, C está definido por la ecuación $d(x,p) = r$

Es decir,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La cual en general presenta de la siguiente forma

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = (r^2 - h^2 - k^2)$$

III. Resultados

El proceso de análisis se llevó a cabo mediante la utilización del programa GoeGebra 5.0. Se comenzó por simular, un terreno de lado a, b, tal que a = b. Aplicando el procedimiento de realizar surcos rectos, se observa que es un conjunto de segmentos con coordenadas (x,y) bien definidas.

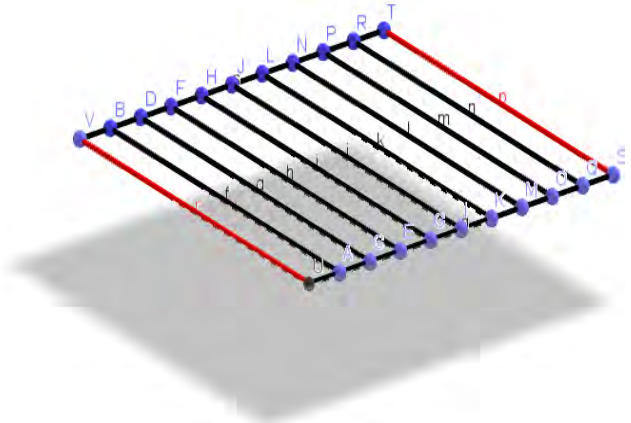


Fig. 1. Vista 3D del terreno con surcos rectos

Si se elige arbitrariamente a = 10 y b = 10 (m) y considerando una separación de 1 metro entre cada surco, se observa la siguiente configuración:

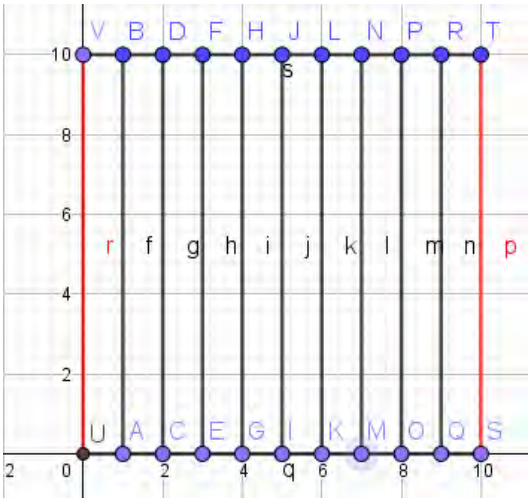


Fig. 2. Construcción de surcos rectos

Considerando que cada segmento de recta tiene una magnitud de 10 metros, se encuentra que en total las plantas estarán distribuidas en una superficie de 90 metros lineales, sin considerar los segmentos $\overline{UV}$ y $\overline{ST}$ debido a que se considera el límite del terreno.

Si se considera el surcado basado en diagonales y conservando la misma distancia entre surcos, se observa la siguiente distribución.

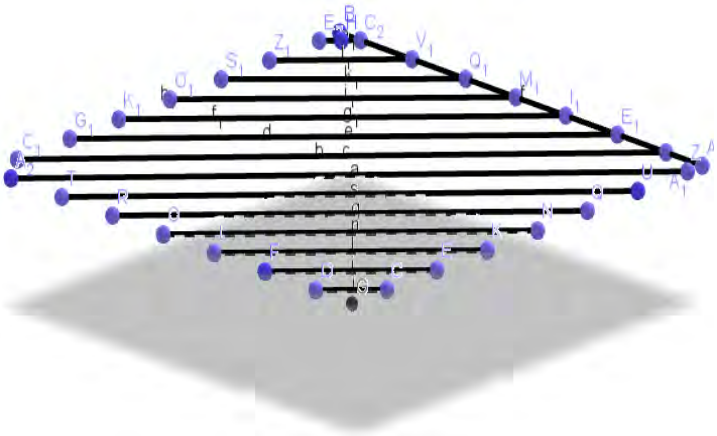


Fig. 3. Vista 3D del terreno con surcos diagonales

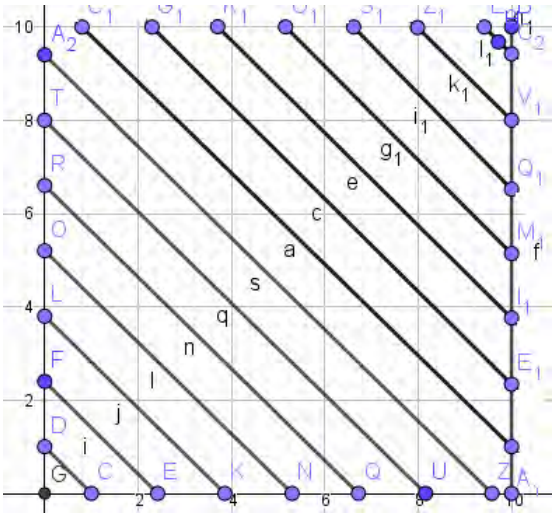


Fig. 4. Construcción de surcos en forma diagonal

Encontrando que la sumatoria de la magnitud de cada uno de los segmentos arroja que el total de plantas estarán distribuidas en una superficie de 99.89 metros lineales.

En caso del surcado basado en circunferencias se trazaron círculos concéntricos cuyo origen se eligió en la coordenada (5,5)

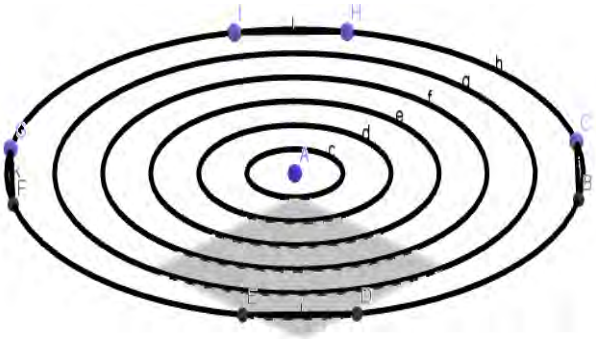


Fig.5. Vista 3D del terreno con surcos en forma de circunferencia

Encontrando las siguientes ecuaciones definidas sobre el Terreno a sembrar:

$$c: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 1$$
$$d: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 4$$
$$e: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$$
$$f: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 16$$
$$g: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$
$$h: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

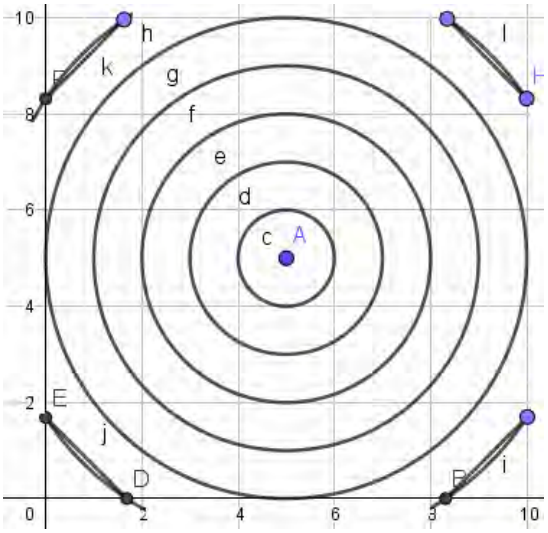


Fig. 6. Construcción de surcos basados en circunferencias

De tal forma que si calculamos el perímetro de cada circunferencia:

$$P = 2\pi r$$

Siendo r el radio de cada una de ellas. El conjunto de circunferencias nos arroja una superficie de siembra distribuida en 103.67 m, considerando la longitud de los segmentos i,j,k,l.

Para un surcado basado en “cuadrados”

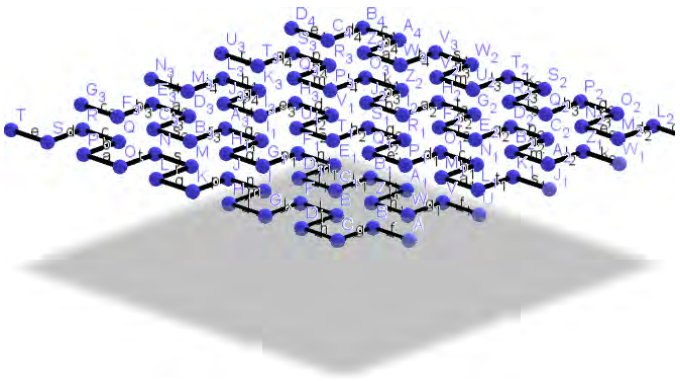


Fig.7. Vista 3D del terreno con surcos “cuadrados”

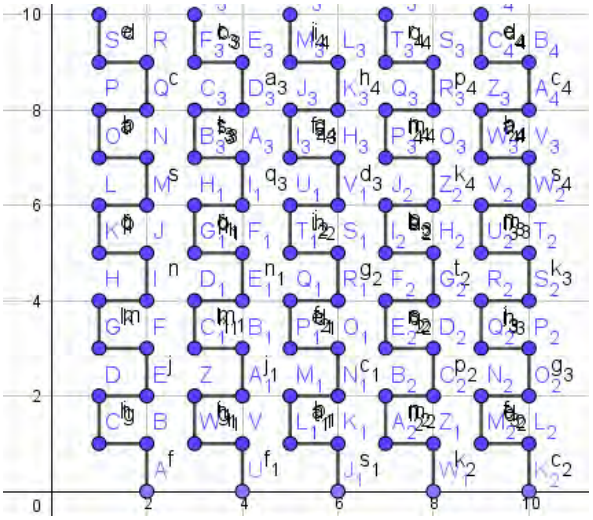


Fig. 8. Construcción de surcos basados en “cuadrados”

Se arrojó una superficie de siembra de 95 metros lineales.

Finalmente si consideramos un surcado “triangular”

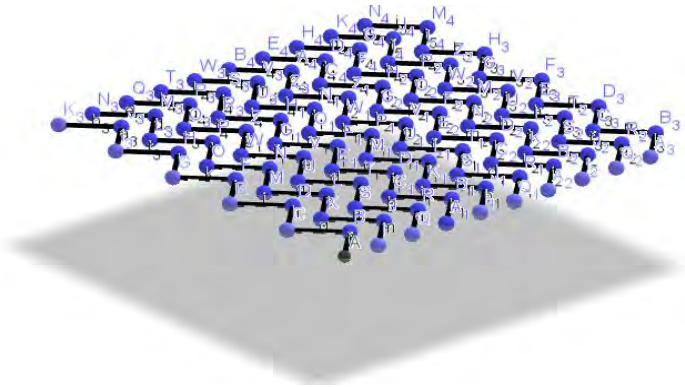


Fig.9. Vista 3D del terreno con surcos en forma “triangular”

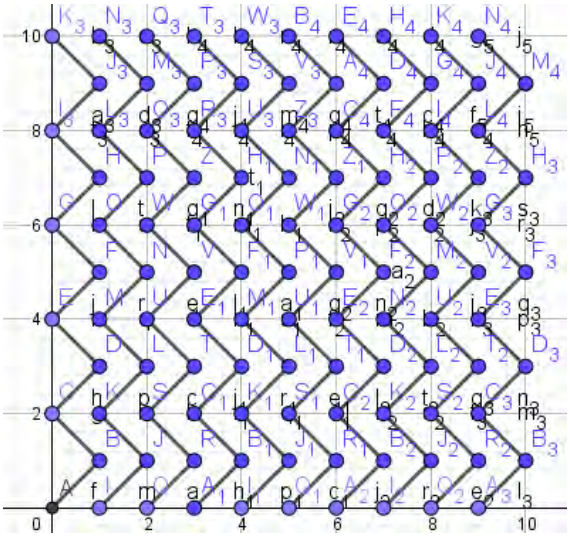


Fig. 10. Construcción de surcos basados en “triángulos”

La superficie de siembra estará distribuida en una superficie de 144 metros lineales.

IV. CONCLUSIONES

Si bien la producción de cultivos es una actividad que ha sido base de la alimentación en el mundo, actualmente es necesario evaluar diversos aspectos tales como el costo energético, el impacto ambiental durante la producción, la eficiencia en la producción, entre otros aspectos.
En particular la optimización de una superficie de siembra es primordial para el productor, debido a que está directamente relacionado con el número de plantas a sembrar.

Los resultados obtenidos muestran que para todas las combinaciones propuestas el surcado triangular, arroja una mayor superficie lineal de siembra.
Por otra parte, se observa que el surcado basado en cuadrados arroja una mayor superficie de siembra respecto al surcado tradicional basado en surcos lineales, además, se nota que en el primer caso, existen zonas en donde el productor podría sembrar otro tipo de plantas debido al espacio que se genera entre surco y surco.
El cambio en la superficie de siembra respecto a los surcos lineales tradicionales es notable, observando que incluso el método de siembra circular, está por encima del mismo.

Por lo cual queda abierto el problema de encontrar la geometría adecuada que les permita a los productores optimizar su siembra y en consecuencia tener una mayor productividad.

REFERENCIAS

[1] Surcado al Contorno. SAGARPA

ISSN: 2594-1011

Síntesis de nanopartículas magnéticas de magnetita con potenciales aplicaciones biomédicas

[1]David Ravelo Acuña, [1]Hernani Yee Madeira, [2]Carlos Díaz Águila
[1]Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas. Av. Instituto Politécnico Nacional, Lindavista, Nueva Industrial Vallejo, 07738 Ciudad de México.
[2] Centro de Biomateriales de la Universidad de La Habana
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 E-mail: David.raveloacua258@esfm.ipn.mx

Resumen — **Los estudios de materiales magnéticos nanométricos han atraído el interés de la comunidad científica por las diferentes aplicaciones que estos materiales exhiben en comparación con los materiales magnéticos másicos. El presente trabajo muestra los diferentes métodos de síntesis para la obtención de nanopartículas magnéticas de magnetita (NPM) y se presentas los resultados de las NPM obtenidas por el método de coprecipitación. Las muestras fueron analizadas por Difracción de Rayos-X (DRX) con la cual se identificó la fase cristalina Fe_3O_4, Espectroscopia Infrarroja (IR) para determinar los grupos funcionales en el material y Microscopia Electrónica de Transmisión (MET) para la determinación de la morfología y tamaño de partícula. Se concluye que el método es un método eficiente y fácil con la desventaja de obtener una amplia distribución de tamaños**

Palabras Clave – **nanopartículas, magnetita, síntesis**

Abstract — **Magnetic nanomaterials have attracted the interest in scientific community due to the different properties that those materials have in contrast to bulk materials. This work presents the different types of synthesis of magnetite nanoparticles and it is focused in coprecipitation method. The samples were analyzed by X-Ray Diffraction (XRD) to identify crystal phase Fe_3O_4, Infrared Spectroscopy (IR) to determine the functional groups into the material and Transmission Electron Microscopy to characterized morphology and size of particles. The coprecipitation method is very efficient and easy on the other hand the distribution of particle size is wide.**

Keywords — **nanoparticles, magnetite, synthesis**

I. Introducción

Las nanopartíiculas magnéticas han sido ampliamente estudiadas por sus diferentes propiedades que presentas en contraste con los materiales másicos y sus potenciales aplicaciones en diferentes área de biomedicina como en el diagnóstico, terapia, hipertermia, separación de ácidos nucleicos, etc. Existen diferentes métodos de síntesis para la obtención de NPM, microemulsión, sol-gel, descomposición térmica, coprecipitación, etc. El método de coprecipitación se ha caracterizado por ser uno de los métodos más fáciles y escalables para la obtención de partículas nanométricas [1], [2], [3].

II. Metodología

La síntesis de NPM, se llevo a cabo por el método de coprecipitación, Se prepararon soluciones en HCl de $FeCl_3$ y $FeCl_2$ con una relación 2:1 respectivamente, posteriormente estas soluciones fueron mezcladas y agregadas en un medio alcalino NH_4OH con agitacions mecánica constante y en un ambiente inerte, la solución se torna negra automáticamente, señal de que la magnetita se está formando. La magnetita es precipitada con un imán y posteriormente lavada varias veces hasta llegar a un valor de pH 7 para retirar el excedente de amonio y otros contaminantes que pudieran estar en la superficie, la reacción química que se lleva a cabo es la siguiente;

$$Fe^{2+} + Fe^{3+} + 8OH^- \rightarrow Fe_3O_4 + 4H_2O$$

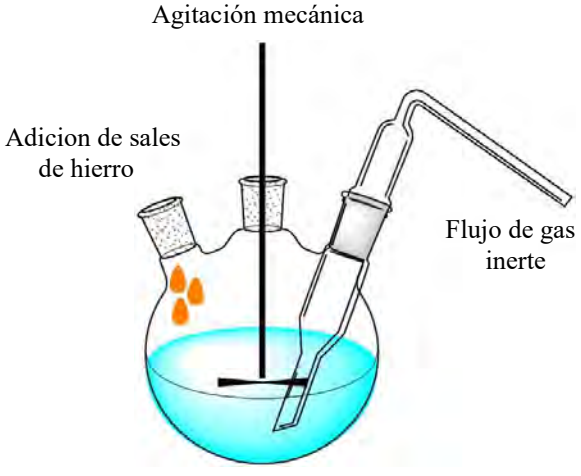


Fig. 1. Arreglo experimental de la síntesis de NPM

TABLA I.
MATERIALES UTILIZADOS

REACTIVO	FABRICANTE	C (%)	M. W. (GR/MOL)
HCl	Fermont	37.2	36.46
NH_4OH	T. Q. S.A de C.V.	28-30	35.05
$FeCl_2 \cdot 4H_2O$	Sigma-Aldrich	99	198.81
$FeCl_3 \cdot 6H_2O$	J. T. Baker	99	270.30

TABLA II.
RELACION DEL TAMAÑO DE CRSITALITA

PLANOS DE DIFRACCIÓN	$T_C(nm)$
0 2 2, 0 4 4	9.7
0 0 4, 0 0 8	10.3
1 1 3	10.2
2 2 4	9.8
1 1 5	10
1 3 7	10.5

III. RESULTADOS

Difracción de Rayos-X (DRX)

Las muestas obtenidas por el método de coprecipitacion fueron analizadas por DRX, la fase cristalina presente es la fase de la magnetita la cual tiene una estructura spinel inversa, se estimo el tamaño de cristalita utilizando la ecuación de sherrer la cual esta dada por

$$D = (0.9\lambda) / \beta\cos\theta$$

donde λ es la longitud de onda de la fuente de radiación, θ el angulo de difracción y β la longitud ancho de la línea de difracción a la mitad de la intensidad máxima [4], [5].

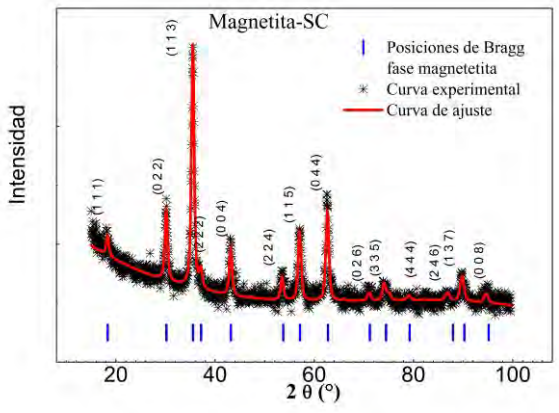


Fig. 2. Difractograma de las muestras obtenidas por el método de compensación, la fase cristalina corresponde con la fase cristalina de la magnetita

Espectroscopia Infrarroja (IR)

Las muestra La muestra de magnetita sin lavar obtenida por el método de coprecipitación fue analizada por la técnica de IR identificando las bandas vibracionales de los posibles compuestos que están presentes en el material. Los espectro IR de la muestras in situ, las bandas vibracionales corresponden con las bandas vibracionales de la magnetita y el cloruro de amonio las cuales están reportadas en 570 cm^{-1} y 1402 cm^{-1} respectivamente [6].

La muestra de magnetita lavada con agua hasta un pH 7 por el método de coprecipitación fue analizada por la técnica de IR identificando las bandas vibracionales de los posibles compuestos que están presentes en el material. Las bandas vibracionales corresponden con las bandas vibracionales de la magnetita las cuales aparecen entre 560-570 cm^{-1}-

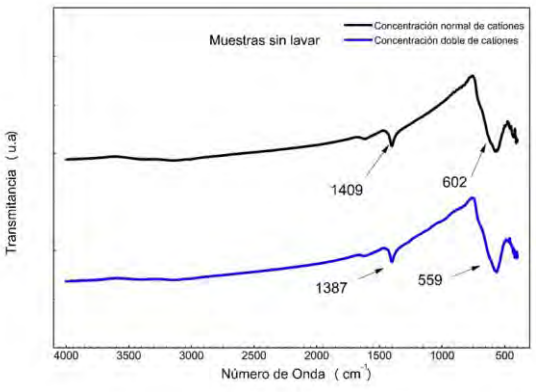
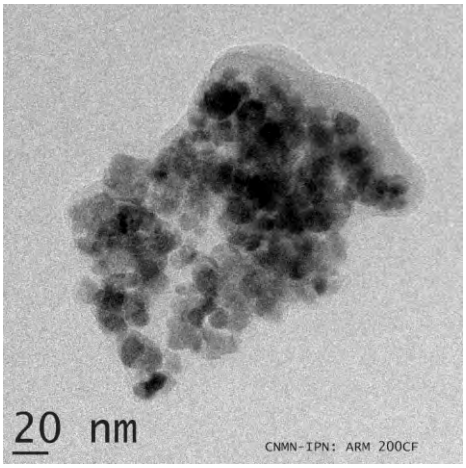


Fig. . *Espectro IR de las muestras sin lavar de las diferentes síntesis, C indica la concentración normal utilizada, 2C inca la síntesis con el doble de concentración de la solución catiónica*



Microscopia Electrónica de Transmisión (MET)

De los resultados de las nanopartículas de magnetita analizadas por la técnica de TEM se estimó el tamaño de las nanopartículas de magnetita. El tamaño promedio de las nanortìculas de magnetita por el método de coprecipitaciòn que se observaron fue de 10 nm [7]. Se puede apreciar aglomeración en las muestras debido a la naturaleza magnética del material.

IV. Discusión

La fase cristalina presente en los difractogramas corresponde a la fase cristalina de magnetita, por otro lado la magnetita puede estar oxidada en su fase mas común magemita la cual presenta los mismos picos de difracción, el análisis por IR permite asegurar que el material no presenta oxidación ya que la banda característica de la magemita no se presenta. La morfología cuasiesférica es apreciable en el anális por MET, tamaños entre 8-18 nm son exhibidos lo cual concuerda con la estimación del tamaño de cristalita.

V. Conclusiones

Se han logrado dominar el método de coprecipitación para la obtención de nanoparticulas de magnetita. No se presenta oxidación en las muestras obtenidas, la morfología cuasiesférica y el tamaño de las nanopartículas las hacen apropiadas para futuras aplicaciones en biomedicina.

Agradecimientos

IPN-ESFM, por permitirme realizar mis estudios de posgrado, BEIFI, COFAA y CONACyT, por el apoyo económico al proyecto.

Referencias

[1] J.-r. C. K. J. L. N. E. S. a. D. K. Youngil Lee, «Large-scale synthesis of copper nanoparticles by chemically controlled reduction for applications of inkjet-printed electronics,» *IOP SCIENCE,* vol. 19, nº 28, pp. 1 - 7, 2008..

[2] O. Salata, «Applications of nanopartic in biology and medicine,» *Journal of Nanobiotechnology,* pp. 1, 2, 2004.

[3] W.-T. Liu, «Nanoparticles and Their Biological and Environmental Applications,» *Journal of Bioscience and Bioengeniering,* vol. 2, nº 3, pp. 1 - 6, 2006.

[4] I. G. L. G. F. G. B. F. S. M. T. R. S. a. L. C. Del Bianco, «Synthesis of nanogranular Fe3O4/biomimetic hydroxyapatite for potential applications in nanomedicine: structural and magnetic characterization,» IOP Sience, vol. 2, pp. 1 - 14, 2015.

[5] Q. W. S. Q. Benyang Wang, «Synthesis and Characterization of Uniform and Crystalline Magnetite Nanoparticles via Oxidation-precipitation and Modified co-precipitation Methods,» International Journal of ELECTROCHEMICAL SCIENCE, vol. 8, p. 3789, 2013.

[6] Nyquist-Kagel, Infrared spectra of inorganic compounds, Midland Michigan: Academy Press, INC, 1971, p. 340.

[7] C. L. A. P. H. H. B. A. A. S. B. Jos J. M. Lenders, «A Bioinspired Coprecipitation Method for the Controlled Synthesis of Magnetite Nanoparticles,» *CRYSTAL GROWTH DESING,* vol. 2014, nº 14, pp. 5563, 5564, 5565, 2014.

ISSN: 2594-1011

Efecto Casimir desde la perspectiva de la electrodinámica estocástica

H. Betanzos, J. Avendaño
Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55254 E-mail: javel@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presenta una forma alternativa para la derivación de la fuerza de Casimir, desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica (SED por sus siglas en Inglés), la cual involucra el cálculo explícito de las componentes del campo electromagnético sobre las placas metálicas. Se considera que la energía promedio del k-ésimo modo normal del campo de punto cero clásico (ZPF por sus siglas en Inglés) es proporcional a su frecuencia. Esta constante de proporcionalidad se ajusta finalmente para obtener el resultado teórico y experimental correcto. Este procedimiento tiene la ventaja de ser general, y puede ser aplicable a cuerpos de diferente forma con propiedades dieléctricas arbitrarias.**

Palabras Clave – **Fuerza de Casimir, SED**

Abstract — **An alternative form for the derivation of the Casimir force is presented, from the perspective of Stochastic Electrodynamics (SED), which involves the explicit calculation of the components of the electromagnetic field on the metal plates. We take the average energy of the k-th normal mode of the classical zero point field (ZPF) proportional to its frequency. This constant of proportionality is finally adjusted to obtain the correct theoretical and experimental result. This procedure has the advantage of being general, and may be applicable to bodies of different shape with arbitrary dielectric properties.**

Keywords — **Casimir Force, SED**

I. INTRODUCCIÓN

En 1948, Casimir mostró que a una temperatura T=0K dos placas planas, paralelas, metálicas, perfectamente conductoras, sin carga eléctrica y separadas una distancia R en el vacío (cuántico), presentan una fuerza atractiva por unidad de área entre ellas proporcional a R^{-4} [1]. Esta fuerza es muy pequeña; por ejemplo, para placas de $1cm^2$ de área y separadas una distancia de 1μm, la fuerza es del orden de 10^{-7}N, es tan débil que hasta 1998 se pudo detectar con precisión aceptable, considerando correcciones a la aspereza, conductividad y temperatura de las placas [2]. Dicho fenómeno conocido como Efecto Casimir es atribuido según la Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en Inglés) al vacío, el cual está compuesto de partículas virtuales que constantemente aparecen y desaparecen de la existencia [3,4].

El programa de investigación llamado Electrodinámica Estocástica (SED) propone que existe en el universo, un campo electromagnético de radiación (real) aleatorio, de promedio nulo, que es homogéneo e isotrópico en el espacio libre, con una energía promedio proporcional a la frecuencia por modo normal (T=0K) y tiene además un espectro invariante de Lorentz [6]. Usualmente este campo de fondo aleatorio es llamado campo clásico de radiación de vacío o de punto cero[1] (ZPF). Desde esta perspectiva, al colocar un objeto inmerso en este campo, las características locales del campo cambian debido a la interacción del campo con las propiedades eléctricas y magnéticas del objeto [5], la energía promedio en esa región del espacio también depende de las propiedades del objeto. En este sentido, el Efecto Casimir puede ser considerado como una consecuencia de la modificación del ZPF debido a la presencia de objetos en una región del espacio dada. Es decir, en principio no existe la necesidad de un vacío cuántico para la derivación del Efecto Casimir.

II. ZPF ENTRE DOS PLACAS PARALELAS PERFECTAMENTE CONDUCTORAS

El ZPF en la norma de Coulomb esta descrito por el potencial vectorial **A**, que satisface la ecuación de onda y puede ser expresado en una expansión de modos normales de la siguiente manera

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{k}\sqrt{\frac{2\pi c^2\beta}{\omega_k}}\left[a_{k\lambda}e^{-i\omega_k t}\mathbf{G_{k\lambda}}(\mathbf{x})\right]+\mathbf{c.c.}\quad , \qquad (1)$$

aquí λ es el índice que etiqueta la polarización, $k=c\omega_k$ es la magnitud del vector de onda y $a_{k\lambda}$ es una variable aleatoria y toda la estocasticidad del campo está contenida en ella [6]. Hemos tomado la energía promedio del modo normal k-ésimo proporcional a la frecuencia ($\epsilon_k=\beta\omega_k$ con β constante), esto debido a un análisis termodinámico y estadístico del oscilador armónico [7]. Las funciones ortonormales $\mathbf{G_{k\lambda}}$ satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{G_{k\lambda}}+k^2\mathbf{G_{k\lambda}}=\mathbf{0} \quad . \qquad (2)$$

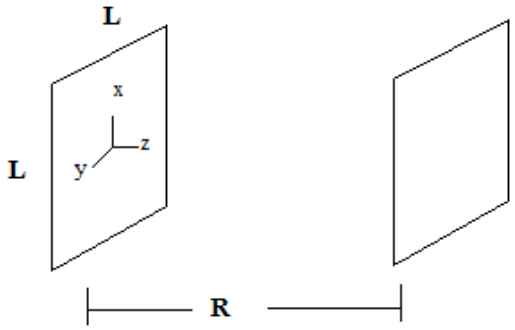


Fig. 1. Configuración de placas para el cálculo del Efecto Casimir

La condición de transversalidad viene dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{G_{k\lambda}} = 0 \quad , \tag{3}$$

las funciones $\mathbf{G_{k\lambda}}$ satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\, \mathbf{G_{\alpha}} \cdot \mathbf{G^{*}_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} \quad . \tag{4}$$

En la norma de Coulomb y en ausencia de fuentes, el campo eléctrico cumple $\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}$, por lo tanto las funciones $\mathbf{G_{k\lambda}}$ deben cumplir las condiciones de frontera impuestas para **E**, por ejemplo sobre la superficie de un conductor la componente tangencial de las funciones $\mathbf{G_{k\lambda}}$ se anula.

Suponga dos placas metálicas planas paralelas al plano XY perfectamente conductoras sin carga, de área L^2 separadas una distancia R entre ellas a una temperatura $T=0K$ en el vacío (fig. 1). Colocamos la placa "izquierda" en $z=0$ y la placa "derecha" en $z=R$. Resolviendo las ecuaciones (2), (3) y tomando en cuenta (4) para esta configuración, las funciones ortonormales $\mathbf{G_{k\lambda}}$ en la región $0 \leq z \leq R$ (en coordenadas cilíndricas) toman la forma

$$\mathbf{G_{k1}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{L^2R}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k_\rho}\cdot\boldsymbol{\rho})} \sin\xi\, (\hat{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \quad , \tag{5}$$

$$\mathbf{G_{k2}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{L^2R}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k_\rho}\cdot\boldsymbol{\rho})} \left[\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{Rk}} \sin\xi\, \hat{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\rho}} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{k}_\rho}{\mathrm{k}} \cos\xi\, \hat{\mathbf{z}}\right] \quad , \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{k} = \mathbf{k_\rho} + \frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{R}}\mathbf{z}\,, \quad \mathbf{k_\rho}\cdot\mathbf{z} = 0, \quad \xi = \frac{n\pi}{R}z\,, \quad k_z = \frac{n\pi}{R} \quad . \tag{7}$$

Sustituyendo (5) y (6) en la ecuación (1) y usando las expresiones $\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, podemos calcular explícitamente el campo eléctrico **E** y magnético **B** en la región entre las placas.

III. TENSOR DE ESTRÉS DE MAXWELL PROMEDIO

El tensor de estrés de Maxwell se define como [5]

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi}\left[\boldsymbol{EE} + \boldsymbol{BB} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{E^2} + \boldsymbol{B^2})\right] \quad , \tag{8}$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ es un tensor simétrico de segundo rango que contiene toda la información de la tensión para cualquier plano que "corta" en un punto al objeto material, si $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a un plano que "corta" a un objeto material $\boldsymbol{\sigma} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ nos da el valor de la tensión (fuerza por unidad de área) en la región de "corte" del plano que siente el objeto. El vector de tensión se puede escribir de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma_n} + \boldsymbol{\tau}$ donde $\boldsymbol{\sigma_n}$ es la componente normal de la tensión cuya dirección se encuentra largo del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, y $\boldsymbol{\tau}$ es la componente tangencial de la tensión que se encuentra sobre el plano de corte. En este sentido, usando un plano de "corte" perpendicular a la dirección "i", la componente $\mathrm{T_{ij}}$ con $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}\ (\mathrm{i,j} = \mathrm{x,y,z})$ es la componente tangencial del vector tensión en la dirección "j" y $\mathrm{T_{ii}}$ es la componente normal del vector tensión. Entonces, la fuerza promedio por unidad de área sobre la placa "izquierda" debido a la presencia de la placa "derecha" está determinada por el promedio, sobre las realizaciones del ZPF, de la componente $\mathrm{T_{zz}}$ evaluada en z=0. Dicha componente está dada por

$$\langle \mathrm{T_{zz}} \rangle = \frac{1}{4\pi}\langle E_z^2 + B_z^2 - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\rangle \quad , \tag{9}$$

del cálculo explícito de **E** y **B** obtenemos (en z=0)

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_z^2 \rangle = \sum_k \frac{8\pi\beta c}{L^2 R}\, \frac{k_\rho^2}{k} \quad , \tag{10}$$

$$\langle B_z^2 \rangle = 0 \quad , \tag{11}$$

$$\langle B^2 \rangle = \sum_k \frac{8\pi\beta c}{L^2 R}\, \frac{k^2 + k_z^2}{k} \quad . \tag{12}$$

Sustituyendo en (9) obtenemos

$$\langle \mathrm{T_{zz}} \rangle = -\left[\sum_k 2\, \frac{\beta\omega_k}{L^2 R}\, \frac{k_z^2}{k^2}\right] \ ; \quad \mathrm{z=0} \ , \tag{13}$$

esta última expresión se puede reescribir en la forma

$$\langle \mathrm{T_{zz}} \rangle = -\left[\sum_k 2\, \frac{\epsilon_k}{V}\, \cos^2\theta\right] \ ; \quad \mathrm{z=0} \ , \tag{14}$$

donde $V=L^2R$ es el volumen entre placas y θ es el ángulo que forma **k** con el eje z. La expresión (14) puede ser interpretada como la presión de radiación ejercida sobre la placa izquierda debido a una onda plana con ángulo de incidencia θ, el factor 2 es la contribución de la polarización

que tiene 2 direcciones independientes y los dos factores $\cos\theta$ aparecen porque la componente normal del momento lineal de la radiación sobre la placa es proporcional al $\cos\theta$, lo mismo sucede con el área de la sección transversal efectiva que incrementa el elemento de área A en $(\cos\theta)^{-1}$ respecto al caso de incidencia normal de la onda plana sobre la placa.

Tomando (13) y pasando al límite continuo obtenemos

$$\langle \mathrm{T}_{zz}\rangle = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\beta c}{L^2R}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\iint_{-\infty}^{\infty}dk_x dk_y\,\frac{k_z^2}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\ , \quad (15)$$

usando coordenadas polares e integrando la parte angular

$$\langle \mathrm{T}_{zz}\rangle = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta c}{\pi R}\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2\int_0^{\infty}dk_\rho\,\frac{k_\rho}{\sqrt{k_\rho^2+k_z^2}}\quad , \quad (16)$$

realizando el cambio $k=\sqrt{k_\rho^2+k_z^2}$ obtenemos

$$\langle \mathrm{T}_{zz}\rangle = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi\beta c}{R^3}\,n^2\int_{k_z}^{k_c}dk = -\frac{\pi\beta c}{R^3}\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\ , \quad (17)$$

donde $f(n)=n^2\int_{k_z}^{k_c}dk.$

Es inmediato observar que hemos introducido un corte en la frecuencia $\omega_c = ck_c$ para evaluar la integral, eventualmente tomaremos el límite $k_c\to\infty$. Para calcular la fuerza de casimir debemos tomar en cuenta la presión ejercida sobre la placa debida a la radiación en la región $z<0$ (del lado izquierdo de la placa), esto se obtiene tomando el limite continuo para k_z en (17), entonces

$$\mathrm{F}_C(\mathrm{R}) = -\frac{\pi\beta c}{R^3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(n)-\int_0^{\infty}dn\,f(n)\right]\ . \quad (18)$$

Esta expresión puede ser simplificada usando la fórmula de Euler-McLaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)-\int_0^{\infty}dn\,f(n)=\frac{1}{12}f'(0)-\frac{1}{30(4!)}f^{(3)}(0)+\ldots\ , \quad (19)$$

tomando el límite $k_c\to\infty$ obtenemos la expresión para la fuerza de Casimir

$$\mathrm{F}_C(\mathrm{R}) = -\frac{\pi\beta c}{R^3}\left(\frac{\pi}{120R}\right) = -\frac{\pi^2\beta c}{120R^4}\quad . \quad (20)$$

La expresión obtenida por Casimir es [1]

$$\mathrm{F}_C(\mathrm{R}) = -\frac{\pi^2\hbar c}{240R^4}\quad . \quad (21)$$

Si ajustamos el valor de $\beta=\frac{\hbar}{2}$ en (20) obtenemos la expresión (21), es decir, el promedio de la energía del modo k-ésimo del ZPF clásico debe ser

$$\epsilon_k = \frac{\hbar}{2}\omega_k\quad . \quad (22)$$

Este valor de β no solo es el apropiado para ajustar el valor de la fuerza de Casimir, también es el valor consistente en muchos resultados de la Electrodinámica Estocástica (SED).

IV. Discusión y Conclusiones

En principio, no es necesario el concepto de vacío cuántico para la derivación de la expresión de la fuerza de Casimir. En cambio, podemos usar el concepto de campo de punto cero clásico (ZPF) con energía promedio del modo k-ésimo proporcional a la frecuencia (esto considerando un análisis termodinámico y estadístico del oscilador armónico [7]) siendo el valor de la constante de proporcionalidad $\beta=\frac{\hbar}{2}$. Para obtener este valor de β no se ha hecho ninguna hipótesis del tipo cuántico, es simplemente un ajuste para ser consistente con resultados teóricos y experimentales.
El concepto de ZPF tiene la característica de ser realista y determinista[1] a comparación del concepto de vacío cuántico (partículas virtuales que aparecen y desaparecen de la existencia)

Agradecimientos

J. Avendaño agradece el apoyo proporcionado por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN, y por la COFAA IPN, México.

Referencias

[1] H. B. G. Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates", Proc. K. Ned. Akad. Wet, vol. 51, no. 7, p. 793, 1948.
[2] U. Mohideen and A. Roy, "Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm," Physical Review Letters, vol. 81, no. 21, pp. 4549–4552, 1998.
[3] P. W. Milonni, The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics. Academic Press Incorporated, New York, 1994.
[4] Available: https://www.scientificamerican.com/article/are-virtual-particles-rea/
[5] J. D., Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd edition, Alhambra, 1980.
[6] L. de la Peña and A. M. Cetto, The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic *Electrodynamics* ,Kluwer Academia Publisher, Netherlands, 1996.
[7] T. H. Boyer, "Thermodynamics of the harmonic oscillator: Wien´s displacement law and the Planck Spectrum", American Journal Physics 71, 866, 2003.
[8] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, UNAM-Fondo de Cultura Económica, México, 1991

[1]L. de la Peña lo describe por demás clara en su Introducción a la mecánica cuántica [8], en él dice: "la electrodinámica clásica predice que las partículas cargadas aceleradas emiten radiación electromagnética, por lo cual, al ser cada partícula cargada un radiador elemental, la totalidad de estas partículas que pueblan el Universo producirán en cada punto del espacio un complejo campo de fondo, cuya naturaleza estocástica es evidente precisamente debido al gran número de fuentes independientes que lo producen."

ISSN: 2594-1011

Esparcimiento y resonancia de paquetes de ondas con perfil Gaussiano al colisionar con una barrera (pozo) de potencial

Raymundo A. Hernández, J. Avendaño
Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55254 E-mail: javel@esfm.ipn.mx

Resumen — **Con el propósito de visualizar el fenómeno del esparcimiento cuántico, se resuelve el problema de la incidencia de un paquete de ondas de perfil gaussiano sobre una barrera de potencial (o pozo de potencial) mediante un método de diferencias finitas. Se consideran paquetes de onda con energías promedio, tales que, que permitan observar comportamientos cualitativamente distintos. Se muestra también la evolución temporal de la densidad de probabilidad en el espacio de momentos, la cual permite estudiar la estructura de la resonancia reportada por Goldberg [1] para el caso de la barrera de potencial. Encontramos que en el espacio de momentos la resonancia proviene de las oscilaciones entre dos gaussianas centradas en puntos simétricos respecto al origen. El método en principio puede ser utilizado para potenciales más complicados, como el potencial de doble barrera, pero se observó que las soluciones encontradas se comportan de forma inesperada, concluyendo que un método distinto sería más apropiado para el tratamiento de este y otros potenciales más generales.**

Palabras Clave – **diferencias finitas, ecuación de Schrödinger, esparcimiento, mecánica cuántica, resonancia**

Abstract — **In order to visualize the scattering phenomenon, the problem of the incidence of a wave packet of Gaussian profile on a square barrier potential (or square well potential) is solved by means of a finite difference method. Wave packets with average energies that allow us to observe qualitatively different behaviors are considered. It also shows the temporal evolution of the probability density in the space of moments, allowing to study the structure of the resonance reported by Goldberg [1], for the case of the potential barrier. We found that in momentum space the resonance can be understood as oscillations between two Gaussians centered at points symmetric with respect to the origin. This method can in principle be used with more complex potentials, like the double barrier potential. But in this case it was found that the solutions behave in an unexpected fashion, concluding that a different method would be appropriate to treat this and other more general potentials.**

Keywords — **finite differences, scattering, Schrödinger's equation, quantum mechanics, resonance**

I. Introducción

La solución del problema de esparcimiento por potenciales tipo pozo o barrera es expuesta en un primer curso de mecánica cuántica. Sin embargo, las soluciones encontradas en tales cursos corresponden a estados estacionarios de energía fija (ondas planas), las cuales tiene momento definido a costa de una deslocalización completa en la posición, ésta situación puede resultar artificial y poco ilustrativa para el estudiante.

En este trabajo se presentan, como complemento al tratamiento estándar, soluciones numéricas al problema dependiente del tiempo (no-estacionario) para los casos de potencial tipo pozo y barrera. Se considera energías promedio distintas, las cuales permitan ilustrar comportamientos diferentes.

II. Metodología

Se resuelve numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo mediante el método de diferencias finitas descrito por Goldberg [1], donde el operador de evolución temporal se aproxima en forma tal que se mantenga su carácter unitario. Este se implementó en Matlab, y luego de obtener las distintas soluciones se utiliza la transformada de Fourier discreta para obtener la función de onda en el espacio de momentos, y con esto su densidad de probabilidad asociada.

Posteriormente se estiman los coeficientes de transmisión para los distintos casos, tanto extrapolando el resultado conocido para ondas planas como integrando la densidad de probabilidad sobre las regiones definidas por la presencia del pozo o barrera de potencial luego de que el proceso de colisión ha finalizado. Se observa que para determinados valores de la energía promedio del paquete de ondas se presenta un muy interesante fenómeno de resonancia, el cual se puede entender cualitativamente y cuantitativamente estudiando la evolución de la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones y en el espacio de momentos.

A. Solución para ondas planas

Siguiendo la presentación estándar del problema como la podemos encontrar en McIntyre [2] y Schiff [3], se resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Al resolverla para condición de incidencia de ondas planas por la izquierda, se obtiene que la solución en todo el espacio de las posiciones está dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} & x < a \\ Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x} & -a < x < a \\ Fe^{ik_1 x} & x > a \end{cases} , \quad (1)$$

la región del pozo o de la barrera es $\{x \in \mathbb{R} / -a \leq x \leq a\}$, las constantes *A, B, C, D* y *F* determinan el comportamiento de la función dentro y fuera del pozo (o barrera), y son determinadas por las condiciones de continuidad de la función de onda y su primera derivada. La conservación del flujo de probabilidad permite determinar el coeficiente de transmisión (y por supuesto el de reflexión que es el complemento). En el caso de un potencial tipo pozo:

$$T^{-1}(E) = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} sin^2\left(\frac{2a}{h}\sqrt{2m(E+V_0)}\right) , \quad (2)$$

mientras que para la barrera se obtiene

$$T^{-1}(E) = \begin{cases} 1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} sin^2\left(\frac{2a}{h}\sqrt{2m(V_0-E)}\right) & E \geq V_0 \\ 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} sinh^2\left(\frac{2a}{h}\sqrt{2m(E+V_0)}\right) & E \leq V_0 \end{cases} . \quad (3)$$

B. Método de diferencias finitas

El método numérico utilizado se describe brevemente, relegando el tratamiento detallado a la presentación original de Goldberg, y en su lugar se describe su implementación.

Para resolver numéricamente el problema empezamos por discretizar la función de onda, definiéndola como un arreglo de *n*j* números, donde *n* es el número de pasos en el tiempo y *j* el número de puntos considerados para aproximar la función de onda a un tiempo fijo.

Para convertir la ecuación diferencial original en una ecuación de diferencias finitas discretizamos de forma análoga la segunda derivada de la función de onda que aparece en el Hamiltoniano. Para esto se consideran dos aproximaciones de Taylor de la forma

$$\psi_{j+1} = \psi_j + \epsilon\psi_j' + \frac{1}{2}\epsilon^2\psi_j'' + O(\epsilon^3) , \quad (4)$$

$$\psi_{j-1} = \psi_j - \epsilon\psi_j' + \frac{1}{2}\epsilon^2\psi_j'' + O(\epsilon^3) . \quad (5)$$

Sumando las ecuaciones y despreciando términos de orden superior se tiene

$$\psi_j'' = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right) . \quad (6)$$

Luego de discretizar de forma análoga el potencial a considerar, y considerando una masa *m=1/2* y *ħ=1*, se tiene que la acción del Hamiltoniano en la función de onda está dada por

$$-H\psi_j = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right) - V_j\psi_j . \quad (7)$$

De un primer curso en mecánica cuántica sabemos que la dependencia temporal de la función de onda puede obtenerse mediante el operador de evolución temporal (cuando el hamiltoniano no depende del tiempo):

$$\psi(x,t) = e^{-i(t-t_0)H}\psi(x,t_0) . \quad (8)$$

Truncando la serie de potencia a primer orden en δ se obtiene

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n - i\delta H\psi_j^n . \quad (9)$$

Aplicando esta expresión a las ecuaciones

$$\psi_j^{n+1} = e^{-i\delta H}\psi_j^n , \quad (10)$$

$$\psi_j^n = e^{i\delta H}\psi_j^{n+1} . \quad (11)$$

Obtenemos, para la primera, una expresión explícita para la función de onda al paso *n+1*, pero inestable. De la segunda ecuación obtenemos una expresión que es estable pero implícita y no unitaria.

Por otra parte, la expresión

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}i\delta H\right) / \left(1 + \tfrac{1}{2}i\delta H\right) , \quad (12)$$

para el operador de evolución temporal es unitaria, y la ecuación en diferencias obtenida de utilizar esta aproximación es

$$\psi_{j+1}^{n+1} + (i\lambda - \epsilon^2 V_j - 2)\psi_j^{n+1} + \psi_{j-1}^{n+1} = -\psi_{j+1}^n + (i\lambda + \epsilon^2 V_j + 2)\psi_j^n - \psi_{j-1}^n , \quad (13)$$

es estable e implícita, con $\lambda = 2\varepsilon^2/\delta$. Para resolverla se asume una solución de la forma

$$\psi_{j+1}^{n+1} = e_j^n\psi_j^{n+1} + f_j^n . \quad (14)$$

Sustituyendo esta propuesta en la ecuación original se encuentra

$$\psi_j^{n+1} = \left[2 + \epsilon^2 V_j - e_j^n - i\lambda\right]^{-1}\psi_{j-1}^{n+1} + \left[2 + \epsilon^2 V_j - e_j^n - i\lambda\right]^{-1}(f_j^n - \Omega_j^n) , \quad (15)$$

donde

$$\Omega_j^n = -\psi_{j+1}^n + (i\lambda + \epsilon^2 V_j + 2)\psi_j^n - \psi_{j-1}^n . \quad (16)$$

Comparando con la ecuación inicial concluimos

$$e_{j-1}^n = \left[2 + \epsilon^2 V_j - e_j^n - i\lambda\right]^{-1} , \quad (17)$$

$$f_{j-1}^n = e_{j-1}^n\left(f_j^n - \Omega_j^n\right) . \quad (18)$$

De donde se puede resolver para las cantidades

$$e_j = 2 + e^2 V_j - i\lambda - 1/e_{j-1}^n , \quad (19)$$

$$f_j^n = \Omega_j^n + f_{j-1}^n / e_{j-1}^n . \quad (20)$$

Se observa que hemos suprimido el índice temporal en la expresión para *e* debido a que está expresada en términos de cantidades constantes y para un mismo paso de tiempo.

Las condiciones de frontera,

$$\psi(-a,t) = \psi(a,t) = 0 , \quad (21)$$

se traducen en

$$\psi_0^n = \psi_j^n = 0 . \quad (22)$$

La primera ecuación implica que para *j=1*,

$$\psi_2^{n+1} = (2 + \epsilon^2 V_1 - i\lambda)\psi_1^{n+1} + \Omega_1^n \quad , \qquad (23)$$

lo que permite obtener los valores iniciales para *e* y *f*:

$$e_1 = 2 + \epsilon^2 V_1 - i\lambda \quad , \qquad (24)$$
$$f_1^n = \Omega_1^n \quad . \qquad (25)$$

La segunda ecuación implica que para *j=J-1*,

$$\psi_{J-1}^{n+1} = -f_{J-1}^n / e_{J-1} \quad . \qquad (26)$$

Despejando ψ_j de la propuesta de solución,

$$\psi_j^{n+1} = (\psi_{j+1}^{n+1} - f_j^n)/e_j \quad . \qquad (27)$$

Con lo que podemos construir la función de onda a un tiempo *n+1* a partir de la función de onda al tiempo *n*.

C. *Implementación en Matlab*

Para poder tratar fácilmente los diferentes casos se crean las variables y los parámetros que definen el problema (dimensión de la región a considerar, número de puntos para aproximar la función, número de pasos en el tiempo, posición promedio del paquete Gaussiano, profundidad del pozo, número de onda promedio del paquete Gaussiano, desviación estándar, centro y ancho de la barrera, etc.)

Se crea el vector columna asociado a la función de onda inicial y el potencial a considerar mediante un vector auxiliar.

Se imponen manualmente las condiciones de frontera sobre el perfil inicial. Creamos un arreglo vacío en el cuál se guardarán las funciones de onda calculadas a distintos tiempos. Iniciamos el método definiendo Ω_1 y *e* en términos de la función de onda inicial.

Construimos las *e* restantes iterando, y para cada paso en el tiempo las distintas *f* utilizando las Ω y *e* previamente calculadas.

Con estas cantidades podemos evolucionar en el tiempo el penúltimo punto de la función de onda, y a partir de esto iterar 'hacia atrás' en el espacio para obtener la función onda en el instante siguiente. Después de esto modificamos Ω y repetimos el proceso hasta avanzar el intervalo de tiempo deseado.

D. *Representación en el espacio de momentos*

La función de onda en el espacio de momentos puede obtenerse a partir de su representación en el espacio de posiciones mediante una transformada de Fourier.

Una vez obtenida la solución mediante el método descrito anteriormente se tiene un arreglo de vectores columna que corresponden a la evaluación de la solución en los distintos puntos de la malla espacial para cada paso de tiempo.

Aplicando a cada vector la transformada de Fourier discreta se puede construir un arreglo semejante que corresponda a la evolución de la función de onda en el espacio de momentos.

E. *Cálculo de coeficientes de transmisión y reflexión*

Como ya se mencionó antes, el coeficiente de transmisión para el caso de un pozo o una barrera de potencial está dado por las ecuaciones (2) y (3), en función del número de onda o de la energía. Es posible utilizar este resultado para estimar el coeficiente de transmisión asociado al paquete de ondas haciendo una suma de los coeficientes de transmisión de cada una de las ondas planas que componen al paquete, pesándolos con el respectivo coeficiente que las acompaña en la expansión de la función de onda.

El coeficiente de transmisión también puede ser estimado como la integral de la densidad de probabilidad sobre la región a la derecha de la barrera o pozo, asumiendo que la función de onda está normalizada y que la colisión ha terminado.

F. *Resonancia*

Para la incidencia del paquete de ondas sobre la barrera de potencial se observa un fenómeno de resonancia. Calculando la transformada de Fourier discreta de la función de onda observamos la estructura de la resonancia en términos de ondas planas.

III. RESULTADOS

A. *Pozo de potencial*

Como primera prueba de la correcta implementación del método presentado se reprodujeron los resultados mostrados en Saxon [4]. El primero de estos corresponde a la incidencia del paquete de ondas sobre un pozo cuadrado de potencial descrito por:

Siguiendo el análisis para la correcta convergencia del método [1] se consideraron tres valores para la energía promedio del paquete de ondas: una corresponde a la mitad de la profundidad del pozo, otra a la profundidad del pozo y una más a dos veces la profundidad del pozo. Los resultados se muestran en la Figura 1.

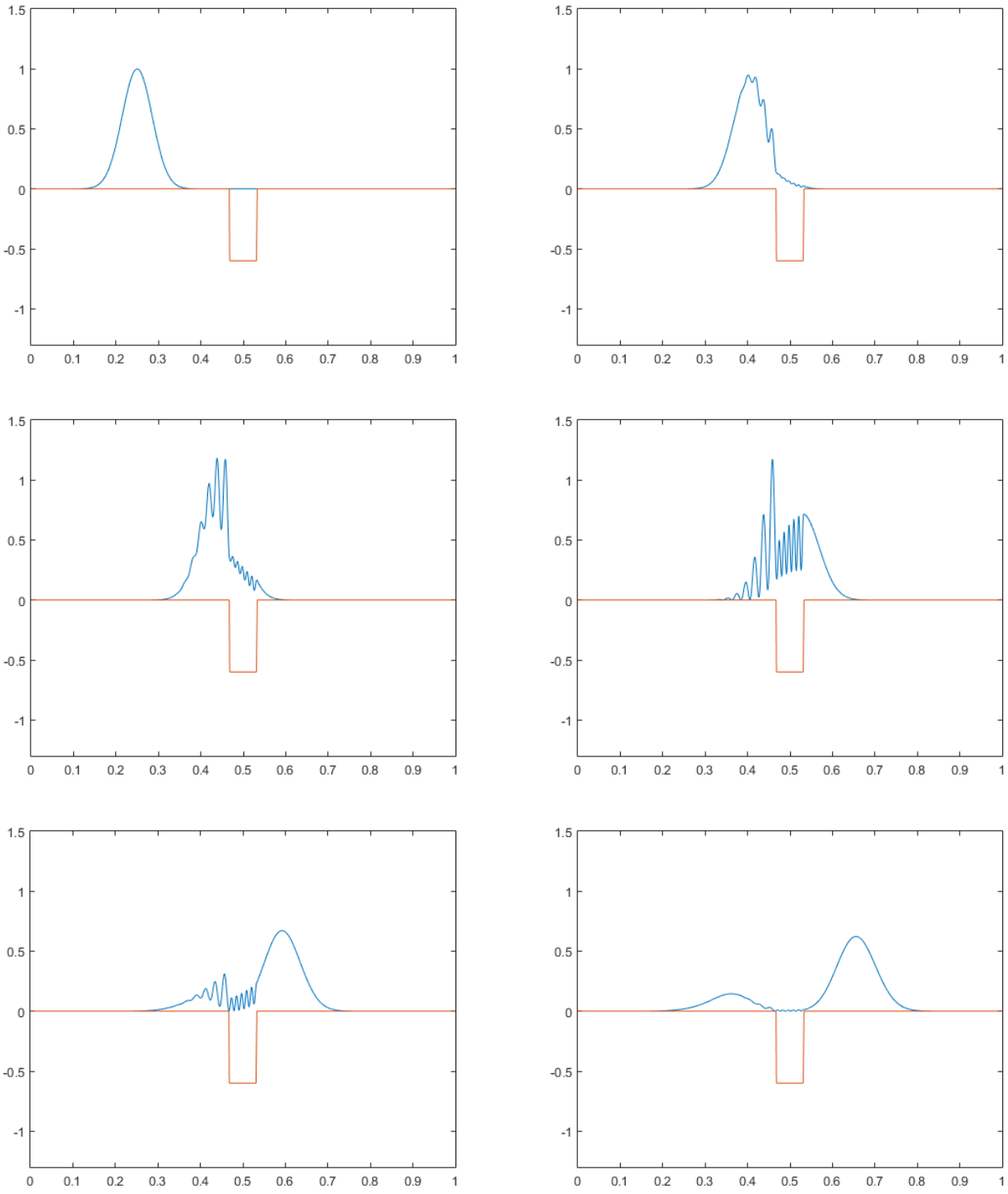


Fig. 1. Esparcimiento por pozo cuadrado de un paquete gaussiano con energía promedio igual a la mitad de la profundidad del pozo.

B. Barrera de potencial

Los resultados para el potencial de barrera de potencial cuadrada se muestran en la Figura 2.

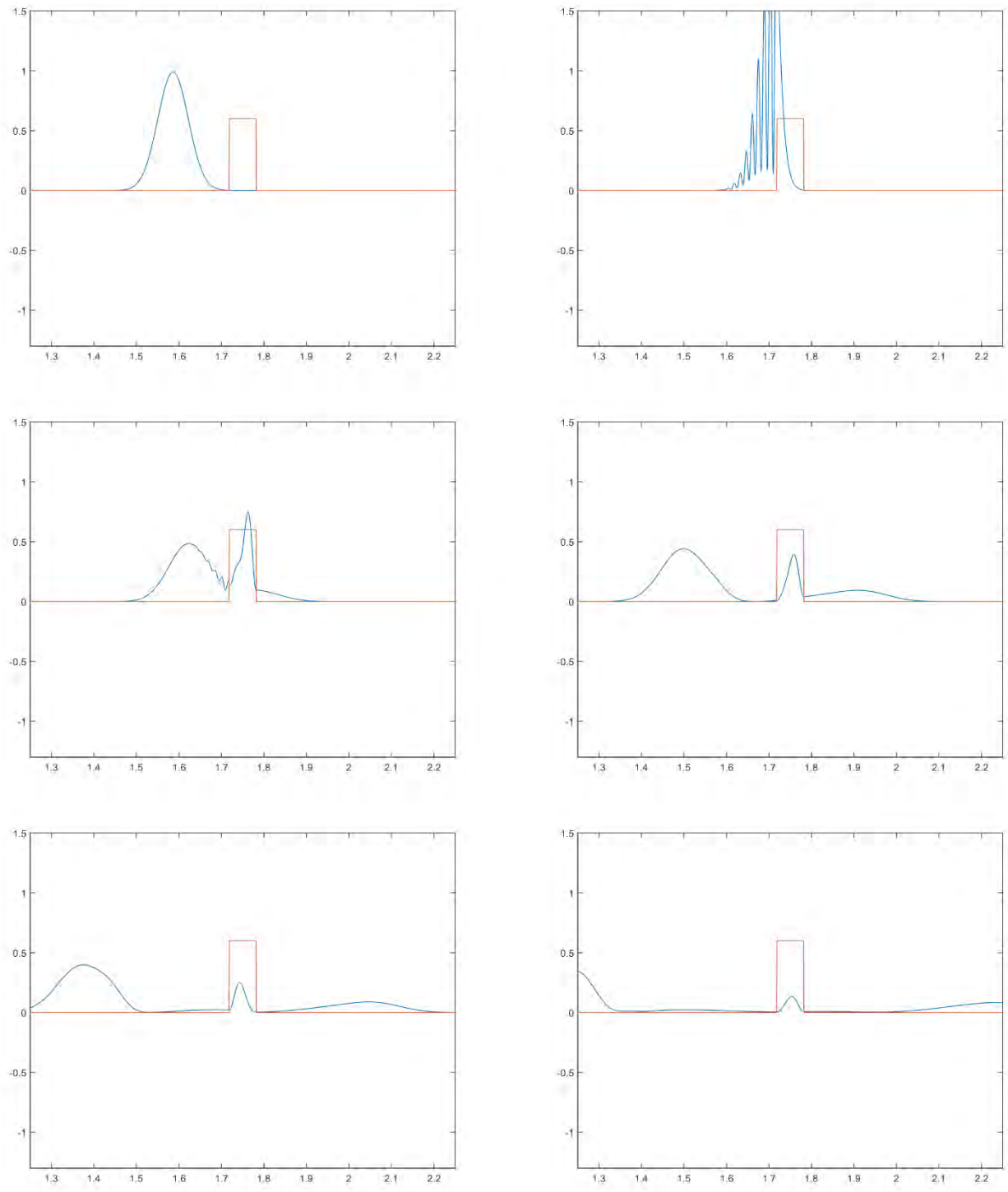


Fig. 2. Esparcimiento por barrera de potencial cuadrada de un paquete gaussiano con energía promedio igual a la altura de la barrera.

C. Resonancia

Se observa que parte de la densidad de probabilidad queda atrapada dentro de la barrera de potencial. El resultado para un paquete con energía promedio mayor se muestra en la Figura 3 (se muestra la densidad de probabilidad, tanto en el espacio de las posiciones como en el espacio de los momentos). En el caso de que la energía promedio del paquete es igual a la altura de la barrera de potencial, este fenómeno de resonancia también se observa (Figura 2).

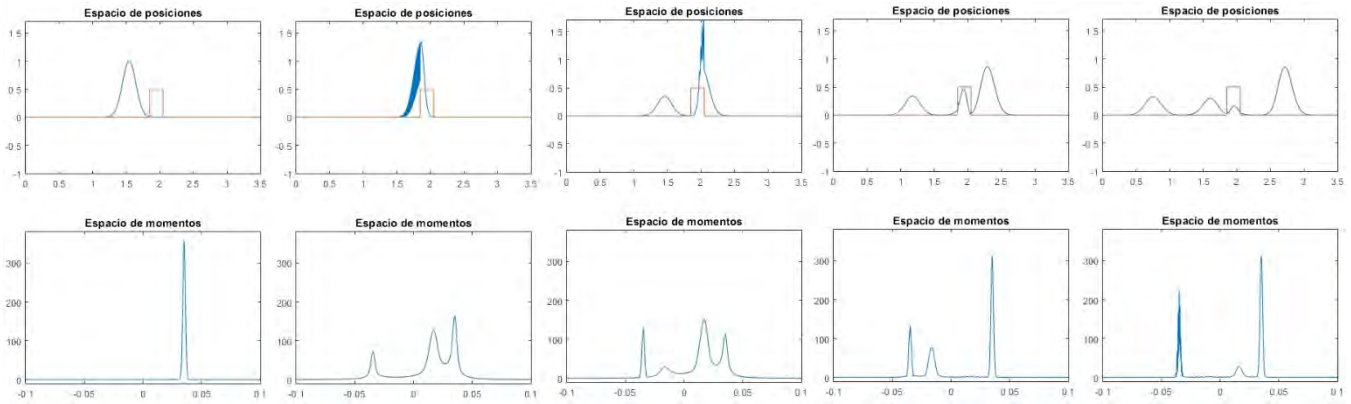


Fig. 3. Evolución en espacio de posiciones y de momentos para energía promedio mucho mayor que la altura de la barrera.

D. Representación en el espacio de momentos

El cálculo de la transformada de Fourier de la función de onda se puede hacer también para el caso de incidencia con energía igual a la mitad de la altura de la barrera. Los resultados para la evolución de las densidades de probabilidad se muestran en la Figura 4.

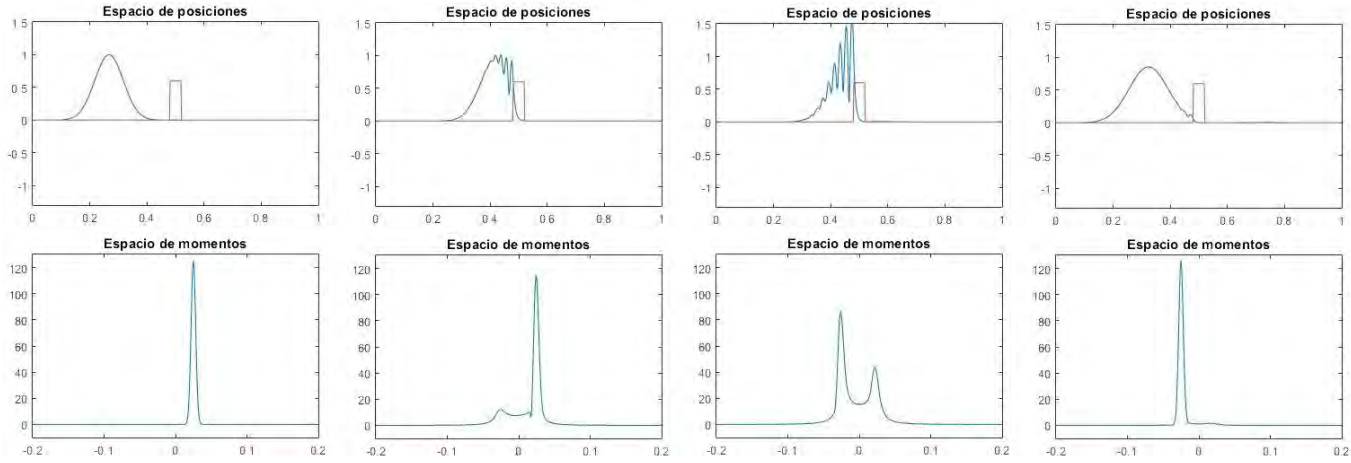


Fig. 4. Evolución temporal de la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones y espacio de momentos para el potencial de barrera cuadrado.

E. Potencial de doble barrera

El método numérico permite considerar en principio potenciales independientes del tiempo arbitrarios, siempre que estos sean únicamente función de la posición y tengan un comportamiento razonable. Como complemento al estudio de este fenómeno de resonancia, se resolvió el problema de incidencia sobre un potencial de doble barrera, para el cual se sabe existen también energías de resonancia. Resultados preliminares se muestran en la Figura 5.

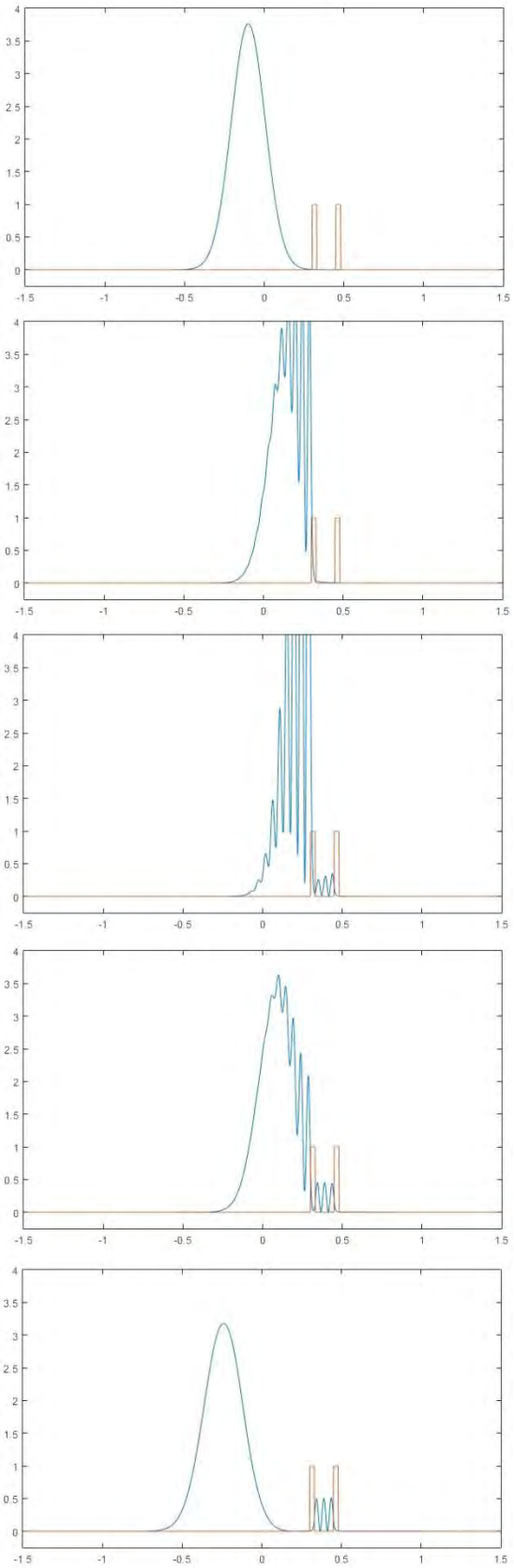


Fig. 5. Evolución temporal de la densidad de probabilidad en el espacio de posiciones para el potencial de barrera doble.

IV. Discusión

Los resultados encontrados por Goldberg [1] se reprodujeron correctamente, y la evolución de las densidades de probabilidad en el espacio de momentos corresponde con lo esperado según se describe en Robinett [5].

La representación en el espacio de momentos muestra que la resonancia observada se compone de ondas planas en direcciones tanto positivas como negativas en aproximadamente el mismo número, presentando oscilaciones que en el espacio de posiciones se observan como los choques de la resonancia con las paredes de la barrera.

Se encontró también que la amplitud de la resonancia es mayor cuando la energía promedio del paquete de ondas es cercana a las energías de resonancia y su dispersión es mayor, pues esto hace que la gaussiana en el espacio de momentos sea más abrupta y una mayor parte de las ondas que componen el paquete logren transmitirse.

Los resultados obtenidos para el problema de doble barrera reproducen el comportamiento esperado según se describe en Brandt [6], pero el método parece no ser apropiado para el caso, pues, si bien la evolución temporal presenta comportamientos cualitativamente correctos, estos muestran cierta irregularidad que atribuimos a problemas de convergencia del método.

V. Conclusiones

El tratamiento numérico del problema de esparcimiento por potenciales simples permite visualizar el fenómeno de esparcimiento en una manera más natural, pues permite considerar la incidencia de paquetes de onda con perfil gaussiano, a diferencia del tratamiento tradicional en términos de ondas planas que el estudiante puede encontrar artificial, y evidencia el papel de la dependencia temporal en el proceso.

En el caso del potencial de barrera se observa que para paquetes de ondas con determinadas energías promedio ocurre un fenómeno de resonancia, en el que parte de la densidad de probabilidad queda atrapada dentro de la barrera durante un tiempo mayor a la duración de la colisión.

La representación de la función de onda en el espacio de momentos permite entender en términos de ondas planas la composición del paquete gaussiano antes y después de la colisión, así como la de la resonancia, la cual se observa que rebota entre las interfaces de la barrera, dejando escapar una parte de la probabilidad en cada colisión hasta desaparecer.

El coeficiente de transmisión calculado para el paquete de ondas difiere del obtenido para una onda plana con longitud de onda igual a la longitud de onda promedio del paquete. Esto debido a que la función de onda está formada por ondas planas con distintas longitudes de onda. Se observó que el coeficiente de transmisión tendía al de la onda plana cuando la desviación estándar incrementaba, como es de esperarse.

El mismo método numérico permite tratar con potenciales distintos, entre ellos el de doble barrera, pero el comportamiento de las soluciones sugiere que se utilice un método distinto.

AGRADECIMIENTOS

J. Avendaño agradece el apoyo proporcionado por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN, y por la COFAA IPN, México.

REFERENCIAS

[1] A. Goldberg, H. M. Schey and J. L. Schwartz, "Computer-Generated Motion Pictures of One-Dimensional Quantum-Mechanical Transmission and Reflection Phenomena" American Journal of Physics 35, 177.
[2] McIntyre, D., Manogue, C. & Tate, J. (2012). Quantum mechanics: a paradigms approach. Boston: Pearson.
[3] Schiff, L. (1968). Quantum mechanics. New York: McGraw-Hill.
[4] Saxon, D. (2012). Elementary quantum mechanics. Mineola, N.Y: Dover Publications, Inc.
[5] Robinett, R. (1997). Quantum mechanics: classical results, modern systems, and visualized examples. New York: Oxford University Press.
[6] Brandt, S. & Dahmen, H. (2012). The picture book of quantum mechanics. New York, NY: Springer.

ISSN: 2594-1011

Instrumentación para la observación y registro de fenómenos de clima espacial en diferentes regiones del espectro electromagnético

J. Gama Vázquez[1], M. Tufiño Velázquez[1], B. L. Moreno Ley[2], M. Morales Reséndiz[2]
[1]Escuela Superior de Física y Matemáticas - IPN, Ciudad de México, México
[2]Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Zacatenco - IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55343 E-mail: jgamav3@gmail.com

Resumen — **Se presentan los instrumentos para el monitoreo del clima espacial y los primeros resultados obtenidos. El espectrómetro HIFSE permite detectar ráfagas solares de radio como estructuras que evolucionan en el espacio de frecuencia. El monitor SuperSID registra llamaradas a través del seguimiento de ondas de muy baja frecuencia. El sistema optoelectrónico OPESSO permite observar y registrar manchas, prominencias y filamentos. El sensor GBM realiza mediciones del campo magnético terrestre. Con la interpretación y corroboración de los datos obtenidos se concluye la detección exitosa de diferentes fenómenos de la actividad solar.**

Palabras Clave – **Clima espacial, efecto Dellinger, eyecciones de masa coronal, ionósfera, llamaradas, manchas, prominencias, ráfagas.**

Abstract —**The instruments for space weather monitoring and the first results obtained are presented. HIFSE spectrometer allows the detection of solar radio bursts as structures that evolve in the frequency space. The SuperSID monitor registers flares through the tracking of very low frequency waves. OPESSO optoelectronic system allows to observe and register sunspots, prominences and filaments. The GBM sensor measures Earth's magnetic field. With the interpretation and corroboration of the obtained data, the successful detection of different solar activity phenomena is concluded.**

Keywords — **Burst, coronal mass ejection, Dellinger effect, flare, ionosphere, prominence, space weather, sunspot.**

I. Introducción

El estado de las condiciones del medio interplanetario sujetas a la actividad solar se conoce como clima espacial. El campo de la ciencia homónimo estudia los fenómenos solares que afectan a la Tierra y a las actividades humanas [1]. El sol inactivo presenta el nivel mínimo de emisión de energía debida a la radiación como un cuerpo negro, dada por la Ley de Radiación de Planck en (1),

$$I(\nu, T) = 2h\nu^3/[c^2(\exp(h\nu/kT)-1)] \quad (1)$$

donde I es la radiancia espectral, ν la frecuencia, T la temperatura, h la constante de Planck, c la velocidad de la luz, y k la constante de Boltzmann. La actividad solar la constituyen los procesos radiativos no térmicos, los cuales emiten principalmente en el infrarrojo y con una intensidad superior a la que describe la ecuación (1) para la temperatura en la superficie del sol (5800 K). Estas emisiones se deben principalmente a la radiación de sincrotrón, de frenado y a las emisiones de plasma por ondas de Langmuir [2]. Asumiendo un modelo de densidad de electrones en la corona se establecen cotas superiores e inferiores para las frecuencias que emite cada proceso y se asocian con diferentes fenómenos solares. La Tabla 1 presenta la clasificación de los principales tres tipos de ráfagas de radio y se describen sus características, el rango de frecuencias en el que ocurren y los fenómenos con que se asocian [3].

Otros fenómenos de la actividad solar, que también se deben a la interacción de la materia con el campo magnético, se acompañan de emisiones en el ultravioleta, rayos X y γ, los cuales eventualmente pueden alterar el contenido total de electrones en las diferentes capas de la ionósfera terrestre [4]. Este proceso está descrito por el efecto Dellinger que es una consecuencia directa de la cuantización de la energía E de los fotones, dada por (2), y de los niveles energéticos de los elementos en la ionósfera.

$$E = h\nu \quad (2)$$

Las llamaradas son explosiones de radiación ionizante que ocurren en la cromósfera y se liberan hacia el medio interplanetario. Es posible detectar su impacto contra la Tierra mediante el monitoreo de ondas de muy baja frecuencia, ya que éstas pueden ser fácilmente reflejadas o absorbidas por las diferentes capas de la ionósfera dependiendo del contenido total de electrones. También en la cromósfera se observan las prominencias, las cuales son nubes de gas que se desprenden por efecto de campos magnéticos intensos. En esta región una de las principales emisiones corresponde a la segunda línea de la serie de Balmer, la cual se conoce como H-α.

Otro fenómeno importante a observar son las manchas, las cuales son regiones obscuras sobre la fotósfera debido a la alta concentración de campo magnético que impide el flujo de energía por convección, causando una diferencia de temperatura con el resto de la superficie, lo que provoca que la mancha emita menos fotones. Se distinguen tres zonas en

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, como proyecto de desarrollo tecnológico o innovación para alumnos del IPN bajo el título "Monitoreo de Clima Espacial".

una mancha: umbra, penumbra y *plage*. Para poder contar con un índice de la actividad magnética solar se utiliza la clasificación de Zürich y el número internacional de manchas (número de Wolf), dado por (3),

$$N_W = \kappa\,(10N_G+N_M) \quad (3)$$

donde N_W es el número de Wolf, κ el factor del observatorio, N_G el número de grupos y N_M el de manchas.

Las eyecciones de masa coronal son parcelas de plasma y campo magnético que se liberan al medio y alcanzan velocidades de hasta 1400 km/s. Se detectan en los coronógrafos como estructuras nuevas y discretas; si arriban a la Tierra como eyecciones de masa coronal interplanetarias se pueden detectar con magnetómetros [5].

Todos los fenómenos anteriormente descritos ocurren de manera periódica siguiendo al ciclo solar que dura en promedio doce años, presentando un máximo y un mínimo de ocurrencia. Las ráfagas y las llamaradas pueden interferir en las telecomunicaciones, alterar el sistema de GPS y afectar severamente la electrónica de los satélites; mientras que las eyecciones coronales de masa tienen el potencial para generar una tormenta geomagnética y dañar la red eléctrica. Por estos motivos es necesario contar con un servicio de monitoreo y predicciones del clima espacial para poder emitir alertas que protejan la infraestructura tecnológica y coadyuven en materia de protección civil.

TABLA I.
CLASIFICACIÓN DE LAS RÁFAGAS SOLARES DE RADIO

Tipo	Características	Rango de frecuencias	Fenómenos asociados
II	Ráfaga lenta usualmente acompañada con segundo armónico (3-30 minutos).	20 – 150 MHz	Llamaradas, emisión de protones, ondas de choque.
III	Ráfaga rápida. Puede ocurrir aisladamente (1-3 segundos), en grupos (1-5 minutos) o en tormentas (minutos - horas).	10 kHz – 1GHz	Regiones activas, llamaradas.
IV	Ráfaga lenta en continuos de banda ancha. Puede ser estacionaria (horas – días) o móvil (30 minutos – 2 horas).	20 – 400 MHz (estacionaria) 25 – 200 MHz (móvil)	Prominencias eruptivas, emisión de protones.

II. METODOLOGÍA

A través del monitoreo de señales en diferentes regiones del espectro electromagnético se observan y registran los fenómenos de clima espacial. Los instrumentos requeridos para tal fin se describen en los apartados de esta sección.

A. HIFSE (High Frequency Solar spEctrometer)

El *Espectrómetro Solar de Alta Frecuencia* es un radiotelescopio que cubre las bandas de 150kHz a 240MHz y de 420MHz a 1.9GHz. Se utiliza una antena tipo *yagi* como receptor y un radio definido por software para la adquisición y filtrado de los datos. Se observa principalmente en ventanas asignadas a la radioastronomía en el Cuadro Nacional de Atribución de Frecuencias y se mide la densidad de flujo en diferentes bandas, obteniendo espectrogramas con los cuales se puede observar y registrar firmas de los tres principales tipos de ráfagas.

B. SuperSID (Super Sudden Ionospheric Disturbances Monitor)

El *Super Monitor de Disturbios Ionosféricos Repentinos* fue diseñado y construido en el Centro Solar de la Universidad de Stanford y fue adquirido mediante un programa de colaboración. Se construyó una antena tipo *loop* hexagonal como receptor. La señal se envía al monitor, el cual dispone de cinco canales para sintonizar ondas de muy baja frecuencia. Tras un proceso de filtrado digital se registra la fuerza electromotriz inducida por cada onda y se observa que su variación en el tiempo obedece a lo predicho por el efecto Dellinger. Cuando una llamarada impacta contra la Tierra se observa un incremento súbito en la serie de tiempo.

C. OPESSO (OPto-Electronical System for Solar Observation)

El Sistema Opto-electrónico para la Observación Solar es un conjunto de filtros (una película polarizada y un etalón) que se acopla a un telescopio refractor para observar al sol en la región del visible y en la línea H-α (656.3 nm ± 0.1 nm), revelando la fotósfera y la cromósfera, respectivamente. Con una cámara CMOS se obtienen imágenes para estudiar el origen, evolución y vínculo de manchas, granulación, ráfagas, ondas de Moreton, filamentos y prominencias.

D. GBM (Ground-Based Magnetometer)

El *Magnetómetro Basado en la Tierra* es un sensor de campo magnético que realiza mediciones en tres direcciones ortogonales y permite obtener registros para estudiar los efectos de una eyección coronal de masa sobre el campo magnético terrestre al nivel de la superficie. Se tiene una resolución de ±2 mG en un rango de 8 G.

III. RESULTADOS

En los siguientes apartados se presentan e interpretan los resultados obtenidos con la operación de los instrumentos.

A. HIFSE

Los espectrogramas que se obtienen de HIFSE son gráficos de intensidad contra frecuencia contra tiempo, donde la

intensidad está representada mediante un código de colores. La figura 1 muestra uno de estos espectrogramas. El color amarillo corresponde con una intensidad baja de la señal, mientras que una coloración más roja corresponde a una intensidad alta. Las líneas horizontales continuas y rojas son estaciones de radio. Las líneas verticales dispersas conforman un grupo de ráfagas tipo III. Esto se deduce de observar que se trata de un grupo de ráfagas dentro de la banda de 10 kHz – 1 GHz, con una duración de entre 1 y 5 minutos. El resto del gráfico se considera el radio de fondo.

Otra observación interesante que se puede hacer con HIFSE es el cambio en el flujo de radio natural a lo largo del día como consecuencia del paso del sol sobre la bóveda celeste, el cual se observa como un oscurecimiento del radio de fondo.

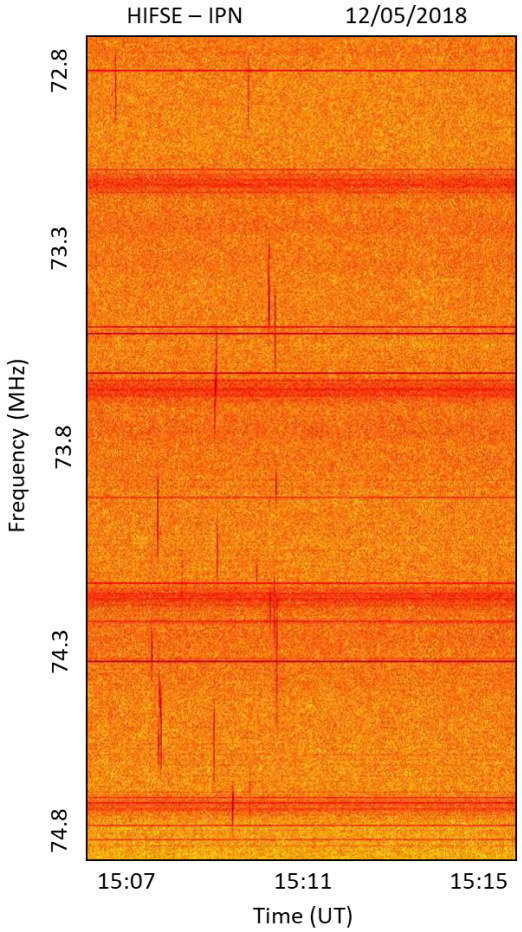


Fig. 1. Espectrograma tomado con HIFSE. Se observan emisoras de radio artificiales (líneas rojas horizontales) y un grupo de ráfagas de radio solares tipo III (líneas rojas verticales).

B. SuperSID

Las series de tiempo que se obtienen del SuperSID permiten hacer un seguimiento de la densidad de electrones en la ionósfera a través de las ondas de muy baja frecuencia. La figura dos muestra la serie de dos canales de frecuencias distintos. Se grafica el mismo intervalo de tiempo y en ambos casos se observa la firma típica de las llamaradas: un incremento súbito de la fuerza electromotriz inducida por la señal, un periodo de tiempo corto en el cual la señal se mantiene alta, para después decaer exponencialmente hasta el estado base. Todo ello dentro de un intervalo de tiempo de más de dos horas.

C. OPESSO

En la figura 3 se muestra una imagen del sol compuesta con los dos filtros. En la parte superior se observa con el filtro de hidrógeno-alfa y se puede apreciar una prominencia cerca del polo y la granulación sobre la superficie; esta imagen es la composición de 14 fotogramas. En la parte inferior, se observa al sol en el visible y se puede apreciar un

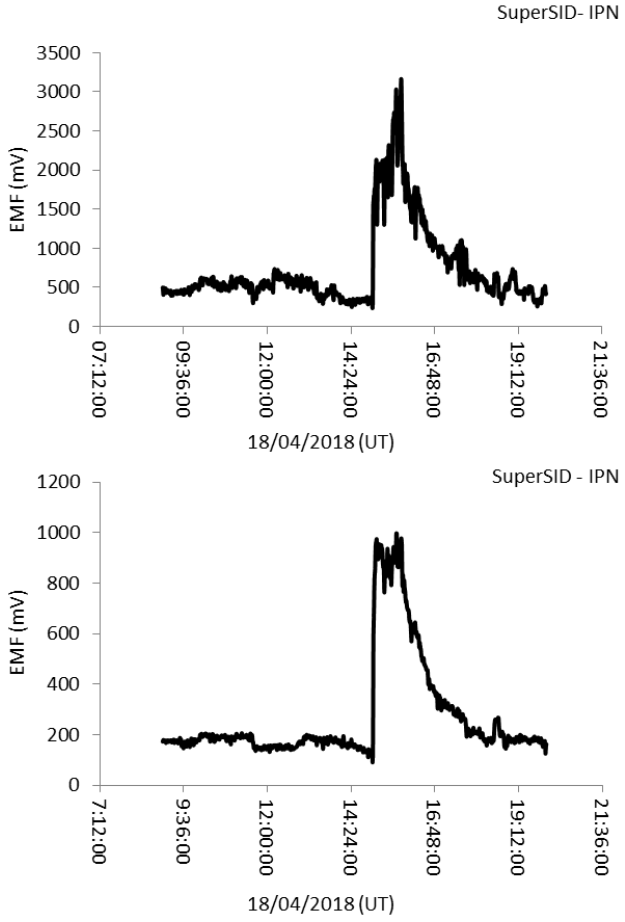


Fig. 2. Series de tiempo del monitoreo de la onda de 19.8 kHz (arriba) y de 24.0 kHz (abajo). En ambos casos se observa que la fuerza electromotriz inducida presenta un incremento súbito alrededor de las 15:00 horas del tiempo universal, permanece en niveles altos y después comienza a decrecer. Tal firma se debe al impacto de una llamarada contra la Tierra.

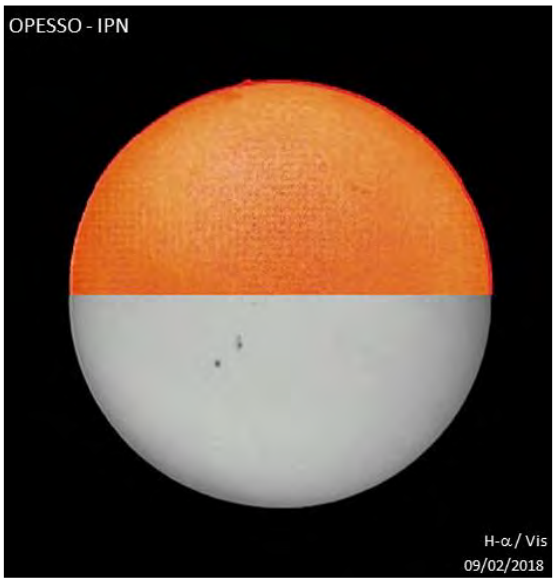


Fig. 3. Composición de dos fotografías tomadas con el filtro H-α (arriba) y de luz visible (abajo). Se puede observar una prominencia y un grupo de manchas, así como la granulación.

conjunto extendido de manchas, la cual es una composición de 5 fotogramas. Es importante hacer notar que el conjunto de manchas es un dipolo magnético y que su inclinación respecto al ecuador se debe a la rotación diferencial del sol. Así mismo, se aprecia el obscurecimiento del limbo.

D. GBM

Las mediciones que realiza GBM permiten observar el estado del campo magnético en sus tres componentes (*x*, *y*, *z*) y en la resultante. El eje *x* corresponde con el eje oeste-este; el *y* con el sur-norte; y el *z* con el perpendicular al plano local. Hasta el momento no ha habido eventos significativos, así que no se cuenta con registro de algún evento fuera de las variaciones normales a lo largo del día y la noche, como se describe en la figura 4.

IV. DISCUSIÓN

La interpretación de los resultados anteriores se basa en la teoría que describe a los fenómenos y a los instrumentos. Para comparar los datos obtenidos y comprobar la interpretación se consultaron los registros publicados por el Centro Nacional de Predicciones de Clima Espacial de Estados Unidos y por el Centro de Datos de la Influencia Solar del Observatorio Real De Bélgica. A continuación se describen las principales observaciones:

1. La ráfaga de radio detectada el 12/05/2018 a las 15:00 horas fue vista por el espectrómetro CALLISTO del Observatorio Real de Bélgica como un incremento en el flujo del radio en la banda de 60-90 MHz [6].
2. La llamarada del 18/04/2018 fue registrada por el satélite GOES de la NASA como un incremento en el flujo de rayos X [7].

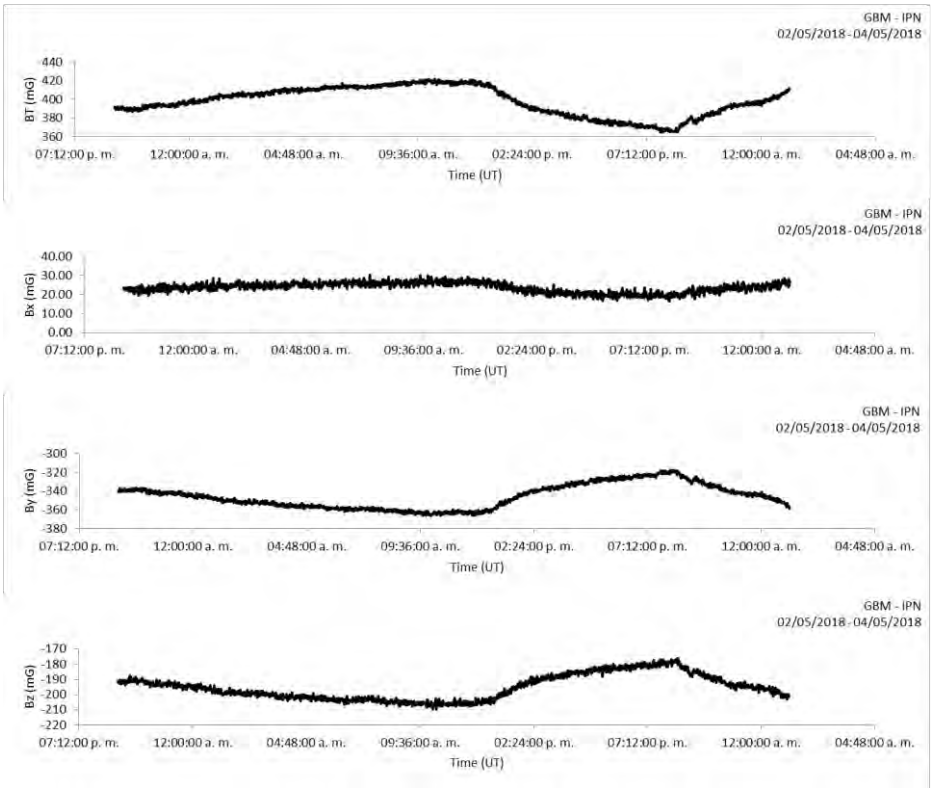


Fig. 4. Series de tiempo del monitoreo del campo magnético. De arriba hacia abajo: Mediciones en la resultante, en el eje *x*, *y* y *z*. La tendencia general es que el campo magnético tome valores superiores a 400 mG durante el día, y menores a 400 mG durante la noche, de manera casi oscilante.

3. Las manchas y prominencias del 09/02/2018 fueron registradas por la Tabla Solar Ecuatorial de Uccle del Observatorio Real de Bélgica [8].
4. Diferentes magnetómetros basados en la Tierra de la NOAA registran las mismas oscilaciones características del campo magnético a lo largo del día [7].

De esta manera se corrobora que las observaciones realizadas con los instrumentos del proyecto de Monitoreo de Clima Espacial fueron exitosas y arrojan datos confiables. Los siguientes pasos en esta investigación serán el registro y análisis de más eventos para poder establecer vínculos entre los diferentes fenómenos.

V. Conclusiones

De los resultados analizados y discutidos en las secciones anteriores se concluye:

1. La implementación de instrumentación radioastronómica permite estudiar fenómenos de clima espacial para conocer la actividad solar.
2. Las ráfagas solares de radio generan estructuras que evolucionan en el espacio de frecuencia. De acuerdo con sus características se puede inferir el fenómeno que las provocó.
3. Las llamaradas solares incrementan la densidad de electrones en la ionósfera terrestre y se pueden detectar a partir del monitoreo de la energía de las ondas de muy baja frecuencia.
4. Observar al sol en el visible y en la línea H-α permite registrar las manchas en la fotósfera y las prominencias y filamentos en la cromósfera para obtener otros índices de la actividad magnética solar.
5. El campo magnético de la Tierra varía de manera periódica, alcanzando valores máximos durante el día y valores mínimos durante la noche.

Agradecimientos

Agradecemos a la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional por el apoyo para instalar los instrumentos y las facilidades para operarlos, en particular al personal del Departamento de Informática. También a la Secretaría de Investigación y Posgrado por el seguimiento y apoyo al proyecto. Agradecemos al equipo del Observatorio Real de Bélgica por su capacitación y asesoría para el desarrollo del proyecto.

Referencias

[1] P. O. Taylor, “Observing the Sun”, Cambridge Press, Reino Unido, 1998.
[2] V. V. Zheleznyakov, “Radio emission of the sun and planets”, Pergamon Press, Reino Unido, 2011.
[3] R. Behlke, “Solar radio bursts and low frequency radio emissions from space”, IRF Scientific Report 275, Swedish Institute of Space Physics, 2001.
[4] D. Scherrer, “Research with Space Weather Monitor Data”, Stanford Solar Center, Estados Unidos, 2015.
[5] N. Gopalswamy, “Properties of interplanetary coronal mass ejections”, NASA Goddard Space Flight Center, Estados Unidos, 2006.
[6] Página web disponible: http://sidc.be/humain/callisto_archives.php
[7] Página web disponible: https://www.swpc.noaa.gov/
[8] Página web disponible: http://sidc.be/uset/

ISSN: 2594-1011

Algunas propiedades físicas de la voz humana y de su percepción

José Antonio Peralta y Porfirio Reyes
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono 5729-6000 Ext. 55007 E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se analizan en este trabajo algunas de las propiedades físicas de la voz humana así como del oído. Se destaca el hecho de que el medio de trasmisión natural de la voz sea el aire por la banda tan ancha de este medio para trasmitir las diferentes frecuencias que componen a la voz. Asimismo se hace notar la potencia tan pequeña que se gasta en la generación de sonidos, y las propiedades intrínsecas de las ondas para sortear los obstáculos que se interpongan entre el emisor y el receptor. En cuanto a la voz humana se señala que su amplio rango de frecuencias permite que la comunicación se logre pese a la diversidad de situaciones en que se habla y se escucha. Un aporte sustancial de este trabajo es el de mostrar que en una palabra compuesta de 2 o más sílabas es necesario que entre sílaba y sílaba exista un tiempo de relajación del sistema auditivo para que los sonidos de las sílabas sean percibidos adecuadamente.**

Palabras Clave – **Sonido, voz humana, medio de trasmisión**

Abstract — **Some of the properties of the human voice as well as the ear are analyzed in this work. The fact that the natural transmission medium of the voice is the air through the wide band of this medium to transmit the different frequencies that compose the voice is highlighted. It also notes the power so small that is spent on the generation of sounds, and the intrinsic properties of the waves to overcome the obstacles that stand between the transmitter and the receiver. As for the human voice, it is pointed out that its wide range of frequencies allows communication to be achieved despite the diversity of situations in which it is spoken and heard. A substantial contribution of this work is to show that in a word composed of 2 or more syllables is necessary that between syllable and syllable there is a relaxation time of the auditory system so that the sounds of the syllables are properly perceived.**

Keywords — **Sound, human voice, transmission medium**

I. Introducción

La voz humana es de manera innata la principal forma de comunicación entre los seres humanos. Podemos enviar información a nuestros semejantes mediante la pura entonación de los sonidos, aunque sin habla, mediante gestos faciales o mediante gestos corporales, pero ninguno de estos medios es tan eficaz por su riqueza de contenido, por su capacidad de trasmitir matices muy finos de información, o por lograr la comunicación explícita de nuestros pensamientos y estados de ánimo, de una manera tan adecuada como el lenguaje verbal de la voz humana. Por este tipo de virtudes es necesario hacer una mínima exposición de sus propiedades físicas ya que cierta información básica sobre estas propiedades puede ser de interés tanto a especialistas como a la gente común y corriente.

II. El consumo mínimo de energía por la voz humana

Las ondas sonoras generadas por la voz humana deben trasmitirse a nuestros semejantes en general por el medio que de manera natural nos separa, es decir, el aire. En efecto, el aire trasmite los sonidos mediante variaciones de su presión o densidad que son de magnitudes increíblemente pequeñas, así, el rango de intensidad energética transmitida va desde los 10^{-12} w/m^2, hasta 1 w/m^2 [1] para las intensidades extremas. Desde luego que la intensidad sonora puede salirse de este rango pero entonces o es inaudible o es dañina. Estas intensidades corresponden en términos técnicos a un rango que va de los 0 a los 120 decibeles los cuales se definen como [1]

$$\mathrm{NdB} = 10 \log_{10} (I/I_0) \qquad (1)$$

En donde I_0 es la intensidad de referencia, esto es la mínima intensidad audible que es de 10^{-12} w/m^2, e I es la intensidad que se quiere medir en decibeles.

Cuando hablamos en una calle no tan ruidosa la intensidad de nuestra voz corresponde aproximadamente a una intensidad de 10^{-5}w/m^2 o sea 70 dB, y en un ambiente silencioso puede ser de una millonésima de w/m^2, esto es 60 dB [2]. Esto quiere decir que para comunicarnos y desatar una conducta en nuestro interlocutor, como por ejemplo, darle la instrucción de que corra, utilizamos ondas de una bajísima energía por los cual hablar no implica un desgaste excesivo. Es notable este hecho ya que pertenece al tipo de acciones que para poner en acción grandes cantidades de energía se valen de una señal energética prácticamente nula. Por ejemplo, a nivel muscular, una señal de voltaje de una energía tan pequeña que ni siquiera es tomada en cuenta por los investigadores de la conducción nerviosa, puede dar lugar a que entren en acción músculos que despliegan una potencia de decenas de watts; una orden verbal dada por un

capataz a una cuadrilla de trabajadores para que derrumben con su pura fuerza física una barda significa que una señal de millonésima de watt pone en acción potencias de miles de watts.

III. La trasmisión de la voz humana en el aire

Se pueden enviar mensajes directos o cifrados por medio de ondas en medios más densos que el aire; madera, metal, acrílico, por ejemplo, y de hecho las señales acústicas viajarán más rápido y llegarán a su destino con mayor energía; es por esta propiedad de que los medios sólidos trasmiten muy bien cierto tipo de vibraciones que, por ejemplo, se cuenta que los indios de Norteamérica, para detectar el acercamiento de manadas de búfalos, pegaban sus oídos al suelo para detectar el golpeteo de cientos de patas sobre el piso antes de que estuvieran al alcance de su vista. En pruebas de trasmisión de sonidos en medios sólidos realizadas en este laboratorio, se ha encontrado que, en efecto, las señales auditivas se trasmiten con mayor intensidad [3]. Para verificar esto se provoca un sonido en el extremo de una barra sólida de 1.5 m de longitud, hecha de diferentes materiales tales como acrílico, madera y fierro, y se registra de 2 maneras: 1) con un micrófono pegado a la cara opuesta en la que mediante un rasgueo con una punta de metal se producía un sonido, y 2) y con el mismo micrófono pero registrando los sonidos trasmitidos por el aire, tal como se muestra en la figura 1. En la figura2 se muestran algunos de los registros. En la figura 3 por otra parte se muestra el análisis de Fourier de las señales registradas.

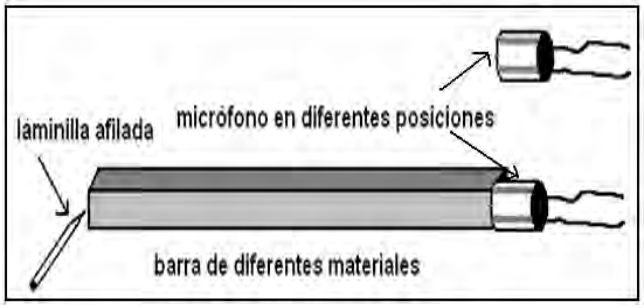


Figura 1. Arreglo experimental para registrar el sonido trasmitido a través de una barra de diferentes materiales y directamente a través del aire.

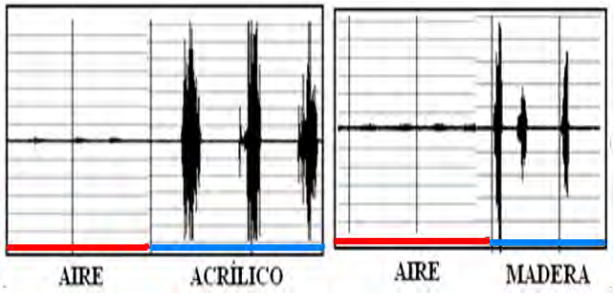


Figura 2. Trasmisión del sonido en diferentes medios registrado con la misma escala de voltajes

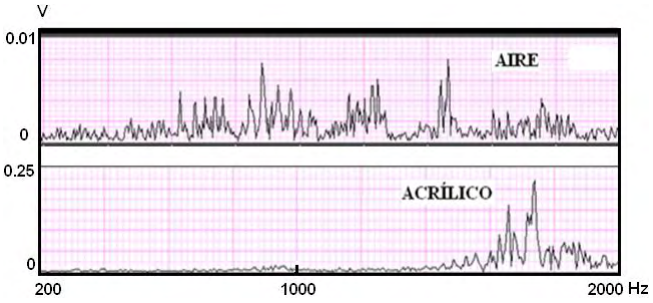


Figura 3. Espectro de frecuencias de la misma señal trasmitida en el aire y en acrílico.

Lo que se observa claramente es que en el aire es mayor la riqueza de frecuencias del sonido que logran trasmitirse, mientras que los diferentes materiales se comportan como un filtro muy selectivo que en algunos casos solo deja pasar ciertas frecuencias, sin embargo, todas ellas con una mucha mayor amplitud que en el aire, es decir, que el aire es un muy buen conductor de diferentes frecuencias pero con poca energía, mientras que los materiales sólidos pueden ser muy selectivos en las frecuencias transmitidas pero muy eficientes en cuanto al transporte de energía. Estos ejemplos nos muestran que una de las grandes ventajas del aire (que es nuestro medio de comunicación más natural por ser el más inmediato ya que en él estamos sumergidos desde nuestro nacimiento) es la virtud de no filtrar en campo abierto el contenido de frecuencias de las señales verbales trasmitidas, y al mismo tiempo ser activado usando energías muy bajas. Como analizaremos después, dada la riqueza de frecuencias de una señal verbal, esto permite que una determinada información sonora se trasmita a través de diferentes medios y de diferentes modos, esto es, a través de diferentes bandas de frecuencia y bajo las más diversas situaciones siempre y cuando haya aire de por medio.

IV. Las ventajas de que la voz humana tenga un rango amplio de frecuencias

Los individuos se comunican en las más diversas situaciones: cuando están al aire libre, cuando están dentro de espacios confinados como por ejemplo una habitación, cuando se hablan por intermedio de un teléfono, cuando están separados por una pared no tan gruesa, cuando se hablan dentro de un conducto estrecho como puede ser un túnel, etc. Las diferentes condiciones de frontera de las ondas emitidas alteran la amplitud relativa de las componentes de frecuencia, así, una voz no se escucha igual en campo abierto que dentro de un especio pequeño; por otra parte, hablar a través de una pared significa trasmitir la información a través de un canal muy selectivo en cuanto a las componentes de frecuencia. En otras palabras, esto significa que en estos diferentes medios las diferentes frecuencias que componen a la voz se trasmitirán con diferente facilidad; algunas de ellas se atenuarán hasta incluso llegar a desaparecer, otras se reforzarán si el medio

en que se trasmiten las hacen resonar, otros medios dejarán pasar bandas en la zona de frecuencias bajas, otras por el contrario en bandas de frecuencia alta. En resumen, que el timbre, que está caracterizado por el patrón de frecuencias componentes de la voz, se verá sensiblemente alterado. Pese a ello el contenido de los mensajes verbales se trasmitirá en diferentes grados. En efecto la información contenida en un mensaje hablado es múltiple: contiene una información básica, por ejemplo "llegaré a las 5 de la tarde", pero este mensaje básico puede estar cargado de enojo, de tristeza, de alegría, de todos los estados de ánimo que puede experimentar un ser humano, y además debe permitir identificar al hablante. Dependiendo de la banda de frecuencia trasmitida mucha de la información secundaria del mensaje puede difuminarse, sin embargo la información esencial "llegaré a las 5 de la tarde" se conservará indemne. De ahí la diferencia entre los medios de trasmisión de alta fidelidad que trasmiten la información con toda su riqueza de matices, y los medios de banda limitada que empobrecen el mensaje y solo conservan la información básica como por ejemplo hablar por un celular o un teléfono público. En la figura 4 mostramos un ejemplo de la frase "***el oído humano está compuesto de 3 partes básicas***" con 3 diferentes tipos de banda de frecuencias, y sin embargo, pese a que la señal trasmitida tiene notables diferencias, el mensaje básico es legible en los 3 casos.

Por otra parte, dadas las propiedades de una onda el sonido se puede trasmitir simultáneamente por diferentes rutas: si hay un obstáculo entre el emisor y el receptor la onda sonora puede avanzar mediante fenómenos de refracción, de reflexión, o de manera directa [4,5], estas son propiedades de las ondas que le confieren a este medio de comunicación su gran versatilidad adaptándose a las más diversas circunstancias

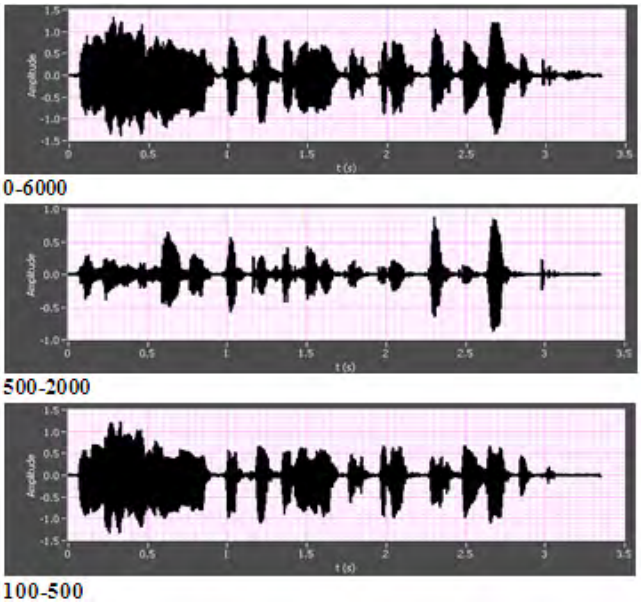


Figura 4. El mismo mensaje trasmitido en diferentes bandas de frecuencia.

V. El oído humano no es un receptor pasivo

A menudo se le compara al sistema de la audición como un sistema pasivo que se limita, al igual que un micrófono acoplado a un amplificador, al registro de las señales sonoras. En realidad las cosas no son así, tal como lo enfatiza el neuro-fisiólogo ruso Alexander. Luria [6], sino que el sistema es un sistema dinámico que modifica sus parámetros para adaptarse al tipo de sonido que quiere detectar, por ejemplo seleccionar una señal de entre una masa de sonidos mezclados. Este es un hecho obvio que en general no es destacado por los estudiosos de la percepción de los sonidos, ya que no consideran el hecho de que usualmente los sonidos a los cuales se les quiere percibir no aparecen solos entre un fondo de silencio, sino dentro de una masa de sonidos mezclados caóticamente. ¿Qué tipo de mecanismos se ponen en acción en el sistema nervioso para qué un hecho que matemáticamente es sumamente complejo, como es el de destacar una señal particular de entre una mezcla de señales, el sistema auditivo lo pueda resolver de forma casi instantánea, por ejemplo reconocer una determinada plática del ruido de fondo de un conglomerado de hablantes en un restaurante o en una fiesta? En la figura 5 mostramos 2 frases diferentes, primero en forma individual y luego mezcladas. Con todo y que en la mezcla de las gráficas es difícil distinguir la contribución individual a la señal resultante, con los analizadores del oído de la mezcla se puede separar voluntariamente con el mínimo esfuerzo la evolución de cada una de ellas.

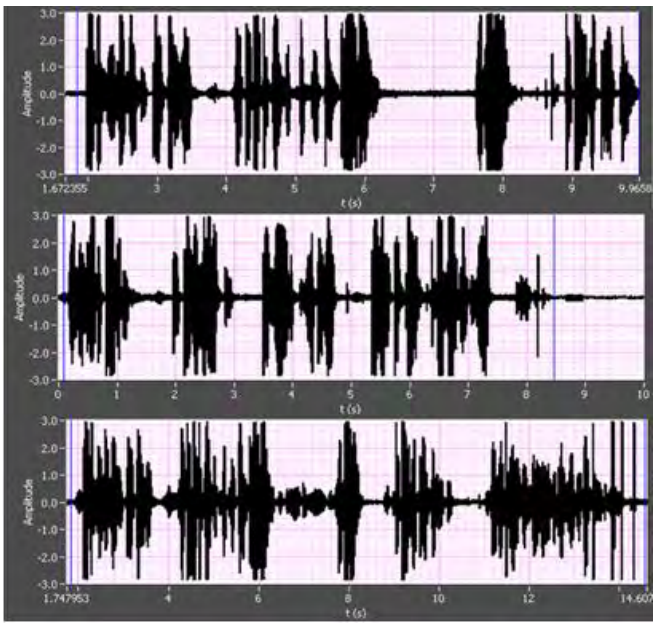


Figura 5. Mensaje 1 en la ventana superior, mensaje 2 en la ventana intermedia, mensajes escuchados simultáneamente en la ventana inferior.

Al parecer los reconocedores de voz, que vienen integrados a los teléfonos celulares, han resuelto este problema ya que

un mensaje corto hablado se transcribe fácilmente, hecho que todo mundo puede comprobar. Sin embargo, si 2 o más mensajes hablados se hacen incidir sobre un celular de manera simultánea, los mensajes capturados pierden coherencia y el dispositivo se detiene. Este problema debe ser estudiado a fondo ya que su comprensión nos puede dar mucha información sobre la forma como opera el cerebros para reconocer discursos coherentes aún dentro de un medio caótico.

VI. La separación temporal suficiente entre sílabas

Una palabra está compuesta de silabas, en principio se podría suponer que si estas sílabas se separan y luego se les ordena adecuadamente se pueden mediante combinaciones reproducir todas las palabras que están formadas por estas sílabas por ejemplo ca-pa y pa-ca. En este trabajo se ha hecho esta separación para diferentes palabras bisilábicas y luego se han combinado en orden inverso, por ejemplo la palabra "tapa". Se muestra en la figura 6 las combinaciones de sílabas pero separadas entre sí a diferentes tiempos.

Al escuchar los sonidos producidos por estos enlazamientos se ha encontrado que cuando el tiempo de separación es suficientemente espaciado, los sonidos producidos reflejan los sonidos originales de las sílabas, pero a medida que se acorta el tiempo la legibilidad original se pierde y se altera el sonido resultante, pese a que al escucharse individualmente cada sílaba se oye correctamente. Esto sugiere que la fase final de una sílaba puede dejar al sistema de la audición acomodado o no para que registre adecuadamente la siguiente sílaba, tal como ocurre, por ejemplo, en el desarrollo de un movimiento muscular en el que cada estado de los que conforman la secuencia de estados de un movimiento muscular facilita la realización del siguiente estado, esto que A. Luria denomina la realización adecuada de la "melodía cinestésica" [5]. Es como si una vez cumplida una percepción sonora, el sistema en alguna de sus partes necesitara de un ***tiempo de relajación***, suficiente para que el sistema vuelva a recuperar un estado adecuado para registrar la siguiente señal y si esto no ocurre la percepción de la segunda sílaba se ve totalmente alterada-. Así, "t**a-pa"** se escucha como **"taba**", "**pa-ta"** como **"paga", "ca-ta"** como "**cara",** "**co-ca"** como "**coga".**

En la figura 6 se muestra el enlazamiento de las sílabas **"ta**" y "**pa**" mediante diferentes tiempos de separación entre ellas.

VII. Las constantes melódicas ante diferentes entonaciones

Otra cuestión interesante acerca de la voz es porqué la entonación de una determinada melodía se puede hacer en diferentes tonos sin que pierda la identidad de ésta. Lo que se ha encontrado es que esto ocurre porque la razón entre las frecuencias que corresponden a cada nota, y cuya sucesión conforma la melodía, se mantiene constante. Por ejemplo, si la secuencia de notas es $\mathbf{A_1}$- $\mathbf{B_1}$-$\mathbf{C_1}$-y $\mathbf{D_1}$ para una determinada entonación, y si caracterizamos una entonación diferente para la misma melodía con la secuencia $\mathbf{A_2}$- $\mathbf{B_2}$ – $\mathbf{C_2}$ – $\mathbf{D_2}$, entonces $\mathbf{A_1/A_2 = B_1/B_2}$, etc. Hay que hacer notar, sin embargo, que si bien la melodía se conserva su carácter musical se altera si en la misma proporción se alteran los espacios de silencio entre las notas.

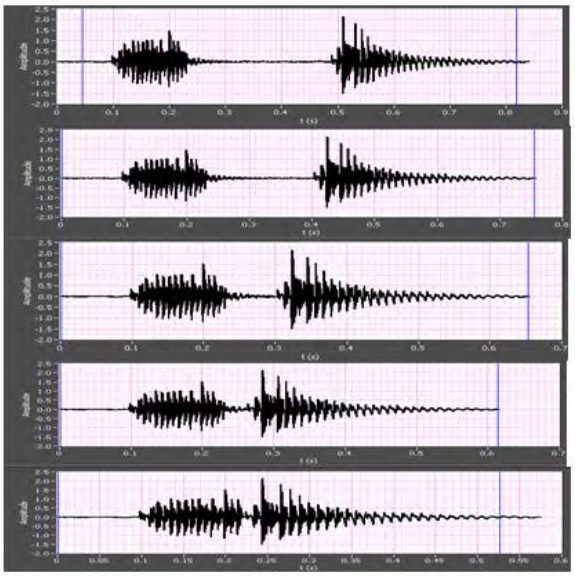


Figura.6 Se muestra el acoplamiento de las sílabas "ta" y "pa" con diferentes tiempos de separación entre ellas. A medida que este tiempo se acorta se pierde la legibilidad de la palabra bisilábica "tapa".

VIII. Conclusión

En este trabajo hemos presentado una visión de conjunto de del fenómeno de la comunicación humana por medio de la voz. Se han destacado las ventajas de la trasmisión de las ondas sonoras por medio del aire, ya que esto significa el uso de una banda ancha, lo que permite que la riqueza de información de los mensajes sonoros se trasmita con gran fidelidad. Por otra parte se ha subrayado que dado el efecto de filtrado que implican las condiciones de frontera asociadas a las diferentes situaciones bajo las cuales se puede dar la comunicación, a pesar de ello el contenido básico de un mensaje llega al receptor debido a que el amplio rango de frecuencias emitidas al hablar permite que el mensaje básico se trasmita o en las bandas bajas, en las intermedias o en las bandas de alta frecuencia. También se ha encontrado que si una melodía se puede ejecutar en diferentes tonos, y aún así se puede reconocer, es porque lo que hay de constante entre las diferentes ejecuciones es la relación entre las notas sucesivas que la conforman. Finalmente se ha señalado, y este es un aporte original de nuestro trabajo, que una vez percibida una señal de una serie temporal de señales, es necesario un tiempo de relajación entre señal y señal para que éstas sean percibidas adecuadamente.

Queda en pie el problema de averiguar cómo es que el oído humano puede destacar una determinada señal de un conjunto de señales que llegan simultáneamente, es decir, destacar del conjunto la señal deseada y volver el resto de señales un ruido de fondo, luego, cambiar la atención sobre otra señal mandando el resto de señales a un segundo plano. Este hecho nos parece prodigioso y es sorprendente que si esta tarea matemáticamente es muy complicada el oído la realice de una manera tan sencilla.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA la ayuda prestada para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] H.T. Epstein, ***Elementary Biophysics***, Addison-Wesley, U.S.A, (1963).

[2] J. A. Peralta y A. M. Diosdado, ***Medidas actualizadas del ruido urbano y riesgos en el uso de reprductores portátiles*****,** Memorias de la XIX reunión nacional académica de física y matemáticas, Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, México D.F., Octubre del 2014

[3] J. A. Salazar Cano, ***Registro de Sonidos del Subsuelo como Posibles Precursores Sísmicos***, tesis para obtener el título de licenciado en física y matemáticas, ESFM, 2017.

[4] S. Stevens, F. Warshofsky, ***Sonido y Audición***, Time-Life, México (1971).

[5] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Sound/refrac.html

[6] A.R. Luria, ***Las funciones corticales superiores en el hombre***, Fontanamara No. 23, México (1986)..

ISSN: 2594-1011

El método Min-Max para resolver sistemas oscilatorios no lineales

O. González Gaxiola[1], J. Ruiz de Chávez[2]
[1]Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-C, México D.F., México
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-I, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 E-mail: ogonzalez@correo.cua.uam.mx

Resumen — **En el presente trabajo presentaremos un método semi-analítico el cual tiene su origen en un viejo algoritmo chino que data del año 400 *A. C.* y que recientemente ha sido redescubierto. Además haremos uso del método para obtener las frecuencias aproximadas y las soluciones periódicas que corresponden a sistemas modelados por ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales que provienen de las aplicaciones actuales de las matemáticas en algunos campos de las ciencias e ingenierías.**

Palabras Clave – **Ecuaciones diferenciales no lineales, Método Min-Max, Oscilaciones no lineales, Desiguadades de He Chengtian, Frequency Formulation.**

Abstract — **In the present work we will present a semi-analytical method which has its origin in an old Chinese algorithm that dates back to 400 BC and that has recently been rediscovered. We will also use the method to obtain the approximate frequencies and periodic solutions that correspond to systems modeled by differential non-linear equations that come from the current applications of mathematics in some fields of science and engineering.**

Keywords — **Nonlinear differential equations, Min-Max method, Nonlinear Oscilations, He Chengtian´s inequalities, Frequency formulation.**

I. Introducción

La mayoría de los problemas que surgen en las ciencias e ingeniería, especialmente algunas ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos oscilatorios, son no lineales, y en la mayoría de los casos resulta difícil resolver, especialmente si se requiere de una solución analítica. La perturbación es uno de los métodos bien conocidos y muy utilizados para resolver problemas no lineales, los métodos perturbativos se basan en la existencia de pequeños parámetros (a veces también grandes parámetros) los cuales se introducen para operar con ellos y bajo cierto límites de dichos parámetros se obtiene la solución al problema [1,2,3]. Muchos problemas no lineales no contienen este tipo de parámetros de perturbación, y entonces debemos utilizar métodos no perturbativos, un ejemplo de método que no es perturbativo es el método de descomposición de Adomian [4,5], el método de iteración variacional [6], el método del balance energético de J. H. He [7,8] y el nuevo método llamado Min-Max [9,10]. El enfoque Min-Max se propuso por primera vez en 2008 y está basado en la antigua matemática china [11], y en poco tiempo se ha convertido en un método muy utilizado y conocido para resolver problemas relacionados con osciladores no lineales [12,13].

En el presente trabajo, se introduce la idea básica del método Min-Max para luego estudiar sus aplicaciones para resolver algunas ecuaciones diferenciales no lineales que modelan fenómenos oscilatorios. En la mayoría de los problemas de aplicación, es fácil encontrar umbrales máximos (mínimos) de las soluciones de una ecuación diferencial no lineal, y con ello puede obtenerse fácilmente la frecuencia angular y por lo tanto la solución aplicando el método Min-Max. Los resultados son válidos no sólo para sistemas débilmente no lineales, sino también para sistemas fuertemente no lineales. Para mostrar la exactitud y la confiabilidad de las soluciones obtenidas a través del método Min-Max, los resultados se van a comparar con los obtenidos por otros autores utilizando métodos tales como balance energético, el análisis de homotopía y métodos numéricos. El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección II daremos una mínima y breve introducción al método Min-Max, en la sección III expondremos tres ejemplos de aplicación a través de osciladores no lineales que son resueltos por el método Min-Max para finalmente en la sección IV resaltar la efectividad del método en las conclusiones.

II. Breve Introducción al Método Min-Max

Para ilustrar el método Min-Max, primero vamos a considerar la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y'+y^2=0, \quad y(0)=1. \tag{1}$$

La ecuación (1) tiene solución exacta

$$y_{ex}(x) = \frac{1}{x+1} \tag{2}$$

Ahora se proponen dos funciones de prueba, como primeras aproximaciones a la solución:

$$y_1(x)= y(0)=1, \quad y_2(x)= y(0) + y'(0)x=1-x,$$

de lo anterior, se tiene

$$1-x = y_2(x) < y(x) < y_1(x) =1. \tag{3}$$

A partir de esta relación Min-Max dada por la ecuación (3), se puede utilizar una vieja desigualdad, la *desigualdad de He Chengtian*, la cual tiene una historia milenaria para encontrar una aproximación a la solución exacta [14], He Chengtian propone utilizar la siguiente desigualdad:

Si

$$\frac{a}{b}<x<\frac{d}{c}, \tag{4}$$

donde *a,b,c* y *d* son números reales (*b* y *c* no nulos).

Entonces para dos pesos reales *m* y *n* (tomados de manera libre) tenemos

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nd}{mb+nc}<\frac{d}{c} \tag{5}$$

y así *x* es aproximado por

$$x(m,n)=\frac{ma+nd}{mb+nc}. \tag{6}$$

Cuando $m=n=1$ se tiene, el *promedio de He Chengtian*, es decir,

$$x(1,1)=\frac{a+d}{b+c}$$

si hacemos $k=m/n$, entonces tenemos

$$x(m,n)=\frac{ma+nd}{mb+nc}=\frac{ka+d}{kb+c};$$

entonces

$$\lim_{k\to 0} x(k)=\frac{d}{c} \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} x(k)=\frac{a}{b}$$

Los fundamentos de la desigualdad (5) se pueden encontrar con mayor detalle histórico en [14]. También la desigualdad (5) ha sido utilizada para muchas y diversas aplicaciones, como referencia, ver por ejemplo [15].

Volviendo a nuestro ejemplo ilustrativo, la desigualdad dada en la ecuación (3) puede ser reescrita como

$$\frac{1-x}{1}<y(x)<\frac{1}{1}.$$

De acuerdo con la interpolación propuesta por el método Min-Max dado por *He Chengtian*, tenemos:

$$y(x;m,n)=\frac{m(1-x)+n}{\mathrm{m+n}},$$

o bien

$$y(x;k)=\frac{1-x+k}{1+k}.$$

El valor de $k=n/m$ puede ser aproximado de muy distintas maneras [17]. Entre las maneras de elegir *k* tenemos el método residual, el cual aquí usaremos.

Sustituyendo *y(x;k)* en la ecuación (1) obtenemos el siguiente residuo *R(x;k)*

$$R(x;k)=\frac{-1}{1+k}+\left[\frac{1-x+k}{1+k}\right]^2 \tag{7}$$

Por ejemplo, si elegimos x=1/2, entonces de (7) tenemos $k=0.886$, de donde $y(0.5;\ 0.886) = 0.735$ lo cual da una precisión de 98.5 %, lo que podemos calificar como muy aceptable en comparación con la solución exacta dada por la ecuación (2), pues las funciones de prueba son de naturaleza distintas a la solución exacta.

De hecho podemos hacer $m = 1$ y $n = x$ (recordemos que *n* es un número real); entonces $k = x$, así

$$y(x;1,x)=\frac{1-x+x}{1+x}=\frac{1}{1+x}.$$

La cual es la solución exacta del problema de valor inicial (1).

Ahora, de manera general, enfocados más hacia los objetivos del presente trabajo, consideremos la ecuación diferencial tipo Duffing

$$\ddot{v}+\omega^2+v=0, \tag{8}$$

Donde $\omega^2=\mathrm{N}(\mathrm{v},\dot{v},\ddot{v},\mathrm{t})/\mathrm{v}$. A continuación, se estima el máximo y el mínimo para ω^2. Debemos tener en cuenta que, lo único necesario para aplicar el método Min-Max es tener un límite superior y uno inferior para ω^2. Es natural suponer que encontrar límites con menos varianza conducirá a una aproximación más cercana a la solución exacta. La elección de una función de prueba adecuada es otro factor que ayudará a una mejor aproximación para el método Min-Max, especialmente en el caso de los osciladores no conservativos.

Generalmente para osciladores conservativos se usan las funciones de prueba conocidas A cos(ωt) o bien Asin(ωt), dependiendo de la condición inicial. Para encontrar el máximo y el mínimo, se sustituye la cantidad máxima y mínima de las funciones de prueba en ω^2.

De acuerdo a la desigualdad de *He Chengtian*, los valores de la frecuencia serán identificados como:

$$\frac{a}{b}<\omega^2=\frac{ma+nd}{mb+nc}<\frac{d}{c}, \tag{9}$$

donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{c}$ son los valores mínimos y máximos que *a priori* se estima puede tomar la frecuencia respectivamente.

Así obtenemos

$$\ddot{v}+\omega^2 v = \ddot{v}+\mathrm{N}(\mathrm{v},\dot{v},\ddot{v},\mathrm{t})+\Omega(\mathrm{v},\dot{v},\ddot{v},\mathrm{t}) \tag{10}$$

luego, para encontrar la solución, se establece una expansión en serie de Fourier y considerando el balance armónico

$$\Omega(\mathrm{v},\dot{v},\ddot{v},\mathrm{t})=0. \tag{11}$$

Sustituyendo A cos(ωt) como suposición inicial en la ecuación (11) podemos obtener ω.

III. Aplicación del Método

Ejemplo1. Consideremos la ecuación diferencial que aparece en el modelo un oscilador relativista [16]

$$u''+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=0, \quad u(0)=\mathrm{A}, \qquad u'(0)=0. \tag{12}$$

Podemos escribir (12) de la forma

$$u''= f(u)\cdot u$$

donde

$$f(u)= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Inspeccionando (12) tenemos que siendo ω la frecuencia del oscilador:

$$\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} < \omega^2 < 1. \qquad (13)$$

Para aplicar el método Min-Max de *He Chengtian*, consideremos (13) en su forma equivalente

$$\frac{1}{1+A^2} < \omega^4 < \frac{1}{1}, \qquad (14)$$

luego

$$\omega^4 = \frac{m+n}{n+m(1+A^2)} = \frac{1}{1+kA^2},$$

donde $k= \frac{m}{m+n}$, (0<k<1). Entonces la frecuencia puede ser aproximada por

$$\omega = (1+ kA^2)^{-1/4} \qquad (15)$$

para determinar el valor de k en la igualdad (15), debemos tener en cuenta que ω en (15) es aproximada a la exacta, es decir, si escribimos (12) como

$$u'' + \frac{u}{\sqrt{1+kA^2}} = \frac{u}{\sqrt{1+kA^2}} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad (16)$$

entonces el lado derecho de (16) no es nulo, luego procediendo como se hace en [9]

$$\int_0^{T/4}\left(\frac{u}{\sqrt{1+k\,A^2}} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)cos\omega t\, dt = 0,\ \ T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (17)$$

o equivalentemente

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k\,A^2}} - \int_0^{\pi/2}\frac{cos^2 s}{\sqrt{1+A^2cos^2 s}}\,ds = 0. \qquad (18)$$

Luego, la solución aproximada a la ecuacióndiferencial no lineal (12) es

$$u(t)= \text{A cos}\,[(1+ k\,A^2\,)^{-\frac{1}{4}}\,t]$$

donde k puede ser determinada de la igualdad (18).

En la Figura 1 podemos ver la gráfica de la solución aproximada (punteada) contra la exacta (continua) para A=10 y ω=0.354.

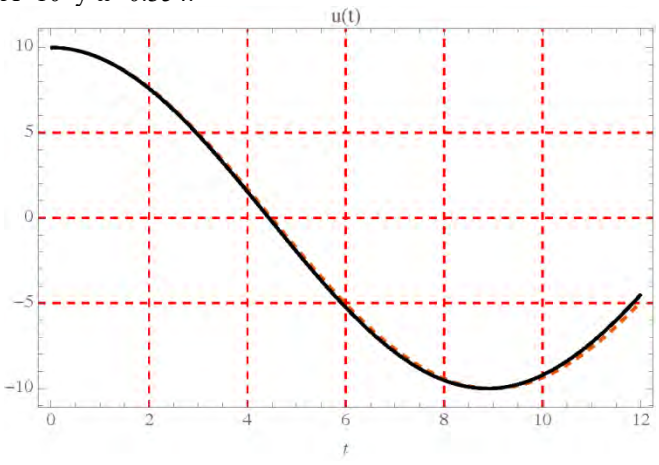


Fig. 1. A=10 y ω= 0.354.

En la Figura 2 podemos ver la gráfica de la solución aproximada (punteada) contra la exacta (continua) para A=100 y ω=0.1128$. En la Figura 3 podemos ver la gráfica de la solución aproximada (punteada) contra la exacta (continua) para A=1 y ω=0.9982.

En este primer ejemplo hemos considerado las solución exacta obtenida por Ji-Huan He en [9].

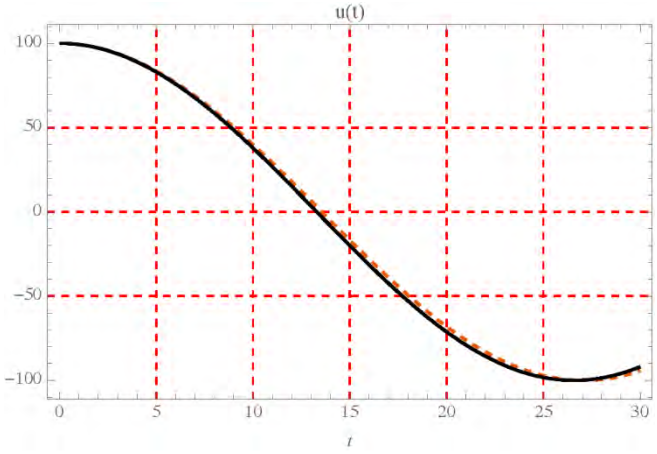


Fig. 2. A= 100 y ω = 0.1128.

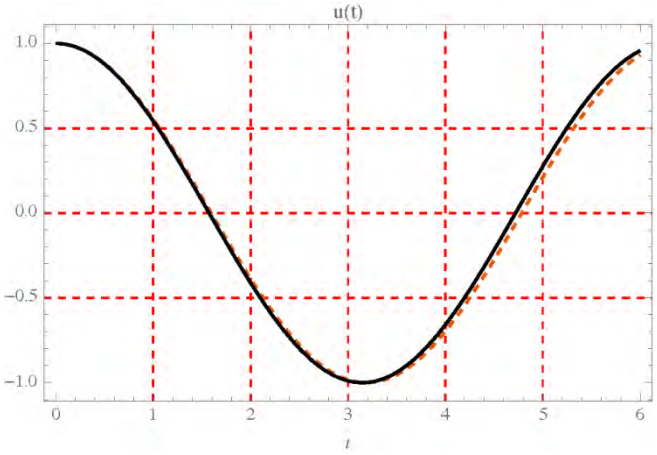


Fig. 3. A= 1 y ω= 0.9982

Ejemplo 2. Para este ejemplo vamos a considerar el siguiente oscilador no lineal:

$$u''+\beta u^3+\epsilon u|u|=0, \quad u(0)=A,\ u'(0)=0. \qquad (19)$$

Es fácil darnos cuenta que la frecuencia tiene el siguiente comportamiento

$$0<\omega^2<\beta A^2+\epsilon A, \qquad (20)$$

luego, por el método Min-Max tenemos

$$\omega^2= \frac{n(\beta A^2+\ \epsilon A)}{m+n}= k(\beta A^2 + \epsilon A),\ \ k=\frac{n}{m+n}, \qquad (21)$$

donde m, n y k son constantes reales.

Así, por balance armónico:

$$\int_0^{T/4} (k(\beta A^2 + \epsilon A)u - \beta\, u^3 - \epsilon u|u|)\cos\omega t dt,\ \ T= 2\pi/\omega \qquad (22)$$

o bien

$$\int_0^{T/4} (k(\beta A^2 + \epsilon A)A\cos\omega t - \beta A^3 cos^3\omega t - \epsilon A\cos\omega t|A\cos\omega t|)\cos\omega t\, dt=0, \quad (23)$$

de donde la frecuencia puede ser encontrada, y es aproximadamente

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}\beta A^2 + \frac{8}{3\pi}\epsilon A}, \quad (24)$$

la cual es la misma que la obtenida en [7] por el método de perturbación homotópica.

Ejemplo3. Ahora vamos a considerar el siguiente oscilador no lineal tipo Duffing:

$$u''+u+\epsilon u^5 = 0, \quad u(0)=A, \quad u'(0)=0. \quad (25)$$

Vamos a elegir la función de prueba $u(t)=A\cos(\omega t)$.
Si volvemos a escribir (25) de la siguiente forma

$$u''+(1+\epsilon u^4)u =0, \quad (26)$$

tenemos

$$-\omega^2 u + (1+\epsilon u^2)u = 0, \quad (27)$$

de donde

$$\omega = \sqrt{1+\epsilon A^4}, \quad (28)$$

teniendo así, las frecuencias mínimas y máximas dadas por

$$\omega_{Min} = 1, \quad \omega_{Max}\sqrt{1+\epsilon A^4}\,.$$

Para aplicar el método Min-Max de *He Chengtian*, consideremos la desigualdad

$$\frac{1}{1} < \omega^2 < \frac{1+\epsilon A^4}{1}, \quad (29)$$

de donde, interpolando

$$\omega^2 = \frac{m+n(1+\epsilon A^4)}{m+n} = 1 + k\epsilon A^4 = , \quad k = \frac{n}{m+n} \quad (30)$$

donde m y n son los pesos o factores reales. De (30) tenemos que la frecuencia aproximada por el presente método es

$$\omega = \sqrt{1+k\epsilon A^4}, \quad (31)$$

y entonces la solución aproximada está dada por

$$u(t) = A\cos\left[\left(\sqrt{1+k\epsilon A^4}\right)\cdot t\right]. \quad (32)$$

Sustituyendo la solución en (25), tenemos

$$u''+(1+k\epsilon A^4)u= k\epsilon A^4 u - \epsilon u^5. \quad (33)$$

Si suponemos que (32) es la solución exacta, el lado derecho de (33) debe ser cero. Así, podemos escribir

$$B = \int_0^{T/4}(k\,\epsilon A^4 - \epsilon u)\cos\omega t\, dt = 0. \quad (34)$$

Sustituyendo la ecuación (32) en (34) y considerando $T=2\pi/\omega$ obtenemos $k=5/8$. Finalmente, tenemos que la frecuencia resulta ser

$$\omega = \sqrt{1+\frac{5}{8}\epsilon A^4}\,, \quad (35)$$

y el período aproximado es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{5}{8}\epsilon A^4}}\,. \quad (36)$$

La comparación de la solución obtenida a a través del método Min-Max contra la solución que se obtuvo en [8] a través del método de balance de energía (EBM) se hacen en las Figuras 4, 5 y en el cuadro 1.
En la Figuras 4 y 5 podemos ver la gráfica de la solución aproximada (punteada) contra la exacta (continua) para A=5 (ω=0.861) y A=10 (ω=0.388) respectivamente.

Comparación de EBM y Min-Max		
A	EBM	Min-Max
0.10	1.000000291	1.000000312
0.50	1.000182275	1.000195293
0.80	1.001193954	1.001279182
1.00	1.002912425	1.003120132
1.50	1.014658194	1.015697113

Cuadro 1

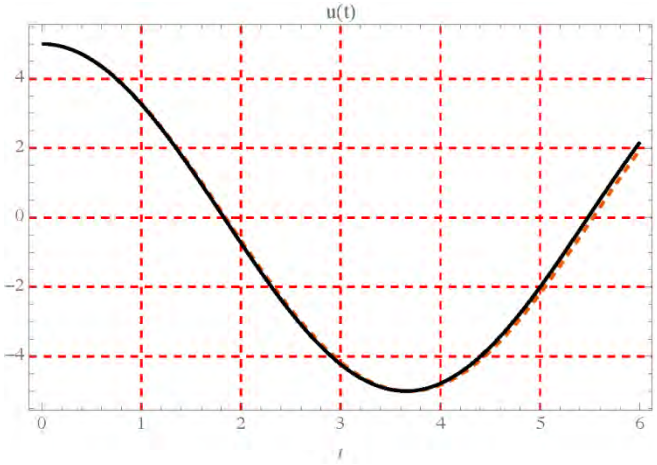


Fig.4. A= 5 y ω= 0.861

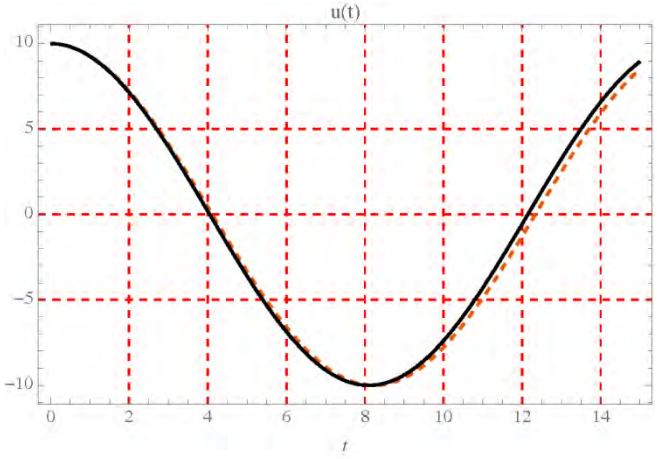


Fig. 5. A= 10 y ω= 0.388

IV. Conclusiones

En el presente trabajo hemos expuesto de manera breve y suficiente el método Min-Max para resolver ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales cuyas soluciones son funciones periódicas. El método resulta ser muy útil para resolver problemas relacionados con osciladores y vibraciones en muchas ramas de las ciencias e ingenierías, tales como estructuras en ingeniería civil, flujos en mecánica de fluidos, electromagnetismo y ondas en física entre otras

muchas. El método Min-Max proporciona un procedimiento fácil y directo para hallar aproximaciones a las soluciones periódicas. Como hemos visto, el método es adecuado para analizar sistemas no lineales y se puede extender fácilmente a cualquier ecuación diferencial no lineal cuya solución sea periódica, incluso a sistemas de ecuaciones no lineales. Hemos expuesto la precisión, fiabilidad y eficiencia del método presentando algunos ejemplos. Todo lo anterior nos muestra que la antigua matemática china representa un campos de investigación muy importante en ciencia y tecnología en la época actual.

REFERENCIAS

[1] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinsky and L. M. Simmons, "A new perturbative approach to nonlinear problems", Journal of Mathematical Physics, vol. 30, no. 7, pp. 1447-1455, 1989.

[2] H. J. He, "A note on delta-perturbation expansion method", Applied Mathematics and Mechanics, vol. 23, no. 6, pp. 634–638, 2002.

[3] H. J. He, "Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique", Applied Mathematics and Computation, vol. 135, no. 1, pp. 73–79, 2003.

[4] G. Adomian, "Nonlinear Stochastic Operator Equations", Academic Press, Orlando, 1986.

[5] G. Adomian,, "Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method", Kluwer, Academic Publishers, Boston, 1994.

[6] L. Xu, "Variational principles for coupled nonlinear Schrödinger equations", Physics Letters A, vol. 359, no. 6, pp. 627–629, 2006.

[7] S.S. Ganji, D. D. Ganji, Z. Z. Ganji and S. Karimpour, "Periodic solution for strongly nonlinear vibration systems by energy balance method", Acta Applicandae Mathematicae, vol. 106, no. 1, pp. 79–92, 2009.

[8] M. Momeni, N. Jamshidi, A. Barari and D.D Ganji, "Application of He's energy balance method to Duffing harmonic oscillators", Int. J. of Computer Mathematics, vol. 88, no. 1, pp. 135–144, 2011.

[9] H. J. He, "A max-min approach to nonlinear oscillator", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, vol. 9, no. 2, pp. 207–210, 2008.

[10] H. J. He, "Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations", Int. J. of Modern Physics B, vol. 20, no. 10, pp. 1141–1199, 2006.

[11] B. C. Qian, "History of Chinese mathematics", Science Publisher, Beijing, 1992.

[12] D. D. Gan and M. Azimi, "Application of max min approach and amplitude frequency formulation to nonlinear oscillation systems", University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin A, vol. 74, no. 3, pp. 131–140, 2012.

[13] D. Q. Zeng, "Nonlinear oscillator with discontinuity by the max-min approach", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 42, no. 5, pp. 2885–2889, 2009.

[14] H. J. He, "He Chengtian's inequality and its applications", Applied Math. and Computation, vol. 151, no. 3, pp. 887–891, 2004.

[15] H. J. He, "Mysterious π and a possible link to DNA sequencing", Int. J. of Nonlinear Sciences, vol. 5, no. 3, pp. 263–274, 2004.

[16] R. E. Mickens, "Periodic solutions of the relativistic harmonic oscillator", J. Sound Vib., vol. 212, no. 5, pp. 905-908, 1998.

[17] A. H. Nayfeh, "Introduction to Perturbation Techniques", John Wiley \& Sons, New York, 1981.

[18] H. J. He, "The homotopy perturbation method nonlinear oscillators with discontinuities", Applied Math. and Computation, vol. 151, no. 1, pp. 287–292, 2004.

ISSN: 2594-1011

Incremento de la eficiencia de acreditación de estudiantes mediante grupos experimentales del Sistema de Aprendizaje Individualizado

Ángel Martínez-Meléndez[1], Ricardo López-Bautista[2], Mario Reyes-Ayala[3], Judith Omaña-Pulido[4], Gerardo Aragón-González[5]
[1]Coordinador del SAI, [2]Coordinador del Grupo Temático Álgebra y Geometría, [3]Departamento de Electrónica, [4]Departamento de Ciencias Básicas, [5]Programa de Desarrollo Profesional en Automatización, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, Ciudad de México, México.
Teléfono (55) 5318-9000 Ext. 55017 Fax (55)5729-55015 E-mail: rlopez@azc.uam.mx

Resumen — **El Reglamento de Estudios Superiores (RES) de la Universidad Autónoma Metropolitana permite hasta cinco oportunidades a un estudiante de licenciatura, para aprobar una Unidad de Enseñanza–Aprendizaje (UEA) pero solamente puede cursarla en dos ocasiones en un grupo regular. Si el estudiante agota estas dos oportunidades tiene como única opción presentar examen de recuperación (que equivale a un examen extraordinario o a un examen a título de suficiencia, ETS) para poder acreditar la UEA reprobada. Por lo general, el examen de recuperación propone una exigencia mayor al estudiante que la correspondiente a un grupo regular con lo cual la probabilidad que repruebe en las otras tres ocasiones es alta. Esto trae como consecuencia que disminuya la eficiencia de acreditación de los estudiantes en una UEA y también en la eficiencia de egreso de las carreras. Para hacer incidencia en esta problemática, el Sistema de Aprendizaje Individualizado (SAI) conformó un proyecto para que los estudiantes realicen el examen de recuperación desglosado en exámenes en varias unidades a lo largo del trimestre, en concordancia a los lineamientos del SAI, donde el estudiante avanza a su propio ritmo en forma autodidacta, pero con el apoyo del profesor. En este trabajo se presentan los resultados de este proyecto.**

Palabras Clave — **aprendizaje individualizado, asesoramiento del profesor, autodidacta, eficiencia parcial y terminal**

Abstract — **The regulations for higher studies (RES, by its acronym in spanish) at the Autonomous Metropolitan University (UAM, by its acronym in spanish) allow an undergraduate student up to five opportunities to pass one teaching - learning Unit (UEA, by its acronym in spanish), and only two opportunities by undertaking in a regular course. If the student fails a UEA two times, his/her has other three opportunities has only the option by extraordinary examination (ETS, by its acronym in Spanish). Generally, the extraordinary examination is more demanding than taking the subject on a regular course, which means that the possibility for a student to fail three times in a row is very high. As a consequence, students passing the UEA becomes inefficient, as well as their graduation from higher education. In an attempt to solve this problem, the System of Individual Training (SAI, by its acronym in spanish) created a project for students to undertake the exam throughout various partial examinations—that is, learning several units throughout the trimester—, and following SAI regulations, whereby the student autodidactically learns at his/her own pace with the teacher's advice. In this paper, we present the results of this project.**

Keywords — **individualized learning, teacher's advice, self-taught, partial and terminal efficiency**.

I. Introducción

El Sistema de Aprendizaje Individual (SAI) se fundó en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería (DCBI) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (UAM-A) un año después de la fundación de la UAM. Desde entonces se ha caracterizado por ser una alternativa de proceso de enseñanza –aprendizaje que con el tiempo se ha consolidado como un sistema fundamental de la DCBI.

El SAI cuenta, por lo general, con una inscripción inicial de más de 1,200 estudiantes por trimestre, distribuidos en 42 grupos y atendidos con 38 profesores; lo cual refleja la confianza y armonía que se ha construido, en el SAI, entre profesores y estudiantes.

Un problema fundamental, entre otros, que se presenta en la DCBI, es que hay muchos estudiantes con dos de sus cinco oportunidades agotadas para aprobar alguna UEA, llevando consigo una alta posibilidad de llegar a una quinta oportunidad y con ello de perder la calidad de estudiante en la UAM (RES [1]). La gran mayoría de estos estudiantes ya reprobaron en curso regular dos veces la UEA, y a partir de la tercera oportunidad, estos estudiantes por RES deben intentar acreditar en un sólo examen de recuperación, lo cual por lo general resulta ser más difícil que hacerlo en exámenes parciales. Justamente, conviene señalar que una característica primordial de un curso de una UEA en SAI es que, si la acreditación por recuperación es requerida, ésta no se consigue con un solo examen, sino durante todo el trimestre en forma gradual mediante varios exámenes, por lo que a los estudiantes que ya reprobaron, les ofrece mejores posibilidades de enfrentar con éxito la acreditación.

El problema es de tal magnitud, que al SAI llegan cada trimestre, más de 700 solicitudes de estudiantes que se encuentran en situaciones como las descritas anteriormente. Esto trae como consecuencia, afectación en su avance escolar, dada la seriación que existe en los planes de estudio de las diez carreras ingeniería de la UAM (Azcapotzalco), y aún más en el índice de egreso el cual es de aproximadamente de siete años en lugar de ser cuatro años.

Para incidir y enfrentar la problemática anterior el SAI planteó un proyecto: “Grupos experimentales en SAI para aumentar la eficiencia de acreditación” con la finalidad de

coadyuvar a que estudiantes acrediten alguna UEA, en su tercera, cuarta o quinta oportunidad.
A continuación, se describe en forma breve el modelo SAI.

II. EL MODELO DEL SAI

El Sistema de Aprendizaje Individualizado (SAI) utiliza un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la interacción estrecha entre el estudiante y el profesor; en el cual, los estudiantes desarrollan sus habilidades de autoaprendizaje, al contar con retroalimentación, donde incluso es común, profundizar más allá de los contenidos programáticos. La experiencia ha demostrado que los estudiantes que cursan exitosamente en el SAI no tienen problemas posteriormente para encontrar sus propios materiales de estudio y enfrentar sus problemas académicos de mejor forma; trascendiendo en muchas ocasiones a su egreso y generar recursos humanos de mayor calidad. Estas características son similares a sistemas anteriores al SAI y que permitieron su diseño e implementación; tales como el sistema Keller, el cual fue desarrollado en los Estados Unidos de América [2] y aplicado posteriormente por el mismo en 1964 en la Universidad de Brasilia como Sistema de Instrucción Personalizada (SIP) [3], [4].
La implementación del modelo SAI tiene como aspecto relevante: la programación de cursos apropiados cuyos contenidos se encuentran desglosados en unidades, las cuales identifican claramente los temas que se abordarán y objetivos específicos que se deben lograr; de esta forma, se tienen normalmente de seis a once unidades dependiendo de la UEA. Todas las unidades deben acreditarse secuencialmente, siendo una práctica general aplicar al final uno o dos exámenes de integración (el cual contiene colecciones de unidades) con lo cual se pretende una mejor asimilación por parte de los estudiantes de los conocimientos adquiridos. Además, es importante indicarle las condiciones descritas, se propone que cada estudiante puede avanzar en el curso a su propio ritmo, logrando en distintos momentos la obtención de los objetivos específicos de la UEA en la cual está inscrito o mediante un registro al inicio del trimestre lectivo [5].
Otro aspecto importante del modelo SAI es el uso generalizado de autoevaluaciones por cada unidad, las cuales el estudiante las efectúa después de estudiar cada unidad. Esto constituye un requisito obligatorio para presentar los exámenes de unidad y representa una retroalimentación adicional, que hace que el estudiante acumule menores lagunas de conocimiento y aumente su confianza (autoestima) al presentar una evaluación de cada unidad [6].
A lo largo del tiempo, se ha visto el beneficio de incorporar en la operación del SAI el uso de monitores (personal de apoyo, ayudantes y otros) que auxilian al profesor, quienes le apoyan en la impartición de asesorías y la administración del curso, ya que la documentación de cada curso, representa un archivo complejo, donde puede haber materiales impresos [7] y/o electrónicos [8], los cuales se ponen a disposición de los estudiantes, para su estudio; o bien, forman el registro de avance de todos los estudiantes.
Aunque el SAI ha demostrado su eficacia para favorecer el avance de estudiantes de excelencia, al no detenerles en temas que asimilan con rapidez; es necesario notar, que la asesoría individualizada y la dinámica de los cursos SAI, es también de gran utilidad con estudiantes que, por uno u otra razón, han visto detenido su avance en su plan de estudios de licenciatura. Este trabajo se refiere precisamente a la aplicación del Modelo del SAI en estudiantes que ya no tienen oportunidad en cursos tradicionales y que pueden, no obstante, contar con este proyecto como un medio alternativo para detectar y corregir sus errores con atención principal en los conceptos o temas que se le dificultan con la oportunidad de autoevaluarse antes del examen hasta que logre su comprensión total.
Los cursos que se seleccionaron en el proyecto que se reporta en este trabajo, fueron seleccionados especialmente por la dificultad que representan a los estudiantes, extendiéndose poco a poco hacia una mayor oferta de varias UEA [6].

III. RESULTADOS

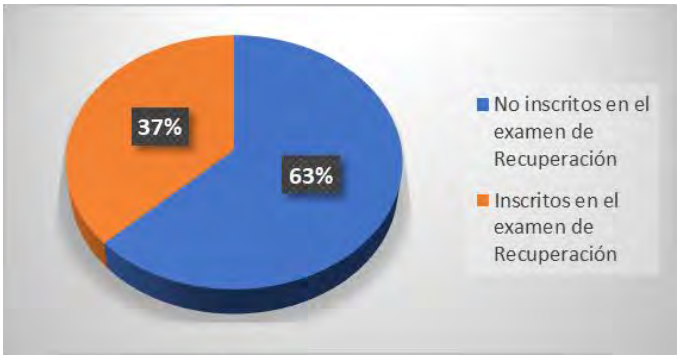
En esta sección, se presentan los resultados de los grupos experimentales en modalidad SAI después de cinco trimestres lectivos de su aplicación. Para facilitar una comparación de los resultados de este proyecto y los que se obtienen en cursos tradicionales en condiciones similares, se agrupó trimestralmente el número de estudiantes en diferentes semanas del trimestre: primera semana (lista preliminar), quinta semana (lista definitiva de estudiantes) y doceava (última) semana (calificaciones obtenidas en el trimestre). Cada una de estas etapas, es de importancia para el proyecto y serán utilizados en la sección de discusión, para identificar el universo de estudiantes que se atiende, así como la deserción y desempeño de los estudiantes, para ambas modalidades, de aquí en adelante programa, de conducción: SAI o tradicional.
A continuación, se presentarán tablas y gráficas que corresponden con los trimestres primavera (P), otoño (O) de 2016 e invierno (I), primavera (P), otoño (O) de 2017.
En la Tabla 1 se muestra información del número de grupos y de asignaturas en el SAI para el trimestre 16-P (primavera del año 2016), 16-O (otoño 2016) y los trimestres del año 2017: 17-I, 17-P y 17-O (invierno, primavera y otoño). Se muestran el número inicial de estudiantes solicitantes, así como el número de estudiantes que se mantuvieron en uno de los dos programas. De aquí en adelante se usa programa en lugar de proyecto. En el programa SAI se limita hasta la quinta semana del trimestre, plazo para que los estudiantes sean considerados, se registren y poder así tener la posibilidad de acreditar su examen de recuperación.
En la Tabla 1, el número de estudiantes que aparece en la última columna resulta ser menor que el correspondiente a la columna de solicitantes en el mismo trimestre (cuarta columna). Esto sucede ya sea porque el estudiante inicia,

pero no puede alcanzar a cubrir el número de unidades mínimas para darle la oportunidad de presentar el examen de recuperación.

Trimestre	Número de grupos	Número de asignaturas	Número inicial de estudiantes	Estudiantes registrados al examen de recuperación
16-P	11	9	172	66
16-O	19	18	381	174
17-I	21	19	419	164
17-P	18	16	432	105
17-O	21	19	397	160
Total	**90**	**81**	**1801**	**669**

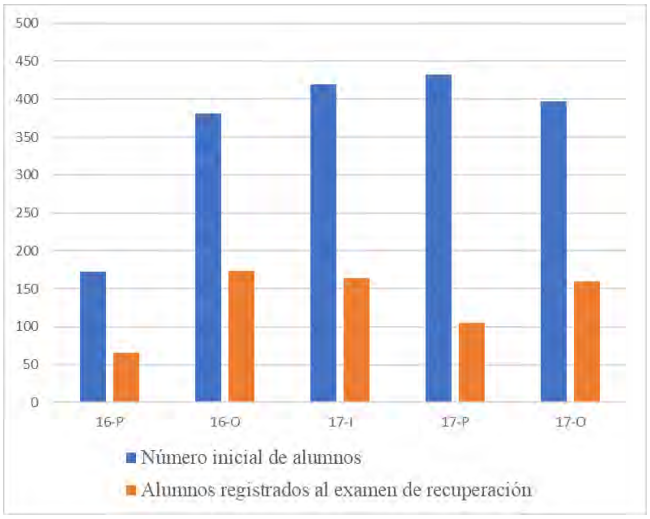
Tabla 1. Estadística de grupos, asignaturas y estudiantes solicitantes y los registrados para examen de recuperación en este programa del SAI.

En la Gráfica 1 se muestra el porcentaje de estudiantes que solicitó registro en el programa de SAI y que solicitó ser inscrito en el examen de recuperación; en la misma gráfica aparece el porcentaje de estudiantes que no lo hizo.
Como puede verse en la Gráfica 1, el porcentaje de estudiantes que solicitó ser considerado en el programa SAI y luego eligió no inscribirse en el examen de recuperación es el 63%. Conviene indicar que si estos estudiantes se hubiesen registrado a la asignatura correspondiente tendría repercusiones en su historial académico. Aunque un estudiante puede renunciar a una UEA que inscribe, existe un algoritmo que estima el aprovechamiento de cada estudiante al dividir el número de créditos aprobados entre el número de créditos inscritos. De esta manera el programa SAI pretende apoyar al estudiante con dificultades, sin penalización alguna.



Gráfica 1. Estudiantes registrados en el programa SAI: porcentaje de estudiantes que se inscribieron en el examen de recuperación y los que no lo hicieron.

En la Gráfica 2 se muestra el número de estudiantes que permanecieron en el programa en los trimestres que comprende el estudio.
En la Tabla 2 se muestra el porcentaje de estudiantes que permanecen en el programa para realizar su examen de recuperación en el SAI.
El número de estudiantes que permanece en el programa SAI es menor que la mitad que lo solicita. El motivo, como ya fue indicado, es que el estudiante inicia, pero no cubre las unidades mínimas para darle la oportunidad de presentar el examen de recuperación en esta forma.
Es difícil contar con un registro de los estudiantes que solicitan el apoyo y que luego desertan del programa, para conocer sus motivos y establecer alguna estrategia institucional que ayude a mantenerlos dentro del programa.



Gráfica 2. Número inicial de estudiantes en el programa y número de estudiantes registrados en examen de recuperación.

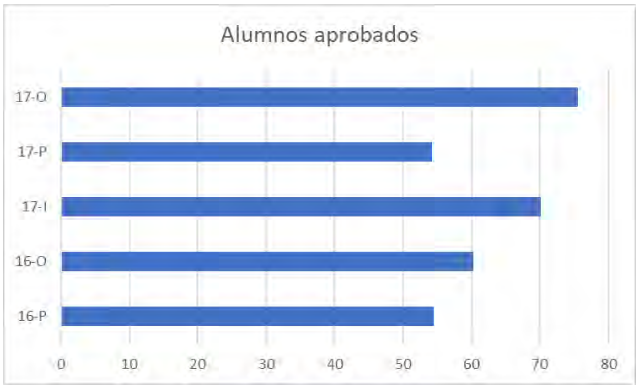
Trimestre	Estudiantes registrados en el examen de recuperación	Porcentaje de estudiantes registrados en el examen de recuperación con respecto al número de estudiantes que solicita registro en el programa SAI
16-P	66	38.3%
16-O	174	45.6%
17-I	164	39.1%
17-P	105	24.3%
17-O	160	40.3%
Total	**669**	**37.1%**

Tabla 2. Estudiantes que permanecen en el programa SAI.

Los estudiantes que permanecen en el programa deben aprobar todas las unidades de su curso para acreditarlo. En la Tabla 3 se muestra el porcentaje de aprobación de los estudiantes que permanecen en el programa SAI.
En la Gráfica 3 se puede observar que, aunque en ningún trimestre este porcentaje es el 100%; todos los porcentajes exceden al 50%, lo cual es un aliciente ya que refleja el compromiso de los estudiantes registrados para cumplir con su propósito de acreditación.

Trimestre	Estudiantes registrados al examen de recuperación	Estudiantes aprobados	Porcentaje de aprobación
16-P	66	36	54.5%
16-O	174	105	60.3%
17-I	164	115	70.1%
17-P	105	57	54.2%
17-O	160	121	75.6%
Totales	669	434	64.8%

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes irregulares aprobados en el programa SAI, de acuerdo con el número de estudiantes que permanecen.



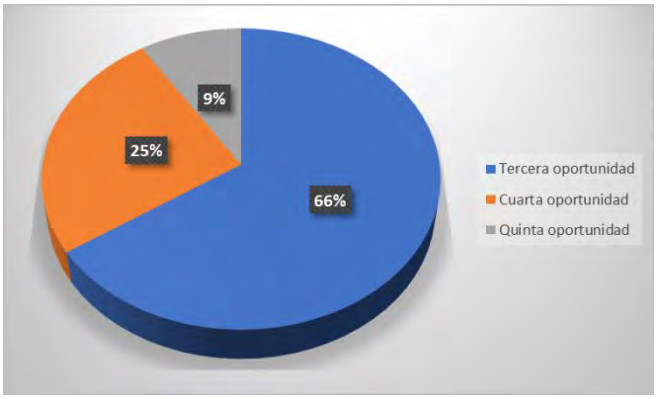
Gráfica 3. Porcentaje de estudiantes irregulares aprobados en el programa SAI.

En la Tabla 4 se considera a los estudiantes que estaban en tercera, cuarta o quinta oportunidad de acreditar la asignatura.
De acuerdo con la Tabla 4, 34 estudiantes que estaban a punto de ser dados de baja de la UAM consiguieron mantenerse en su carrera profesional

Trimestre	**3ª**	**4ª**	**5ª**
16-P	13	9	6
16-0	49	26	9
17-I	62	22	11
17-P	43	11	2
17-O	79	27	6
Total	**246**	**95**	**34**

Tabla 4. Estadística de estudiantes que han aprobado en 3a, 4a y 5a oportunidad en el programa por trimestre.

En la Gráfica 4 se muestra los porcentajes de estudiantes que han aprobado en tercera, cuarta y quinta oportunidad su asignatura. Como el porcentaje de estudiantes que se encontraba en tercera oportunidad es el más alto, es un resultado relevante porque estos estudiantes son los que tienen, del universo de estudiantes considerados, mayores posibilidades de tener éxito en lograr finalizar su carrera profesional.
En la Tabla 5 se muestra la comparación entre los estudiantes registrados a examen de recuperación en los programas de apoyo del SAI y del sistema tradicional.



Gráfica 4. Porcentaje de estudiantes registrados en el programa SAI que han aprobado en tercera, cuarta y quinta oportunidad.

En la Tabla 5 se exhibe el número de aprobados para cada programa: SAI o tradicional. En las Gráficas 5 y 6 se muestran los porcentajes de aprobación totales tanto para el programa SAI como para el programa tradicional, considerando el total de estudiantes registrados durante los trimestres 16-P al 17-O.

Trimestre	**SAI**		**Tradicional**	
	Número de estudiantes registrados a examen de recuperación	Número de estudiantes aprobados	Número de estudiantes registrados en examen de recuperación	Número de estudiantes aprobados
16-P	66	36	180	57
16-O	174	105	289	141
17-I	164	115	359	148
17-P	105	57	246	118
17-O	160	121	290	103
Total	**669**	**434**	**1364**	**567**

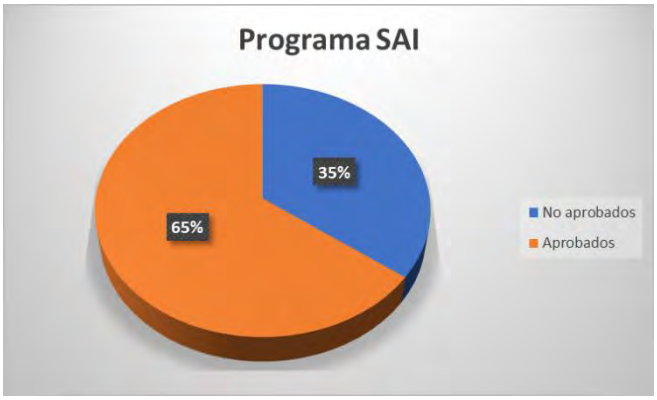
Tabla 5. Comparación de cifras de estudiantes no inscritos que optan por el programa SAI y los que eligen el programa tradicional para aprobar sus asignaturas en examen de recuperación. Aquí se encuentran incluidos los estudiantes que presentaron el examen de recuperación con oportunidades de 0 a 5.

La Gráfica 5 expresa el porcentaje total de 65% de aprobación en examen de recuperación para el programa SAI que es superior al del programa tradicional, con 42% de aprobación para el total de los trimestres considerados. Hay una diferencia notable entre cada uno de los programas, en el periodo comprendido de cinco trimestres. Por lo que el programa SAI tiene más incidencia e impacto en la problemática planteada en este trabajo.

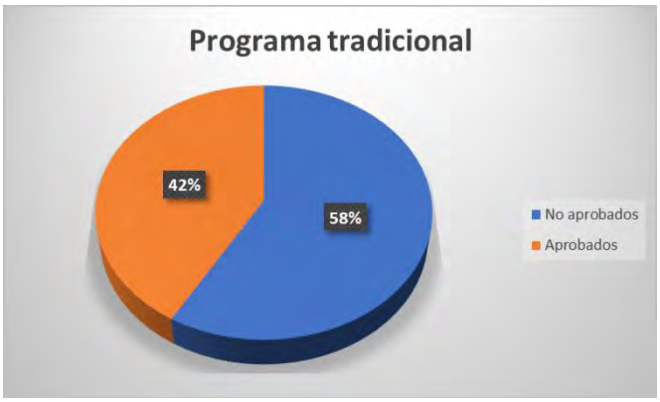
IV. Discusión

Las estadísticas muestran que los resultados obtenidos con el programa SAI son halagüeños: el porcentaje de aprobados por arriba de la media y superior al porcentaje de aprobados en el programa tradicional, ha contribuido a que un número mayor de estudiantes logren avanzar en su carrera al detener el número de oportunidades y/o lograr mantener su estancia en la universidad sin llegar al caso extremo de realizarlo en

su última oportunidad. Aprobar una UEA en recuperación en SAI es menos difícil, pues se hace en forma gradual; como se ha señalado: intentar acreditar una UEA en un solo examen implica a los estudiantes mucha presión y por las estadísticas mostradas la posibilidad de reprobar es bastante alta (Gráfica 6).



Gráfica 5. Porcentajes de aprobación en el programa SAI para los estudiantes que presentaron su examen de recuperación durante los trimestres del 16P al 17O.



Gráfica 6. Porcentajes de aprobación en el programa tradicional para los estudiantes que presentaron su examen de recuperación durante los trimestres del 16P al 17O.

IV. Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten afirmar que el programa SAI ha logrado que un gran número de estudiantes (434) puedan avanzar en su carrera profesional y continuar sus estudios. Es importante resaltar que estos estudiantes ya estaban impedidos de cursar como estudiantes regulares la UEA en donde ya habían perdido sus oportunidades. Siguiendo los lineamientos del SAI, contaron con asesoría y evaluación continua durante todo el trimestre, sin necesariamente enfrentase a un único examen de recuperación del programa tradicional, en donde tendrían que demostrar suficiencia en el dominio de todos los temas de la UEA en cuestión.

Por otro lado, se realizó un contraste entre ambos programas: SAI y tradicional Los resultados como se ha mostrado han sido superiores: los exámenes de recuperación con el programa SAI se logró 65% de aprobados contra un 42% en el programa tradicional. Esto permite constatar que, en general, se obtienen mejores resultados para acreditar una UEA en recuperación en el SAI que, por ejemplo, en el programa tradicional.

Con todo lo anterior, el programa SAI, descrito en este trabajo, ha proporcionado excelentes resultados y ha cumplido su cometido con el cual fue presentado el proyecto "Grupos experimentales en SAI para aumentar la eficiencia de acreditación". Por lo cual se espera que este proyecto sea permanente como una alternativa efectiva de acreditación en general y en especial para estudiantes que se encuentran bloqueados en alguna UEA. Finalmente, la contribución relevante del proyecto es hacer incidencia en la solución del problema educativo fundamental: ***disminuir el número de años en la que un estudiante logra terminar su carrera hasta que sea en los cuatro años, como fue estipulado en la fundación de la UAM.***

Agradecimientos

Se agradece el apoyo por los Departamentos y la Dirección de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-Azcapotzalco. Especialmente al Departamento de Ciencias Básicas.

Referencias

[1] Articulo3, sección 3.2 del Reglamento de Estudios Superiores(UAM)http://www.uam.mx/legislacion/res/index.html
[2] J. Navarro Cuevas, "EL SISTEMA DE INSTRUCCION PERSONALIZADA", Revista de la Educación Superior, Vol. 7, No.27, Julio a septiembre de 1978.
[3] Pulido, G., López, R., Martínez, A., "Acreditación en matemáticas en forma semipresencial para estudiantes irregulares usando una plataforma LMS" en *Diálogos Las TIC en la Universidad*, 2015, pp. 103 – 109.
[4] Keller, S. F., "Ten Years of Personalized Instruction", Teaching of Psychology, Vol. 1, No. 1. October 1974.
[5] Keller, F. S., "Good-bye, Teacher…," Journal of Applies Behavior Analysis, Vol.1, pp. 79-89, 1968.
[6] http://cbi.azc.uam.mx/es/CBI/Cursos_preparacion
[7] Dottrens, R., La enseñanza individualizada. Editorial Kapelusz, 1973.
[8] Pulido, G., López, R., Noreña, L.E., Evaluación en línea de asignaturas de ciencias básicas en carreras de ingeniería. Revista "ANFEI DIGITAL" con las Memorias de la XLII Conferencia Nacional de Ingeniería, "La formación de los Ingenieros en México. El impacto de las experiencias de la acreditación, certificación y evaluación en la formación de los ingenieros", número 3, junio de 2015, pp. 263 – 271.
http://galois.azc.uam.mx/login/index.php

ISSN: 2594-1011

El Grupo Fundamental

Arturo Cueto Hernández[1], Héctor Díaz Leal Guzmán[2]
[1, 2] Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9000 Ext. 9015 E-mail: arch@correo.azc.uam.mx , hdlg@correo.azc.uam.mx

Resumen — **El presente trabajo aborda el estudio del Grupo Fundamental de un espacio topológico. Se introducen los conceptos de espacio topológico arco-conexo y simplemente conexo. Se ilustra con varios ejemplos, tanto espacios topológicos cuyos grupos fundamentales son triviales como no triviales.**

Palabras Clave – **Espacio topológico con punto base, grupo fundamental, espacio topológico arco-conexo, espacio topológico simplemente conexo.**

Abstract — **The present work deals with the study of the Fundamental Group of a topological space. The concepts of path connected and simply connected topological spaces are introduced. With several examples is showed both topological spaces with trivial and non trivial fundamental groups.**

Keywords — **Topological space with base point, fundamental group, path connected topological space, simply connected topological space.**

I. Introducción

En Topología Algebraica, el concepto de Grupo Fundamental surge de manera natural al asociar funtorialmente a cada espacio topológico con punto base (X,x_0), un grupo

$$\pi_1(X,x_0)$$

definido esencialmente por curvas que tienen como punto inicial y final al punto base. Este grupo guarda la información acerca de la forma del espacio topológico y resulta ser un invariante topológico. El presente trabajo es la base del trabajo *Superficies*, en este mismo volumen, donde se analiza la relación entre los subgrupos del grupo fundamental de una superficie dada, con las superficies cubrientes de tal superficie. Se hace un breve interludio de categorías y funtores. Una categoría consiste de dos datos: una clase C de objetos y para cada par $a,b\in C$, una clase $Hom(a,b)$, cuyos objetos son llamados morfismos (o flechas) de a en b.

El morfismo $f : a\to b$ es isomorfismo, si y sólo si existe $g : b\to a$ morfismo tal que $gof=1_a$ y $fog=1_b$, donde 1_a (respectivamente, 1_b), es la identidad en a (respectivamente, la identidad en b). Un ejemplo muy usado es la categoría **Top**, cuyos objetos son los espacios topológicos y morfismos las funciones continuas. Un isomorfismo en **Top** es lo mismo que un homeomorfismo. Si C,D son dos categorías, un funtor de C en D, escrito $F : C\to D$, es una correspondencia que actúa tanto a nivel objetos como a nivel morfismos. A nivel objetos, F actúa como una función: a cada $a\in C$ le asocia $F(a)\in D$. A nivel morfismos, hay dos tipos de acciones (sin embargo, en ambos tipos manda identidades en identidades). El funtor F es covariante, si y sólo si manda a la composición de morfismos fog en la composición de morfismos $F(f)oF(g)$. El funtor F es contravariante, si y sólo si manda a la composición de morfismos fog en la composición de morfismos $F(g)oF(f)$.

El funtor olvido, de la categoría **Abelianos** en la categoría **Conjuntos**, que a cada grupo Abeliano le asocia su conjunto base y a cada morfismo de grupos (Abelianos) le asocia su función en el sentido usual, es un funtor covariante. Para la categoría **Conjuntos**, el funtor que a cada conjunto le asocia su conjunto potencia y a cada función f le asocia su imagen inversa f^{-1}, es un funtor contravariante. En ambos casos, covariante o contravariante, suele decirse que dicha correspondencia es funtorial. Para más detalles sobre categorías y funtores, ver [2].

II. Homotopía de curvas

Sean X un espacio topológico e $\mathbf{I}=[0,1]$. Una **curva** en X es toda $\gamma : \mathbf{I}\to X$, continua. Abusando de la notación, se entenderá que la imagen de γ, denotada Γ, es la curva. Los puntos $z_0=\gamma(0)$ y $z_1=\gamma(1)$, son llamados **punto inicial** y **punto final** de Γ, respectivamente.

En tal caso, se dirá que Γ va de z_0 a z_1. Γ es **cerrada**, si y sólo si $z_0=z_1$. Una **curva simple cerrada** será toda curva γ inyectiva en (0,1), cerrada. Sea $z_0\in X$ arbitrario, fijo. La curva $\gamma_{z0}(t)= z_0$ es llamada **curva constante**.

Definición I.1 Sean γ_1 y γ_2 curvas en X, con mismo punto inicial z_0 y mismo punto final z_1. Se dirá que γ_1 es **homotópicamente equivalente** a γ_2, escrito $\gamma_1\sim\gamma_2$, si y sólo si existe $\gamma : \mathbf{I}\times\mathbf{I}\to X$ continua, llamada homotopía de γ_1 en γ_2, con

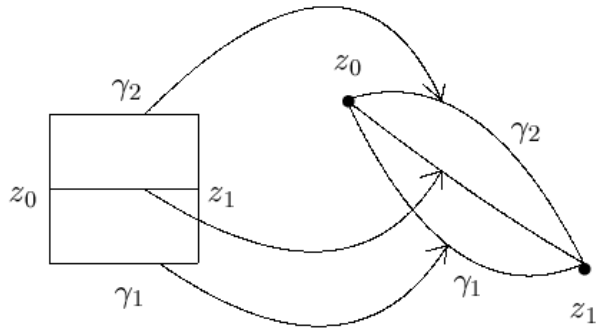
$$\gamma(x,0)=\gamma_1(x)$$

$$\gamma(x,1)=\gamma_2(x)$$

$$\gamma(0,y)=z_0$$

$$\gamma(1,y)=z_1$$

Geométricamente, la situación de la definición anterior se observa en la siguiente figura:



El cuadrado corresponde a $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$. Ante γ: el segmento horizontal etiquetado con γ_1 (respectivamente, etiquetado con γ_2), se transforma en la curva γ_1 de X (respectivamente, la curva γ_2 de X); el segmento vertical etiquetado con z_0 (respectivamente, etiquetado con z_1), se transforma en el punto z_0 de X (respectivamente, en el punto z_1 de X). Suele decirse que γ_1 *se deforma continuamente hacia* γ_2.

Teorema I.1 Sean $z_0,z_1\in X$. La relación $\sim$ es relación de equivalencia. ♦

III. El Grupo Fundamental

Sean γ_1 y γ_2 curvas en X, con z_0 y z_1, z_1 y z_2, los respectivos puntos iniciales y finales de ambas curvas. Se escribirá $\gamma_1*\gamma_2$ para la **concatenación** de estas curvas, i.e. la curva que va de z_0 a z_1 y sigue de z_1 a z_2 (por eso se requiere que el punto final de la primera, sea el punto inicial de la segunda). En la colección de clases de equivalencia de homotopía de curvas entre $z_0,z_1\in X$ (Teorema I.1), y donde $[\gamma]$ denota a la clase de equivalencia de γ, se tiene la operación inducida por la concatenación de curvas en X:

$$[\gamma_1]*[\gamma_2]=[\gamma_1*\gamma_2]$$

Esta operación está bien definida y es asociativa. Más aún:

$$[\gamma_1]*[\gamma_{z1}]=[\gamma_1]$$

$$[\gamma_{z0}]*[\gamma_1]=[\gamma_1]$$

Si γ_1^{-1} denota a la curva γ_1 recorrida en sentido contrario:

$$[\gamma_1] * [\gamma_1^{-1}]= [\gamma_{z0}]$$

$$[\gamma_1^{-1}] * [\gamma_1] = [\gamma_{z1}]$$

Los detalles pueden consultarse en [3], Teorema 51.2, páginas 326-329. Cuando las curvas consideradas tienen a z_0 como punto inicial y final, se pondrá

$$\pi_1(X,z_0)$$

para la colección de clases de equivalencia de homotopía de dichas curvas. Éste es un grupo ante $*$, llamada **Grupo Fundamental de X relativo a z_0**. Es urgente precisar bajo qué condiciones este grupo no depende de la elección de z_0.

Teorema III.1 Sean $z_0,z_1\in X$ y suponga que existe α curva que va de z_0 a z_1. Entonces

$$\pi_1(X,z_0)\rightarrow \pi_1(X,z_1)$$

$$[\gamma]\rightarrow[\alpha^{-1}] *[\gamma]*[\alpha]$$

es isomorfismo de grupos.

Demostración. (Idea) Primero, debe probarse que es morfismo de grupos. Segundo, debe probarse que la construcción correspondiente a la curva $\beta=\alpha^{-1}$, la cual por lo hecho inicialmente es morfismo, proporciona el morfismo de grupos inverso. Se usa para ello $[\beta^{-1}]= [\alpha]$ y $[\beta]=[\alpha^{-1}]$. ♦

Definición III.1 X es **arco-conexo**, si y sólo si para todos $z_0,z_1\in X$, existe una curva que va de z_0 a z_1.

Teorema III.2 Si X es arco-conexo, entonces para todos $z_0,z_1\in X$:

$$\pi_1(X,z_0)\cong\pi_1(X,z_1).\ ♦$$

Sea **Top**$_*$ la categoría cuyos objetos son de la forma (X,x_0), con X espacio topológico y $x_0\in X$, llamado **punto base** de X, y morfismos las funciones continuas $h : (X,x_0)\rightarrow(Y,y_0)$ tales que $h(x_0)=y_0$. Si γ es una curva en X con punto inicial y final x_0, entonces $h\circ\gamma$ es una curva con punto inicial y final y_0, por lo que se tiene definido un morfismo de grupos

$$h_*: \pi_1(X,x_0)\rightarrow \pi_1(Y,y_0)$$

$$h_*([\gamma])=[h\circ\gamma]$$

Las propiedades funtoriales de esta construcción son las siguientes:

$$(h\circ k)_*= h_*\circ k_*$$

Si i es la identidad en X, entonces i_* es la identidad en $\pi_1(X,x_0)$. Esto dice que

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_*\rightarrow\mathbf{Grupos}$$

$$(X,x_0)\rightarrow \pi_1(X,x_0)$$

es un funtor covariante. Ver la página 231 de [5]. Cuando X sea arco-conexo, se pondrá

$$\pi_1(X)$$

sin especificar al punto base, y se le llamará el **Grupo Fundamental** de X.

Teorema III.3 Si $h : (X,x_0)\rightarrow(Y,y_0)$ es homeomorfismo, entonces

$$h_*: \pi_1(X,x_0)\rightarrow \pi_1(Y,y_0)$$

es isomorfismo de grupos. ♦

Cuando X e Y sean arco-conexos, el Teorema III.3 queda:

$$X\cong Y\Rightarrow\pi_1(X)\cong\pi_1(Y)$$

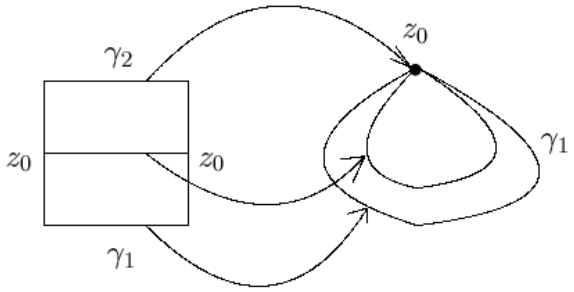
Teorema III.4 Sean $(X,x_0),(Y,y_0)\in$ **Top**$_*$. Entonces

$$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0).$$ ♦

Definición III.2 X es **simplemente conexo**, si y sólo si X es arco-conexo y $\pi_1(X)\cong\{1\}$.

Definición III.3 Una curva cerrada Γ es contraible a un punto, si y sólo si es homotópicamente equivalente a una curva constante.

La situación de la definición anterior se observa en la siguiente figura:



Teorema III.5 Sea X arco-conexo. Entonces X es arco-conexo, si y sólo si toda curva cerrada Γ (en X) es contraible a un punto (en X). ♦

Se asocia a **C** la topología usual de $\mathbf{R}^2$. Todo abierto no vacío es llamado **región** y toda región conexa es llamada **dominio**. Una curva en **C** es toda

$$\gamma : [a,b]\rightarrow\mathbf{C}$$

$$\gamma(t)=u(t)+iv(t)$$

continua. Esto equivale a pedir que $u,v : [a,b]\rightarrow\mathbf{C}$ sean ambas, continuas. La curva γ es **lisa**, si y sólo si ambas, u y v, son derivables. En tal caso:

$$\gamma'(t)=u'(t)+iv'(t)$$

Una curva **lisa por partes**, es una curva γ tal que existe una partición de [a,b], en la cual γ es lisa en cada subintervalo de dicha partición. γ es **cerrada**, si y sólo si $\gamma(a)=\gamma(b)$. γ es **simple cerrada**, si y sólo si es lisa por partes, cerrada, inyectiva en (a,b). Una región D es arco-conexa, si cumple la Definición III.1 como subespacio de **C**. En general, arco-conexo implica conexo. El recíproco no siempre se cumple (Ejemplo 1.8 de la página 25 de [4]). Sin embargo, en el caso de regiones en **C**, ambos conceptos son equivalentes.

Teorema III.6 Sea D región. Entonces D es dominio, si y sólo si D es arco-conexa. ♦

Teorema III.7 Sean D_1, D_2 dominios en **C**, homeomorfos. Si D_1 es simplemente conexo, entonces D_2 es simplemente conexo. ♦

Ejemplo III.1 C es simplemente conexo.

Demostración. Teorema 10.A, página 18, [1]. ♦

Ejemplo III.2 Para todo $z_0\in\mathbf{C}$, para todo $\delta>0$, la bola abierta

$$B(z_0,\delta)=\{ z\in\mathbf{C} : |z-z_0|<\delta \}$$

es simplemente conexo. ♦

Los ejemplos que siguen muestran espacios topológicos arco-conexos cuyos Grupos Fundamentales no son triviales. El primero corresponde al **plano pinchado**, **C**-{0}, el segundo a la circunferencia

$$S^1=\{ z\in\mathbf{C} : |z|=1 \}$$

El tercero, a $S^1\times S^1$, como aplicación del Teorema III.4 y el Ejemplo III.4.

Ejemplo III.3 $\pi_1(\mathbf{C}-\{0\})\cong\mathbf{Z}$.

Demostración. Teorema 10.B, página 18, [1]. ♦

Ejemplo III.4 $\pi_1(S^1)\cong\mathbf{Z}$.

Demostración. Teorema 54.5, página 345, [3]. ♦

Ejemplo III.5 $\pi_1(S^1\times S^1)\cong\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. ♦

IV. Conclusiones

Como se comentó en la introducción, el presente trabajo es la base del trabajo *Superficies*, en este mismo volumen. En él se verán algunos refinamientos de lo visto en el actual trabajo. En particular, otros espacios topológicos para los cuales se obtienen allí sus respectivos grupos fundamentales, son los de la **esfera** en $\mathbf{R}^3$, denotada S^2, y el **plano proyectivo**, denotado $\mathbf{P}^2$:

$$\pi_1(S^2) \cong \{1\}$$

$$\pi_1(\mathbf{P}^2, \omega) \cong \mathbf{Z}_2$$

Referencias

[1] Ahlfors, Lars V. & Sario, Leo: "*Riemann Surfaces*". Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1960).

[2] Díaz Leal Guzmán, Héctor: "*Teoría de Gavillas: Introducción a la Teoría de Esquemas*". Universidad Autónoma Metropolitana, México (2017).

[3] Munkres, J. R.: "*Topology*". Second edition. Prentice Hall, Inc. (2000).

[4] Rotman, J. J.: "*An Introduction to Algebraic Topology*". Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag (1988).

[5] Willard, S.: "*General Topology*". Addison Wesley Publishing Company (1970).

ISSN: 2594-1011

Superficies

Rogelio Herrera Aguirre[1], Héctor Díaz Leal Guzmán[2]
[1, 2] Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9000 Ext. 9015 E-mail: rha@correo.azc.uam.mx , hdlg@correo.azc.uam.mx

Resumen — **El presente trabajo aborda el estudio de las Superficies, centrando la atención en el aspecto topológico de las mismas, a través del Grupo Fundamental. Se introduce el concepto de Espacio Cubriente. Se analiza la relación entre los subgrupos del grupo fundamental de una superficie dada, con las superficies cubrientes de dicha superficie. Se exhibe el Teorema de Clasificación para Superficies Compactas.**

Palabras Clave – **Superficies, espacios cubrientes, grupo fundamental, clasificación de superficies compactas**.

Abstract — **The present work deals with the study of Surfaces, focusing attention on the topological aspect, through the Fundamental Group. The concept of Cover Space is introduced. The relationship between the subgroups of the fundamental group of a given surface, with cover surfaces of that surface, is analyzed. The Classification Theorem of Compact Surfaces is showed.**

Keywords — **Surfaces, cover spaces, fundamental group, classification of compact surfaces**.

I. Introducción

El estudio de Superficies es esencial en Variable Compleja, donde surge el concepto de Superficie de Riemann. Ésta es razón más que suficiente para abordar dicho estudio. En este trabajo la atención se centra en el aspecto topológico de las superficies, a través del Grupo Fundamental. Se hace una incursión a los Espacios Cubrientes. Se analiza la relación entre los subgrupos del grupo fundamental de una superficie dada, con las superficies cubrientes de tal superficie. Finalmente, se exhibe el Teorema de Clasificación de Superficies Compactas. Ver en este mismo volumen, *El Grupo Fundamental*. En él se trabaja todo lo relativo a homotopía de curvas y el grupo fundamental de un espacio topológico.

II. Superficies

En esta sección se introduce el concepto de superficie como variedad 2-dimensional. Se estudia el término de orientabilidad.

Definición II.1 Un espacio topológico (X,Θ) es **segundo numerable**, si y sólo si Θ tiene una base numerable.

Definición II.2 Una **variedad n-dimensional** es una 4-upla

$$(X, \{U_i : i\in I\}, \{V_i : i\in I\}, \{\varphi_i : i\in I\})$$

donde

1. X es espacio topológico Hausdorff, segundo numerable.
2. $\{U_i : i\in I\}$ es una cubierta abierta de X.
3. $\{V_i : i\in I\}$ es un conjunto de abiertos no vacíos de $\mathbf{R}^n$.
4. $\varphi_i : U_i \to V_i$ es homeomorfismo, para toda $i\in I$.

Al par (U_i,φ_i) se le llama **carta local** y al conjunto

$$\{(U_i,\varphi_i) : i\in I\}$$

se le llama **atlas** de X.

Comentario II.1 Sea X una variedad n-dimensional. Entonces para todo $p\in X$, existe una vecindad U de p, homeomorfa a un abierto de $\mathbf{R}^n$.

Definición II.3 Toda variedad 2-dimensional, es llamada **superficie**.

Comentario II.2 En algunos textos se pide a una superficie que sea conexa (ver [1]).

Definición II.4 Una superficie X es **orientable**, si y sólo si para todo $p\in X$, existen U vecindad de p, W abierto de $\mathbf{R}^2$ y vectores p_x, p_y, p_z en $\mathbf{R}^3$, con $\{p_x,p_y\}$ linealmente independiente, tales que U es homeomorfa a W, éste está contenido en el plano generado por $\{p_x,p_y\}$ y $p_z=p_x\times p_y$.

Es superficie orientable la **3-esfera**

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

Es superficie no orientable la **banda de Mobius**.

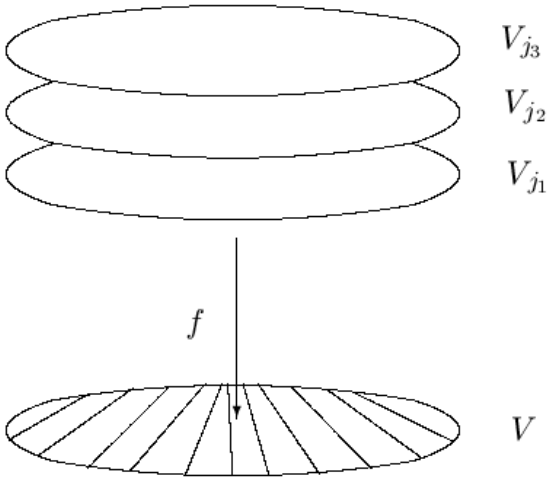
Intuitivamente, una superficie es orientable, si y sólo si en cada punto de la misma es válida la **regla de la mano derecha** para el producto cruz.

III. Espacios Cubrientes

El concepto de superficie cubriente junto con el de grupo fundamental, son esenciales en el estudio de superficies. Esta sección finaliza con la definición de cubierta universal asociada a una superficie.

Definición III.1 Sea f : X→Y continua, suprayectiva. Se dice que el abierto V de Y está **uniformemente cubierto** por f, si y sólo si $f^{-1}(V)$ se puede expresar como unión ajena de abiertos V_j de X, tales que para todo j, $f|_{V_j}:V_j\to V$ es homeomorfismo. Si cada p∈Y tiene una vecindad uniformemente cubierta por f, se dice que f es una **función cubriente** y el par (X,f) se llama **espacio cubriente** de Y.

Una forma de visualizar que V está uniformemente cubierto por f, es pensar en una pila de platos de una cocina, todos ellos iguales tanto en forma como en tamaño, y donde el plato en el fondo de la pila es V y los platos encima de éste son los abiertos V_j. La figura que sigue ilustra lo anterior:



Teorema III.1 Sea f : X→Y función cubriente. Entonces

1. Para todo $y_0\in Y$, $f^{-1}(y_0)$ es discreto.
2. f es abierta.
3. f es **homeomorfismo local**. ♦

Definición III.2 Sean f : X→Y función cubriente, $y_0\in Y$. El subespacio $f^{-1}(y_0)$ es llamado la **fibra** de f sobre y_0.

Comentario III.1 Sea f : X→Y función cubriente, con Y superficie. Entonces X es superficie. Más general, si f es función cubriente con Y variedad n-dimensional, entonces X es variedad n-dimensional.

Teorema III.2 Sean

$$S^1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

la 2-esfera y ρ : **R**→ S^1 dada por ρ(θ)=(cos2πθ,sen2πθ). Entonces ρ es función cubriente.

Demostración. Teorema 53.1, página 337, [2]. ♦

Teorema III.3 Sean f : $X_1\to Y_1$ y g : $X_2\to Y_2$ funciones cubrientes. Entonces

$$f\times g : X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$$

$$f\times g(a,b)=(f(a),g(b))$$

es función cubriente.

Demostración. Teorema 53.3, página 339, [2]. ♦

La composición de las funciones h y g, se denota por hg.

Ejemplo III.1 Sean I la identidad en los reales positivos $\mathbf{R}^+$, ρ como en el Teorema III.2 y g=ρ×I. Si

$$h : S^1\times\mathbf{R}^+\to(\mathbf{R}^2-\{(0,0)\})$$

$$h(\mathbf{x},t)=t\mathbf{x}$$

entonces f=hg es función cubriente. En particular, el semiplano superior abierto $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$ es espacio cubriente del **plano pinchado** $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$. ♦

Definición III.3 Sean f : X→Y y p : Z→Y tales que f es continua y p es función cubriente. Un **levantamiento** de f es cualquier h : X→Z tal que f=ph. Esto último se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Teorema III.4 Sean $z_0\in Z$, $y_0=p(z_0)$. Toda curva γ en Y con punto inicial y_0, tiene un único levantamiento a una curva Γ en Z, con punto inicial z_0. ♦

Teorema III.5 Levantamiento de curvas. Sean γ y δ curvas en Y, que van de $y_0=p(z_0)$ a y_1, con γ y δ homotópicas. Entonces sus respectivas curvas levantamiento en Z, tienen mismo punto inicial z_0, mismo punto final sobre y_1, y son homotópicas.

Demostración. Teorema 54.3, página 344, [2]. ♦

Comentario III.2 Ver también el Teorema 15.A, página 30, [1].

Sean p : X→Y función cubriente, $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$, con $y_0=p(x_0)$. Sean $[\gamma] \in \pi^1(Y, y_0)$ y Γ levantamiento de γ en X, con punto inicial en x_0. Se define

$$\Phi: \pi^1(Y, y_0) \rightarrow p^{-1}(y_0)$$

$$\Phi([\gamma])=\Gamma(1)=\text{punto final de } \Gamma$$

Teorema III.5 Si X es arco-conexo, entonces Φ es suprayectiva. Si X es simplemente conexo, entonces Φ es biyectiva.

Demostración. Teorema 54.4, página 345, [2]. ♦

Para n≥2, sea

$$S^n=\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\}$$

Este conjunto es llamado la **n-esfera**.

Teorema III.6 Para n≥2, S^n es simplemente conexo.

Demostración. Teorema 59.3, página 369, [2]. ♦

A partir de aquí, se consideran únicamente superficies conexas. Una aplicación del Teorema de levantamiento de curvas, es el siguiente resultado.

Teorema III.6 Sea (X,f) superficie cubriente de Y. Si Y es simplemente conexo, entonces f es homeomorfismo. ♦

Sea (X,f) superficie cubriente de Y. Se dice que X es **regular**, si y sólo si para toda curva γ en Y, existe Γ curva en X que es levantamiento de γ.

III.1 Sean Y una superficie, $\mathbf{o} \in Y$ y $G=\pi_1(Y, \mathbf{o})$. Para cada H<G, la siguiente construcción proporciona una superficie cubriente regular (X,f) de Y, con $H \cong \pi_1(X, \mathbf{o'})$ y $\mathbf{o'}=f(\mathbf{o})$.

A cada curva γ con punto inicial **o** y punto final **p**, se le asocia un punto **p'**. Para γ_1 y γ_2 curvas con correspondientes puntos $\mathbf{p_1'}$ y $\mathbf{p_2'}$, éstos se identifican si y sólo si $\mathbf{p_1}=\mathbf{p_2}$ y, adicionalmente, $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H$. Al conjunto de puntos que se identifican con **p'** se le denota por **P**. Entonces X es el conjunto de puntos **P**. **o'** se obtiene mediante la curva constante **o** en Y. Finalmente, f (**P**)=**p**.

III.2 Cubierta Universal. La construcción de III.1 implica la existencia de una correspondencia entre los subgrupos H de G y las superficies cubrientes regulares X de Y: al subgrupo H=G le corresponde Y, mientras que al subgrupo trivial H={1} le corresponde una superficie simplemente conexa, denotada Y_∞ y llamada la **cubierta universal** de Y.

IV. Clasificación de superficies compactas

Sea *C* una circunferencia en $\mathbf{R}^2$, $p_0,p_1,\ldots,p_n$ puntos de *C*, tomados en sentido antihorario, con $p_0=p_n$. Se denota por *P* a la región poligonal determinada por los p_j, Los conjuntos

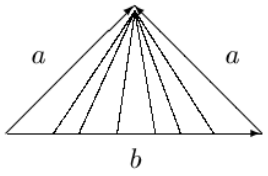
$$V(P)=\{ p_0,p_1,\ldots,p_{n-1}\}$$

$$A(P)=\{\{p_0,p_1\},\ldots,\{p_{n-1},p_n\}\}$$

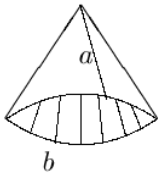
son llamados **vértices** y **aristas** de *P*, respectivamente. Por convención, la arista $\{p_{j-1},p_j\}$ tendrá punto inicial p_{j-1} y punto final p_j, y este orden define precisamente una **orientación** para dicha arista. Esto se representa mediante una flecha que va del punto inicial al final. Se denota por *int(P)*, *bd(P)* al interior de *P* y a la unión de las aristas, respectivamente. Si L,L' son dos segmentos de recta orientados, se denota por *h* al homeomorfismo de L en L' que preserva orientaciones. Una etiquetación de las arista de *P*, es una función de *A(P)* en un conjunto *S*, cuyos elementos son llamados **etiquetas**. En cualquier etiquetación se puede dar el caso que dos aristas tengan la misma etiqueta. Dadas orientaciones y etiquetas para *P*, sea ~ la siguiente relación (de equivalencia) en *P*. Los puntos de *int(P)* se relacionan únicamente consigo mismos. Si L, L' son dos aristas con misma etiqueta, un punto p de L se relaciona con *h*(p). Los puntos de las otras aristas se relacionan únicamente consigo mismos. Bajo esta situación, se dice que el espacio cociente

$$X=P/\sim$$

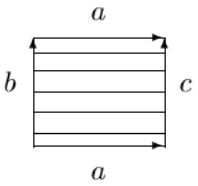
se obtuvo **pegando aristas** de *P*, de acuerdo a las orientaciones y etiquetas dadas. Si *P* es la región triangular con *S*={a, b} y orientaciones las mostradas:



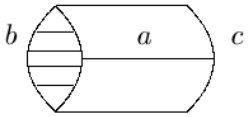
se obtiene la superficie cónica en $\mathbf{R}^3$:



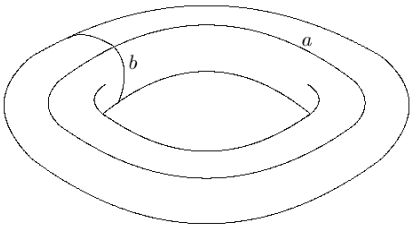
Si *P* es la región cuadrada con *S*={a, b, c} y orientaciones las mostradas:



se obtiene la superficie cilíndrica en $\mathbf{R}^3$:



Si b=c, se obtiene la superficie conocida como **toro**:



Se denota por **T** al toro.

Ejemplo IV.1 $\mathbf{T}\cong S^1\times S^1$. En particular:

$$\pi_1(\mathbf{T})\cong\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.\ \blacklozenge$$

Una consecuencia del Teorema III.6 se obtiene en el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.2 $\pi_1(S^2)\cong\{1\}.\ \blacklozenge$

El **plano proyectivo**, denotado por $\mathbf{P}^2$, se obtiene como el espacio cociente de S^2, al identificar **x** con –**x**. Esto significa que todo elemento de $\mathbf{P}^2$ es de la forma $\omega=\{\mathbf{x},-\mathbf{x}\}$.

Teorema IV.1 $\mathbf{P}^2$ es superficie compacta. La proyección natural

$$\sigma : S^2\rightarrow \mathbf{P}^2$$

$$\sigma(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},-\mathbf{x}\}$$

es función cubriente. Para todo $\omega\in\mathbf{P}^2$:

$$\pi_1(\mathbf{P}^2,\omega)\cong\mathbf{Z}_2.\ \blacklozenge$$

Comentario IV.1 No son homeomorfos S^2, T, $\mathbf{P}^2$. En efecto. Del Teorema III.6, S^2 es simplemente conexo, lo cual equivale a $\pi_1(S^2)\cong\{1\}$. El resto es consecuencia del Ejemplo IV.1, el Teorema IV.1 y el hecho de que homeomorfismo implica isomorfismo de grupos fundamentales.

Sean *P* y *A(P)*, una región poligonal y su conjunto de aristas, respectivamente. Suponga dada una etiquetación y orientación al conjunto *A(P)*. Se pondrá a_{ik} para la etiqueta dada a la arista $\{p_{k-1},p_k\}$, $\varepsilon_k=1$ o bien $\varepsilon_k=-1$, dependiendo si la orientación de dicha arista es de p_{k-1} a p_k o caso contrario, respectivamente. El símbolo

$$\omega=(a_{i1})^{\varepsilon 1}(a_{i2})^{\varepsilon 2}\ldots(a_{in})^{\varepsilon n}$$

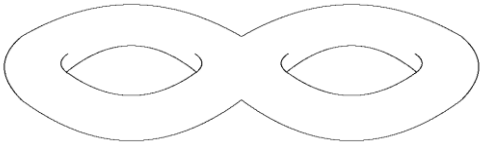
proporciona el número de aristas, etiquetas y orientaciones, para *P*. Se llama a ω el **esquema de etiquetado-orientación** para el espacio cociente X=P/~. Se conviene en omitir los exponentes +1 en este esquema. Para la superficie cónica, el esquema es $\omega=a^{-1}ba$ (en la región triangular, inicie en el vértice superior y recorra en sentido antihorario). Para el toro, su correspondiente esquema es $\omega=aba^{-1}b^{-1}$ (en la región cuadrada, hacer b=c). Para el plano proyectivo, ω=abab.

Definición IV.1 Sea *P* una región poligonal de 4n lados. El esquema

$$\omega=(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})\,(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\ldots\,(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$$

corresponde al **n-toro**, denotado $\mathbf{T}^n$.

Se ilustra el caso del 2-toro. En cada toro se introduce una curva cerrada auxiliar, con distinta orientación. Estas curvas determinan en cada toro un abierto, el cual se elimina en ambos toros. Se pegan ambos toros agujereados a lo largo de las curvas auxiliares, para obtener el 2-toro:



Definición IV.2 Sean m>1 y *P* una región poligonal de 2m lados. El esquema

$$\omega=(a_1a_1)\,(a_2a_2)\ldots\,(a_ma_m)$$

corresponde al **m-plano proyectivo**, denotado $(\mathbf{P}^2)^m$.

Comentario IV.1 Análogo al caso del 2-toro, el procedimiento de eliminar dos abiertos, determinados éstos por dos curvas cerradas en dos superficies y pegar las correspondientes superficies agujereadas por dichas curvas, se conoce como **suma conexa** de ambas superficies. La suma conexa de S^2 consigo misma, es de nuevo S^2. Como anteriormente se ilustró, la suma conexa de dos toros es un 2-toro.

Teorema IV.2 Clasificación de superficies compactas.

1. No son homeomorfas S^2, $\mathbf{T}^n$, $(\mathbf{P}^2)^m$.
2. Sean P una región poligonal y $X=P/\sim$. Entonces X es homeomorfo o bien a S^2, o bien a $\mathbf{T}^n$, o bien a $(\mathbf{P}^2)^m$.
3. Toda superficie compacta y conexa, se puede obtener de una región poligonal, módulo pegado de sus aristas, de acuerdo a un etiquetado y orientación de las mismas. ♦

V. Conclusiones

El presente trabajo es una breve introducción al estudio de Superficies. Como se comentó en la introducción, la atención se centra en el aspecto topológico, a través del Grupo Fundamental de las mismas. Un estudio más amplio debe abarcar Teoría de Grupos, poniendo especial atención en Presentaciones de Grupos y, por supuesto, Topología Algebraica. El tema de Superficies es básico para una discusión formal de Superficies de Riemann. En efecto. Una Superficie de Riemann W, es un espacio topológico Hausdorf y conexo que, entre otros datos, depende de postulados en homeomorfismos $h \in \Phi(W)$ de abiertos de W en abiertos de $\mathbf{C}$, tales que el conjunto

$$\{ \text{dominio}(h) : h \in \Phi(W) \}$$

sea cubierta abierta de W.

Referencias

[1] Ahlfors, Lars V. & Sario, Leo: "*Riemann Surfaces*". Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1960).
[2] Munkres, J. R.: "*Topology*". Second edition. Prentice Hall, Inc. (2000).

ISSN: 2594-1011

Solución exacta del oscilador Dunkl bidimensional mediante la factorización de Schrödinger

Manuel Salazar Ramírez[1], Didier Ojeda Guillén[1], Roberto Daniel Mota Esteves[2]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM – IPN, Ciudad de México, México.
[2]Departamento de Ciencias Básicas, ESIME Culhuacán – IPN, Ciudad de México, México.
Teléfono (55) 57296000 Ext. 52027 E-mail: dojedag@ipn.mx

Resumen — **Estudiamos el oscilador Dunkl bidimensional mediante un método algebraico del grupo $SU(1,1)$. Aplicamos el método de factorización de Schrödinger a la parte radial del Hamiltoniano del problema para obtener los generadores del álgebra. Encontramos el espectro de energía utilizando la teoría de representaciones irreducibles unitarias. Las eigenfunciones de este problema se obtienen de manera analítica.**

Palabras Clave – **álgebra de Lie su(1,1), oscilador Dunkl, factorización de Schrödinger**.

Abstract — **We study the Dunkl oscillator in two dimensions by the $SU(1,1)$ group algebraic method. We apply the Schrödinger factorization to the radial Hamiltonian of the Dunkl oscillator to find the Lie algebra generators. The energy spectrum is found by using the theory of unitary irreducible representations. The eigenfunctions of this problem are found analitically.**

Keywords — **su(1,1) Lie algebra, Dunkl oscillator, Schrödinger factorization .**

I. Introducción

En la mecánica cuántica relativista y no relativista hay algunos problemas que se pueden resolver exactamente. La solución a estos problemas generalmente se obtiene de dos maneras: analítica y algebraica. Los métodos algebraicos proporcionan una forma más elegante de encontrar el espectro de energía y las funciones propias, y en general, estos métodos están relacionados con simetrías compactas y no compactas. El álgebra su (1,1), una de las álgebras de Lie más simples, se ha aplicado con éxito para estudiar muchos problemas cuánticos no relativistas, como se puede ver en las referencias [1-9].

Dirac [10] y Schrodinger [11-13] establecieron las ideas fundamentales de la factorización desde los comienzos de la mecánica cuántica. Sin embargo, fueron los trabajos de Infeld y Hull [14,15] donde los métodos de factorización se volvieron relevantes para el estudio de los sistemas cuánticos. Introdujeron una forma sistemática de factorizar y clasificar una gran clase de potenciales. Recientemente, la denominada factorización de Schrodinger se ha utilizado para construir los generadores de álgebra de Lie su (1,1) y para dar soluciones algebraicas a diversos problemas físicos [16-20].

El oscilador Dunkl se ha estudiado en dos y tres dimensiones en las referencias [21-23]. En estos trabajos, los autores obtuvieron las soluciones exactas del modelo, su superintegrabilidad y su simetría dinámica (llamada álgebra de Schwinger-Dunkl). Las soluciones bidimensionales del oscilador Dunkl en coordenadas cartesianas se dan en términos de polinomios de Hermite generalizados, y en coordenadas polares sus soluciones angulares y radiales se dan en términos de los polinomios de Jacobi y Laguerre, respectivamente.

El objetivo del presente trabajo es resolver de manera exacta el oscilador Dunkl en dos dimensiones mediante el uso del álgebra de Lie su(1,1) y el método de factorización de Schrödinger.

II. El oscilador Dunkl en dos dimensiones en coordenadas polares.

La derivada Dunkl $D_{x_i}^{u_{x_i}}$ está definida por [24]

$$D_{x_i}^{u_{x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\mu_{x_i}}{x_i}\left(I - R_{x_i}\right), \;\; x_i \in \{x, y\}. \tag{1}$$

En esta expresión R_{x_i} es el operador de reflexión con respecto al plano $x_i = 0$, la cual produce la siguiente acción

$$R_x(x,y) = f(-x,y), \quad R_y(x,y) = f(x,-y). \tag{2}$$

Con este operador, el Hamiltoniano del oscilador Dunkl isotrópico en dos dimensiones es

$$H = -\frac{1}{2}\left[\left(D_x^{\mu_x}\right)^2 + \left(D_y^{\mu_y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2], \tag{3}$$

donde el término $\left(D_{x_i}^{u_{x_i}}\right)^2$ explícitamente está dado por

$$\left(D_{x_i}^{u_{x_i}}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\mu_{x_i}}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\mu_{x_i}}{x_i^2}\left[I - R_{x_i}\right]. \quad (4)$$

En coordenadas polares $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ el Hamiltoniano se puede escribir como

$$H = A_r + \frac{1}{r^2}B_\varphi, \quad (5)$$

donde A_r y B_φ están dados por

$$A_r = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] - \frac{1}{r}\left(\mu_x + \mu_y\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}r^2, \quad (6)$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\mu_x\tan\varphi - \mu_y\cot\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\mu_x(I - R_x)}{2\cos^2\varphi} + \frac{\mu_x(I - R_x)}{2\sin^2\varphi}. \quad (7)$$

Por simplicidad, de aquí en adelante denotaremos las constantes μ_x y μ_y como μ_1 y μ_2 respectivamente. Si proponemos que la eigenfunción $\Psi(r,\varphi)$ de la ecuación de Schrödinger $H\Psi = \epsilon\Psi$ es de la forma $\Psi(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, obtenemos la ecuación diferencial para la parte angular

$$B_\varphi\Phi(\varphi) - \frac{l^2}{2}\Phi(\varphi) = 0, \quad (8)$$

y el Hamiltoniano radial del problema es

$$H_r R(r) = A_r R(r) + \frac{l^2}{2r^2}R(r) = \epsilon R(r), \quad (9)$$

donde el término $\frac{l^2}{2}$ es la constante de separación. En este trabajo nos enfocaremos en encontrar la solución a la parte radial de esta ecuación. Sin embargo, se puede demostrar que la constante de separación se puede expresar en términos del número cuántico m de la parte angular como

$$l^2 = 4m(m + \mu_1 + \mu_2). \quad (10)$$

III. Solución su(1,1) de la parte radial del oscilador Dunkl.

En esta sección utilizaremos el método de factorización de Schrödinger [11,16] para obtener el espectro de energía y las eigenfunciones radiales del oscilador Dunkl. Primero, para remover la primera derivada de la ecuación (9) proponemos

$$R(r) = \frac{U(r)}{r^{\frac{1}{2}(1+2\mu_1+2\mu_2)}}. \quad (11)$$

Así, la ecuación diferencial para $U(r)$ se puede escribir en una forma más apropiada como

$$\left(-r^2\frac{d^2}{dr^2} + r^4 - 2\epsilon r^2\right)U(r) = \left(\frac{1}{4} - l^2 - (\mu_1+\mu_2)^2\right)U(r). \quad (12)$$

Para poder aplicación la factorización de Schrödinger al lado izquierdo de la ecuación (11), proponemos

$$\left(r\frac{d}{dr} + ar^2 + b\right)\left(-r\frac{d}{dr} + cr^2 + f\right)U(r) = gU(r), \quad (13)$$

donde a, b, c, d, f y g con constantes por determinar. Expandiendo esta expresión y comparándola con la ecuación (12) obtenemos

$$a = c = \pm 1, \quad f = \mp\epsilon - \frac{1}{2}, \quad b = \mp\epsilon - \frac{3}{2}, \quad g = -l^2 - (\mu_1+\mu_2)^2 - (\epsilon \pm 1)^2 + \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Así, la ecuación diferencial para $U(r)$ (ecuación (13)) se puede factorizar como

$$(J_\mp \mp 1)J_\pm U(r) = -\frac{1}{4}\left\{(\epsilon \pm 1)^2 + \left[l^2 + (\mu_1+\mu_2)^2 - \frac{1}{2}\right]\right\}U(r), \quad (15)$$

donde

$$J_\pm = \frac{1}{2}\left(\mp r\frac{d}{dr} + r^2 - \epsilon \pm \frac{1}{2}\right). \quad (16)$$

Los operadores $J_\pm$ son llamados los operadores de Schrödinger. De aquí en adelante utilizaremos el procedimiento estándar para generalizar estos operadores y que cierren el álgebra de Lie $su(1,1)$. De la ecuación (12) definimos $B_0U(r) = \frac{\epsilon}{2}U(r)$ donde

$$B_0U(r) \equiv \frac{1}{4}\left[-\frac{d^2}{dr^2} + r^2 + \frac{l^2 - \frac{1}{4} + (\mu_1+\mu_2)^2}{r^2}\right]U(r) \quad (17)$$

Esta ecuación nos permite generalizar los operadores $J_\pm$ a los operadores de segundo orden siguientes

$$\mathrm{B}_\pm \equiv \frac{1}{2}\left[\mp\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} + \mathrm{r}^2 - 2\mathrm{B}_0 \mp \frac{1}{2}\right]. \quad (18)$$

Mediante un cálculo directo podemos probar que los operadores $B_{\pm}$ y B_0 cierran el álgebra de Lie $su(1,1)$ (ver la ecuación (32) del Apéndice). Ahora, notemos que los estados de las representaciones irreducibles unitarias de esta álgebra son $\langle r|k,n\rangle = U(r)$. Sin embargo, si aplicamos los operadores $B_{\pm}$ y B_0 a las funciones $U(r) = r^{\frac{1}{2}(1+2\mu_1+2\mu_2)}R(r)$, obtenemos los nuevos operadores

$$A_0 = \frac{1}{4}\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(1+2\mu_1+2\mu_2)}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l^2}{r^2} + r^2\right),$$
$$A_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm r\frac{d}{dr} - r^2 + 2A_0 \pm (1+\mu_1+\mu_2)\right), \tag{19}$$

cuyas representaciones irreducibles unitarias están dadas ahora en términos de las funciones radiales (base Sturmiana) $|n,k\rangle = R(r)$. Nótese que estos nuevos operadores también cierran el álgebra de Lie $su(1,1)$ y que el Hamiltoniano radial (ecuación (9)) y el tercer generador A_0 satisfacen $A_0 = \frac{1}{2}H_r$.

La acción del operador de Casimir A^2 (ver Apéndice) sobre la función radial R(r) es

$$A^2R(r) = \frac{1}{4}[(\mu_1+\mu_2)^2 + l^2 - 1]R(r). \tag{20}$$

Sustituyendo la ecuación (10) en la ecuación (19) y de la teoría de representaciones irreducibles unitarias se sigue que

$$\frac{1}{4}[(\mu_1+\mu_2)^2 + 4m(m+\mu_1+\mu_2) - 1]R(r) = k(k-1)R(r). \tag{21}$$

Así, el número cuántico del grupo k (índice de Bargmann) toma los siguientes valores

$$k = m + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2+1),$$
$$k = -m - \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2-1), \tag{22}$$

mientras que el otro número cuántico del grupo es igual al número cuántico radial $n = n_r$. De la ecuación (9) y de la ecuación (35) del Apéndice obtenemos

$$H_rR(r) = 2A_0R(r) = \epsilon R(r) = 2\left[n_r + m + \frac{1}{2}(1+\mu_1+\mu_2)\right]R(r). \tag{23}$$

Luego, el espectro de energía del oscilador Dunkl en dos dimensiones es

$$\epsilon = 2(n_r+m) + \mu_1 + \mu_2 + 1. \tag{24}$$

La función radial U(r) se puede obtener de la ecuación diferencial general [25]

$$u'' + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right]u = 0, \tag{25}$$

la cual tiene como solución particular

$$u = N_n e^{-x^2/2}x^{\alpha+1/2}L_n^{\alpha}(x^2). \tag{26}$$

Sustituyendo el espectro de energía de la ecuación (24) en la ecuación diferencial para la función radial U(r) (ecuación (12)) y comparándola con la ecuación diferencial (25) obtenemos

$$\alpha^2 = l^2 + (\mu_1+\mu_2)^2 = 4m(m+\mu_1+\mu_2) + (\mu_1+\mu_2)^2, \tag{27}$$

en donde hemos utilizado además la expresión (10). Por lo tanto, la función radial U(r) explícitamente es

$$U(r) = \frac{2\Gamma(n_r+1)}{\Gamma(n+2m+\mu_1+\mu_2+1)} \times e^{-r^2/2}r^{2m+\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}}L_{n_r}^{2m+\mu_1+\mu_2}(r^2), \tag{28}$$

en donde el coeficiente de normalización N_n fue calculado de la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\alpha}[L_n^{\alpha}(x)]^2dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{29}$$

Luego, la base Sturmiana para la representación irreducible unitaria del álgebra de Lie $su(1,1)$ en términos de los números del grupo n,k para el oscilador Dunkl en dos dimensiones es

$$R_{n,k}(r) = \left[\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2k)}\right]^{1/2} r^{2k-(\mu_1+\mu_2+1)}e^{-r^2/2}L_n^{2k-1}(r^2). \tag{30}$$

En términos de los números cuánticos físicos n_r, m la función radial del oscilador Dunkl en dos dimensiones finalmente se puede escribir como

$$R_{n_r,m}(r) = \left[\frac{2\Gamma(n_r+1)}{\Gamma(n_r+2m+\mu_1+\mu_2+1)}\right]^{1/2} \times r^{2m}e^{-r^2/2}L_{n_r}^{2m+\mu_1+\mu_2}(r^2). \tag{31}$$

Tal como puede esperarse, fácilmente podemos ver que cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$, el espectro de energía (ecuación (24)) y las eigenfunciones radiales (ecuación (31)) se reducen a los del oscilador armónico isotrópico bidimensional estándar.

IV. Conclusiones.

Solucionamos el oscilador Dunkl en coordenadas polares usando el álgebra de Lie $\mathrm{su}(1,1)$ y la teoría de representaciones irreductibles unitarias. Mostramos que el Hamiltoniano radial de este problema posee la simetría $su(1,1)$. Los generadores de álgebra de Lie se construyeron a partir del método de factorización de Schrödinger. La base radial Sturmiana se obtuvo resolviendo analíticamente la ecuación diferencial radial de Schrödinger. Nuestro procedimiento se puede aplicar con éxito a otros problemas, como por ejemplo el problema de Dunkl-Coulomb.

Apéndice. El álgebra de lie su$(1,1)$.

Tres operadores $\mathrm{K}_{\pm}$, K_0 cierran el álgebra de Lie de *su* (1,1) si satisfacen la relación de conmutación [26]

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_{-}K_{+}] = 2K_0. \tag{32}$$

La acción de estos operadores sobre los estados del espacio de Folk es

$$K_{+}|k,n\rangle = \sqrt{(n+1)(2k+n)}\,|k,n+1\rangle, \tag{33}$$

$$K_{-}|k,n\rangle = \sqrt{n(2k+n-1)}\,|k,n-1\rangle, \tag{34}$$

$$K_0|k,n\rangle = (k+n)|k,n\rangle, \tag{35}$$

donde $|k,0\rangle$ es el estado normalizado más bajo. El operador de Casimir K^2 para cualquier representación irreducible de este grupo está dado por

$$K^2 = {K_0}^2 - \frac{1}{2}(K_{+}K_{-} + K_{-}K_{+}) \tag{36}$$

y satisface la relación $\mathrm{K}^2 = \mathrm{k}(\mathrm{k}-1)$. Así, una representación del algebra $\mathrm{su}(1,1)$ está determinada por el número k, conocido como el índice de Bargmann. Para los valores en el que $\mathrm{k} > 0$ se encuentra una serie discreta.

Agradecimientos

Los autores agradecen las sugerencias del árbitro para mejorar nuestro trabajo. Este trabajo fue parcialmente apoyado por SNI-México, COFAA-IPN, EDI-IPN, EDD-IPN, número de proyecto SIP-IPN 20180245.

Referencias

[1] Y. Alhassid, J. Engel, J. Wu, Phys. Rev. Lett. 53, 17 (1984).
[2] Y. Alhassid, F. Iachello, R.D. Levine, Phys. Rev. Lett. 54, 1746 (1985).
[3] Y. Alhassid, J. Engel, F. Iachello, Phys. Rev. Lett. 57, 9 (1986).
[4] A. Frank, B. Wolf, Phys. Rev. Lett. 52, 1737 (1984).
[5] A. Frank, B. Wolf, J. Math. Phys. 26, 973 (1985).
[6] A. Frank, Y. Alhassid, F. Iachello, Phys. Rev. A 34, 677 (1986).
[7] J. Wu, Y. Alhassid, J. Math. Phys. 31, 557 (1986).
[8] G. Lévai, J. Phys. A: Math. Gen. 27, 3809 (1994).
[9] G.A. Kerimov, Phys. Rev. Lett. 80, 2976 (1998).
[10] P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1935.
[11] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A 46, 9 (1940).
[12] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A 46, 183 (1940).
[13] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A 47, 53 (1941).
[14] L. Infeld, Phys. Rev. 59, 737 (1941).
[15] L. Infeld, T.E. Hull, Rev. Mod. Phys. 23, 21 (1951).
[16] D. Martínez, R.D. Mota, Ann. Phys. 323, 1024 (2008).
[17] D. Martínez, J.C. Flores-Urbina, R.D. Mota, V.D. Granados, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 135201 (2010).
[18] M. Salazar-Ramírez, D. Martínez, R.D. Mota, V.D. Granados, Europhys. Lett. 95, 60002 (2011).
[19] M. Salazar-Ramírez, D. Ojeda-Guillén, R.D. Mota, J. Math. Phys. 57, 021704 (2016).
[20] M. Salazar-Ramírez, D. Ojeda-Guillén, R.D. Mota, Ann. Phys. 372, 283 (2016).
[21] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, A. Zhedanov, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 145201 (2013).
[22] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, A. Zhedanov, Commun. Math. Phys. 329, 999 (2014).
[23] V.X. Genest, L. Vinet, A. Zhedanov, J. Phys. Conf. Ser. 512, 012010 (2014).
[24] C.F. Dunkl, Trans. Am. Math. Soc. 311, 167 (1989).
[25] N.N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Dover Publications, New York, 1972.
[26] A. Vourdas, Phys. Rev. A 41, 1653 (1990).

ISSN: 2594-1011

Fases de TiO_2/ZnO evaluadas por difracción de RX y microscopia Raman

S. Tirado Guerra[1], L.A. Tavera Carrasco, M.A. Valenzuela Zapata[2]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2] Laboratorio de Catálisis, ESIQIE-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55424 Fax (55) 5729-55015 E-mail: tirado@esfm.ipn.mx; E-mail: salvador_tig@yahoo.com.mx

Resumen — **Se prepararon compositos TiO_2/ZnO en película delgada por sol-gel e inmersión repetida y se estudian. Se crecieron sobre sustrato base de vidrio sodo-cálcicos, a un espesor fijo de TiO_2 y modificaciones superficiales de capas del ZnO. De oxi-acetilacetonato de titanio (IV) ($TiO(C_5H_7O_2)_2$) en 2-metoxietanol ($C_3H_8O_2$) se preparó una solución al 0.2 M de la sal, estabilizándose con monoetanolamina (C_2H_7NO), de donde se obtienen las películas TiO_2. La serie se modificó con varias capas de ZnO, mismas que se obtuvieron de una solución de acetato de zinc al 0.4 M en etanol, y así los compositos TiO_2/ZnO. Los compositos se caracterizaron en su estructura por DRX, microscopia Raman, la morfología superficial por MEB, análisis químico de la composición por EDS. Se determinan las frecuencias de grupos funcionales de los componentes del composito TiO_2/ZnO, por microscopia infrarrojo FTIR.**

Palabras Clave – **Dióxido de titanio, óxido de zinc, película delgada, compositos, TiO_2/ZnO.**

Abstract — **TiO_2/ZnO composites were prepared in thin film by sol-gel and repeated immersion and studied. They were grown on a base substrate of soda-calcium glass, at a fixed thickness of TiO_2 and surface modifications of layers of ZnO. From titanium (IV) oxy-acetylacetonate ($TiO(C_5H_7O_2)_2$) in 2-methoxyethanol ($C_3H_8O_2$) a 0.2 M solution of the salt was prepared, being stabilized with monoethanolamine (C_2H_7NO), from which the TiO_2 films are obtained. The series was modified with several layers of ZnO, which were obtained from a solution of 0.4 M zinc acetate in ethanol, and thus the TiO_2/ZnO composites. The composites were characterized in their structure by XRD, Raman microscopy, surface morphology by SEM, chemical analysis of the composition by EDS. The frequencies of functional groups of the TiO_2/ZnO components are determined by infrared FTIR microscopy.**

Keywords — **Titanium dioxide, thin films, thin oxide, composites, TiO_2/ZnO.**

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP: 2018-1555

I. INTRODUCCIÓN

El material multifuncional del TiO_2 es un referente para estudiarlo entre los óxidos metálicos como el ZnO y SnO_2. Las propiedades que presenta el TiO_2 en película delgada, el tipo de precursores empleados, la temperatura a la que se obtenga y maneje, la atmósfera, por citar algunos, serán las propiedades que se obtendrán de los sistemas. Para sistemas simples y de acuerdo a su preparación, sus propiedades y características son variadas. Si son en película delgada su morfología y propiedades eléctricas, se pueden mejorar si se les modifica superficialmente con depósitos de nanopartículas y también si se obtienen en forma compleja con otros óxidos metálicos; así se tienen TiO_2/ZnO o bien TiO_2/SnO_2 que pueden ser los sistemas compositos, de interés en este estudio [1,2,3]. El crecimiento de las películas de TiO_2 sobre sustratos sodo-cálcicos ya sea por rociado químico, por la ruta de sol-gel u otro método, los precursores que se emplean y de la temperatura de sinterizado, así como del tratamiento térmico, entre otros, serán las propiedades que presenten las películas de TiO_2 [4,5]. El óxido de titanio presenta varias fases pero las principales son la anatasa (inestable) a baja temperatura y la fase rutilo para altas temperaturas, cuyos anchos de banda son 3.0 y 3.3 eV, respectivamente [2]. Sin embargo, es la anatasa, con sus propiedades de alta área superficial y la alta densidad de sitios activos donde se pueden llevar a cabo las reacciones de óxido-reducción [2,3], fase que tiene preferencia en varias aplicaciones y en fotocatálisis, que es de interés en este trabajo.

Reacciones químicas entre un semiconductor y una fase acuosa se pueden producir cuando el sistema es irradiado por luz energética, al generar fotoelectrones y huecos, esto es una separación de cargas, promoviendo el electrón a la banda de conducción, pudiendo emigrar a la superficie de la interfase del semiconductor TiO_2, con lo que se producen radicales hidroxilo que al ser muy reactivos, participan en reacciones óxido-reducción donde moléculas contaminantes pueden ser degradadas o mineralizadas [2,3]. Las moléculas O_2 pueden atrapar el fotoelectrón e- formando un estado defecto-oxígeno con energía en la banda prohibida del semiconductor, entre la banda de valencia y la de conducción, teniéndose así el radical super-óxido (O^{2-}) que podrá formar vacancias de oxígeno (Vo) y podrá servir de agente aceptor tal que participe en mecanismos de una posible reacción [2].

II. Metodología

A. Síntesis

Películas delgadas de TiO_2 y aquellas modificadas superficialmente con diversos elementos químicos de interés, se prepararon de una solución 0.2 M de la sal precursora oxi-acetilacetonato de titanio en 2-metoxietanol y en monoetanolamina, con una relación 1:1 de la sal con esta última. Bajo agitación magnética constante, con una temperatura ambiente la agitación de la solución se llevó a cabo por 2 horas, obteniendo una solución trasparente y un pH de 7. Se prepararon películas delgadas de TiO_2 a un espesor correspondiente a cinco inmersiones de acuerdo al procedimiento que se emplea en este trabajo, la preparación se realizó sobre sustratos de vidrio sodo-cálcicos. Posterior a los crecimientos, parte de la serie de películas se modificó de manera superficial con varias capas de películas de óxido de zinc, obtenidas de un sol de acetato de zinc en etanol a 0.4 M, con un pH intermedio de 6; se tienen así los compositos TiO_2/ZnO, sistemas complejos que son los de estudio en este trabajo. La técnica química de sol-gel y la inmersión repetida, técnica implementada, es la que se emplea. Se proyectan posibles aplicaciones en catálisis heterogénea.

B. Crecimiento de películas

Para tener un sol se requiere dar un tiempo de envejecimiento, de éste se crecerán la serie de películas que sean necesarias. El crecimiento de las películas sobre sustratos de vidrio previamente preparados se lleva a cabo por inmersión repetida a temperatura ambiente, con un procedimiento controlado por una PC. Después de cada inmersión del sustrato en el sol, se somete a secado por 10 min a una temperatura de 250 °C en una mufla con aire. El proceso se repite hasta lograr el espesor requerido para la película. Al final del proceso se da un tratamiento térmico de 300 °C por 1 hora y con ello se estabilizan las películas y se mejoran sus propiedades. El tratamiento térmico final se realiza en un horno Thermoline modelo Furnace 6000. Primero se crecen series de 12 películas TiO_2, para luego realizar modificaciones con capas de las películas de ZnO obteniendo así los sistemas o compositos de estudio TiO_2/ZnO.

C. Caracterizaciones

Las micrografías MEB de los compositos en película delgada TiO_2/ZnO se registran en un microscopio electrónico de barrido JSM 7800 - JEOL 4527 del CNMN del IPN y los EDS se registran con el detector EBSD marca EDAX. Los patrones de difracción DRX de las películas TiO_2/ZnO se registraron con geometría simétrica θ-2θ, Bragg-Brentano, empleando la técnica de haz rasante para eliminar la presencia del sustrato, la muestra se posicionó a 0.5° en el difractómetro Panalytical X´pert PRO, empleando la línea $K\alpha$ del Cu (λ = 0.15406 nm) con foco lineal, las condiciones fueron 45 kV de aceleración de los electrones y una corriente del filamento de 40 mA. Los espectros se registraron de 15 a 80° con 0.05° de paso y 200 s tiempo de acumulación. Los registros de los espectros Raman se realizaron en un espectrómetro LabRam, modelo HR 800 y marca Horiba Jobin Yvon, el software para el procesamiento de los datos obtenidos con el equipo, es el LabSpec 5 en ambiente windows, Se usaron los láseres: 532.07 nm y 632.79 nm y las intensidades nominales correspondieron a (sin lente objetiva al frente): 73.9 mWatts y 17.5 mWatts, respectivamente. Los tipos de láseres fueron de estado sólido y laser de He-Ne, respectivamente, con filtros: D1=I0/10 y D2=I0/100; la apertura del Pin Hole fue 400 micras; la apertura de la rejilla fue de 150 micras, se empleó un tiempo de exposición de 4 s con 4 acumulaciones. Las imágenes se registraron con un microscopio óptico con una magnificación de 50x para la lente objetiva y una apertura de 0.75. Los espectros FTIR se registraron en un equipo IR2 marca Horiba Hobin Yvon en el rango 400-4000 cm^{-1}. La fuente fue InGaAs.

III. Resultados

A. Difracción de rayos X

Los patrones de difracción de rayos X (DRX) de los compositos en película delgada TiO_2/ZnO. Los espectros DRX se presentan en las Figs. 1a y 1b; los que se presentan en la Fig.1a resultaron espectros amorfos del sustrato TiO_2 y aquel con una capa de ZnO.

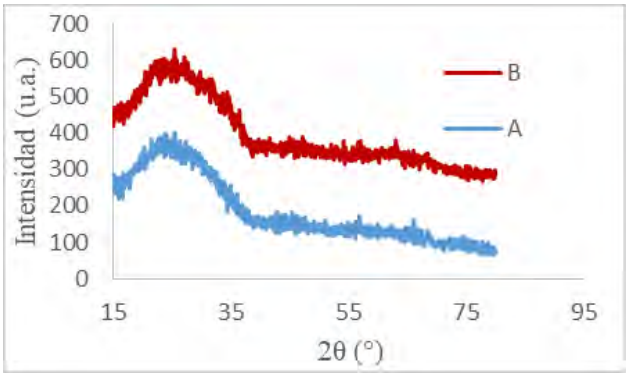


Fig. 1a) Muestra pura A de TiO_2 y B titanio con una capa de ZnO: se observa la señal del sustrato (películas delgadas, con 5 capas de titanio). Ambos espectros resultaron amorfos, aunque B manifiesta la presencia de picos de difracción.

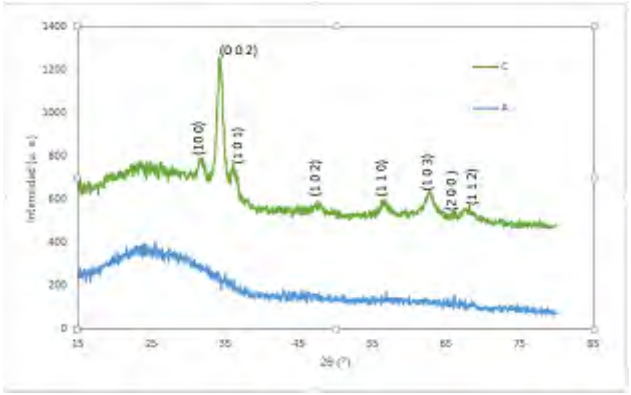


Fig. 1b) Para la película de TiO_2 con tres capas de ZnO, ya se muestra el carácter policristalino y el patrón hexagonal wurtzita del ZnO.

Los patrones de difracción de rayos X de las películas TiO_2/ZnO resultaron policristalinos (Fig. 1b) con picos en: 31.684 °, 34.281°, 36.290°, 49.373°, 57.213°, pico ancho en 62.162°, 68.630°, 78.822°; en carta JCPDS 036-1451 del ZnO se tienen los picos en: 31.770° (1 0 0), 34.422° (0 0 2), 36.253° (1 0 1), 47.539° (1 0 2), 56.603° (1 1 0), 62.864° (1 0 3), 66.380° (2 0 0), 67.963° (1 1 2), 69.100° (2 0 1), 72.562° (0 0 4), 76.955° (2 0 2). En general los picos corresponden a la estructura hexagonal wurtzita del ZnO; las desviaciones pueden reflejar tensiones y esfuerzos en la preparación de las muestras. Por lo anterior, la película pura (TiO_2) (cuyas fases no se definen bien) y aquellas con una capa de ZnO resultan amorfas, pero a la tercera capa de ZnO ya queda definida la fase del ZnO, mientras que para la quinta capa la fase es más definida e intensa que la correspondiente a tres capas de ZnO.

El pico preferencial en el espectro se asocia al plano (0 0 2) en la estructura hexagonal típica del ZnO en 34.286° (JCPDS 036-1451). Del pico de difracción en 34.286° (0 0 2) del ZnO, se estima el tamaño de cristal D de acuerdo a la relación de Debye-Scherrer, $D=0.9\lambda/\beta\cos\theta$, resultando un D de (18-20) nm, grano fino. Las fases de anatasa (JCPDS 021-1272) y de rutilo (JCPDS 021-1276), no se definen claramente y ello debido a lo amorfo del espectro registrado del TiO_2.

En el arreglo en Fig. 2, se comparan los espectros RX de las muestras con tres capas de ZnO y aquellas con cinco capas del mismo óxido con el patrón dado en la tarjeta; claramente se observa el crecimiento preferencial del plano (0 0 2) con mayor intensidad para la muestra con cinco capas de ZnO.

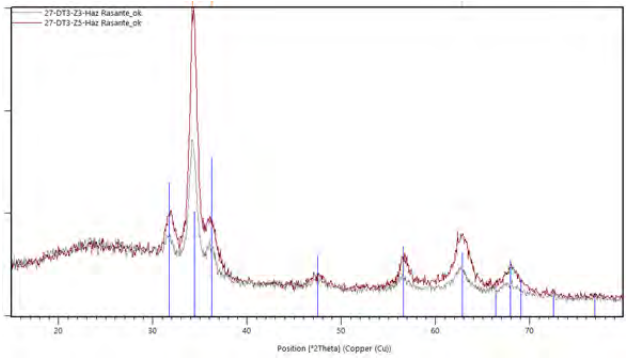


Fig. 2) Difractogramas DRX de muestras con tres y cinco capas de ZnO y el patrón correspondiente.

B. Microscopia electrónica MEB

Las micrografías MEB de las películas TiO_2/ZnO con x10000 aumentos representativas se muestran en las Figs. 3a (arriba) y 3b (abajo). La micrografía 3a de la película pura de TiO_2, presenta una morfología uniforme y no porosa, sin embargo para la micrografía 3b de la película TiO_2/ZnO con un depósito superficial de ZnO, se puede observar una morfología más uniforme con granos finos, sin grietas y crecimientos de aglomerados asociados posiblemente de nanopartículas de la película del óxido ZnO depositada.

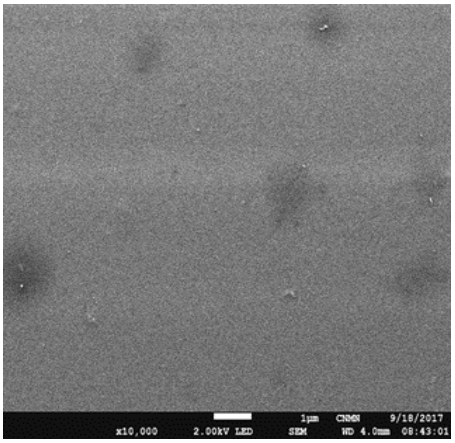


Fig. 3a) Micrografía de la película pura TiO_2 a x10000.

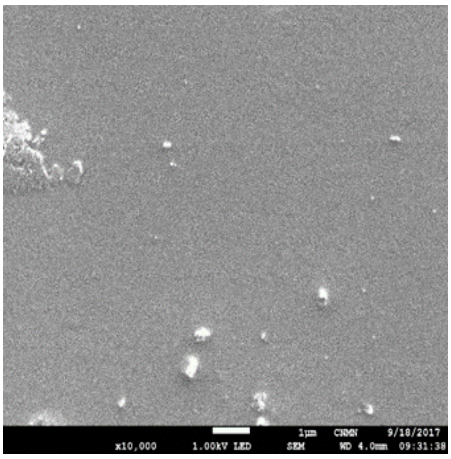


Fig. 3b) Micrografía de película TiO_2/ZnO con una capa de ZnO a x10000.

De software periférico al microscopio, se realizó un análisis químico (EDS) de las componentes de las películas delgadas TiO_2/ZnO. Se identificó y evaluó la presencia del Ti y O en la película pura; en aquellas con depósitos de Zn, las componentes Zn y O se resolvieron con el respectivo análisis. Se muestran los espectros del análisis por EDS de las muestras TiO_2/ZnO, tanto de la pura como de una capa de ZnO; se agrega la Tabla 1 del análisis numérico (ZRAF) para una capa de ZnO, donde se muestra la presencia de Ti, O y Zn.

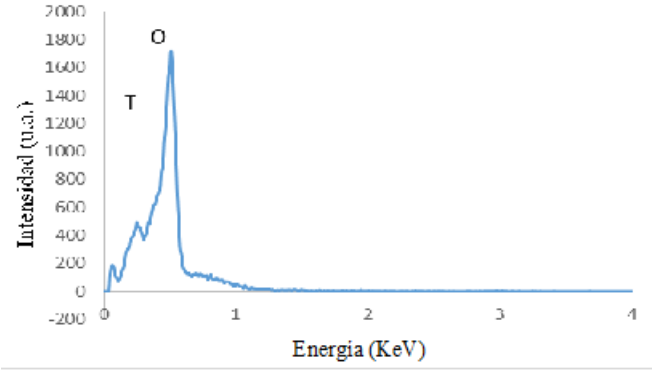


Fig. 4a) Espectro EDS de la muestra TiO_2/ZnO pura.

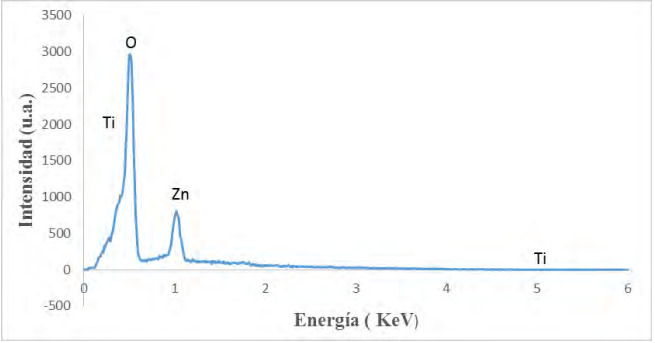


Fig. 4b) Espectro EDS de la muestra TiO_2/ZnO con una capa de ZnO.

C. *Espectroscopia Raman*

Los registros de los espectros Raman fueron de 400-4000 cm^{-1}, Se muestra la imagen (Fig. 5) de donde se registran algunos espectros Raman de los cuáles se acompañan con un par de ellos (Figs. 6a y 6b). Resultaron espectros de poca resolución.

El sustrato de TiO_2 sobre el cual se depositaron las películas de ZnO, ya fue caracterizado anteriormente empleando las técnicas de RX así como la de Raman y de las cuales se identificó fundamentalmente la fase anatasa del TiO_2. Como referencia se reportan los datos correspondiente a los corrimientos Raman (reportados anteriormente): 143.2 cm^{-1} (Eg), 198.3 cm^{-1} (Eg), 395.1 (B1g) y 516.5 cm^{-1} (A1g), modos vibraciones que se identificaron con la fase anatasa del TiO_2, entre otros corrimientos no identificados. Sobre dichos sustratos se crecieron películas de ZnO, donde se ve necesario comprobar la presencia y la fase de las mismas con el empleo de espectroscopia Raman.

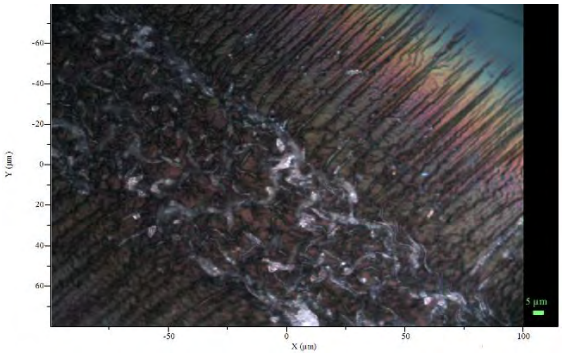


Fig. 5) Micrografía de registros de los espectros Raman.

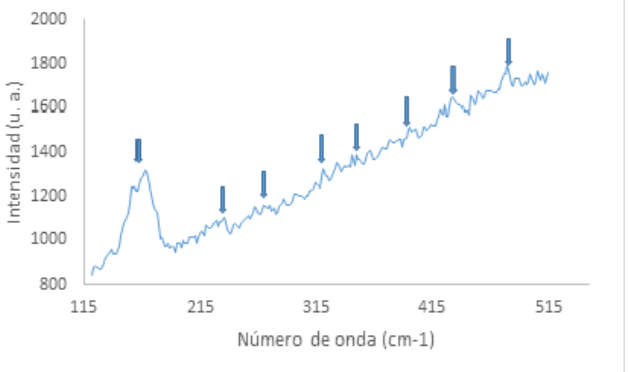


Fig. 6a) Acercamiento del espectro Raman de muestra de ZnO.

TABLA 1.
UN ANÁLISIS POR EDS (ZRAF) DE LA MUESTRA TiO_2/ZnO CON UNA CAPA DE ZnO.

Elemento	Peso %	Atomico %	Error %	Int. Neta	Razón K	Z	R	A	F
Ti L	55.44	31.67	2.31	1347.07	0.536	0.9069	1.0485	1.0678	0.9984
O K	38.45	65.77	10.5	3437.17	0.0475	1.1456	0.9297	0.1079	1
Zn L	6.11	2.56	7.76	873.1	0.0223	0.8735	1.1086	0.4191	0.9981

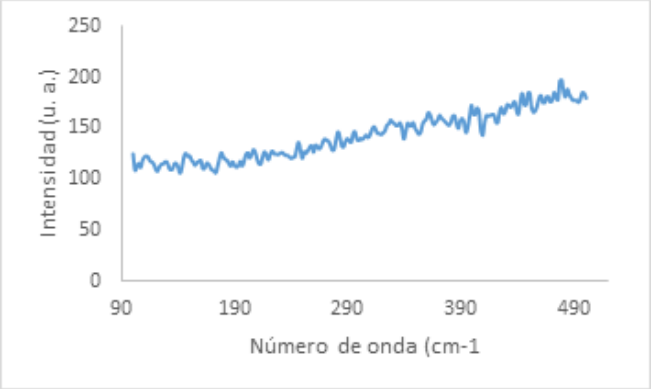


Fig. 6b) Acercamiento del espectro Raman de muestra de ZnO.

Datos Raman registrados:
De los espectros registrados (Fig. 6a) se tiene: 164 cm-1, 243.4 cm^{-1}, 276 cm^{-1}, 326 cm^{-1}, 356 cm^{-1}, 397 cm^{-1}, 437 cm^{-1}, 486 cm^{-1}, 514 cm^{-1}. Fig. 6b corresponde a espectro débil.
Los autores en películas de ZnO [15] registraron los modos: 101 E_2, 437 E_2, 407 E_1(L), 380 A_1(T), 574 A_1 (L) y 583 E_1(L), en unidades cm^{-1}.
En películas de ZnO [16] se registraron: 100 E_2 (L), 200 $2E_2$ L, 340 E_2 (H-L), 380 A_1 (T), 408 E_1 (T), 440 E_2 (H) y 583 A_1(L) y E_1 (L), frecuencias en cm^{-1}.
De los datos registrados se proponen para Tamb: 326 con 340 cm^{-1} (E_2(H-L)), 356 con 380 cm^{-1} A_1(T), 397 con 408 cm^{-1} E_1(T), 437 con 437 cm^{-1} E_2, (E_2 (H)) [17] valores en cm^{-1}. Las posibles asignaciones identifican la fase hexagonal wurtzita de las películas de ZnO, que se han preparado. El uso de la técnica Raman, para poder definir la fase en películas de ZnO, requiere de la preparación de muestras tratadas térmicamente a diferentes temperaturas. La identificación de fonones requiere de cálculos teóricos para diferentes estructuras (alambres, esferas) así, se refieren las frecuencias registradas experimentalmente a los valores teóricos (en cm^{-1}): 99 E_2 (Low), 380 A_1 (T), 407 E_1 (T), 437 E_2 (H), 574 A_1 (L) y 583 E_1(L) [18,19]. Pueden vincularse también al ZnO [17] debido al proceso de formación del polímero, las frecuencias registradas de las muestras son espectros más amplios con frecuencias en 164 y 767 cm^{-1} [2,20], donde se pueden presentar subproductos intermedios ($ZnO(OH)_2$) con tales frecuencias.

D. Microscopia FTIR

Se registraron los espectros FTIR a temperatura ambiente, con una resolución espectral de 4 cm^{-1} y con 32 escaneos. Las Figs. 6a y 6b, muestran un espectro FTIR en el rango de 400 a 4000 cm^{-1}, y una ampliación donde se muestran los modos de vibración de las películas TiO_2 puras. Las vibraciones en los picos 2845 y 2916 cm^{-1} podrían asociarse a vibraciones de estiramiento de enlaces C-H [10] que aparecen naturalmente por el contacto con el aire en la preparación de las películas. Además, grupos carbonilos pueden encontrarse anclados en la superficie de las partículas de TiO_2 o del ZnO, mismos que se detectan aún a los 300 °C del calcinado al que se sometieron las películas por 1 h [10]; también los valores que se señalan pueden asociarse a grupos hidroxilos (OH^{-1}) o también a vibración de componentes del agua absorbida en la superficie del TiO_2 o de las películas del óxido de zinc, como se reporta [8-11]. Los picos podrían corresponder a enlaces de grupos de carbonatos enlazados con posiciones insaturadas del Ti^{4+} en las partículas del TiO_2 [10].

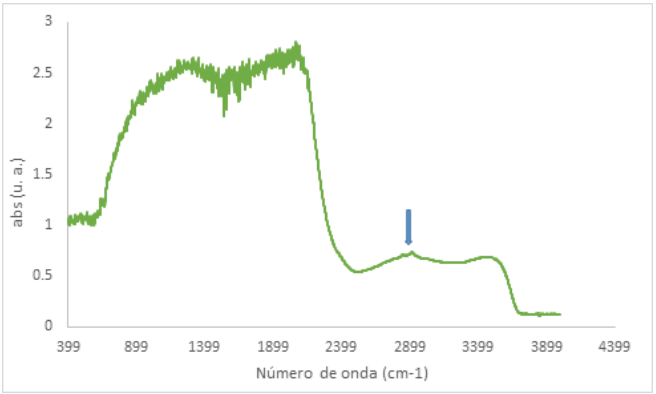


Fig. 6a) Espectro FTIR de muestra TiO_2 pura.

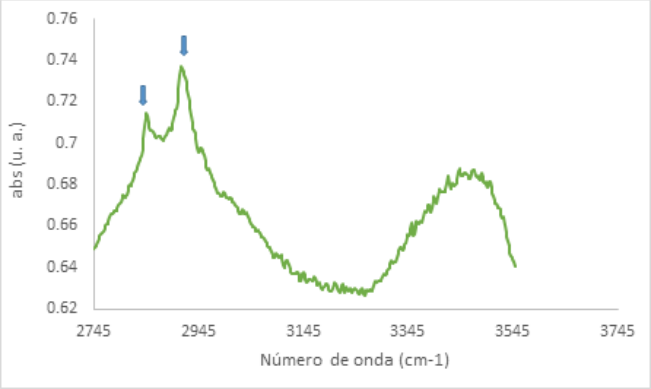


Fig. 6b) Espectro FTIR de acercamiento TiO_2 pura.

A partir de acetato de zinc ($Zn(CH_3COO)_2$) se prepararon películas de zinc y las mismas se depositaron sobre el sustrato de las películas de TiO_2, con una, tres y cinco capas de óxido de zinc, con el propósito de modificarlas superficialmente y así obtener la serie de estudio TiO_2/ZnO. Del estudio por difracción de RX se evaluaron tamaño de partícula del orden de 20 nm.

Se han registrado por otros autores para sistemas similares y a temperatura ambiente, espectros IR de nanopartículas de ZnO con esas características y con el propósito de complementar la información en la conformación del polímero ZnO, se presentan dos espectros FTIR, uno amplio (Fig. 7a) y uno local (Fig. 7b) (ambos modificados). En el espectro abierto y muy constante [14] se obtiene de un estudio a temperatura variable por FTIR a 200 °C de nanopartículas ZnO, y del mismo, se logra definir una banda de absorción en los 524 cm^{-1}, la banda se asigna a vibraciones Zn-O, lo que confirma la formación del polímero ZnO, además se reportan dos bandas en 1568 y 1419 cm^{-1} que se asignan a frecuencias de estiramiento asimétrico y simétrico del C=O, señal que proviene de acetatos en el proceso. En el espectro local (Fig. 7b) se observan vibraciones anchas en 457 y en 545 cm^{-1} relacionadas al enlace del ión Zn y del O en la molécula del ZnO según Handerea et al. [21]. En películas fotocalizadoras de ZnO y de un estudio del comportamiento de los espectros IR a diferentes temperaturas, Wang et al. [22] registraron el comportamiento de bandas de absorción, que varían con la temperatura de tratamiento y así, en nanopartículas coloidales de ZnO sin tratar, registraron bandas alrededor de 1415 y 1584 cm^{-1} asociadas a estiramiento de enlaces C-O y C=O, respectivamente, bandas que no se observan a 150 °C; también registran para temperaturas mayores banda ancha que se asocia a iones hidroxilos y también la banda en 456.28 cm^{-1} que sugieren como vibración del enlace Zn-O. De precursores de acetilacetonato de zinc y variando el pH y la temperatura, A. Saric et al. [23] estudiaron nanopartículas de ZnO por IR y encontraron la formación de compuestos ZnO/$Zn(OH)_2$-complejo, una banda en 1628 cm^{-1} de humedad (H_2O) y en 446 cm^{-1} que relacionan a nanopartículas de ZnO.

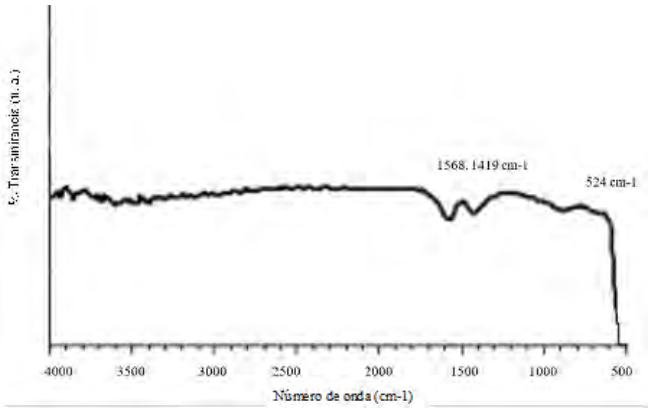


Fig. 7a) Espectro FTIR con frecuencias en: 1568, 1419 y 524 cm^{-1} de ZnO [14].

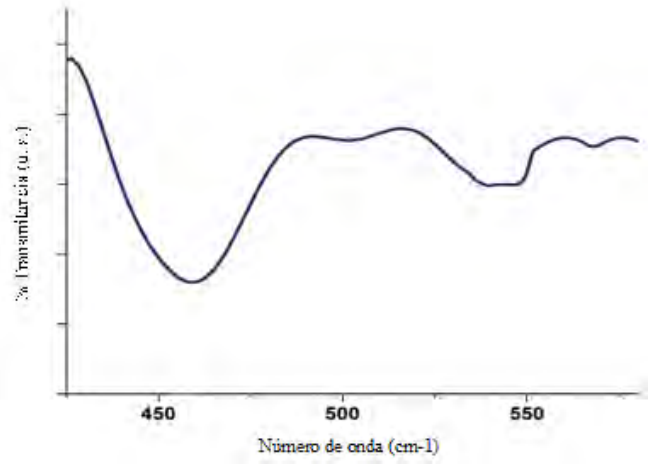


Fig. 7b) Espectro FTIR con vibraciones en: 457, 545 cm^{-1} de ZnO [21].

IV. Discusión

Asociado a la síntesis y crecimiento de las películas TiO_2/ZnO por sol-gel, están los procesos de hidrólisis, condensación, envejecimiento (la polimerización) y la temperatura de sinterizado y tratamiento térmico, entre otros. En el proceso de la hidrólisis y una vez que las moléculas de agua se ionizan, $H_2O \rightarrow H\text{-}OH$, los hidroxilos podrán formar enlaces con el Ti, esto es, Ti-OH y luego los enlaces Ti-O para después formarse O-Ti-O de donde resultará la formación de la película base en fase anatasa de TiO_2 y de ahí la formación del polímero o semiconductor [6-11].

Las películas TiO_2/ZnO se prepararon por la ruta química e inmersión repetida. Los espectros de rayos X del sustrato TiO_2 resultaron amorfos y no se define la fase anatasa (Fig. 1a). Los patrones de difracción de rayos X de las películas TiO_2/ZnO resultaron policristalinos (Fig. 1b), para los depósitos de ZnO donde se resuelve la fase hexagonal wurtzita. El tamaño de cristalito del ZnO resultó de 20 nm.

Las películas puras de TiO_2/ZnO lisas sin poros y aquellas con un depósito superficial de ZnO, se observa una morfología más uniforme con granos finos, sin grietas y crecimientos de aglomerados asociados posiblemente de nanopartículas de la película del óxido ZnO depositada; se realizó un análisis químico (EDS) de las componentes de las películas. Se encontró la presencia del Ti y O en la película pura; en aquellas con depósitos de Zn, las componentes Zn y O se resolvieron con el respectivo análisis.

Por espectroscopia Raman y FTIR se determinaron los modos vibracionales del TiO_2/ZnO y del ZnO: en estudio anterior se identificó la fase anatasa del TiO_2. Entonces se reportaron 326 cm^{-1} (E_2(H-L)), 356 cm^{-1} A_1(T), 397 cm^{-1} E_1(T), 437 cm^{-1} E_2. Dichas asignaciones identifican la fase hexagonal wurtzita de las películas de ZnO, que se prepararon [14-24].

Entre otros autores que reportan frecuencias de formación del polímero ZnO, en condiciones similares de síntesis a las aquí planteadas, están otros modos de subproductos, que se complementan con lo siguiente. De precursores de acetilacetonato de zinc y variando el pH y la temperatura A. Saric et al. [23] estudiaron nanopartículas de ZnO por IR y encontraron la formación de compuestos ZnO/$Zn(OH)_2$-complejo, una banda en 1628 cm^{-1} de humedad (H_2O) y en 446 cm^{-1} relacionada a nanopartículas de ZnO. Resultados relacionados a películas TiO_2 se encuentran en las refs. [6-12].

De los resultados tanto de Raman como los de IR, las condiciones experimentales y entre ellos la temperatura, uno de los más importantes, mismo que determina las frecuencias de vibraciones que se reportan [14-25]. Entre las frecuencias reportadas para las películas TiO_2, están las relacionadas con vibraciones de grupos de Ti-OH (hidróxido de titanio) [8-11]. En otro rango de frecuencias se encuentran datos que se pueden relacionar a los grupos del enlace Ti-O [7-9,10-13]. Dentro de los datos reportados para TiO_2 las frecuencias en los 1075 cm^{-1}, posiblemente se asocian a grupos funcionales del tipo Ti-O-C, entre otros posibles [6-8]. Respecto a las frecuencias registradas para las películas ZnO que se emplearon en la modificación superficial, en lo que respecta tanto a los resultados obtenidos por RX, por Raman y la información recopilada de datos IR de los sistemas de nanopartículas de ZnO, estos últimos de sistemas análogos a los sistemas sintetizados en los compositos TiO_2/ZnO, hacen ver la variedad y dispersión de datos reportados, así como las diversas condiciones del procedimiento [26], y las condiciones experimentales que se reflejan en las frecuencias teóricas posibles [17], mismos datos que se reportan en los trabajos consultados [14-23]. La identificación de fase de los semiconductores de óxidos metálicos que se trataron a temperaturas de 300 °C, permanecen en estado amorfo lo que dificulta la identificación de la fase que presentan, inclusive por RX, con mayor razón por espectroscopia Raman al igual que por FTIR, como sucedió; se reportan sistemas cuyas fase (amorfa y cristalina) que coexisten inclusive a temperaturas de los 400 °C de tratamiento [22].

No es clara la identificación por FTIR de frecuencias asociadas a grupos hidroxilos (OH^-) y por tanto del O, que puedan asociarse al ion Ti^{4+}, en el proceso de formación de las nanopartículas de TiO_2 que forman el semiconductor [8-9] o bien del óxido metálico ZnO [14-20].

V. Conclusiones

Se sintetizaron y crecieron compositos de TiO_2/ZnO, con el empleo de la ruta química de sol-gel. Las películas de titanio base fueron de cinco capas de espesor, sobre las que se depositaron varias capas de películas de ZnO. Se caracterizaron con el empleo de DRX, se determinaron parámetros de la estructura de las películas y de los patrones de difracción se determinaron las fases de los compositos, TiO_2/ZnO correspondiente al ZnO, se estimó el tamaño de cristal, también la morfología superficial, por MEB y la composición química por EDS (Ti, O y Zn) se evaluaron; el estado superficial así como la regularidad y la composición de las fases de las mismas se complementó con el estudio de espectroscopia Raman y FTIR. Se tuvo información de las frecuencias de grupos funcionales relacionados con los sistemas TiO_2/ZnO con la última técnica. Con los estudios se determinaron los posibles enlaces entre los componentes estructurales del polímero del TiO_2 y del ZnO componentes del composito TiO_2/ZnO. De la presentación parcial de resultados de este sistema, se espera aplicaciones del mismo como catalizador en degradación de sustancias trazadores prototipo y en la detección de radiaciones en el rango del visible y el ultravioleta, temas ambos de interés social.

Agradecimientos

S. Tirado Guerra agradece a quienes participaron en los registros con las diferentes técnicas de caracterización que aquí se presentan. La microscopía MEB, la difracción DRX y la espectroscopia Raman, FTIR, realizados en el CNMN del IPN. Así también al análisis gráfico y edición de este trabajo a Natzin Tirado.

Referencias

[1] A.L. Luna, et al., "Photocatalytic hydrogen evolution using Ni-Pd/TiO_2: correlation of light absorption, charge-carrier dynamics, and quantum efficiency" J. Phys. Chem. C. 121 (26) (2017) 14302-14311.

[2] Roberto López, et al., "Propiedades fotoluminiscentes de películas ZnO: A-SiO_x obtenidas por la técnica CVD asistido por filamento caliente" Rev. LatinAm. Metal. Mat. 31(1) (2011) 59-63.

[3] A.L. Luna, et al., "Photocatalytic degradation of gallic acid over CuO-TiO_2 composites under UV/Vis LEDs irradiation" Appl. Catal. A: Gen 521 (2016) 140-149.
[4] C. Jeffrey Brinker, Sol-gel science: the physics and chemistry of sol-gel processing, Oval Road, London: Academic Press Limited. 1990.
[5] L.C. Klein, Sol-Gel technology for thin films, fibers, preforms, electronics, and speciality shapes. Mill Road, NJ: Noyes Publications Press. 1988, pp 2-15.
[6] J. Yu, X. Zhao, Q. Zhao, "Effect of surface structure on photocatalytic activity of TiO_2 thin films prepared by sol-gel method" Thin Solid Films 379 (2000) 7-14.
[7] Y. Keun Chae, J. Won Park, Shinsuke Mori, Masaaki Suzuki, "Photocatalytic effects of plasma-heated TiO_{2-x} particles under visible light irradiation" Korean J. Chem. Eng., 30(1), (2013) 62-63.
[8] Y. Ochoa, Y. Ortegón, M. Vargas, J.E. Rodríguez Páez, "Síntesis de TiO_2, fase anatasa, por el método sol-gel: estudio del efecto de la presencia de AcacH en el sistema" Rev. Fac. Ing. Antioquia 52, (2010) 29-40.
[9] V.H. Castrejón-Sánchez, E. Camps, M. Camacho-López, "Quantification of phase content in TiO_2 thin films by Raman spectroscopy" Superficies y Vacío 27(3) (2014) 88-92.
[10] A.R. Malagutti, H.A.J.L. Mouráo, J.R. Garbin, C. Ribeiro, "Deposition of TiO_2 and Ag:TiO_2 thin films by the polymeric precursor method and their application in the photodegradation of textile dyes" Applied Catalysis B: Environmental 90 (2009) 205-212.
[11] M. Fusi, et al., "Surface electronic and structural properties of nanostructured titanium oxide grown by pulsed laser deposition" Surface Science 605 (2011) 333-340.
[12] R. Greene, J. Serrano-Garcia, Y. Govan, K. Gun·ko, "Synthesis Characterization and Photocatalytic Studies of Cobalt Ferrite-Silica-Titania Nanocomposites" Nanomaterials 4 (2014) 331-343.
[13] F. Liu, X. Yan, X. Chen, L. Tian, Q. Xia, "Mesoporous nanoparticles terminated with carbonate-like groups: Amorphous/crystalline structure and visible-light photocatalytic activity" Catalysis Today 264 (2016) 243-249.
[14] Segundo R. Jáuregui Rosas, Oswaldo R. Sánchez Rosales y Oscar J. Perales Pérez, "Effect of annealing temperature on crystallinity and size of ZnO nanoparticles synthesized by Sol-Gel method" SCIÉNDO 14(1-2) (2011) 56-66.
[15] T.C. Damen, S.P.S. Porto, and B. Bell, "Raman Effect in Zinc Oxide" Phys .Rev. 142 (1966) 570-574.
[16] J.A. Pérez Taborda, et al., "Películas nanoestructuradas de óxido de xinc (ZnO)" Scintia et Technica XIV (39) (2008) 416-421.
[17] A. del Angel Lara, Tesis Maestría "Espectroscopia Raman de películas de GaN y ZnO para aplicaciones fotovoltaicas" (2014) Universidad Veracruzana.
[18] N. Morales Flores, U. Pal, E. Sánchez Mora, "Photocatalytic of ZnO and Pt-incorporated ZnO nanoparticles in phenol degradation" Appl. Catalysis A: General 394 (2011) 269-275.
[19] E. García Ramírez, Tesis Maestría "Películas delgadas de TiO_2 + ZnO y sus propiedades fotocatalíticas" (2012) IPN.
[20] A. López Vázquez, TESIS Licenciatura "Crecimiento de nanoalambres de óxido de zinc alineados verticalmente usando el método sol-gel hidrotermal" (2015) BUAP.
[21] K. Handorea, et al., "Novel green route of synthesis of ZnO nanoparticles by using natural biodegradable polimers and its application as a catalyst for oxidation of aldehydes" J. Macromolecular Science Part A Pure and Applied Chemistry 51 (12) (2014) 941-947.
[22] H. Wang, C. Xie, "Effect of annealing temperature on the microstructures and photocatalytic properties of colloidal ZnO nanoparticles" J. of Phys. and Chem. off solids 69 (2008) 2440-2444.
[23] A. Saric, S. Music, M. Ivanda, "Varying the microstructural properties of ZnO particles using different synthesis routes" Journal of Molecular Structure 993 (2011) 219-224.
[24] N. Cruz-González, J.L. Fernández Muñoz, M. Zapata-Torrez, M. García-Hipólito, "Efecto del gas utilizado en el tratamiento térmico y la impurificación con Eu en las propiedades estructurales de nanofibras de TiO_2 depositadas por electrohilado" Superficies y Vacío 26 (3) (2013) 111-116.
[25] J. Liu et al., "Template-free synthesis of carbon doped TiO_2 mesoporous microplates for enhanced visible light photodegradation" Science Bulleting DOI 10. 1007/s11434-016-1162-3 (2016).
[26] D. Ramírez-Ortega, et al. "Semiconducting properties of ZnO/TiO_2 composites by electrochemical measurements and their relationship with photocatalytic activity" Electrochimica Acta 140 (2014) 541-549.

ISSN: 2594-1011

Propiedades ópticas de compositos TiO_2/ZnO y fotocatálisis

S. Tirado Guerra[1], U. Giles Sánchez[1], M.A. Valenzuela Zapata[2]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2] Laboratorio de Catálisis, ESIQIE-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55424 Fax (55) 5729-55015 E-mail: tirado@esfm.ipn.mx; salvador_tig@yahoo.com.mx

Resumen — **Los compositos semiconductores TiO_2/ZnO se crecieron por sol-gel e inmersión repetida, los compositos se crecieron sobre sustratos sodo-cálcicos. De oxi-acetilacetonato de titanio (IV) ($TiO(C_5H_7O_2)_2$) en 2-metoxietanol ($C_3H_8O_2$) se preparó una solución al 0.2 M de la sal y la monoetanolamina (C_2H_7NO) como estabilizador de la misma. Una serie de TiO_2 se creció como sustrato y sobre éstos se creció el ZnO con varias capas depositadas, y así el sistema de estudio TiO_2/ZnO. Varias son las técnicas de caracterización necesarias para determinar sus posibilidades en aplicaciones. Las propiedades ópticas de los compositos de estudió por espectroscopia UV-Vis, la morfología por MFA. La composición química de los mismos se determinó por espectroscopia dispersión de fotones (XPS) y la de los orbitales así como sus energías de enlaces. Una solución acuosa de naranja de metilo se empleó para determinar las propiedades foto- catalíticas de los compositos, al irradiar con luz UV-vis el sistema composito-solución. Se determina así el posible potencial de aplicación como fotocatalizador y sus posibilidades en aplicaciones en el tratamiento de aguas residuales; se exploran las propiedades de fotoluminiscencia al excitarse las muestras con luz UV de 325 nm, y estudiar los espectros de emisión de las películas TiO_2/ZnO.**

Palabras Clave – **Dióxido de titanio, óxido de zinc, sol-gel, XPS, fotodegradación, fotoluminiscencia, TiO_2/ZnO.**

Abstract — **The TiO_2/ZnO composites were grown by sol-gel and repeated immersion and they were deposited on soda-calcium substrates. From titanium (IV) oxy-acetylacetonate ($TiO(C_5H_7O_2)_2$) in 2-methoxyethanol ($C_3H_8O_2$) a 0.2 M solution of the salt and monoethanolamine (C_2H_7NO) was prepared as a stabilizer thereof. A series of TiO_2 was grown as a substrate and on these the ZnO was grown with several deposited layers, and thus the TiO_2/ZnO study system. There are several characterization techniques necessary to determine their possibilities in applications. The optical properties of the composites studied by UV-Vis spectroscopy, the morphology by AFM. The chemical composition of these was determined by photon scattering spectroscopy (XPS) and that of the orbitals as well as their bond energies. An aqueous solution of methyl orange was** used to determine the photocatalytic properties of the **composites, when irradiating with UV-vis the composite-solution system. The possible application potential is determined as photocatalyst and its possibilities in applications in wastewater treatment; the photoluminescence properties are explored when the samples are excited with UV light of 325 nm, and the emission spectra of the TiO_2/ZnO films are studied.**

Este trabajo es patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP: 2018-1555

Keywords — **Titanium dioxide, zinc oxide, sol-gel, photodegradation, photoluminiscence, TiO_2/ZnO.**

I. INTRODUCCIÓN

El óxido semiconductor más importante es el dióxido de titanio (TiO_2) por sus múltiples aplicaciones en campos de interés en la industria, en recubrimientos, en fotocatálisis, entre otros [1-4]. En fotocatálisis, la fase de interés es la anatasa del TiO_2, un semiconductor de banda indirecta con ancho de banda alrededor de 3.2 eV, fase relacionada a bajas temperaturas, de baja densidad y es preferida, para aplicarse en fotodegradación de sustancias contaminantes en el agua y el medio ambiente [1-2,5-6].

La fase anatasa de TiO_2, se puede preparar tanto en forma de polvos como en películas sobre sustratos adecuados, con estructuras como los NTs (nanotubos) u otros tipos [5-7]. Sobre los métodos físicos, se prefieren los métodos químicos, mismos que ofrecen varias ventajas. Se usa la ruta química de sol-gel e inmersión repetida para crecer películas delgadas de TiO_2, donde se controlan varios parámetros experimentales para obtener películas de alta calidad y buenas propiedades físicas y químicas. Las películas de TiO_2 fase anatasa presentan alta adherencia a sustratos de vidrio sodo-cálcicos y se preparan usando precursores en soluciones de alcóxidos metálicos, películas con área específica grande, morfología y estructura, que permiten ponerlas en contacto y hacerlas reaccionar con un medio acuosos o gaseoso y hacer aplicaciones en catálisis heterogénea.

El TiO_2 con ancho de banda alrededor de 3.2 eV, para ser aplicado en una reacción hay que irradiarlo, en principio con luz solar, por lo que es de esperarse poca respuesta debido a la baja proporción de radiación UV del espectro solar ($\lambda < 372$ nm) [5,8] y puesto que el catalizador para ser útil debe responder al ser irradiado, con el fin de generar parejas de cargas (e- y h+), de la banda de valencia (BV) a la banda de conducción (BC) y poder ser utilizados en una posible reacción óxido-reducción [5,8].

Cuando el ancho de banda del catalizador TiO_2 o del ZnO resulta un obstáculo para sus aplicaciones como fotocatalizador y que pueda participar en la fotodegradación una sustancia trazadora como el naranja de metilo u otro tipo de sustancia, así como el de mejorar las propiedades ópticas del semiconductor, una forma de lograrlo es impurificando o

al incorporar superficialmente o en el bulto, metales como Cu, Ag, entre otros, con el cual se logra modificar las propiedades del semiconductor [6], pero también se han sintetizado sistemas compositos como CuO-TiO_2 y probado en la degradación de ácido gálico [7]. En trabajo reciente A.L. Luna et al. [9] reportan sistemas de TiO_2 donde realizan modificaciones bimetálicas, esto es, incorporan Ni y Pd al TiO_2 para mejorar la absorción de luz que resulta de interés. Así continuando con los compositos, se pueden usar películas de TiO_2 como sustrato, mismas que son crecidas sobre vidrio sodo-cálcico a cierto espesor, y sobre ellas a la vez, realizar crecimientos a varias capas de películas de ZnO y así generar los compositos TiO_2/ZnO, que son de interés en el presente estudio, las cuales además de caracterizarse por varias técnicas, se pueden evaluar sus propiedades tanto ópticas como de fotodegradación al descomponer una solución acuosa de naranja de metilo (NM) a 14 ppm; igualmente se evalua la respuesta fotoluminiscente de dichos compositos.

Reacciones químicas pueden ser inducidas por la absorción de luz por parte de un catalizador, ya que con ello se generan fotoelectrones y huecos, esto es una separación de cargas, promoviendo el electrón a la banda de conducción, el cual puede emigrar a la superficie de la interfase entre semiconductor como TiO_2 y el ZnO, donde podrían intercambiar portadores de carga o bien poder darse una reacción con el medio ambiente. Aparte de ello si hay humedad o agua, donde el agua puede ionizarse y generar radicales hidroxilo, los que al ser muy reactivos, pueden participar en reacciones óxido-reducción donde moléculas contaminantes pueden ser degradadas o mineralizadas [2,4]. También el oxígeno molecular O_2 puede participar al atrapar el fotoelectrón e- formando un estado defecto-oxígeno cuya energía cae en la banda prohibida del semiconductor, región ubicada entre la banda de valencia y la de conducción del semiconductor, teniéndose así un radical super-óxido (O^{2-}) que puede participar en reacciones y/o en transiciones de carga [2,1].

II. Metodología

A. Síntesis

Se ha utilizado oxi-acetilacetonato de titanio (IV) que se disuelve en 2-metoxietanol (Aldrich, 99.3+ grado reactivo) y monoetanolamina (Alrdrich) (MEA), a una concentración de 0.2 M, posterior a ello se agrega lentamente la MEA para estabilizar la solución y evitar la precipitación de la sal de titanio; la solución se deja en una agitación constante por aproximadamente 2 horas y a temperatura ambiente. Al lograrse la solución transparente, a la cual se mide el pH que corresponde y que resultó de 7, posteriormente se deja envejecer en cuarto obscuro y fresco para de ello realizar los crecimientos o depósitos de las películas puras TiO_2. Similarmente pero de una solución de acetato de zinc en etanol (pH 6) se crecieron películas de zinc, capa a capa, y se depositaron sobre sustratos de TiO_2, para formarse una serie de compositos TiO_2/ZnO, o sea, a cero capas de ZnO o pura, una capa, tres capas y cinco capas de ZnO.

B. Crecimiento de películas

En cada etapa del proceso de crecimiento de películas que conforman la serie de compositos, se involucra la inmersión y extracción del sustrato en el sol y el espesor de película depende de la repetición del proceso, mismo que se realiza a temperatura ambiente. En cada inmersión se evaporan los solventes y humedad, a la vez que se lleva a cabo la formación y crecimiento de la película sobre el sustrato respectivo, en un horno a cierta temperatura y atmósfera de aire. Al final se da un tratamiento térmico a la película involucrada. Se crecieron series de películas de TiO_2 a un espesor fijo de cinco inmersiones y una velocidad de inmersión fija, a la temperatura de 250 °C, y al final con el propósito de eliminar solventes y/o humedad se da tratamientos térmicos a 300 °C por 1 hora para estabilizar las películas y mejorar sus propiedades. Se procede similarmente para las películas de ZnO, para obtener los compositos TiO_2/ZnO de la serie mencionada. Se presentan resultados del composito TiO_2 (muestra pura) y la correspondiente a TiO_2/ZnO con una capa de ZnO. Se utiliza un horno con atmósfera de aire, marca Thermoline modelo Furnace 6000.

C. *Caracterizaciones*

La topografía de las películas TiO_2/ZnO se registró por microscopía de fuerza atómica (MFA) en un microscopio PARK AutoProbe Equipment (Veeco) con una punta de silicio 10 μm en el modo intermitente. Las propiedades ópticas de los compositos TiO_2/ZnO se registraron por UV-Vis en un espectrofotómetro Perkin Elmer, UV-Vis Lambda 2 doble haz, en el rango 200-900 nm con sustrato de vidrio como referencia. Para los estudios de fotodegradación de una solución acuosa de naranja de metilo se procedió así, se registró y determinó la absorbancia de la solución al ser irradiada con luz UV-Vis en un reactor rectangular dotado con 8 lámparas fluorescentes azules G8T5, 8 watts, una vez que es irradiada por 15 min, la película-solución, se empleó un espectrómetro GBC modelo Cintra 20 en modo de absorbancia para el rango de 190-600 nm. Se identificó la banda de absorción alrededor de los 504 nm, misma que se va registrando durante el proceso de irradiación. Los estados de ionización de las componentes Ti, O y Zn de las películas se determinaron por espectroscopia de fotoelectrones XPS. Se registraron los espectros de emisión de las muestras en un espectrofluorofotómetro RF-5301PC SHIMADZU.

TABLA I.
RUGOSIDAD RQ, RA Y RMAX DE MUESTRAS TiO_2/ZN

Muestras	Rugosidad		
	Rq (nm)	Ra (nm)	Rmax (nm)
TiO_2-pura	0.209	0.166	1.710
TiO_2-1ZnO	0.245	0.186	2.120

III. RESULTADOS

A. *Microscopia de fuerza atómica*

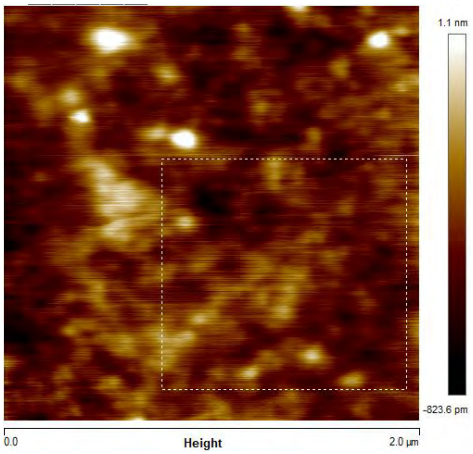


Fig. 1. Imagen MFA representativa de las muestras de la serie en estudio, TiO_2/ZnO.

El registro de la imágen en la Fig. 1, corresponde a una escala de 2 µm x 2 µm, de donde se evalúan los parámetros de rugosidad para las muestras TiO_2/ZnO, tanto de la pura como la de una capa ZnO (Tabla I). En la Fig. 2 se muestra la distribución del tamaño de grano promedio y uniforme para la muestra pura,

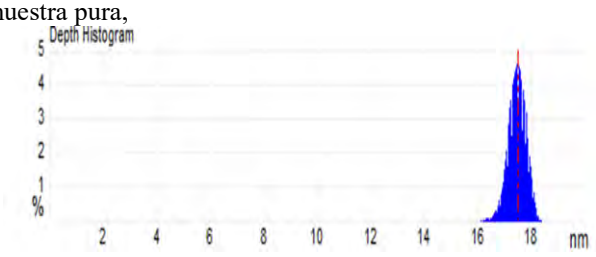


Fig. 2. Distribución de tamaño de grano de la muestra TiO_2/ZnO pura.

Los parámetros de rugosidad Rq, Ra y Rmax resultaron para un área 2 µm x 2 µm escaneada, los parámetros fueron de fracciones de los nanómetros, por lo que las películas son de baja rugosidad (Fig. 1). La micrografía (Fig. 1) representa las características topográficas de los compositos TiO_2/ZnO sol-gel, se muestra una topografía con poros y gránulos superficiales que dan un contraste y una distribución de tamaño de grano homogénea (Fig. 2). La distribución del tamaño de grano se centra alrededor de 17.7 nm.

B. *Espectroscopia ultravioleta visible*

Las propiedades ópticas de las películas delgadas TiO_2/ZnO se registraron por UV-Vis en un espectrofotómetro, en el rango 200-900 nm con sustrato de vidrio como referencia; los espectros de la muestra TiO_2/ZnO (pura) resultaron medianamente transparentes (Fig. 3) con bordo de absorción 385 nm (TiO_2/ZnO), menos transparente y la absorción en 382 nm (para una capa de ZnO); los espectros presentan efectos de interferencia de donde se evalúan parámetros importantes que caracterizan la película, que se estima alrededor de 180 nm para la muestra pura TiO_2 usando teoría relacionada [10,11].

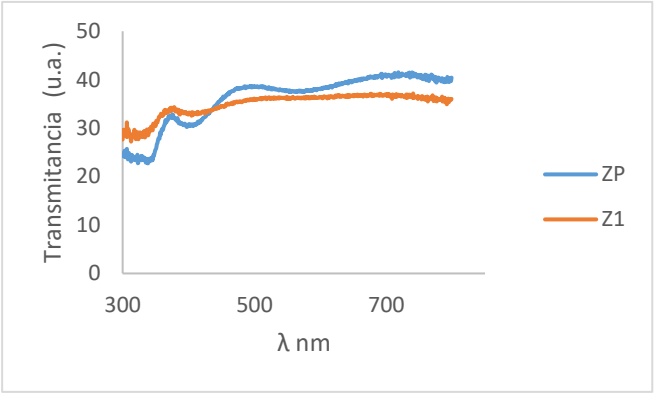


Fig. 3. Espectros UV-Vis de las muestras TiO_2/ZnO (ZP muestra pura y Z1 una capa de ZnO).

Donde la transmitancia *T%* se registra en los espectros y de la relación del porciento de ésta con la reflectancia (*R*), de la relación $R = (1-T\%)/(1+T\%)$ y la relación de la reflectancia con el índice de refracción $n = (1+R^{1/2})/(1-R^{1/2})$ se determina el comportamiento del índice para la película [11,12], en la Fig. 4 se muestra la estimación del ancho de banda $Eg = 3.092$ eV para la muestra pura y en la Fig. 5 el estimado del $Eg = 3.026$ eV para la muestra con una capa de ZnO.

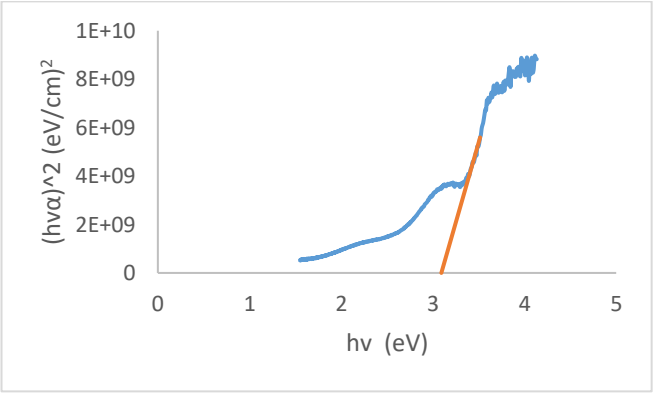


Fig. 4. Ancho de banda $Eg = 3.092$ eV del composito TiO_2/ZnO puro.

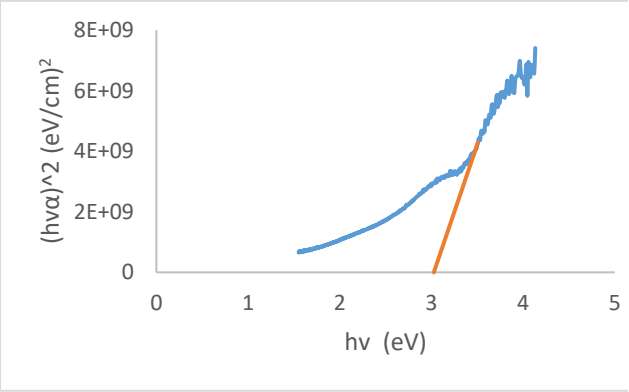


Fig. 5. Ancho de banda *Eg* = 3.026 eV del composito TiO_2/ZnO con una capa de ZnO.

Por otro lado, de la región de altas energías de los espectros UV-Vis que se registran, se puede evaluar el ancho de banda prohibida del semiconductor *Eg*, de la relación de Kubelka-Munk y sabiendo que la fase anatasa del TiO_2 es un semiconductor de banda indirecta, entonces se cumple que a partir del gráfico de $(\alpha hv)^{1/2} = A(hv - Eg)$ al extrapolar al eje de energías del fotón *hv* (con α cero) [10,11,12], donde A es una constante que depende del material y α es el coeficiente de absorción dado por la relación $\alpha(\lambda) = ln(1/T)/d$, con *d* el espesor de la película. En las Figs. 4 y 5, se muestra la evaluación del valor *Eg* para cada muestra. Se tienen otros métodos para estimar el *Eg*.

C. *Espectroscopia XPS*

En las Figs. 6a, 6b y 6c, se presentan espectros XPS general (Ti, Zn, O1s y C1s), XPS local del orbital O1s del oxígeno y del orbital C1s del carbono, respectivamente. Se observa de los análisis de los orbitales O1s y C1s, diferentes especies en cada caso lo que supone ambientes químicos diferentes, relacionados a especies hidroxilos, presencia de agua y posibles enlaces C-C y C=C, entre otras posibilidades [13,14-16].

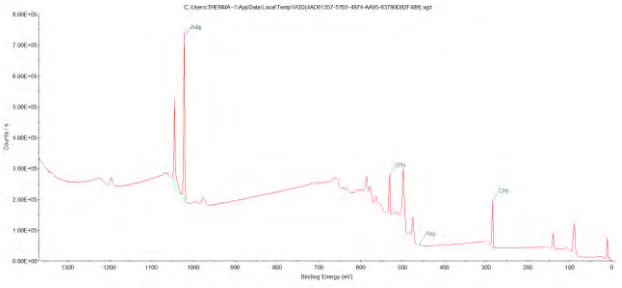


Fig. 6a. Espectro general de compositos TiO_2/ZnO.

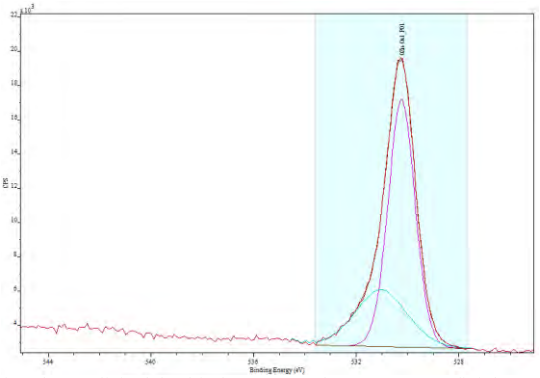


Fig. 6b. Análisis del orbital O1s para el oxígeno superficial.

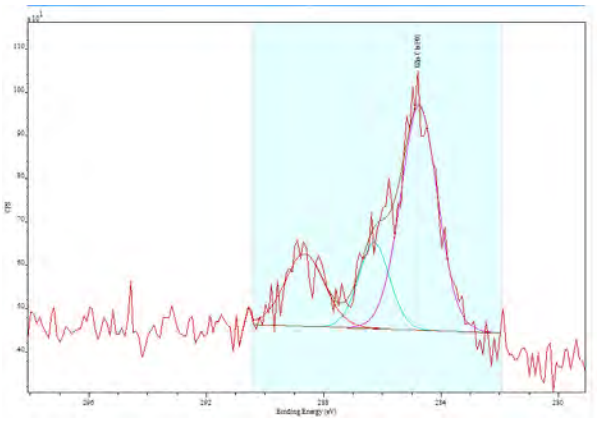


Fig. 6c. Análisis del orbital C1s para el carbono superficial.

D. *Fotodegradación de naranja de metilo*

La fotodegradación de NM a 14 ppm con sistemas TiO_2/ZnO, se realizó en un reactor rectangular LuzChem con luz azules con una irradiancia de 7.0x200 candelas/pie^2 (visible) y 2.2x200 candelas/pie^2 (UVA). En la Fig. 7, se muestra la degradación de NM por la muestra TiO_2/ZnO pura cada 15 min hasta por 2 horas. La Fig. 8 muestra la degradación de NM por parte de la muestra con una capa de ZnO. La respuesta en ambos casos es baja.

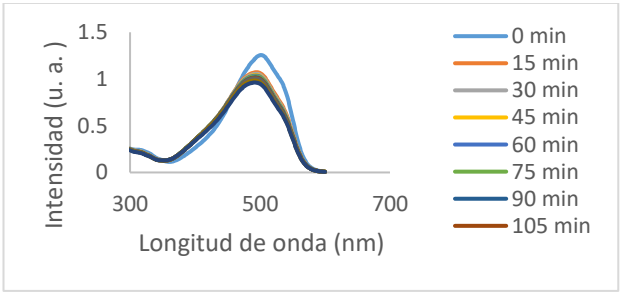


Fig. 7. Primer ciclo de degradación de NM para cada 15 min hasta por 2 horas, de la muestra pura TiO_2/ZnO.

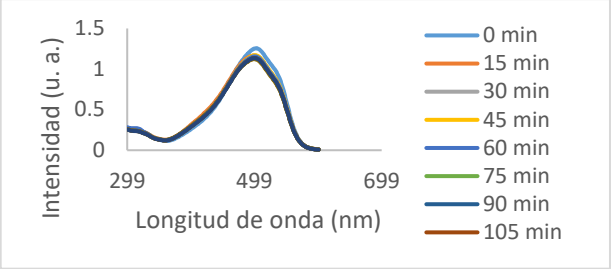


Fig. 8. Degradación de NM para cada 15 min hasta por 2 horas, de la muestra con una capa de ZnO.

Se muestra el comportamiento del proceso de degradación de NM de la banda alrededor de 504 nm, al irradiar cada 15 min el sistema solución acuosa-película. La rapidez de degradación de NM dada por la disminución de la intensidad de la banda señalada, es proporcional a la concentración *C* del NM, de acuerdo a una ecuación cinética de pseudo primer orden, dada por $C = C_0\, e^{-kt}$, con k la pseudo constante de la reacción y *t* es el tiempo de irradiación del sistema de estudio. De los datos registrados en la degradación de NM y del ajuste de la relación entre las concentraciones C_0 y C para los diversos tiempos *t*, se pueden evaluar las constantes de reacción de cada sistema, resultando la *k* de la muestra pura menor a la evaluada para las películas con una capa del catalizador ZnO, una mejor respuesta era de esperarse (Figs. 7 y 8). Al incrementar el catalizador debiera tenerse una mejor respuesta. Según las Figs. 7 y 8 y los parámetros de rugosidad dados en la Tabla I, resultaron mejores los del composito con una capa de ZnO, sin embargo no se muestra una mejor respuesta en la actividad catalítica. En principio, la rugosidad, el área superficial y el tamaño de grano deben jugar un papel importante en la actividad catalítica. El tiempo en el proceso de secado y tratamiento térmico en la película con capa de ZnO, permite que el tamaño de grano crezca y el número de fronteras de grano se reduzca, mismas que resultan de importancia en la actividad de transferencias de cargas entre las interfaces del composito, lo que merma la actividad catalítica de las películas; los estados de esfuerzos, defectos superficiales, así como vacancias de oxígeno, también participa el área específica superficial del composito [1,19].

Las propiedades ópticas registradas para las películas, espectros UV-Vis reportados, muestran los efectos de interferencia y cuya transmitancia es relativamente alta. Sin duda hay factores más fundamentales que permiten explicar los posibles mecanismos de las reacciones en la interfase película-solución, donde se tiene la generación de iones hidroxilos (OH^-) que pueden resultar de la descomposición de las moléculas de H_2O con la radiación y por supuesto de la respuesta del TiO_2/ZnO a la radiación UV, de donde se generan los pares electrón-hueco, ZnO → ZnO ($e^- + h^+$), donde el h^+ al emigrar a la superficie del semiconductor, o bien a los sitios activos disponibles, reaccionará con los iones OH^- y así se obtienen los iones hidroxilos excitados •OH, que reaccionarán al atacar a la molécula de NM y con ello la posible producción de compuestos intermedios del NM u otros radicales menos agresivos y más tratables; por otro lado el e^- puede ser atrapado por oxígeno disuelto para producir el super-óxido O^{2-}, esto es, $e^- + O_2 \rightarrow O^{2-}$ [1] o también vacancias de oxígeno que operan como trampas de los fotoelectrones y que por supuesto se encuentran en los sistemas preparados; la molécula de agua H_2O adsorbida resulta ser muy importante en las posibles reacciones. Por lo anterior se pueden explicar las posibles reacciones que se llevan a cabo en la interfase película-solución, entre fronteras de granos y/o transferencia de carga entre los componentes del composito [1,15-17].

E. Fotoluminiscencia

Para caracterizar los espectros de emisión de las muestras en el rango 300-500 nm y temperatura ambiente, se irradiaron con luz ultravioleta de longitud de onda 325 nm (3.81 eV). Se registraron los espectros de emisión de los compositos y así se presentan espectros de la muestra pura TiO_2/ZnO (Fig. 9) y el correspondiente a muestra con una capa de ZnO (Fig. 10). Se tiene para la muestra pura una banda ancha intensa en 374.77 nm (3.308 eV) y en 389.79 nm (3.18 eV) de intensidad 756.60 cuentas, además tres bandas en los 2.82, 2.74 y 2.64 eV, esta última de mayor intensidad relativa. Para el espectro de la muestra con una capa de ZnO se resuelve la banda ancha con los picos en 371.69 nm (3.336 eV) y el mayor en los 420.61 nm (2.95 eV) con intensidad 374.55 cuentas; picos bien resueltos en 2.853, 2.752 y en 2.645 eV se presentan, aunque la banda en la región del verde no se presenta debido al rango de los espectros y la temperatura ambiente del registro de los espectros [18] y donde se requiere tratamientos térmicos elevados de las muestras.

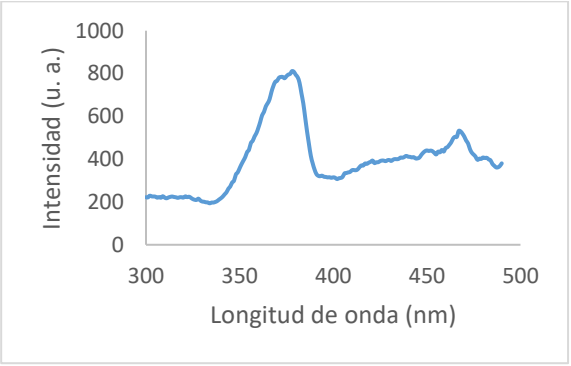


Fig. 9. Fotoluminiscencia de la muestra pura TiO_2/ZnO.

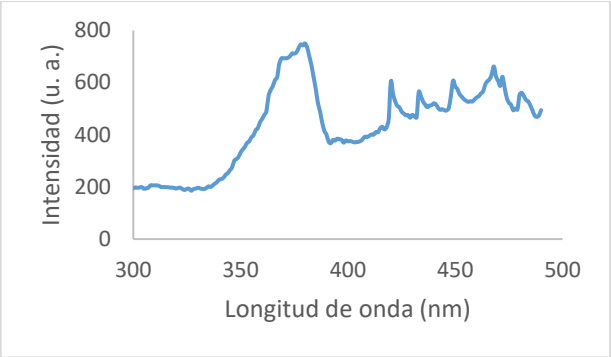


Fig. 10. Fotoluminiscencia del composito con una capa de ZnO.

IV. Discusión

De una serie de compositos en película delgada TiO_2/Zn, se presentan resultados del estudio parcial de los compositos de muestra pura y aquella con una capa de ZnO. Micrografías MFA representativas de los compositos, con área registrada 2 µm x 2 µm se presentan; se realizó análisis de las imágenes con el programa Nanoscope. Se evaluaron diversos parámetros de rugosidad de la serie de muestras; los datos comparativos para dos de las muestras se presentan en la Tabla I. También se obtuvo la distribución de grano centrado en los 17.7 nm, bastante simétrico, tamaño que podría corroborarse con difracción de rayos X. Se observa de los datos en la tabla que los parámetros en general son mayores aquellos de la muestra de TiO_2/Zn con una capa de ZnO, que los de la pura; se puede pensar que el crecimiento del polímero superficial de ZnO afecta dichos parámetros. La muestra con una capa de ZnO está inestable por el mismo proceso de ser la primera capa y con una mayor concentración de estados superficiales, vacancias diversas y esfuerzos; además sólo se les dio a las películas un tratamiento térmico de 300 °C. Los espectros UV-Vis de la serie TiO_2/ZnO registrados mostraron espectros no convencionales como se ve en la región de UV y no se logra resolver bien la respuesta de las muestras; en la región del visible se lograron registros de espectros con efectos de interferencia, pero el bordo de absorción no se logra definir claramente y se dificulta realizar un buen análisis de los mismos. La transmitancia de las películas resultó muy baja, inclusive para la pura. Lo dicho, conlleva a dificultar y explicar el comportamiento de la actividad catalítica en relación a la de gradación de NM. Los estados superficiales y diversos tipos de vacancias permiten explicar los espectros de emisión registrados para las muestras que se irradiaron con luz UV (325 nm). El ancho de banda *Eg* del semiconductor, si bien presenta la tendencia de decrecer con la capa ZnO, se requeriría ampliar las muestras con el incremento de capas, pues se sabe que modificando superficialmente el TiO_2 con plata, el *Eg* disminuye [1,2].

Del análisis de los espectros XPS de los orbitales C1s y del O1s se identifican diferentes especies como C-C, C-H, C=C y O^{2-} del ZnO, OH^- o bien oxígeno de agua absorbida, entre otras especies, mismas que permiten proponer posibles mecanismos en las reacciones que podrían llevarse a cabo entre las interfaces muestra-solución [1,14].

El máximo de la banda de absorción alrededor de los 504 nm, que sirve para ir registrando el proceso de la actividad fotocatalítica de los compositos TiO_2/ZnO en la descomposición de la solución de NM. Para la muestra pura de la serie de estudio, los resultados (Fig. 7), se observa una respuesta poco eficiente. Resultados similares se registraron para la película con una capa de ZnO (Fig. 8); las constantes de reacción resultaron similares, donde una primera capa de la modificación superficial, no parece suficiente para ver el efecto del crecimiento a primer capa de la película de ZnO; tensiones y esfuerzos, entre otros estados activos superficiales como vacancias de oxígeno podrían darnos la respuesta. Se debe considerar que el sustrato TiO_2 a un espesor de cinco inmersiones, se sintetizó a una temperatura muy baja (250 °C) lo que daría películas amorfas en las cuales naturalmente se encuentran esfuerzos y defectos, además sólo se encuentra una sola capa de ZnO y no se alcanza a definir una estructura cristalina, por lo tanto resultaría amorfa y con los naturales defectos intrínsecos y ello por la baja temperatura de tratamiento térmico a 300 °C [1,14,15,16].

Las energías en los espectros de emisión de la película pura en 3.308 eV y para el composito TiO_2/ZnO con una capa de ZnO en 3.336 eV, estarían asociados al ancho de banda del TiO_2 y del ZnO, respectivamente; la banda de emisión característica no se presenta por el rango de los espectros registrados [18,19].

Las regiones UV y la visible en estos óxidos metálicos, además que pueden ser modificadas, por ejemplo variando la temperatura y el número de capas de ZnO, al generar defectos-vacancias, los compositos TiO_2/Zn tendría la posibilidad potencial de aplicarse tanto en dosimetría de radiaciones como en fotocatálisis para descomponer sustancias trazadoras [1,15].

V. Conclusiones

Se sintetizan compositos TiO_2/ZnO, preparados por la ruta de sol-gel e inmersión repetida. Las películas de TiO_2 de un mismo espesor (sustratos), se modificó superficialmente con una capa de ZnO. La morfología resultó porosa y con una distribución de poros en la película pura, con una distribución de grano simétrico, con tamaño de grano alrededor de los 17.7 nm; los parámetros de rugosidad se evaluaron resultando mayores los del depósito con una capa de ZnO respecto a los de la pura. La transmitancia fue baja en ambas muestras, aunque la muestra pura TiO_2 presentó efectos de interferencia, propio delproceso de crecimiento; no se observó los mismo en el composito con una capa de ZnO. El valor de *Eg* evaluado resultó un poco menor para el caso del depósito de ZnO, aunque no se ve el efecto en la degradación de NM. En el espectro de emisión fotoluminiscente se muestra el efecto de la capa ZnO y aparece un patrón bien

definido, sobre todo en la región del visible truncado por el rango de registro del espectro. Tanto la región del espectro en el UV como del visible, experimentalmente son modificables y poder tener la posibilidad de obtener sistemas o dispositivos aplicables en la detección de radiaciones en diversos ambientes de trabajo. Se realizó un estudio de las muestras por XPS y del mismo se determinaron las especies de oxígeno O1s, del orbital C1s del carbón, lo que genera la posible química que se involucra entre las interfases y las fronteras de grano; los estados de ionización del Ti y del Zn se determinaron (no se presentan), con lo cual se determinan los posibles enlaces entre el Ti y los orbitales O1s, del enlace Zn con el O1s, en principio, con los cuales se explican la formación del TiO_2, así como la del ZnO, entre otros posibles productos naturalmente asociados.

Dadas las múltiples variables experimentales, las propiedades y característica de los sistemas son factibles de mejorarse y obtenerlos más eficientes en sus posibles aplicaciones.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a quienes realizaron las mediciones en MFA, Gabriela Rueda Morales; los registros de UV-Vis, degradación de ESIQIE, los registros por XPS (CNMN), lo relacionado con gráficas y la edición del trabajo, Natzin Tirado.

REFERENCIAS

[1] J. Yu, X. Zhao, Q. Zhao, "Effect of surface structure on photocatalytic activity of TiO_2 thin films prepared by sol-gel method" Thin Solid Films 379 (2000) 7-14.

[2] Y. Keun Chae, J. Won Park, Shinsuke Mori, Masaaki Suzuki, "Photocatalytic effects of plasma-heated TiO_{2-x} particles under visible light irradiation" Korean J. Chem. Eng., 30(1), (2013) 62-63.

[3] J.M. Hermann, "Environmental applications of semiconductor photocatalysis" Chem. Rev. 95 (1995) 69-96.

[4] J.M. Hermann, M.P. Hoffmann, S.T. Martin, W. Choi, D.W. Bahnemann,, "Heterogeneous photocatalysis: fundamentals and applications to the removal of various types of aqueous pollutants" Catalysis Today 53 (1999) 115-129.

[5] Y. Ochoa, Y. Ortegón, M. Vargas, J.E. Rodríguez-Páez "Síntesis de TiO_2, fase anatasa, por el método Pechini" Revista Latinoamericana Metalurgia y Materiales S1 (3) (2009) 931-937.

[6] A. Nada, Y. Moustafa, A. Hamdy, Saad A. El-Wahab, D. Hamdy "Synthesis and Photocatalytic Activity of Single Crystal Titanate: Part-1" Chemistry and Materials Research Vol. 6 No. 10 (2010) 40-48.

[7] A.L. Luna, et al., "Photocatalytic degradation of gallic acid over CuO-TiO_2 composites under UV/Vis LEDs irradiation" Appl. Catal. A: Gen 521 (2016) 140-149.

[8] V.H. Castrejón-Sánchez, E. Camps, M. Camacho-López "Quantification of phase content in TiO_2.thin films by Raman spectroscopy" Superficies y Vacío 27(3) (2014) 88-92.

[9] A.L. Luna, et al., "Photocatalytic hydrogen evolution using Ni-Pd/TiO_2: correlation of light absorption, charge-carrier dynamics, and quantum efficiency" J. Phys. Chem. C. 121 (26) (2017) 14302-14311.

[10] P. Jongnaavakit, P. Amornpitoksuk, S.Suwanboon, T. Ratana. "Surface and photocatalytic properties of ZnO thin film prepared by sol-gel method" Thin Solid Films 520 (2012) 5561-5567.

[11] A.I. Martínez, Dwight R. Acosta, G. Cedillo. Thin Solid Films 490 (2005) 118.

[12] J. Pérez-Alvarez, L. Escobar-Alarcón, E. Camps, S. Romero, S.M. Fernández-Valverde, J. Jiménez-Becerril, "Caracterización de bicapas TiO_2/SnO_2 depositadas por ablación laser para fotocatálisis" Superficies y Vacío 20 (2) (2007) 12-16.

[13] H. Liu et al., "Synthesis of CuO_2/T-ZnO_w nanocompound and characterization of its photocatalytic activity and stability property under UV irradiation" Materials Science and Engineering B 178 (2013) 158-166.

[14] M. Fusi, et al., "Surface electronic and structural properties of nanostructured titanium oxide grown by pulsed laser deposition" Surface Science 605 (2011) 333-340.

[15] D. Greene, R. Serrano-García, J. Govan, Y. K. Gun'ko, "Synthesis Characterization and Photocatalytic Studies of Cobalt Ferrite-Silica-Titania Nanocomposites" Nanomaterials 4, (2014) 331-343.

[16] H. Sun, et al., "Visible-light-driven TiO_2 catalysts doped with low-concentration nitrogen species" Solar Energy Mat. And Solar Cells 92, (2008) 76-83.

[17] D. Ramírez Ortega, et al., "Semiconducting properties of ZnO/TiO_2 composites by electrochemical measurements and their relationship with photocatlytic activity" Electrochimica Acta 140 (2014) 541-549.

[18] Bixia Lim amd Zhuxi Fu "Green luminescent center in undoped zinc oxide films deposited on silicon substrates" Appl. Phys. Lett., 79 (7) (2001) 943-945.

[19] J. Lim, et al., "Photoluminiscence studies of ZnO thin films grown by atomic layer epitaxy" 109 (2004) 181-185.

ISSN: 2594-1011

Análisis de espectros multifractales generados por procesos multiplicativos

José Alberto Zamora Justo, Alejandro Muñoz Diosdado, Paulina Abrica González, Guillermo Rocael Vázquez Martínez
[1]Departamento de Ciencias Básicas, UPIBI-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 56493 E-mail: zamora.justo@outlook.com

Resumen — **Los procesos multiplicativos son series generadas artificialmente en cascada y han sido estudiadas con el fin de aproximar el comportamiento de un sistema complejo real, por ejemplo sistemas con turbulencia. Además, este tipo de series se emplean usualmente para validar el funcionamiento de algoritmos desarrollados para estudiar características fractales o multifractales en series de tiempo. El espectro multifractal provee información sobre la complejidad de las series y esto ha sido importante para estudiar fenómenos de geofísica, sismicidad e incluso señales fisiológicas, entre otros. En este trabajo estudiamos los parámetros importantes de los espectros (simetría y ancho) generados por procesos multiplicativos con dos, tres y cuatro probabilidades iniciales. Además, se implementó un algoritmo para encontrar el conjunto de probabilidades de un proceso multiplicativo que genera un espectro con parámetros similares al de una serie de interlatido cardíaco. Los resultados sugieren que bajo ciertas condiciones se pueden aproximar espectros de procesos multiplicativos y de series reales.**

Palabras Clave – **Complejidad, Espectro Multifractal, Procesos Multiplicativos, Series de Tiempo,**

Abstract — **Multiplicative processes are series artificially generated in cascade and they have been studied in order to approximate the behavior of real complex systems, for example systems with turbulence. Usually, multiplicative processes are used to verify algorithms developed to study fractals and multifractals characteristics of a series. The multifractal spectrum provides information about the complexity in the series which is important in order to study phenomena in geophysics, seismicity, physiological signals, among others. In this work, the analysis of the multifractal spectra (width and symmetry) generated by multiplicative processes and using 2, 3 and 4 initial probabilities was performed. In addition, the spectra of these series were compare with spectra generated by real series of heartbeat time interval. The results suggest that with certain conditions multiplicative processes could be used to approximate spectra from some real time series.**

Keywords — **Complexity, multifractal spectrum, multiplicative processes, time series**

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP- 20171974

I. Introducción

Actualmente, existen una gran cantidad de investigaciones sobre métodos de la dinámica no lineal, específicamente se ha empleado el análisis de espectros multifractales con aplicación en varias áreas del conocimiento como geofísica [1], fenómenos de turbulencia [2], sismicidad [3] e incluso en el estudio de señales fisiológicas complejas como por ejemplo señales provenientes del tiempo entre latidos del corazón, también llamadas tacogramas [4], con éstas se ha encontrado que empleando el grado de multifractalidad y la simetría del espectro se puede determinar, al menos cualitativamente, el estado de salud de una persona considerando la complejidad de dicha serie [5].

Además, los Procesos Multiplicativos (PM) son utilizados como método de verificación de algoritmos desarrollados para calcular el espectro multifractal (EM), ya que algunos parámetros de éstos pueden calcularse analíticamente, a partir de las probabilidades iniciales de dicho PM, por expresiones descritas por *Feder* [6].

Recientemente, se ha encontrado que algunas series generadas artificialmente a partir de multiplicaciones sucesivas de arreglos de un conjunto de probabilidades, llamadas Procesos Multiplicativos Binomiales (PMB), pueden ser usadas para aproximar espectros multifractales generados a partir de series de tiempo reales, sin embargo, los procesos multiplicativos que parten de dos probabilidades iniciales siempre generan espectros simétricos, lo cual no ocurre en espectros de series reales [7]. *Cheng* [8] propone un modelo asimétrico y multi-paramétrico para la generación de PMB para poder realizar una mejor aproximación a espectros generados con datos de sismicidad entre otros. Sin embargo, no existe mucha información sobre PM generados a partir de un conjunto de N probabilidades iniciales.

En este trabajo se realizó el análisis de los EM generados a partir de PM con dos, tres y cuatro probabilidades iniciales para su uso en la aproximación de espectros de series reales, específicamente de una serie de tiempo de interlatido cardíaco.

.

II. METODOLOGÍA

A. Generación de Procesos Multiplicativos

La generación de procesos multiplicativos parte de un conjunto de dos probabilidades (p_1 y p_2) cuya suma es uno, ordenadas en un arreglo como el que se muestra a continuación:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$P_2 = [p_1 \quad p_2] \quad (2)$$

La segunda generación (P_n con n=2) del proceso multiplicativo se obtiene multiplicando ambos arreglos ($P_3=P_1P_2$). Subsecuentemente P_3 se reagrupa en un arreglo de dimensión $1x2^n$. Este procedimiento se repite hasta obtener la n-ésima generación del PM, es decir:

$$P_{n+1} = P_1 P_n \quad (3)$$

En el caso de procesos multiplicativos con tres probabilidades iniciales (PMT), (p_1, p_2 y p_3) y cuya suma también debe ser uno, se realiza un procedimiento similar pero partiendo de los siguientes arreglos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$P_2 = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \quad (5)$$

De la misma manera la segunda generación (P_n con n=2) de este tipo de PM se genera multiplicando los arreglos (4) y (5), la matriz resultante se reacomoda en un solo vector con dimensión $1x3^n$. Para *n* generaciones se realiza la operación expresada en (3).

Por lo tanto, es fácil notar que el arreglo inicial para un proceso multiplicativo de cuatro probabilidades (PMC) está dado por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$P_2 = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4] \quad (7)$$

Siguiendo el mismo proceso indicado por (3) se puede entonces obtener la n-ésima generación del PM.

B. Análisis del Espectro Multifractal

El método empleado para calcular el EM de las series fue descrito por Chhabra y Jensen [9], ellos consideran segmentar la serie en cajas de longitud *L* y obtener el exponente de Hölder *α* y la dimensión fractal *f(α)* a partir de una familia uni-paramétrica, *μ(q)*, utilizando las siguientes expresiones:

$$\mu_i(q,L) = \frac{[P_i(L)]^q}{\sum_j [P_j(L)]^q} \quad (8)$$

$$f(q) = \lim_{L\to 0} \frac{\sum_i \mu_i(q,L)\log[\mu_i(q,L)]}{\log L} \quad (9)$$

$$\alpha(q) = \lim_{L\to 0} \frac{\sum_i \mu_i(q,L)\log[P_i(L)]}{\log L} \quad (10)$$

Los espectros se calcularon con $-30 \le q \le 30$ y los parámetros analizados fueron el ancho ($\Delta\alpha$) y la simetría (R), considerando las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_{min} = \alpha(q\to\infty), \qquad \alpha_{max} = \alpha(q\to\infty), \qquad \alpha_0 = \alpha(q=0) \quad (11)$$

$$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (12)$$

$$R = \frac{\alpha_{max} - \alpha_0}{\alpha_o - \alpha_{min}} \quad (13)$$

Las expresiones generalizadas para calcular los parámetros descritos en (11) de espectros multifractales calculados de PM con N probabilidades iniciales son:

$$\alpha_{min} = -\frac{\ln p_1}{lnN} \quad (14)$$

$$\alpha_{max} = -\frac{\ln p_2}{lnN} \quad (15)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\sum_{i=1}^{N}(\ln p_N)}{NlnN} \quad (16)$$

Dónde p_1 y p_2 deben de ser la probabilidad más grande y más pequeña del conjunto, respectivamente.

C. Procesos Multiplicativos Binomiales Modificados

Se analizaron los espectros multifractales de 99 combinaciones de probabilidades de procesos multiplicativos binomiales a la décima generación empleando Matlab®. Considerando p_1 con valores desde 0.01 hasta 0.99 e intervalos de 0.01.

Además, se planteó utilizar una función que reordene aleatoriamente los elementos del arreglo en donde se encuentran los valores del proceso multiplicativo (P_{10}) y analizar los parámetros de simetría y ancho de sus espectros.

D. Aplicaciones de los Procesos Multiplicativos

Se obtuvieron 4,851 series de quinta generación de PMT con diferente combinación de probabilidades y 156,849 de PMC a la cuarta generación. Se calculó el espectro multifractal a todas las series y se guardaron los resultados en una base de datos con el fin de ser utilizada para encontrar la combinación de probabilidades de un PM cuyo espectro multifractal tiene los parámetros similares a un espectro

generado por series de tiempo reales, específicamente se aproximó a una serie de tiempo de interlatido cardiaco.

III. Resultados

A. Generación de Procesos Multiplicativos

La Fig. 1 muestra la representación gráfica de PMB, PMB modificado, PMT y PMC con diferentes probabilidades iniciales Cada valor de la series está representada como una barra de diferente color, además se muestra el "espectro visual" de las series, el cual se obtiene graficando líneas de un color modulado por cada valor de la serie y va desde el rojo (valores más pequeños) hasta el azul (valores más grandes). Estas representaciones ayudan a entender de mejor manera la dinámica de cada una de las series creadas. Por ejemplo, con el espectro visual se puede observar que entre mayor es la cantidad de probabilidades iniciales la serie se vuelve más compleja ya que incrementa la gama de colores que la representa.

B. Análisis del Espectro Multifractal

Se verificó que todos los espectros multifractales calculados de los procesos multiplicativos binarios generados sean simétricos, es decir, R=1. Además, se encontraron los errores porcentuales de los parámetros (11) de los espectros generados y los calculados analíticamente con las ecuaciones (14-16). La Fig. 2 muestra los errores encontrados para cada valor de los parámetros en todos los valores de p_1. Se puede observar que los errores son despreciables aunque éstos aumentan conforme p_1 se acercan a 0.5.

Asimismo, se demostró que para valores de p_1 y p_2 muy cercanos entre sí la complejidad de la serie disminuye (el espectro se vuelve más estrecho), sucede lo contrario cuando la diferencia entre estas probabilidades iniciales es mayor.

El mismo análisis fue realizado para los espectros generados con los demás PM, se comprobó que los errores de éstos mismos parámetros de los espectros generados por PMT y PMC son relativamente pequeños, se obtuvieron errores entre el 3.1-11.8% para los primeros y el 0.59-5.8% para los segundos.

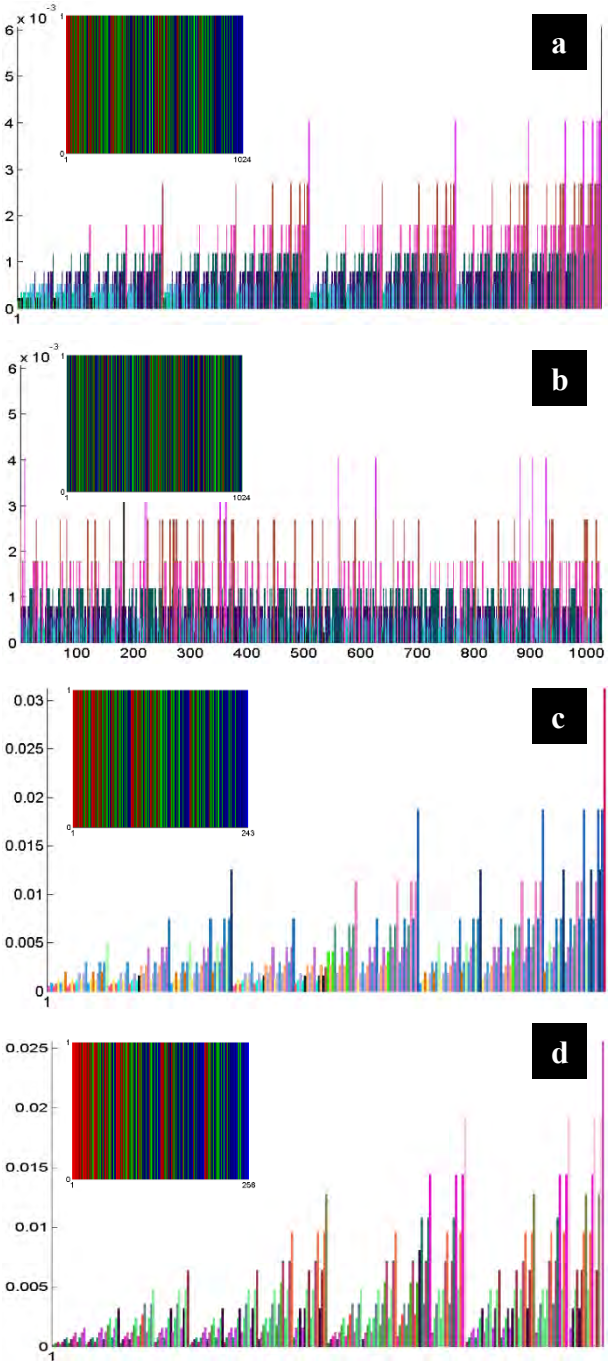


Fig. 1. Representación gráfica y espectro visual de **a** 10ª generación de PMB (p_1=0.3 y p_2=0.7), **b** PMB modificado, **c** 5ª generación de PMT (p_1=0.2, p_2=0.3 y p_3=0.5) y **d** 4ª generación de PMC (p_1=0.1, p_2=0.2, p_3=0.3 y p_4=0.5).

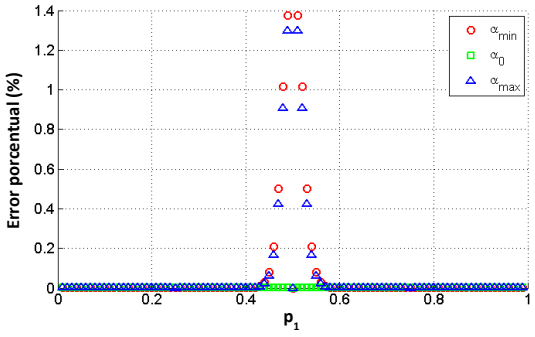


Fig. 2. Errores relativos porcentuales de α_{min}, α_0 y α_{max} en los espectros calculados a partir de PMB con p_1 entre 0.1-0.99

C. *Procesos Multiplicativos Binomiales Modificados*

Se obtuvieron los espectros de los PMB con todas las combinaciones de probabilidades y sus modificaciones con la función aleatoria. La Fig. 3 muestra una comparación de los espectros generados por ambas series con dos valores de p_1 y p_2 diferentes. Para todos los casos se observó que el ancho del espectro, que índica la complejidad de la serie (grado de multifractalidad), es menor en los PMB modificados, esto se debe a que la función de números aleatorios utilizada para intercambiar la posición de los elementos del vector (P_{10}), disminuye la complejidad de esta serie. En el caso de la simetría (factor R), no se obtuvieron resultados conclusivos.

D. *Aplicaciones de los Procesos Multiplicativos*

Se realizó el análisis del ancho y la simetría de los espectros generados por los PMT y PMC descritos en la metodología. La Fig. 3 muestra los histogramas de cada uno de esos parámetros, en la que se puede observar que tienen una distribución parecida a la de Poisson. Para los espectros generados con PMT 0.4483<R<2.271 y 0.0099<Δα<4.454 y 0.3561<R<2.9269 y 0.0223<Δα <4.52493 para los PMC.

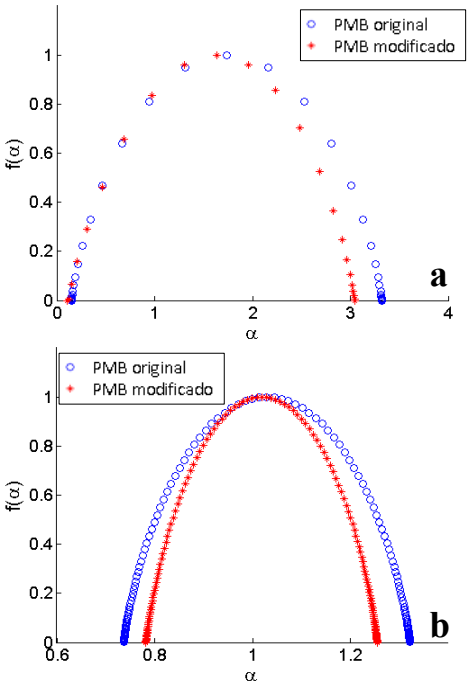


Fig. 2. Comparación de espectros multifractales generados a partir de PMB a la décima generación (original y modificado) con probabilidades **a** p_1=0.1 y p_2=0.9 y **b** p_1=0.4 y p_2=0.6

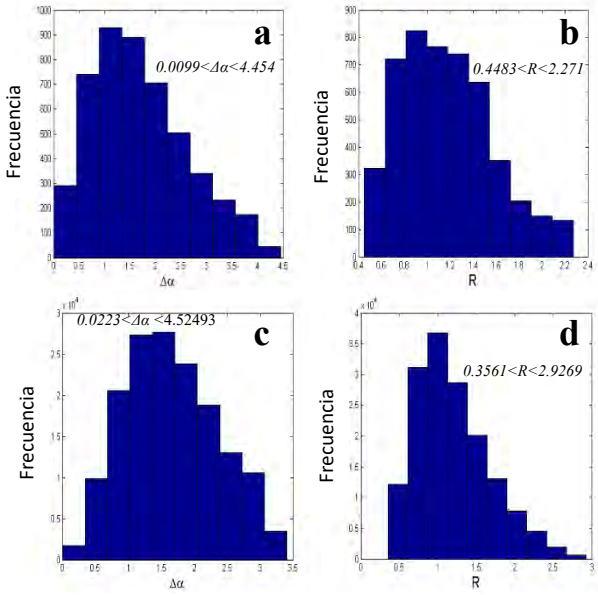


Fig. 3. Caracterización del **a** ancho y **b** simetría de los espectros generados por PMT. **c** Δα y **d** R de PMC

Con estos resultados se vislumbró que los PM con 3 y 4 probabilidades iniciales pueden generar espectros de series reales siempre y cuando los parámetros de éstos se encuentren en el mismo rango que los generados por PM (Fig. 3). Entonces, por medio de la base de datos generada se pudo encontrar el conjunto de probabilidades que generan un

espectro similar al de una serie real de tiempo de interlatido cardiaco, esta aproximación se puede observar en la Fig. 4.

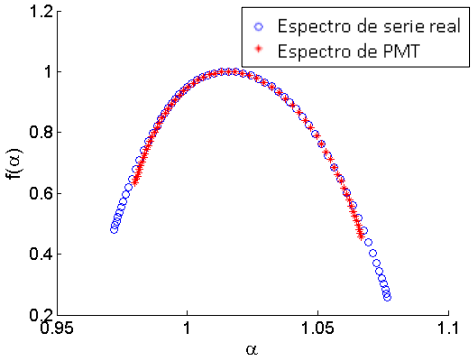


Fig. 4. Aproximación del espectro de una serie real de interlatido cardiaco y un PMT

IV. Discusión

Con la representación visual de los PM se comprueba que la complejidad de estos aumenta sí el número de probabilidades iniciales es mayor, lo que tienen que ver con el aumento en la dinámica cuando éstos se generan.

El índice de multifractalidad o ancho del espectro multifractal de los PMB modificados es menos que el de los originales, esto indica una pérdida de complejidad de la serie debido a la función utilizada para modificarlo, esta función al ser aleatoria y por su forma de generarse tiene características monofractales y sus valores no tienen correlación.

Los errores obtenidos de los parámetros α_{min}, α_0 y α_{max} de los espectros generados con PMB son despreciables, esto ocurre de igual forma para los PMC. Sin embargo, los errores para los PMT son considerables debido a que el método empleado para calcular el espectro multifractal está basado en series de datos con longitud de la forma 2^n, lo cual provoca mayor error en el cálculo cuando las series no tienen ese número de elementos. Sin embargo, se puede considerar que la generalización de las fórmulas para estimar dichos parámetros se está empleando adecuadamente.

Los parámetros de simetría y ancho de los espectros multifractales de los PM de la base de datos tienen un rango de alcance por lo que no se pueden aproximar espectros que no se encuentren dentro de dicho rango. No obstante, se demostró en la Fig. 4 que existen algunos casos de series de tiempo reales que sí pueden ser aproximados por PM.

V. Conclusiones

Se verificó que la complejidad de los procesos multiplicativos binomiales modificados disminuye en comparación con el original, pero continúan teniendo un comportamiento multifractal. Se encontró que la distribución de $\Delta\alpha$ y R calculada satisface una distribución de Poisson y los resultados sugieren que algunos espectros obtenidos a partir de series reales pueden ser aproximados mediante procesos multiplicativos siempre que estos parámetros estén en el rango (PMT: $0.0099 < \Delta\alpha < 4.4540$ y $0.4483 < R < 2.2715$. PMC: $0.0223 < \Delta a < 4.52493$ y $0.3561 < R < 2.9269$).

Agradecimientos

Los autores agradecemos el financiamiento económico otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN) y al programa de becas BEIFI. JAZJ además agradece a CONACyT por la beca de posgrado otorgada.

Referencias

[1] Cheng, Q. "Multiplicative cascade processes and information integration for predictive mapping." Nonlin. Processes Geophys. 19 (2012): 57–68.

[2] McCauley, Joseph L. "Introduction to multifractals in dynamical systems theory and fully developed fluid turbulence." Physics Reports 189, no. 5 (1990): 225-266.

[3] Muñoz-Diosdado, A., Angulo-Brown, F., and del RÍO-Correa, J. L. "Multifractal analysis of a spring-block seismic fault." Proceedings of 13thWorld Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, B.C., Canada, 2004.

[4] P. Ch. Ivanov, L. A. Nunez Amaral, A. L. Goldberger, S. Havlin, M. G. Rosemblum, Z. R. Struzik, and H. E. Stanley. "Multifractality in human heartbeat dynamics." Nature 399 (1999): 461.

[5] J. A. Zamora-Justo, R. A. Gutiérrez-Calleja, A. Muñoz-Diosdado. "Acquisition Software Development for Monitor Holter Prototype Signals and Its Use for Pre-Diagnosis of Cardiac Damage Based on Nonlinear Dynamic Techniques." AIP Conference Proceedings 1747, no. 090001 (2016).

[6] A. Muñoz-Diosdado, J. L. Del Río-Correa. "Further Study of the Asymmetry for Multifractal Spectra of Heartbeat Time Series." Proceedings of 28th IEEE EMBS Annual International Conference. New York, USA, 2006.

[7] Feder, J. "Multifractal Measures." In Fractals, 76-77. New York, USA: Plenum Press, 1988.

[8] Cheng, Q. "Generalized binomial multiplicative cascade processes and asymmetrical multifractal distributions." Nonlin. Processes Geophys 21, no. 2 (2014): 477-487.

[9] A. B. Chhabra, and R. V. Jensen. "Direct determination of the f(α) singularity spectrum." Physical Review Letters 62 (1989): 1327.

ISSN: 2594-1011

Estudio sobre la dispersión elástica de partículas en dos discos rígidos

José Luis del Río Correa[1], Angelina Nohemi Mendoza Tavera[2],
César Ivan Avila Vasquez[3]
Departamento de Física, UAM-I, C.D.M.X., México
E-mail: [1]jlrc@xanum.uam.mx, [2]anmt@xanum.uam.mx, [3]ciav@xanum.uam.mx

Resumen — **El estudio del problema de dispersión múltiple donde un conjunto de partículas interactúa elásticamente con más de un disco dispersor, presenta un gran reto aún en el caso más sencillo de dos discos, ya que se tiene que considerar el fenómeno de dispersión caótica. El análisis del caso más simple fue hecho por J. José, C. Rojas y E. J. Saletan, utilizando la teoría de sistemas dinámicos. En este trabajo se hace un análisis de este artículo, presentándolo de una manera simple de forma que sus resultados puedan ser entendidos por lectores no familiarizados con la teoría de sistemas dinámicos.**

Palabras Clave – **Dispersión caótica, Sistemas dinámicos, Juego de Pinball**

Abstract — **The study of multiple scattering problem where a lot of particles interact elastically with more than one rigid disk represents a great challenge, even in the simply case of two rigid discs, because we consider a phenomenon called chaotic scattering. The analysis of the simplest case was done by J. José, C. Rojas and E. J. Saletan using the theory of dynamical systems. In this work we study this article, showing an easiest style to understand it in a way that can be understand for lectors non familiarized to the theory of dynamical systems.**

Keywords — **Chaotic scattering, Dynamical systems, Pinball Game**

I. Introducción

Una de las condiciones que cumplen los sistemas caóticos, es que son altamente sensibles ante un pequeño cambio de sus condiciones iniciales, este tipo de sistemas son de gran importancia actualmente ya que la mayoría de los sistemas no-lineales tienen esta propiedad, que significa que contra nuestra intuición un pequeño cambio en las condiciones iniciales es amplificado exponencialmente, de forma que a tiempos grandes el comportamiento del sistema es completamente impredecible, un caso especialmente simple donde se observa la dependencia ante condiciones iniciales es el juego del pinball, donde se tienen una mesa con discos fijos en diferentes posiciones, se lanza una pequeña esfera y se trata de que la esfera colisione el mayor tiempo posible con ellos. Para poder ganar el juego podemos hacer uso de una computadora con gran capacidad de memoria y todas las posibles condiciones iniciales, claramente se observa que la solución es altamente compleja, por lo que para familiarizarse con los sistemas caóticos es aconsejable empezar con solo dos discos dispersores y una gran cantidad de partículas puntuales que no interaccionan entre sí, que colisionan con los discos. Lo anterior se hace para poder estudiar todas las posibles condiciones iniciales.

La dispersión de una partícula en presencia de dos discos rígidos representa un sistema integrable, y debido a ello es posible obtener una solución analítica del mismo, pero al aumentar el número de discos a tres o más, ya no se tiene una solución analítica, por lo que se debe de atacar el problema utilizando ideas nuevas ideas numéricas y estadísticas [1].

José, Rojas y Saletan [2], [3] propusieron una solución analítica al problema de dos discos, la cual se presenta aquí, discutiendo los resultados obtenidos y aportando algunos análisis adicionales observados durante el estudio del mismo.

II. Metodología

A. Presentación del Problema

Considere un plano que contiene dos discos circulares de igual radio de tamaño a = 1 cuyos centros se encuentran separados una distancia $R > 2$ (Figura 1). Un haz de partículas puntuales (proyectiles) inciden en estos dos discos de todas las direcciones posibles en el plano. Cuando una partícula incide en un disco con un ángulo ϕ_0 con respecto a la normal en el punto de colisión, esta es reflejada en el mismo ángulo ϕ_0 al otro lado de la normal.

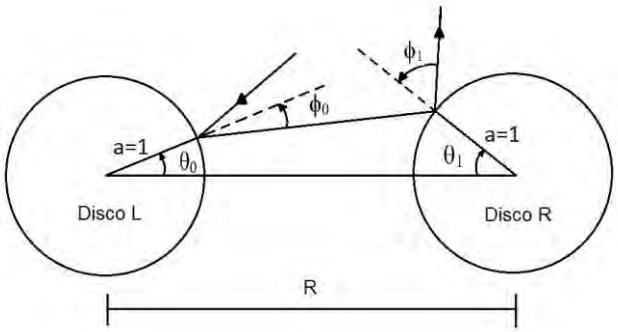


Fig. 1 Definición de los ángulos θ_0, ϕ_0, θ_1 y ϕ_1

El espacio fase de este sistema tiene una dimensión de cuatro, donde dos dimensiones corresponden a la posición de la partícula, y las otras dos a la velocidad de esta. Tomando en cuenta que la colisión es elástica y por lo tanto existe una independencia en la energía, el problema se reduce a tres dimensiones. Además, al tratarse de un problema de dispersión, solo la línea de la trayectoria es relevante, es decir que resulta irrelevante donde comience en esta trayectoria el proyectil, por lo tanto, el problema se reduce a dos dimensiones, las cuales son el ángulo θ con el cual golpea al disco inicialmente, y el ángulo ϕ con el cual llega al disco.

En este problema estamos interesados solo en trayectorias que colisionen con los discos, y se eligen los parámetros en términos de dichas colisiones. Considere una trayectoria que va del Disco L al Disco R. Sea θ_0 el ángulo que define el punto donde el proyectil deja el Disco L, y sea ϕ_0 el ángulo entre la trayectoria de salida y la línea que va del centro de L al punto de colisión. Sean además θ_1 y ϕ_1 los ángulos correspondientes a la subsecuente colisión con el disco R.

Considerando que el disco R representa una reflexión axial del disco L, podemos asegurar la existencia de ciertas simetrías para considerar si los ángulos son positivos o negativos. Notemos que, si los ángulos sobre el disco L son medidos en dirección contraria a las manecillas del reloj, estos son positivos, y debido a la simetría existente entre el disco L y R, los ángulos medidos en el disco R se consideran positivos en sentido de las manecillas del reloj, con esta convención el ángulo θ_1 es positivo, mientras que el ángulo ϕ_1 es negativo, ya que es el ángulo formado entre la trayectoria después de la colisión con la línea que va del centro del disco R al punto de colisión.

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que existan partículas que colisionen con ambos discos es que los cuatro ángulos θ_0, ϕ_0, θ_1,ϕ_1 permanezcan en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. A esta zona se le denotará como la zona Z_1 o zona de un golpe. Por otra parte, para cada colisión del disco L al disco R existe un conjunto de transformaciones θ_{n+1} y φ_{n+1} que van de (θ_0, ϕ_0) hasta (θ_1, ϕ_1), por lo que es necesario hallar dichas transformaciones, conocidas como mapeos.

B. Ángulos de colisión máximos y mínimos

El, espacio fase que caracteriza la colisión con L es (θ_L ϕ_L) y el de R es (θ_R, ϕ_R) usando la convención anterior. Una vez establecido como se medirán los ángulos, se procede a construir el espacio fase (θ, ϕ) asociado con aquellos ángulos θ y ϕ que al golpear las partículas al disco L llevarán a un subsecuente golpe en el disco R. Esta región será denominada como Z_2, o región de dos golpes.

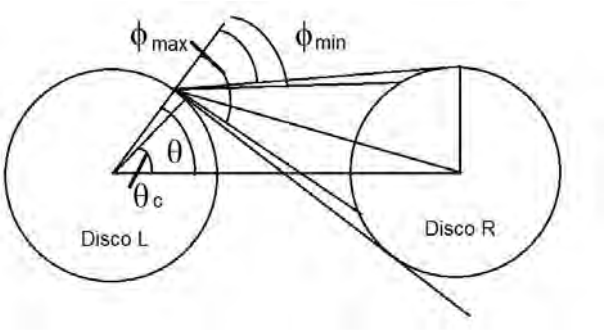


Fig. 2 Definición de los ángulos θc, ϕmin y ϕmax

La región Z_2 estará determinada por dos curvas llamadas $\phi_{mín}$ y $\phi_{máx}$, las cuales representan el ángulo con el cual el proyectil deja el disco L y colisiona con el disco R. Estos valores dependen de θ y están dadas por diferentes expresiones para diferentes regiones de θ, las cuales están determinadas por diferentes tangentes entre los dos discos (Figura 2).

Se define θc como el ángulo en el Disco L que pasa por la tangente interior de pendiente negativa del disco R. Este valor puede ser calculado usando $\theta c = \cos^{-1}(2/R)$ por medio de simple trigonometría. En nuestro caso tomamos el valor de R = 3.

Para el cálculo de estas curvas se consideran tres Intervalos determinados por los valores de $-\theta_c$ y θ_c, y los cuales son

Intervalo 1	$\theta c \le \theta \le \pi/2$
Intervalo 2	$-\theta c \le \theta \le \theta c$
Intervalo 3	$-\pi/2 \le \theta \le -\theta c$

Haciendo el cálculo de la curva de ϕ_{min} para el Intervalo 1 se obtiene como

$$\phi_{min} = \theta + \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{R^2 + 1 - 2R\cos\theta}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + 1 - 2R\cos\theta}}\right) \quad (1)$$

Notamos que para el Intervalo 2, el valor de ϕ_{min} nos da la misma curva que en el Intervalo 1, y que en el Intervalo 3 este pasa a ser un valor constante con valor de $-\pi/2$.

En el cálculo de ϕ_{max} tenemos dos opciones: la primera es calcular de manera análoga a ϕ_{min} usando los intervalos antes descritos, y la segunda es que al tener la curva ϕ_{min}, y realizando un cambio de θ por -θ y ϕ por -ϕ, se obtiene la curva que se obtendría por medio de un cálculo directo (Figura 3). Debido además a la simetría del problema, al

hacer el cambio de ϕ por $-\phi$ para las curvas ϕ_{min} y ϕ_{max}, se obtienen la región de dos golpes para el disco R.

Hay que mencionar que la región Z_2 se encuentra en un plano fase diferente al de la región Z_2', ya que cada plano fase corresponde al disco L y disco R respectivamente. Se colocan en un mismo plano con el fin de mostrar las simetrías implícitas dentro del problema, y las cuales más adelante nos permitirán establecer una forma más sencilla de determinar los intervalos para colisiones múltiples.

Una vez con estas regiones, los mapeos para T_θ y T_φ obtenidos son

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \text{sen}^{-1}\left[\text{sen}q_n - I\left(q_n, j_n\right)\text{sen}\left(j_n - q_n\right)\right] \\ j_{n+1} &= \text{sen}^{-1}\left[R\text{sen}\left(j_n - q_n\right) - \text{sen}j_n\right] \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$I\left(q_n, j_n\right) = R\cos\left(j_n - q_n\right) - \cos j_n - \sqrt{\left[R\cos\left(j_n - q_n\right) - \cos j_n\right]^2 - R^2 + 2R\cos q_n}$$

Estos mapeos llevan a los valores de θ_0 y ϕ_0 los cuales se encuentran dentro de la región Z_2 al nuevo valor θ_1 y ϕ_1, que se encuentra en la región de dos golpes Z_2'del disco R. Si se requiere que existan tres golpes entre cada disco, por ejemplo, primero un golpe al disco L, después al R y finalmente de regreso al disco L, notamos que la región que permite que existan dichas colisiones se encuentra al intersecar la región Z_2 del disco L con la región Z_2' del disco R, ya que esta permite que existan colisiones entre ambos discos y por lo tanto, la existencia de tres golpes.

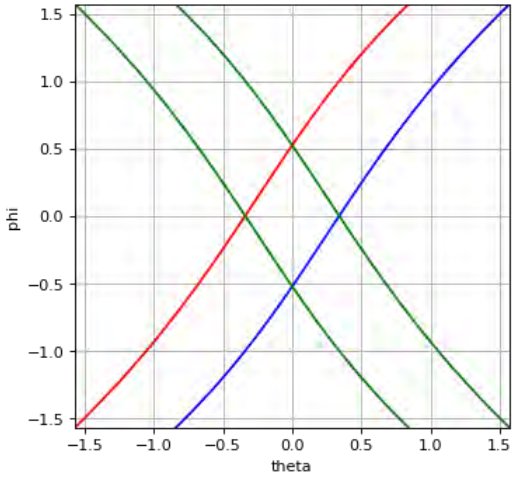


Fig. 3. Regiones Z_1 y Z_2. La curva en azul representa a ϕmín, y la curva en rojo el cálculo de está por medio de las reflexiones antes descritas. Las curvas en verde representan ϕmin y ϕmax para la región de dos golpes en el disco R (Z_2').

Resulta importante además conocer las condiciones iniciales que llevan a que existan tres colisiones, para la cual simplemente se necesitan calcular los mapeos inversos de las ecuaciones Θ_{n+1} y ϕ_{n+1}. La simetría toma de nuevo relevancia ya que simplemente se requiere usar un cambio de ϕ por $-\phi$ y cambiar los subíndices n + 1 por n y viceversa.

Al aplicar los mapeos T_θ^{-1} y T_ϕ^{-1} podemos observar las condiciones iniciales de la región de Z_2 que nos llevan a obtener tres colisiones, y donde Z_3 es una región más pequeña en comparación a Z_2, es decir, los mapeos aplicados "comprimen" a la región Z_2.

Al realizar el cociente entre Z_3/Z_2 este nos da una probabilidad de las colisiones sobrevivientes y que para valores cada vez mayores de las colisiones tiende a un valor conocido como razón de escape. En nuestro caso la razón de escape $\gamma \approx 0.2017$

Al continuar aplicando los mapeos T_θ y T_ϕ el diamante se acercará a un valor conocido como punto fijo y el cual es P_f = (0, 0). Si un proyectil que parte del punto (0, 0), este permanecería atrapado infinitamente en dicha trayectoria, por lo cual esta es considerada como una trayectoria periódica excepcional.

III. Resultados

C. *Colisiones Múltiples y Linearización del Problema*

Para estudiar las trayectorias que se obtienen cada vez más cerca del punto fijo, se lleva a cabo un proceso de linearización de los mapeos alrededor del punto fijo (θ_0, ϕ_0) = (0, 0). Para ello, tenemos que de los mapeos T_θ y T_ϕ son ambas funciones de θ y ϕ. Realizando los cambios $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ y $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$ y tomando un desarrollo en serie de Tylor para T_θ y T_ϕ alrededor del punto fijo obtenemos

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ j_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_q}{\partial q} & \frac{\partial T_q}{\partial j} \\ \frac{\partial T_j}{\partial q} & \frac{\partial T_j}{\partial j} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ j_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

y al realizar las derivadas correspondientes se obtiene la matriz

$$T = \begin{pmatrix} R-1 & 2-R \\ -R & R-1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Notemos que el determinante de esta matriz es igual a |det(T)| = 1, lo cual nos dice que estos mapeos conservan el área, es decir, al aplicarlos y después regresar a los valores

de los cuales parten en Z_2, el área del diamante y la nueva área de la región de golpes es la misma.

Al calcular los eigenvalores de **T**, obtenemos

$$t_{\pm} = R - 1 \pm \sqrt{R(R-2)} \tag{5}$$

Además, como $R > 2$, entonces obtenemos que un eigenvalor es positivo, mientras que el otro es negativo. Sus correspondientes eigenvectores son

$$\vec{T}_{+} = \begin{pmatrix} \theta_{+} \\ \varphi_{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-2/R} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_{-} = \begin{pmatrix} \theta_{-} \\ \varphi_{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-2/R} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los cuales nos dicen el comportamiento de estos al acercarse al punto fijo. Notemos además que los eigenvectores T_+ y T_- son múltiplos de los ángulos θ_0 y ϕ_0 ya que θ_n y ϕ_n aparecen debido a una aplicación sucesiva de dichos mapeos, es decir

$$\vec{\Theta}_n = \begin{pmatrix} \Delta\theta_n \\ \Delta\varphi_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = T^n \vec{\Theta}_0$$

con

$$\Theta_0 = \begin{vmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{vmatrix}.$$

Así, se considera que Θ_0 es un múltiplo de T_+. Ya que tenemos dos eigenvalores, tomemos en primer lugar a τ_+. Aquí, si *n* aumenta, el eigenvector se aleja cada vez que se aplica el mapeo **T**, y por lo cual esta curva es repulsiva del punto fijo. Si en cambio consideramos el caso en que Θ_0 es un múltiplo de T_- el eigenvalor es τ_- y al aplicar sucesivamente el mapeo **T**, este se acerca cada vez más al punto fijo, por lo que esta curva es atractiva (Figura 4).

Es decir, el punto fijo (0, 0) es un punto fijo silla, y debido a la linearización de los mapeos, podemos observar claramente este comportamiento: existen dos ramas principales, la estable (τ_-) y la inestable (τ_+), por lo tanto, los puntos que se encuentran fuera de estas pasan cerca del punto fijo (0, 0), y están descritos por hipérbolas [3].

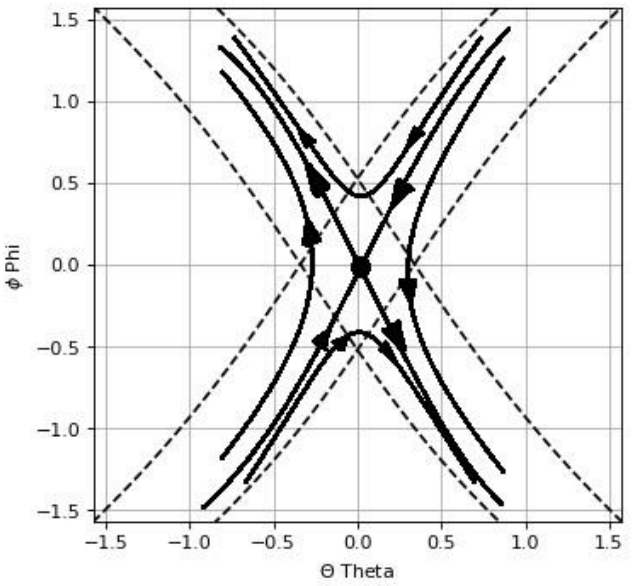


Figura 4. Se muestra el comportamiento cualitativo de algunas condiciones iniciales aleatorias. El punto fijo silla se encuentra en el valor (0, 0).

IV. Conclusiones

El estudio del problema de dispersión de dos cuerpos rígidos si bien parece ser un problema sencillo, provee las herramientas necesarias para estudiar problemas de tres o más cuerpos, ya que estos siguen ideas muy similares. Es por ello que un estudio de este tipo se considera como un primer acercamiento a problemas de este estilo, y, por lo tanto, una manera de entender el fenómeno conocido como dispersión caótica.

Referencias

[1] P. Cvitanović, R Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, "Chaos: Classical and Quantum Vol. 1: Deterministic Chaos", ChaosBook.org, August 2013.

[2] Jorge V. José, Cristian Rojas, Eugene J. Saletan, "Elastic particle scattering from two hard discs," *American Journal of Physics*, vol. 60, no. 7, pp. 587–592, Jul. 1992.

[3] Jorge V. José, Eugene Saletan, "Classical Dynamics: A Contemporary Approach", Cambridge University Press, 1998, pp. 158-162.

[4] Steven. H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering", Perseus Books, 1994, pp. 129-137.

ISSN: 2594-1011

Fabricación y caracterización de películas delgadas de Co3O4 para aplicaciones de almacenamiento de energía

A. Martín[1], G. Georgina[2], O. Mayahuel[3] y H. Ángeles[1],
[1]Departamento de Metalurgia y Materiales, ESIQIE-IPN, Ciudad de México, México
[2]Departamento de Materiales, ESIME UPT-IPN, Ciudad de México, México
[3]FIB-MEB, CNMN-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. Cel (044) 5571837459 E-mail: mandrades_15@outlook.com

Resumen — **La motivación de la presente investigación es comprender el cambio de las propiedades eléctricas de la espinela de cobalto debido a la refinación de sus dominios cristalinos en orden nanométrico. Por consiguiente, se ha sintetizado espinela de cobalto (Co_3O_4) por sol-gel utilizando como reactivos $Co(CH_3COO)_2 \cdot 4H2O$ y metanol. Se determinó por DRX que, en la etapa inicial de formación del sol, la fase hidróxido de acetato de cobalto, estuvo presente, a un valor de pH de 7. Una posterior sinterización a 500°C produjo la fase Co_3O_4 determinado también por DRX. Por SEM se observó que los polvos tenían una mezcla de morfologías -varitas y aglomerados-. El tamaño promedio de estos últimos fue de 100 nm. Por otro lado, se realizó el depósito de película delgada por la técnica de dip coating a partir del sol, la cual también se sinterizó a 500°C, produciendo la fase Co_3O_4. El tamaño de partículas promedio fue de 17nm y el espesor estuvo en el rango de 100-200nm. Por último, se obtuvo el valor de band gap de 2.7 eV a través de UV-VIS.**

Palabras Clave – **nanopartículas, Co_3O_4, propiedades eléctricas.**

Abstract —***This work focus in the change of the electrical properties of the cobalt spinel due to the refinement of its crystalline domains in nanometric order. Accordingly, cobalt spinel (Co_3O_4) has been synthesized by sol-gel using as reagents $Co(CH_3COO)_2 \cdot 4H_2O$ and methanol. It was determined by XRD that, in the initial stage of formation of the sol, the cobalt acetate hydroxide phase was present, at a pH value of 7. A subsequent sintering at 500 ° C produced the Co_3O_4 phase also determined by XRD. By SEM it was observed that the powders had a mixture of morphologies -vars and agglomerates-. The average size of the latter was 100 nm. On the other hand, thin film deposition was performed by the dip coating technique from the sol, which was also sintered at 500 ° C, producing the Co_3O_4 phase. The average particle size was 17 nm and the thickness were in the range of 100-200 nm. Finally, the band gap value of 2.7 eV was obtained through UV-VIS.***

Keywords — **Nanoparticles, Co_3O_4, electrical properties.**

I. Introducción

La espinela de cobalto es un material que ha generado interés actualmente, debido a que es un material muy estable que puede ser usado en diversas aplicaciones, tales como catalizador de CO [1], electrodo para pilas de litio o capacitores electrolíticos [2-4], entre otras. La espinela de cobalto es un semiconductor tipo p, con estructura definida por el grupo espacial fdm3, presenta dos estados de oxidación Co^{2+} en sitios tetraédricos y Co^{3+} en sitios octaédricos [5-6]. Se ha reportado en la literatura como un material paramagnético a temperatura ambiente, con un valor de constante dieléctrica de 25 y de band gap de 1.69 [7].

El cambio de propiedades eléctricas ha sido reportado por Viyajakumar et al. [8], quien realizó una síntesis de Co_3O_4 por microondas para aplicación de capacitores electrolíticos, produciendo partículas nodulares de 24nm de tamaño promedio. El valor de band gap medido por UV-VIS reportado fue de 2.4 eV, obteniendo valores de capacitancia específica promedio de 519 F/g.

Por otro lado, la síntesis de Co_3O_4 se ha realizado por microondas, método hidrotermal, aleado mecánico, sol-gel, entre otros [9-14]. Sin embargo, el método de sol-gel ha sido ampliamente usado, debido a que el producto obtenido presenta alta pureza, simpleza y que permite un control a partir de los parámetros operacionales [15-16]. Una de las rutas comúnmente usadas para la síntesis y depósito de Co_3O_4, es la reportada por Armelao et al. [17]. La mezcla reactante fue de 5.8 mmol de $Co(CH_3COO)_2 \cdot 4H_2O$ (acetato de cobalto tetrahidratado) y 204 mmol CH_3OH (metanol). A partir del sol generado se preparó una película delgada por inmersión a una velocidad de 5cm/min y se sometió a un tratamiento térmico en rangos de 300 a 700 °C, obteniendo tamaño de partícula promedio de 43nm. Esta misma ruta, fue estudiada por Vikas et al. [18], quienes reportaron que el mecanismo teórico de reacción inicia con la formación del hidroxilo de cobalto (II) y el acetato de metilo, de acuerdo con la siguiente reacción:

$$Co(CH_3COO)_2 \cdot 4H_2O + CH_3OH \rightarrow Co(OH)_2 + CH_3COOCH_3 + 4H_2O$$

Posteriormente,

$$Co(OH)_2 + \text{compuestos de carbono} \xrightarrow{\text{Tratamiento térmico}} Co_3O_4 + H_2O$$

La fase Co_3O_4 fue depositada por spin coating para producir películas con espesores de aproximadamente 0.6µm y tamaños de partículas promedio de 53nm.

II. Experimentación

En el presente trabajo se propuso una modificación a la síntesis antes mencionada, deshidratando el precursor

mediante un tratamiento térmico a 160°C por 1 hora en atmosfera inerte de Nitrógeno, según el trabajo de Wanjun et. al [19], el cual se representa con la siguiente expresión.

$$Co(CH_3COO)_2 \cdot 4H_2O \rightarrow Co(CH_3COO)_2 + 4H_2O$$

Se realizó la síntesis con 6.5 gr del polvo resultante y 40ml de metanol. Esta mezcla se mantuvo en agitación por 40 min a temperatura ambiente. Posteriormente fue secado a 70°C y el polvo resultante fue sometido a un tratamiento térmico a 500°C por 1 hora con una rampa de velocidad de 1°/min. Posteriormente, se depositó el sol sobre vidrios, por la técnica de coating. El depósito se realizó en oblea de Si tipo n, a una velocidad de inmersión y salida de 1cm/min, dejando el sustrato 30seg inmerso. Después de cada inmersión, se secó a 70°C por 5min. El número total de inmersiones realizadas fue de 4. Finalmente, las películas depositadas fueron sometidas a tratamiento térmico a 500°C por 1 hora.

Para definir el mecanismo de reacción se caracterizaron por DRX y FTIR los polvos obtenidos al secar el sol de las dos síntesis. Por otro lado, se caracterizaron por DRX, MEB los polvos después del tratamiento térmico; y MEB para las películas depositadas después del tratamiento térmico.

III. Resultados

En la **Figura 1** se muestra el patrón de difracción del polvo obtenido al secar el sol (SGMET) corrido con radiación K_{Cu} (1.54A) de 5 a 90°. Tres picos principales son claramente observables. Por otro lado, para una mayor definición de los picos menos intensos se corrió la muestra con K_{Co} (1.79) de 10 a 90°, lo cual se muestra en la **Figura 2**.

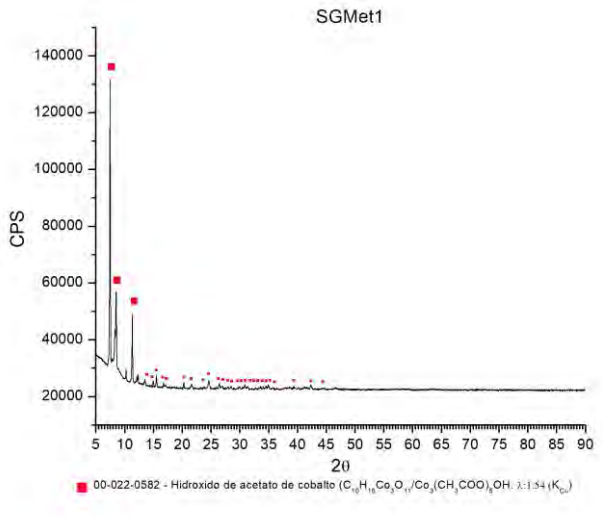


Figura 1. Patrón de difracción de RX del polvo seco resultante de sol-gel (SGMet).

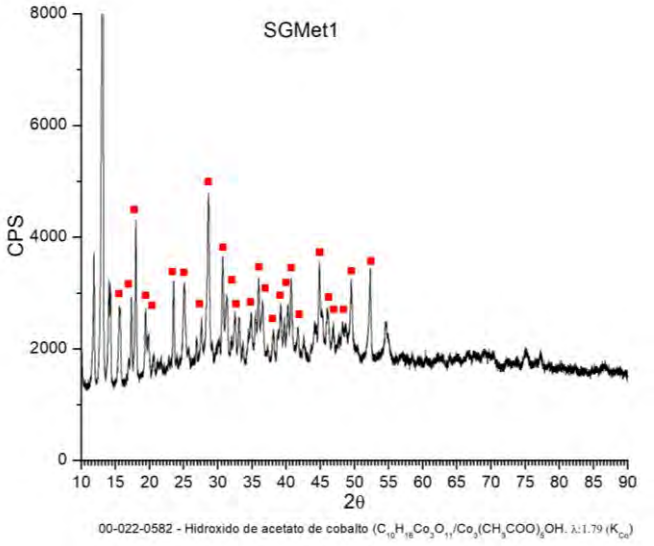


Figura 2 Difractograma de la muestra SGMet con enfoque a la definición de los picos menos intensos.

La Figura 3 muestra los patrones de FTIR, éste se realizó para confirmar la existencia de los enlaces que forman los compuestos y corroborar la información de DRX.

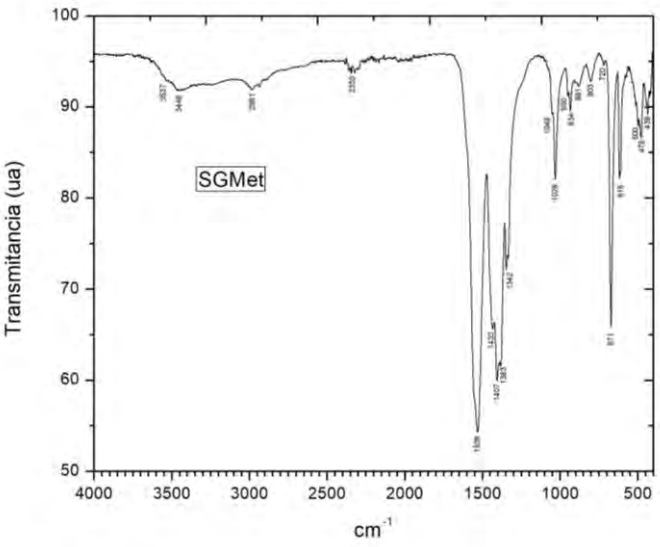


Figura 3. Espectro de FTIR de polvos secos del sol (SGMet).

La **Tabla 1** muestra la identificación de los picos del espectro de FTIR, las posiciones, intensidades y el tipo de vibración asignada a cada uno de ellos.

Tabla 1. Picos correspondientes al patrón FTIR

Picos	Intensidad	Asignación
478	débil	modo de red
615	media	CO2 balanceo
671	media	CO2 flexión
	media	W H2O
803	débil	T H2O
	media	modo de dos fotones (Agua)
934	débil	C-C estiramiento
1028	media	CH3 balanceo
1049	débil	CH3 balanceo
1342	fuerte	CH3 Sim. flexión
1383	fuete	CO2 sim estiramiento
1407	fuerte	
1433	media	CH3 asim flexión
1536	fuerte	CO2 asim estiramiento
2333	débil	
	débil	OH sim estiramiento
	fuerte	OH sim estiramiento
3448	media	OH asim estiramiento

Después se someter los polvos de SGMet al tratamiento térmico a 500°C, se realizó DRX, el cual se muestran en la **Figura 4**.

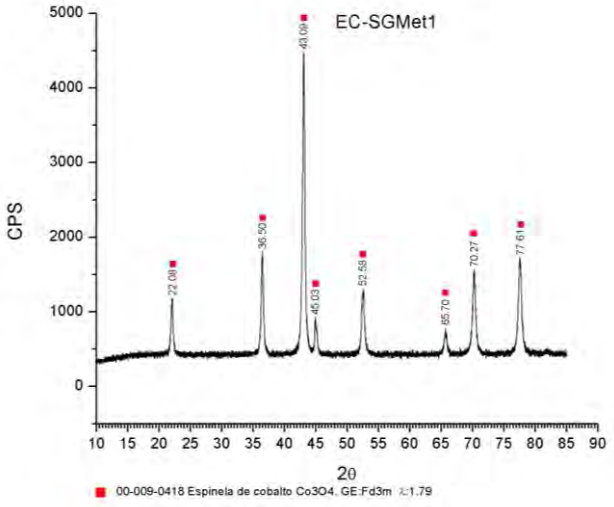


Figura 4. DRX de polvos secos después del tratamiento térmico a 500°C.

La **Figura 5** muestra las imágenes MEB de los polvos de Co_3O_4, con una imagen global donde se observa una morfología de varitas, y otra imagen donde se observa la morfología de aglomerados con un tamaño de partícula promedio de 100 nm.

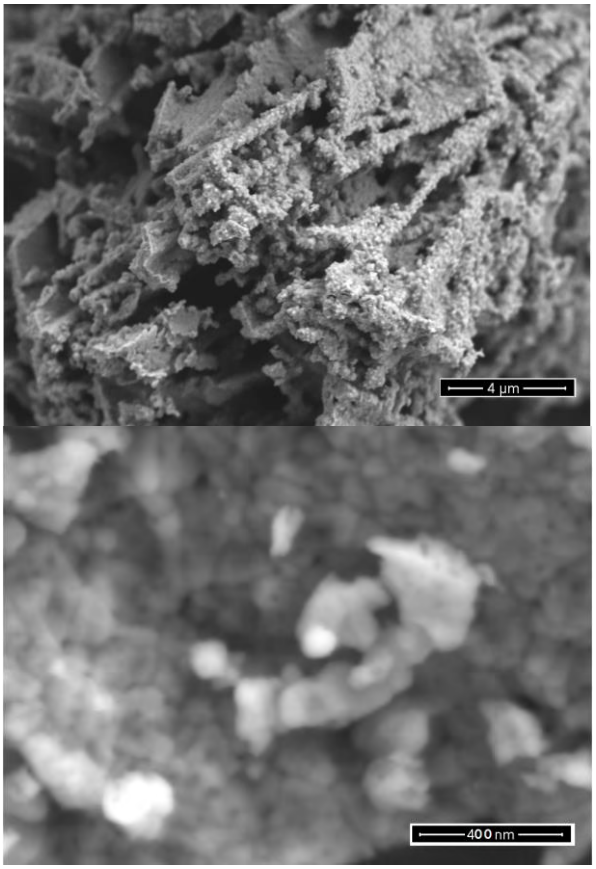


Figura 5. Imágenes MEB de los polvos de Co3O4

A continuación, se muestra una imagen de la superficie de la película depositada por inmersión, en la cual se observan tamaño de partículas promedio de 17nm, además de apreciarse una alta densidad.

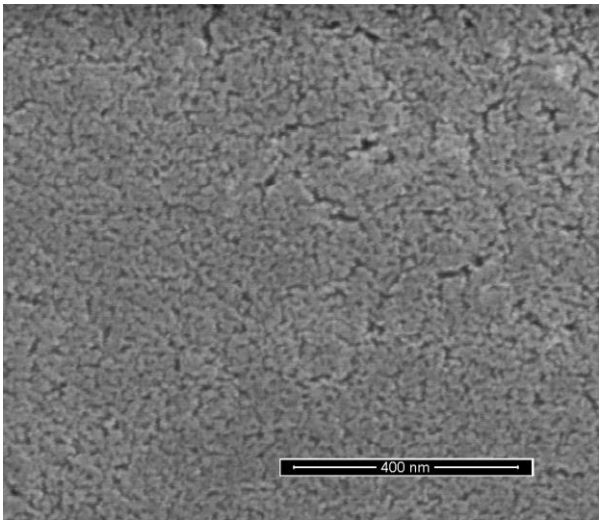


Figura 6. Imagen MEB del depósito de Co3O4.

La medición del band gap se llevó a cabo mediante UV-VIS y la técnica de Kuvelka [20], cuya gráfica se muestra en la **Figura 7**. Se determinó un valor de Eg de 2.7 aproximadamente.

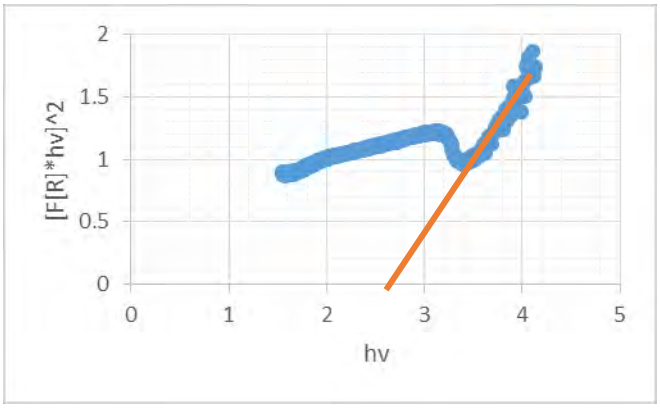


Figura 7. Medición por Kuvelka del valor de band gap.

IV. Discusión

En la **Figura 1 y 2**, se observa que los picos presentes en el patrón de difracción corresponden a la fase hidróxido de acetato de cobalto [$Co_3(CH_3COO)_5OH$]. Cabe señalar la presencia de 3 picos no identificados en las posiciones 2θ: 10.2, 12 y 12.4.

En los patrones de FTIR se confirma la existencia de enlaces OC=O y CH_3 en la muestra, mostrados en la **Tabla 1**. Lo que, confirma el resultado de DRX.

De acuerdo con la literatura [21], el mecanismo de reacción entre los reactantes corresponde a una reacción nucleofílica bimolecular (SN_2), es decir, inicialmente ocurre el proceso de hidrólisis y formación de momeros metálicos de manera simultánea. Es decir, que simultáneamente a la ruptura del enlace entre los iones de Co^{2+} y $(CH_3COO)^-$, se forma otro enlace entre los iones Co^{2+} y OH^- proveniente del CH_3OH. Este tipo de reacción tiene una marcada influencia de la concentración de solvente para la generación de los productos. Lo que generaría una alta velocidad de reacción dada la expresión

$$Co(CH_3COO)_{2(ac)} + 2CH_3OH_{(ac)} \rightarrow Co(OH)_{2(ac)} + 2CH_3COOCH_{3(ac)}$$

$$V_{reac} = k[Co(CH_3COO)_2][CH_3OH]$$

Donde k es la constante de velocidad de reacción, $[Co(CH_3COO)_2]$ la concentración del precursor y $[CH_3OH]$ la concentración del solvente. Sin embargo, el equilibrio químico de la reacción está determinado por:

$$Eq = [Co(OH)_2][CH_3COOCH_3]^2 / [Co(CH_3COO)_2][CH_3OH]^2$$

El CH_3OH al estar en exceso, produce que $Eq \ll 1$. Esto indica que el equilibrio se desplaza hacia la izquierda, lo cual explica la existencia del hidróxido de acetato de cobalto observado por DRX en la **Figura 1**.

No obstante, posterior al tratamiento térmico, los compuestos de carbono, se descomponen y salen del sistema en forma gaseosa, produciéndose la espinela de Co_3O_4 con morfología de varitas con tamaños de partícula promedio de 100nm, las cuales corresponden a la etapa de policondensación en soluciones con pH neutros y básicos, tal como explica Danks et al. [22]. El proceso de policondensación refiere a la concatenación de monómeros de óxidos metálicos en una etapa posterior a la formación del sol, morfología que prevalece a un posterior secado y tratamiento térmico.

Por otro lado, el depósito del sol por el método de inmersión, para la formación de películas delgadas, implica que las partículas son depositadas como nódulos. Y posterior al proceso de sinterizado, se observa la morfología mostrada en la **Figura 5**. Es evidente, una alta densificación de partículas con tamaños de 17nm promedio.

V. Conclusiones

Se observa un desplazamiento de la reacción inicial hacia la izquierda, lo cual indica que, dada la concentración del metanol, se favorece la formación de los reactivos, tal como se observa en la información derivada de DRX. Este resultado no fue observado en los reportes de Armelao [17] y Vikas [18] debido a que no analizaron el sol, y a que las especies orgánicas a la temperatura del tratamiento térmico se descomponen y salen del sistema.

Realizar el depósito con el sol generado antes de un proceso de gelación, produce menores tamaños de partículas de hasta 17nm y una película casi uniforme, con espesores de entre 100 a 200 nm.

La disminución del tamaño de partícula aumento el valor del band gap, considerando un valor convencional de 1.69, éste aumento hasta 2.7 aproximadamente. Valor más alto que el reportado en la literatura consultada para el desarrollo de este trabajo.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por del IPN. Martín Ernesto Andrade Sánchez es becario CONACyT.
La colaboración de la UAEM y el departamento de electroquímica de la ESIQIE.

Referencias

[1] J. Jansson, E. Anders, F. Erik, S. Magnus, O. Lars, T. Peter y L. Vratislav. On the catalytic activity of CO3O4 in low-temperature CO oxidation. Journal of catalysis. Vol 211. 2002, pp.387-397.
[2] L. Wei, X. Li, C. Jun. Co3O4 nanomaterials in lithium-ion batteries and gas sensors. Advanced functional materials. Vol 5. 2005, pp 851-857.
[3] J. Anirudha, N. Munichandraiah y S. Shivashankar. Morphology controlled growth of meso-porous Co3O4 Nanostructores and study

of their electrochemical capacitive behavior. Journal of the electrochemical society. Vol. 159. 2012, pp. A1682-A1689.

[4] F. Svegl, B. Orel, I. Grabec y V. Kaucic. Chacaterization of spinel Co3O4 and Li-doped Co3O4 thin films electrocathalysist prepared by the sol-gel route. Electrochimica acta. Vol 45, 2000, pp. 4359-4371.

[5] K. Kristy, P. Agham, S. Alexander, D. Ajit, S. David, M. Khadijh, W. Travis, Z. Stefan, M. Luke, Z. Jianshi y D. Alexander. Epitaxy of polar semiconductor Co3O4 (110): Growth, structure and characterization. Journal of applied physics. Vol. 115, 2014, pp. 243708.

[6] J. Cook y M. Van Der Meer. The optical properties of sputtered Co3O4 films. Thin solid films. Vol. 144, 1986, pp. 165-176.

[7] C. Chun, M. Serizawa, H. Sakata y T. Hirayama. Electrical conductivity of Co3O4 films prepared by chemical vapour deposition. Materials chemistry and physics. Vol. 53. 1998, pp. 225-230.

[8] S. Vijayakumar, A. Kiruthika Ponnalagi, S. Nagamuthu, G.Muralidharan, Microwaves assisted synthesis of Co_3O_4 nanoparticles for high-performance supercapacitors, Electrochimica Acta, vol. 106, 2013, pp. 500-505.

[9] G. García-Pacheco, J.G. Cabañas-Moreno, F. Cruz-Gandarilla, H. Yee-Madeira and M. Umemoto, Materials Science Forum, Trans Tech Publications, Switzerland, Vols. 386-388, 2002, pp. 281-286

[10] G. García-Pacheco, J.G. Cabañas-Moreno, H. Yee-Madeira and Cruz-Gandarilla Nanotechnology, Vol. 17, 2006, pp. 2528-2535

[11] M. Mohammadreza y R. Narges. Amine ligand base hydrothermal synthesis of Co3O4 nanoparticles, chacterization and magnetic study. Journal of molecular structure. Vol. 16, 2016, pp. 30764-5.

[12] H. Tao, C. Dairong, J. Xiuling y W. Yingling. Co3O4 nanoboxes: surfactant-templated fabrication and microstructure chacaterization. Advanced materials, Vol 18, 2006, pp. 1078-1082.

[13] V. Shinde, S. Mahadik, T. Gujar y C. Lokhande. Supercapacitive cobalt oxide (Co3O4) thin films by spray pyrolysis. Applied Surface Science, Vol. 252, 2006, pp. 7487-7492.

[14] H. Tao, C. Dairong, J. Xiuling, X.Yanyan y Y. Gu. Surfactant-assisted solvothermal synthesis of Co3O4 hollow Spheres with Oriented- Aggregation nanostructures and Tunable Particle size. Langmuir, Vol. 20, 2004, pp. 8404-8408.

[15] B. Jeffrey, S. Geptge. “Sol-gel science”, Academic Press, INC, 1990, p 65.

[16] P. Alain. Introduction to sol-gel processing, Springer. Université Claude-Bernard- Lyon I, 1998, pp 1-200

[17] Lidia Armelao, Davide Barreca, Silvia Gross, Alejandro Martucci, Manuela Tieto, Eugenio Tondello, Cobalt oxide-based films: sol-gel synthesis and characterization, Non-Crystalline Solids, 293, 2001, pp. 477-482.

[18] Vikas Patil, Pradeep Joshi, Manik Chougule, Shashwati Sen, Syntesis and characterization of Co_3O_4 thin films, Soft Nanoscience Letters, 2012, 2, 1-7.

[19] T. Wanjun, C. Donghua, Mechanism of Thermal Decomposition of Cobalt Acetate Tetrahydrate, VERSITA, vol. 61, 2007, pp. 329-332.

[20] B. Cushing, V. Kolesnichenko y C. O’Connor, Recent advances in the liquid-phase syntheses of inorganic Nanoparticles, Chem Rev, 2004, 104, 3893-3946.

[21] A. Escobedo Morales, Use of diffuse reflectance spectroscopy for optical characterization of un-supported nanostructures, REVISTA MEXICANA DE FISICA S 53 (5), 2007, pp. 18–22.

[22] R. Morrison y R. Boyd. Química orgánica. 5ta Edición. Pearson. New York. 1987, pp. 200-250.

ISSN: 2594-1011

Una forma práctica de calcular la función de Wigner

Sánchez Rodríguez Julio Cesar[1], Rodríguez Trejo Luis Adrián[2]
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
E-mail: cezk1989@gmail.com[1]; lrodriguezt1302@alumno.ipn.mx[2]

Resumen — **En Mecánica Cuántica las densidades de probabilidad nos permiten obtener valores esperados de las variables físicas ahí la importancia de este tipo de funciones. El objetivo de este trabajo es obtener una forma simple de calcular la función de Wigner, también llamada función de cuasi-probabilidad, para lo cual se utilizaron herramientas matemáticas como los operadores de densidad y de paridad. A partir de su definición se llegó a una expresión en notación de Dirac. Finalmente se dan tres ejemplos de la aplicación del método desarrollado, se llegó a la misma expresión que con el método tradicional.**

Palabras Clave – **Function de Wigner, cuasi-probabilidad, estados Schrödinger Cat, estado coherente, estado de número**

Abstract — **In Quantum Mechanics, the probability densities allow us to obtain expected values of the physical variables, hence the importance of this type of functions. The objective of this paper is to obtain a simple way to calculate the Wigner function, also called quasi-probability function, for which mathematical tools such as density and parity operators were used. From its definition an expression was reached in Dirac notation. Finally, three examples of the application of the developed method are given, the same expression was reached as with the traditional method.**

Keywords — **Wigner function, quasi-probability, Schrödinger Cat states, coherent states, number states**

I. Introducción

Las funciones de Cuasi-probabilidad son importantes en la Mecánica Cuántica, dado que nos permiten tener una visión clásica de un sistema cuántico, una motivación para estas funciones la podemos ver de la manera siguiente.

En la formulación de la Mecánica Cuántica normalmente se trabaja con densidades de probabilidad, una de ellas se obtiene de la función de onda en el espacio de configuración, mientras que la otra se obtiene de la función de onda en el espacio de momentos, ambas conectadas por una Transformada de Fourier[1].

Lo que se busca es tener una única función que muestre la probabilidad en ambas variables x y p. La función de Wigner cumple con este cometido, ya que esta función nos da la densidad de probabilidad en el espacio fase $P(x,p)$

A la función de Wigner se le conoce como función de Cuasi-probabilidad ya que no cumple con todas las características de una densidad de probabilidad, como el hecho que puede tomar valores negativos en regiones del espacio fase, contrario a lo que se tiene con las funciones de distribución en la Física clásica. Antes de mostrar la definición de la función de Wigner mostraremos algunos resultados que nos serán de utilidad para el desarrollo de los cálculos subsecuentes. En los cálculos subsecuentes consideramos el valor de la constante reducida de Planck como uno ($\hbar = 1$).

A. *Operador de Densidad*

Definimos el operador de densidad, el cual para un estado puro está dado por [2]

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (1)$$

Una propiedad del operador de densidad es que esta normalizado esto es $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ se muestra de la siguiente manera usando la definición de la traza de un operador

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\rho}] &= \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle \\ &= \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Para obtener el valor esperado de un operador $\hat{\mathrm{A}}$ de $\hat{\rho}$ se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathrm{A}} \rangle &= \mathrm{Tr}[\,\hat{\rho}\,\hat{\mathrm{A}}] = Tr[\,|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}\,] \\ &= \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}|n\rangle \\ &= \sum_n \langle\psi|\hat{A}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \end{aligned} \qquad (3)$$

El operador de densidad describe un estado puro si y solo si se tiene que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, es decir que la matriz de densidad es idempotente.

B. *Operador de Paridad*

Otro de los operadores que utilizaremos a lo largo de este trabajo es el que se conoce como operador de paridad el cual tiene la siguiente forma [2]

$$\hat{\pi} = (-1)^{\hat{n}} = e^{i\pi\hat{n}} \quad (4)$$

Su aplicación hacia un ket produce lo siguiente

$$\hat{\pi}|x\rangle = |-x\rangle \quad (5)$$

Para mostrar el anterior resultado, primero mostremos la aplicación del operador de paridad sobre un estado coherente

$$\begin{aligned}\hat{\pi}|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\pi\hat{n}}|n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{i\pi})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = |\alpha e^{i\pi}\rangle = |-\alpha\rangle\end{aligned} \quad (6)$$

De la forma de los estados coherentes en la base de coordenadas se tiene que

$$\langle x|-\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\left(\frac{x^2}{2} - i\sqrt{2}\alpha x - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)} \quad (7)$$

(5) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{\pi}|x\rangle &= \frac{1}{\pi}\int d\alpha \hat{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle = \frac{1}{\pi}\int d\alpha|-\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\int d\alpha|\alpha\rangle\langle-\alpha|x\rangle = \frac{1}{\pi}\int d\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|-x\rangle \\ &= |-x\rangle\end{aligned} \quad (8)$$

se obtiene el resultado deseado $\hat{\pi}|x\rangle = |-x\rangle$ Operadores de Desplazamiento y Traslación

Por último, introducimos los operadores de desplazamiento y traslación, sus definiciones y en el caso del operador de Desplazamiento sus propiedades y relaciones más importantes. Presentamos primero el operador de traslación con una breve introducción.

Tener una función de onda especificada en el espacio tridimensional nos lleva eventualmente a una interrogante como la siguiente ¿Que se requiere para poder seguir teniendo especificada la función de onda en caso de que se lleve a cabo un desplazamiento espacial? Esta pequeña pregunta nos lleva a introducir el operador de traslación definido como sigue

$$e^{iq_0\hat{p}}|x\rangle = |x - q_0\rangle \;\; ; \;\; e^{-iq_0\hat{p}}|x\rangle = |x + q_0\rangle \quad (9)$$

El siguiente operador por introducir es el de desplazamiento, este operador es unitario al igual que el de traslación, se ocupa para desplazar el vacío y generar estados coherentes. Está definido de la siguiente manera

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \quad (10)$$

Este operador tiene las siguientes propiedades que serán utilizadas a lo largo de los cálculos[3]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} \quad (11)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha+\beta) exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right] \quad (12)$$

$$\hat{D}(\alpha)|\beta\rangle = |\alpha+\beta\rangle exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right] \quad (13)$$

$$\langle\alpha|\hat{D}(\gamma)|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle exp\left[\gamma\alpha^* - \gamma^*\beta - \frac{|\gamma|^2}{2}\right] \quad (14)$$

Para $n \geq m$

$$\begin{aligned}&\langle n|\hat{D}(\gamma)|m\rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (\alpha)^{n-m} \mathcal{L}_m^{(n-m)}(|\alpha|^2), \\ &Para\ n \leq m \\ &= \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha^*)^{m-n} \mathcal{L}_m^{(m-n)}(|\alpha|^2),\end{aligned} \quad (15)$$

Donde $\mathcal{L}_n^{(k)}(x)$ son los polinomios asociados de Laguerre.

II. Desarrollo

A. *Función de Wigner*

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x+y)\psi_n(x+y)e^{2ipy}\,dy \quad (16)$$

Donde tenemos que $\psi_n(x-y) = \langle x-y|\psi\rangle$ lo anterior queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}W(x,p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi|x+y\rangle\langle x-y|\psi\rangle e^{2ipy}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x-y|\psi\rangle\langle\psi|x+y\rangle e^{2ipy}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x-y|\hat{\rho}|x+y\rangle e^{2ipy}\,dy\end{aligned} \quad (17)$$

Donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ es un estado puro.

Ahora del operador de traslación, se tiene

$$e^{ipy}|x+y\rangle = e^{-ix\hat{\rho}}|y\rangle e^{ipy} = e^{-ix\hat{\rho}} e^{ip\hat{q}}|\psi\rangle \quad (18)$$

Utilizando la relación de la ecuación (11), llamada relación de Baker–Campbell–Hausdorff (BCH) para el operador de desplazamiento

$$\hat{D}(\alpha) = e^{ip\hat{q} - iq\hat{\rho}} = e^{\frac{iqp}{2}} e^{-iq\hat{\rho}} e^{ip\hat{q}} \quad (19)$$

Usando (11), (18) y (19) se tiene

$$e^{ipy}|x+y\rangle = e^{\frac{-ixp}{2}}\hat{D}(\alpha)|y\rangle \quad (20)$$

Considerando $-y \rightarrow y$ se tiene

$$\langle y|\hat{D}^{\dagger}(\alpha)e^{\frac{ixp}{2}} = \langle x+\mathrm{y}| \quad (21)$$

$$\langle -\mathrm{y}\,|\hat{\mathrm{D}}^{\dagger}\,(\alpha)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{ixp}}{2}} = \langle x-\mathrm{y}\,| \quad (22)$$

La función de Wigner toma la siguiente forma

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle -y|\hat{D}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{D}|y\rangle dy \quad (23)$$

haciendo uso del operador de paridad

$$\begin{aligned}\mathrm{W(x,p)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle y|\,\hat{\pi}\;\hat{D}^{\dagger}\;\hat{\rho}\;\hat{D}|\,y\,\rangle dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle y\left|\,\frac{1}{\pi}\;\hat{\pi}\;\hat{D}^{\dagger}\hat{\rho}\,\hat{D}\right|\,y\right\rangle dy\end{aligned} \quad (24)$$

Trazamos sobre estados de número y utilizamos la siguiente relación $\hat{\pi}|\mathrm{k}\rangle = (-1)^{\hat{\mathrm{n}}}|\mathrm{k}\rangle = (-1)^{\mathrm{k}}|\mathrm{k}\rangle$, la función de Wigner en su representación en serie queda de la siguiente forma

$$\mathrm{W(x,p)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{k}}\left\langle \mathrm{k}\left|\hat{\mathrm{D}}^{\dagger}\widehat{\rho\hat{\mathrm{D}}}\right|\,\mathrm{k}\right\rangle \quad (25)$$

III. Resultados

Aplicando la ecuación (25) a tres casos particulares se demuestra que se obtienen los mismos resultados que con el método tradicional.

A. Función de Wigner para un Estado Coherente $|\beta\rangle$

El operador de densidad toma la siguiente forma $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$, la función toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}W(x,p) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\langle k|\hat{D}^{\dagger}|\beta\rangle\langle\beta|\hat{D}|k\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left|\langle k|\hat{D}^{\dagger}|\beta\rangle\right|^{2}\end{aligned} \quad (26)$$

utilizando (13) se tiene que

$$\hat{D}^{\dagger}(\alpha)|\beta\rangle = |\beta-\alpha\rangle e^{-\frac{\alpha\beta^{*}}{2}+\frac{\alpha^{*}\beta}{2}} \quad (27)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\beta-\alpha|^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)^{n}}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

Llegamos al siguiente resultado

$$\langle k|\hat{D}^{\dagger}|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta-\alpha|^{2}}\frac{(\beta-\alpha)^{k}}{\sqrt{k!}} \quad (28)$$

Así

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\,e^{-|\beta-\alpha|^{2}}\frac{(|\beta-\alpha|^{2})^{k}}{k!} \quad (29)$$

Se llega al siguiente valor final de la función de Wigner para estados coherentes

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}e^{-2|\beta-\alpha|^{2}} \quad (30)$$

La Fig. 1, muestra la gráfica para el estado coherente correspondiente a α = 0.

B. Función de Wigner para un Estado de Número $|n\rangle$

El operador de densidad toma la siguiente forma $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(x,p) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\langle k|\hat{D}^{\dagger}|n\rangle\langle n|\hat{D}|k\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{\pi}\hat{\pi}\left[\hat{D}^{\dagger}\widehat{\rho\hat{D}}\right]\right\}\end{aligned} \quad (31)$$

Como el operador de paridad es unitario, se tiene que

$$\hat{\pi}\;\hat{\mathrm{D}}^{\dagger}\,\hat{\rho}\,\hat{\mathrm{D}} = \hat{\pi}\;\hat{\mathrm{D}}^{\dagger}\,\hat{\pi}\,\hat{\pi}\,\hat{\rho}\,\hat{\mathrm{D}} \quad (32)$$

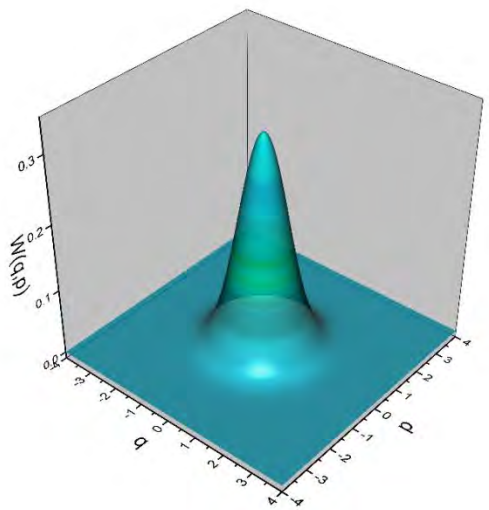


Fig. 1 Función de Wigner para estados coherentes, α = 0

Haciendo uso de

$$e^{x\hat{n}}f(\hat{a},\hat{a}^{\dagger})e^{-x\hat{n}} = f(\hat{a}e^{-x},\hat{a}^{\dagger}e^{x}) \quad (33)$$

tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\pi}\,\hat{D}(-\alpha)\hat{\pi} &= e^{i\pi\hat{n}}\hat{D}(-\alpha)e^{-i\pi\hat{n}} \\ &= e^{i\pi\hat{n}}\exp(\alpha^{*}\hat{a}-\alpha\hat{a}^{\dagger})e^{-i\pi\hat{n}} \\ &= \exp[\alpha^{*}\hat{a}e^{-i\pi}-\alpha\hat{a}^{\dagger}e^{i\pi}] \\ &= \exp[-\alpha^{*}\hat{a}+\alpha\hat{a}^{\dagger}] \\ &= \hat{D}(\alpha)\end{aligned} \quad (34)$$

Por lo cual (31) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}W(x,p) &= Tr\left[\frac{1}{\pi}\hat{D}(\alpha)\hat{\pi}\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)\right] \\ &= Tr\left[\frac{1}{\pi}\hat{\pi}\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\alpha)\right] \\ &= Tr\left[\frac{1}{\pi}\hat{\pi}\hat{\rho}\hat{D}(2\alpha)\right]\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}W(x,p) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\langle k|\hat{\pi}|n\rangle\langle n|\hat{D}(2\alpha)|k\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\langle k|n\rangle\langle n|\hat{D}(2\alpha)|k\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}(-1)^{n}\langle n|\hat{D}(2\alpha)|n\rangle\end{aligned} \quad (36)$$

Utilizando (15) se llega al valor de la función de Wigner para estados de número

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}(-1)^{n}e^{-4|\alpha|^{2}}\mathcal{L}_{n}(4|\alpha|^{2}) \quad (37)$$

La *Fig. 2*, muestra las gráficas de la función de Wigner para los estados de número, se observa que la función toma valores negativos, por esta razón a la función de Wigner también se le conoce como función de cuasi-probabilidad.

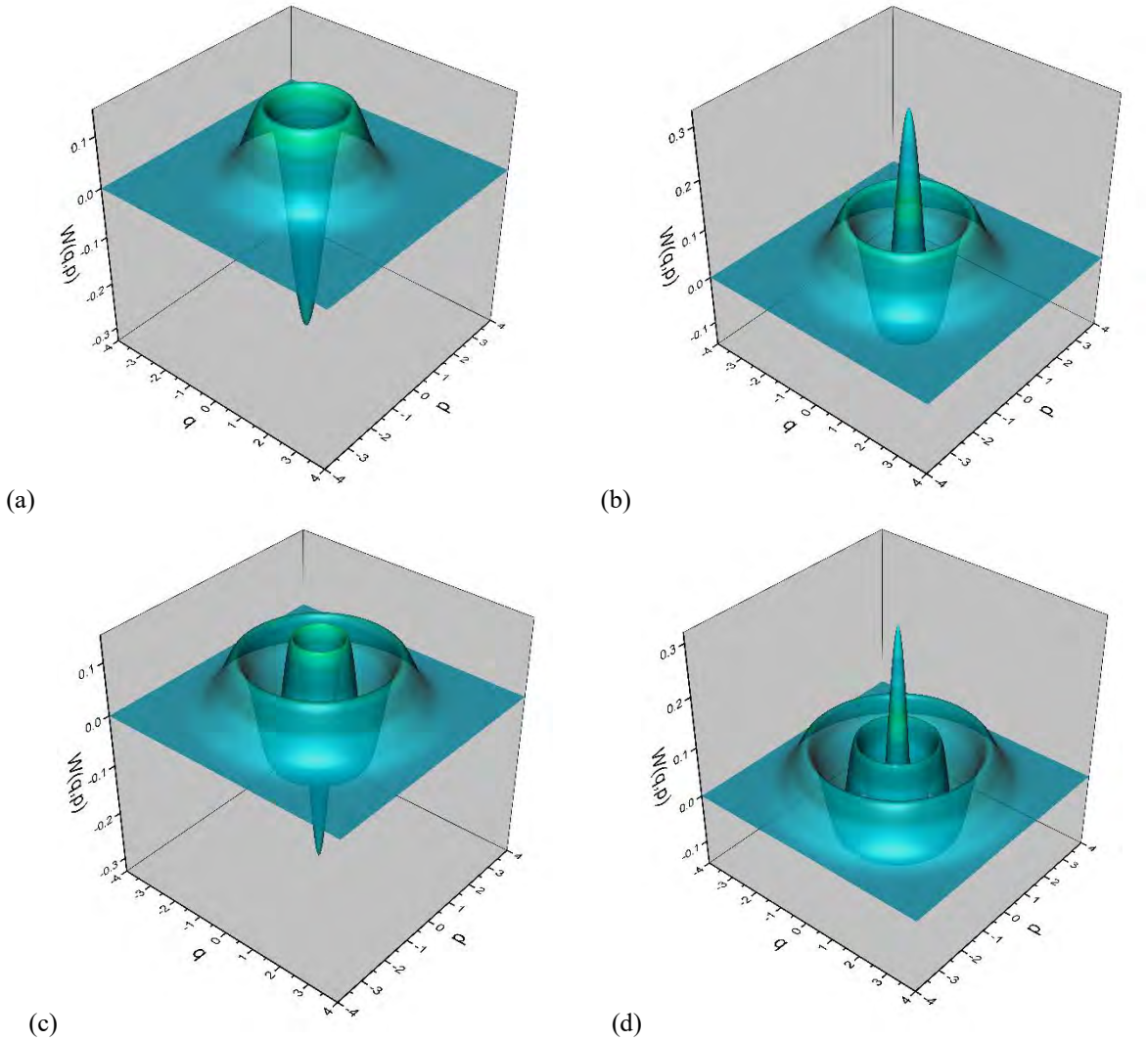


Fig. 2 Función de Wigner para los estados de número, a) n = 1, b) n = 2, c) n = 3, d n = 4

C. *Función de Wigner para estados Schrödinger Cat* $|\psi\rangle$

Los estados Schrödinger Cat los definimos como una superposición de dos estados coherentes, tiene la siguiente forma.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \qquad (38)$$

N es una constante de normalización cuyo valor es $\sqrt{2\left(1 \pm e^{-2|\alpha|^2}\right)}$

Considerando los estados Schrödinger Cat el operador de densidad queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \frac{1}{N^2}\ (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|\ \pm |-\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &\qquad \pm |\alpha\rangle\langle-\alpha|)\end{aligned} \qquad (39)$$

Sustituyendo (39) en (25) tenemos

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\langle k|\hat{D}^{\dagger}(\beta)|\psi\rangle\langle\psi|\hat{D}(\beta)|k\rangle \qquad (40)$$

Para llegar a la forma explícita de la función de Wigner se necesita algebra que se omite, ya que es similar a la utilizada en los ejemplos anteriores. Por lo tanto la función de Wigner para los estados Schrödinger Cat es

$$\begin{aligned}W(x,p) &= \frac{1}{2\pi\left(1 + e^{-2|\alpha|^2}\right)} \\ &\times \left\{e^{-2|\alpha-\beta|^2} + e^{-2|\alpha+\beta|^2}\right. \\ &\left. + 2\,e^{-2|\beta|^2}\cos[4Im(\beta\alpha^*)]\right\}\end{aligned} \qquad (41)$$

Las *Fig. 3* y *Fig. 4* muestran la función de Wigner para los estados Schrödinger Cat, para estos estados se observan ambas Gaussianas y el término de interferencia cuántica.

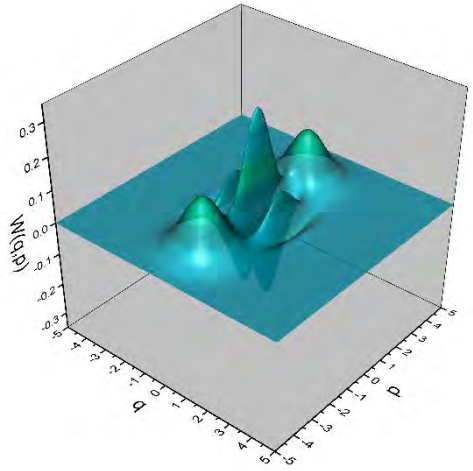


Fig. 3 Función de Wigner para estados Schrödinger cat, α = 2.0 + 0.0i

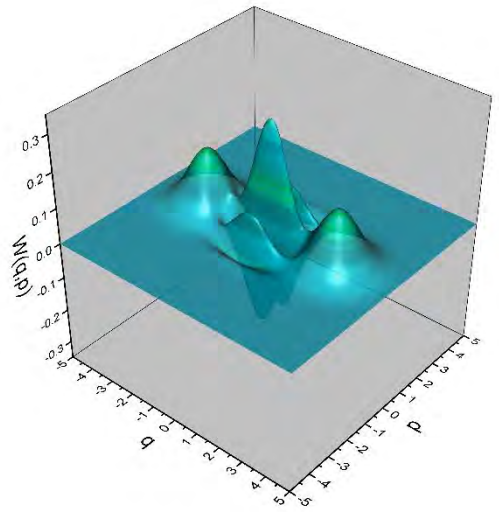


Fig. 4 Función de Wigner para estados Schrödinger cat, α = 0.0 + 2.0i

IV. CONCLUSIONES

Como se mostró en los resultados el cálculo se reduce, de las integrales en la definición de la función de Wigner a operaciones en algebra lineal, que son más fáciles y con una notación más clara dando las mismas expresiones obtenidas con el método tradicional.

AGRADECIMIENTOS

Le agradecemos al Dr. Arturo Zuñiga Segundo, por la oportunidad de realizar el servicio social, así como también a la escuela ESFM por presentar este tipo de eventos que fomentan el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes en las diversas áreas de la Física.

REFERENCIAS

[1] Girish S. Agarwall, Quantum Optics, Cambridge University Press, 2013, pp. 18 – 22, 76 - 82

[2] Hector M. Moya-Cessa, Introduction to Quantum Optics, Ed. Rinton Press, 2011, pp. 23-32, 53-56.

[3] E. Colavita and S. Hacyan, Wigner functions of free "Schrödinger cat" states, Revista Mexicana de Física No. 49, pp 45 – 52, 2013, PACS: 0365.ca; 03.35.Sq

ISSN: 2594-1011

Entropía para un modelo de Jaynes-Cummings en un medio Kerr

Antonio Huerta Montellano[1], Jorge Andrés Anaya Contreras[1], Arturo Zúñiga Segundo[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55361 E-mail: erne.rob1789@gmail.com, mozartrazom@gmail.com, azuniga@esfm.ipn.mx.

Resumen — **Mediante la descomposición de Schmidt [1] encontramos un par de estados de campo no-clásicos y ortonormales, los cuales ofrecen ganancias en el número promedio de fotones, para un modelo de Jaynes-Cummings inmerso en un medio Kerr [2].**

Palabras Clave – **Estados Schmidt, medio Kerr, Ganancia promedio de fotones**

Abstract —**By Schmidt decomposition [1], we have found a pair non-classical and orthonormal field states which give several earnings in average photon number for a Jaynes-Cummings model surrounded into Kerr medium [2].**

Keywords –**Schmidt sates, Kerr medium, Earing in average photon number.**

I. INTRODUCCIÓN

La descomposición de Schmidt [1] es una herramienta matemática imprescindible en el estudio de sistemas cuánticos compuestos, ya que juega un papel muy importante en los fenómenos cuánticos de enredamiento y purificación [3], teniendo un gran número de aplicaciones en la óptica cuántica.

Teorema de Schmidt y Entropía de Von Neumann.

Sean $\{|A_j\rangle\}_A$ y $\{|F_j\rangle\}_F$ conjuntos orto-normales en los espacios de Hilbert H_A y H_F, respectivamente. Entonces existen λ_j números reales no negativos, tales que cualquier estado arbitrario $|\psi\rangle$ que pertenece a $H_A \otimes H_F$ puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |A_j\rangle |F_j\rangle, \qquad (1)$$

donde k es la dimensión de cada sub-espacio, y esta íntimamente relacionado con el grado de enredamiento del sistema. Por ejemplo si k=1 tenemos que el sistema que describe (1) es un estado puro sin enredamiento; es decir es un estado que se encuentra totalmente determinado tanto en A como en F, pues el estado A será totalmente independiente del estado F. Sin embargo, si $k \neq 1$ no existen estados $|A'\rangle \in H_A$ y $|F'\rangle \in H_F$ tales que su producto directo sea igual a (1), esa situación nos dice que no podemos saber en que estado cuántico se encuentra cada sub-sistema; sin embargo λ_j
representa la probabilidad de que el sistema (1) se encuentre en el estado $|A_j\rangle$ en el subsistema A y que se encuentre en el estado $|F_j\rangle$ del subsistema F. otra medida bastante útil para cuantificar el enredamiento de sistemas bipartite [3] es la entropía de Von Neumann [9], la cual alcanza su valor máximo cuando el sistema se encuentra máximamente enredado [10]. La entropía de Von Neumann asociada al operador de densidad $\hat{\rho}$ se encuentra definida por la siguiente expresión

$$S = Tr\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\}, \qquad (2)$$

el sistema (1) se encuentra descrito por un estado puro; sin embargo, no siempre un sistema bipartite es representado por un estado puro, por ello la necesidad de introducir por introducir el operador de densidad, el cual en analogía con la mecánica estadística clásica cumple con una ecuación de evolución del tipo Liouville conocida como ecuación de Von Neumann [9], de modo que los operadores de densidad asociados al subsistema A y al Subsistema F son: $\hat{\rho}_A = Tr_F\{\hat{\rho}\}$ y $\hat{\rho}_F = Tr_A\{\hat{\rho}\}$, respectivamente, luego las entropías asociadas a los subsistemas A y F serán

$$S_A = Tr_A\{\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A\}, \qquad (3)$$

$$S_F = Tr_F\{\hat{\rho}_F \ln \hat{\rho}_F\}. \qquad (4)$$

Las entropías (2), (3) y (4) cumplen con la desigualdad triangular siguiente conocida como teorema de Araki-Lieb [8]

$$|S_A - S_F| \leq S \leq |S_A + S_F|\,, \quad (5)$$

De la cual para el sistema descrito en (1) nosotros tenemos que

$$S_A = S_F. \qquad (6)$$

Modelo de Jaynes-Cummings inmerso en un medio Kerr

El efecto Kerr es un fenómeno birrefringente caracterizado por la dependencia cuadrática en la magnitud del campo eléctrico de la diferencia de los dos índices de refracción que posee el material, es decir, nos indica que la diferencia algebraica de desviación de ambos haces depende cuadráticamente de la magnitud del campo eléctrico. Este fenómeno fue descubierto por John Kerr en 1875 [4]. La descripción cuántica de tal efecto puede ser modelada como un oscilador anarmónico [5], [6], siendo conceptualmente consistente con su descripción clásica.

El Hamiltoniano que describe la dinámica de un átomo en una cavidad óptica rodeada de un medio Kerr bajo la aproximación de onda rotante, en desintonía con el campo y en el marco de interacción se escribe como [7]:

$$\widehat{H}_1 = \chi \hat{a}^{\dagger^2}\hat{a}^2 + \lambda\left(\hat{a}^{\dagger^2}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^2\hat{\sigma}_+\right), \qquad (7)$$

Donde $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ son los operadores de aniquilación y creación del oscilador armónico, $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$ son las matrices de Pauli, χ representa la parte dispersiva de tercer orden asociada al medio Kerr, y λ es la constante de acoplamiento entre el campo y el átomo, de acuerdo con [7] la evolución en el tiempo del estado inicial $|\alpha\rangle|e\rangle$ puede escribirse como:

$$\left|\psi_{(t)}\right\rangle = |\psi_e\rangle|e\rangle + \left|\psi_g\right\rangle|\mathrm{g}\rangle, \qquad (8)$$

$$|\psi_e\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}K_{en}|\mathrm{n}\rangle, \qquad (9)$$

$$\left|\psi_g\right\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}K_{gn}|\mathrm{n}+2\rangle, \qquad (10)$$

$$K_{en} = \exp\left(-i\chi\mathrm{t}(n^2+n+1)\right)\left(\cos(\Omega_n t) + \frac{i\chi}{\Omega_n}(2n+1)\sin(\Omega_n t)\right), \qquad (11)$$

$$K_{en} = -\mathrm{i}exp\left(-i\chi\mathrm{t}(n^2+n+1)\right)\frac{\lambda}{\Omega_n}\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin(\Omega_n t), \qquad (12)$$

$$\Omega_n = \sqrt{\lambda^2(n+1)(n+2) + \chi^2(2n+1)^2}, \qquad (13)$$

Parámetro de Mandel

El parámetro de Mandel [11] es una herramienta matemática introducida en óptica cuántica que permite caracterizar el comportamiento "no-clásico[1]" de un estado, comparando su distribución de número de fotones con la distribución poissoniana que posee un estado cuasi-clásico llamado estado coherente, a partir de las fluctuaciones en su número promedio de fotones. el parámetro de Mandel queda definido como:

$$Q_M = \frac{\langle(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2}{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} - 1, \qquad (14)$$

cuyos valores especiales definen los tres principales tipos de estadísticas.

$$Q_M\begin{cases} > 0, & distribución\ superpoissoniana \\ < 0, & distribución\ subpoissoniana \\ = 0, & distribución\ poissoniana \\ = -1, & distribución\ de\ estado\ de\ número \end{cases}$$

II. Metodología

Para propósitos simples consideremos que $k = 2$, y que los espacios de Hilbert H_A y H_F, son los asociados a los estados cuánticos de átomo y campo, respectivamente. Por lo que cualquier estado arbitrario $|\psi\rangle$ en $H_A \otimes H_F$ se escribe como:

$$|\psi\rangle = |\psi_e\rangle|e\rangle + \left|\psi_g\right\rangle|g\rangle, \qquad (15)$$

En donde de manera general se cumple que

$$\langle\psi_e|\psi_g\rangle \neq 0\ ,\ \langle i|j\rangle = \delta_{ij}\ ,\ |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1, \qquad (16)$$

Con $i, j \in \{e, g\}$. En virtud de la descomposición de Schmidt, existen un par de bases de estados campo $\{|\psi_e\rangle, |\psi_g\rangle\} \subseteq H_F$ y de estados de átomo $\{|e\rangle, |g\rangle\} \subseteq H_A$, definidos de la siguiente forma

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_+}}\left(\cos\theta\,|\psi_e\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|\psi_g\rangle\right), \qquad (17)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_-}}\left(e^{-i\phi}\sin\theta\,|\psi_e\rangle - \cos\theta\,|\psi_g\rangle\right), \qquad (18)$$

$$|+\rangle = \cos\theta\,|e\rangle + e^{-i\phi}\sin\theta\,|g\rangle, \qquad (19)$$

$$|-\rangle = e^{i\phi}\sin\theta\,|e\rangle - \cos\theta\,|g\rangle. \qquad (20)$$

Mediante los cuales podemos escribir (8) de la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_+}|\psi_+\rangle|+\rangle + \sqrt{\lambda_-}|\psi_-\rangle|-\rangle. \qquad (21)$$

Definiendo $P_{eg} = \langle\psi_e|\psi_g\rangle$, $P_{ee} = \langle\psi_e|\psi_e\rangle$, $P_{gg} = \langle\psi_g|\psi_g\rangle$ y debido a la orto-normalidad de los estados Schmidt de campo (17) y (18) tenemos que

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{P_{ee} - P_{gg}}{\sqrt{(P_{ee} - P_{gg})^2 + 4|P_{eg}|^2}}, \qquad (22)$$

[1] Por estado no-clásico nos referimos a que su distribución en el espacio fase no tiene un comportamiento no clásico.

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{P_{ee}-P_{gg}}{\sqrt{(P_{ee}-P_{gg})^2+4|P_{eg}|^2}}, \quad (23)$$

$$e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta = \frac{P_{eg}^*}{\sqrt{(P_{ee}-P_{gg})^2+4|P_{eg}|^2}}, \quad (24)$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(P_{ee}-P_{gg})^2+4|P_{eg}|^2}. \quad (25)$$

Además, se tiene que la forma diagonal de los operadores de densidad asociados al campo y al átomo se encuentran descritas por las siguientes ecuaciones

$$\hat{\rho}_F = \lambda_+|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + \lambda_-|\psi_-\rangle\langle\psi_-|, \quad (26)$$

$$\hat{\rho}_A = \lambda_+|+\rangle\langle+| + \lambda_-|-\rangle\langle-|. \quad (27)$$

En virtud de las ecuaciones (3) y (4), las entropías de Von Neumann asociadas a los operadores de densidad (26) y (27) son exactamente iguales, lo que verifica el teorema de Araki-Lieb, es decir se verifica (6).

III. Resultados

En lo que sigue, vamos a analizar las evoluciones en el tiempo de las probabilidades λ_+ y λ_- , para distintos valores del apantallamiento χ/λ

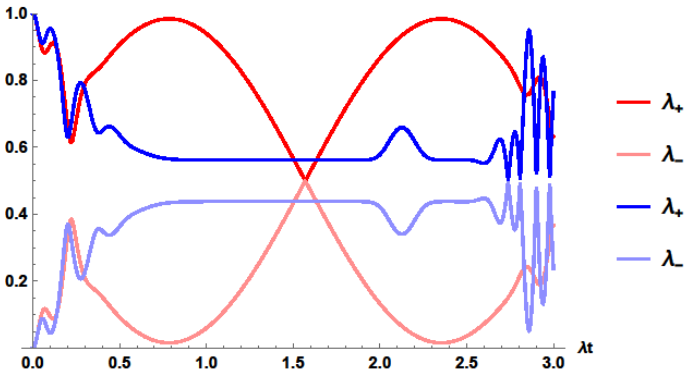


Fig. 1.- En esta figura se observa la evolución en el tiempo de las probabilidades λ_+ y λ_-,cuando: a) (gráficas rojas) cuando $\chi/\lambda = 0$, b) (gráficas azules) cuando $\chi/\lambda = 0.2$.

En la figura (1) se observa que en ausencia de la interacción del medio Kerr, es decir cuando el apantallamiento del medio Kerr es nulo $\chi/\lambda = 0$, el comportamiento de las probabilidades λ_+ y λ_- es de tipo periódico, contrariamente a lo que sucede cuando $\chi/\lambda = 0.2$.

El efecto provocado por el apantallamiento del medio Kerr a la interacción átomo-campo se encuentra muestra en la siguiente figura.

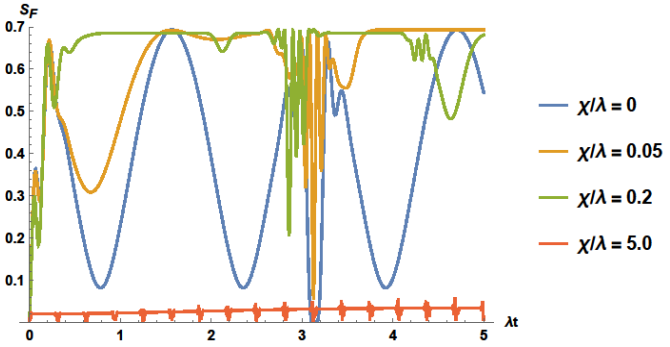


Fig. 2.- En esta Figura se muestra la evolución de la entropía del campo para distintos valores del apantallamiento χ/λ.

En la figura (2) encontramos que para un mayor apantallamiento la entropía del campo es cercana a cero, lo que nos diría que la interacción átomo-campo dejaría de llevarse a cabo.

En esta parte vamos a contrastar las ganancias en el número promedio de fotones, cuando efectuamos mediciones en los estados de átomo una vez que este abandone la cavidad óptica.

i) Si efectuamos una medición en los estados de átomo $|e\rangle$ ó $|g\rangle$, el número promedio de fotones en el interior de la cavidad en cada situación será:

$$N_e = \frac{\langle\psi_e|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_e\rangle}{\langle\psi_e|\psi_e\rangle}, \quad (28)$$

$$N_g = \frac{\langle\psi_g|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_g\rangle}{\langle\psi_g|\psi_g\rangle}, \quad (29)$$

respectivamente.

ii) Si efectuamos una medición en los estados Schmidt de átomo $|+\rangle$ ó $|-\rangle$, el número promedio de fotones en el interior de la cavidad en cada situación será

$$N_+ = \langle\psi_+|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_+\rangle, \quad (30)$$

$$N_- = \langle\psi_-|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_-\rangle, \quad (31)$$

respectivamente.

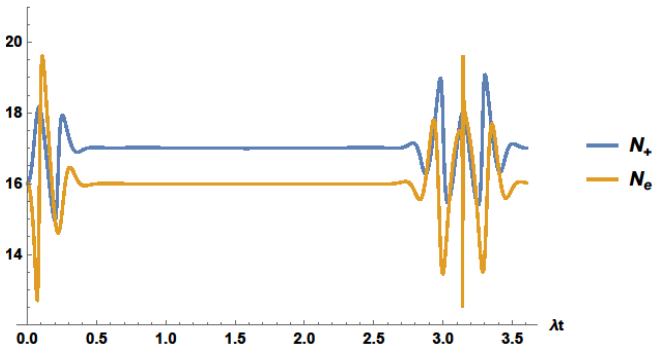


Fig. 3.-En esta figura se observa la evolución en el tiempo de N_+ y N_e, cuando $\chi/\lambda = 0$.

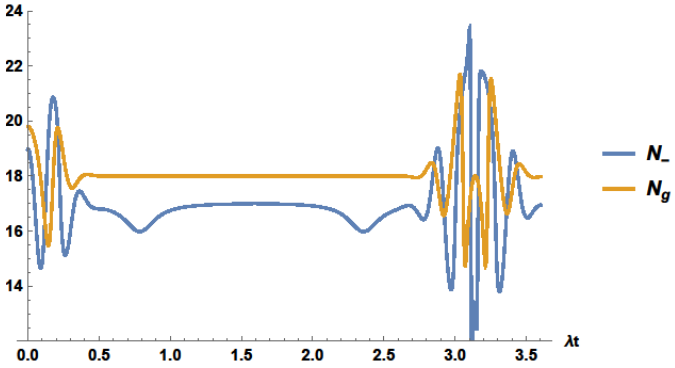


Fig. 4.-En esta figura se observa la evolución en el tiempo de N_- y N_g, cuando $\chi/\lambda = 0$.

De la figura (3) encontramos que N_e alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 0.109$ obteniendo una ganancia aproximada de 3 fotones con una amplitud de probabilidad del 22 por ciento. Mientras que N_+ alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 2.98$ obteniendo una ganancia de 3 fotones con una probabilidad cercana al 67 por ciento, localizar este punto es sencillo pues es justo en este tiempo donde la entropía del campo alcanza un máximo.

A partir de la figura (4) encontramos que en el punto $\lambda t = 3.03$ N_g alcanza su máximo global obteniendo una ganancia de 5 fotones con una probabilidad del 25 por ciento. Mientras que N_- alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 3.10$ obteniendo una ganancia de 7 fotones con una probabilidad del 0.1 por ciento.

Como una conclusión parcial tendríamos que: medir el estado Schmidt $|+\rangle$ del átomo colapsa un estado de campo en el interior de la cavidad $|\psi_+\rangle$, el cual brinda una ganancia de 3 fotones con una probabilidad del 67 por ciento, es decir una ganancia en fotones bastante buena con una probabilidad de detección alta.

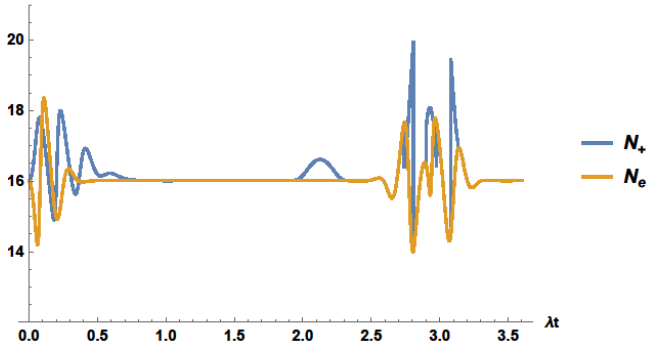


Fig. 5.- En esta figura se observa la evolución en el tiempo de N_+ y N_e, cuando $\chi/\lambda = 0.2$.

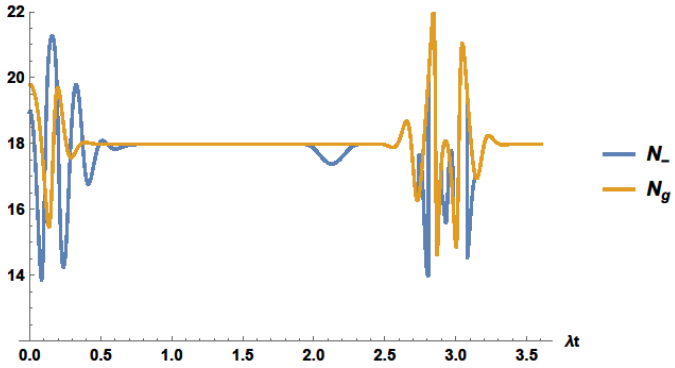


Fig. 6.- En esta figura se observa la evolución en el tiempo de N_- y N_g, cuando $\chi/\lambda = 0.2$.

De la figura (5) encontramos que N_e alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 0.109$ obteniendo una ganancia aproximada de 2 fotones con una amplitud de probabilidad del 37 por ciento. Mientras que N_+ alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 2.98$ obteniendo una ganancia de 4 fotones con una probabilidad cercana al 50 por ciento, localizar este punto es sencillo pues es justo en este tiempo donde la entropía del campo alcanza un máximo.

A partir de la figura (6) encontramos que en el punto $\lambda t = 2.84$ N_g alcanza su máximo global obteniendo una ganancia de 6 fotones con una probabilidad del 13 por ciento. Mientras que N_- alcanza un máximo global en el punto $\lambda t = 0.156$ obteniendo una ganancia de 5 fotones con una probabilidad del 17por ciento.

A manera de conclusión parcial tenemos que: medir el estado Schmidt del átomo brinda una ganancia en el número promedio de fotones, pero el apantallamiento del efecto Kerr a la interacción átomo-campo incrementa ligeramente la ganancia de fotones.

Finalmente vamos a examinar la naturaleza no-clásica de los estados Schmidt del campo $|\psi_+\rangle$ y $|\psi_-\rangle$ para los tiempos en donde hay ganancia de fotones a partir de sus parámetros de Mandel asociados Q_M^+ y Q_M^- , respectivamente.

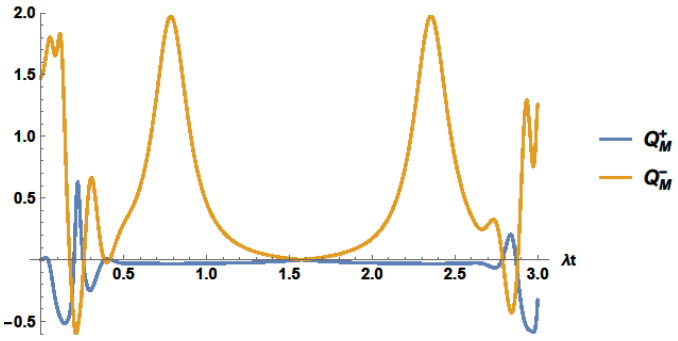


Fig. 7.- En esta figura se observa la evolución de Q_M^+ y Q_M^-, cuando $\chi/\lambda = 0$.

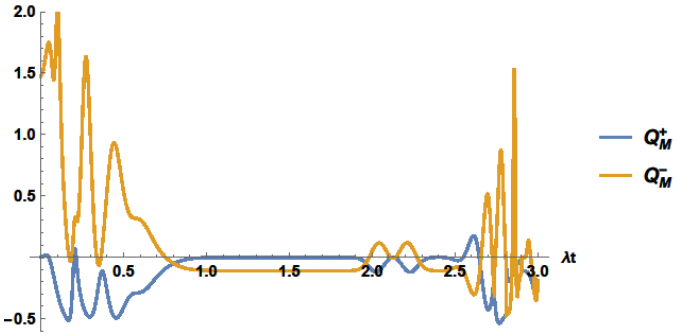


Fig. 8.- En esta figura se observa la evolución de Q_M^+ y Q_M^-, cuando $\chi/\lambda = 0.2$.

la figura (7) se puede observar un comportamiento casi simétrico al rededor del punto $\lambda t = 1.57$, en donde el parámetro de Mandel Q_M^+ alcanza un valor negativo muy cercano a cero, mientras que para ese de tiempo el parámetro de Mandel Q_M^- alcanza un valor positivo muy cercano a cero, de lo que podemos intuir que tienen un comportamiento cercano al clásico.

Por otra parte de la figura (8) encontramos que para $\lambda t = 2.807$ se cumple la desigualdad $0 > 0 > Q_M^- > Q_M^+$ teniendo como resultado que ambos estados Schmidt son no clásicos. de nueva cuenta encontramos que el efecto de apantallamiento genera una separación de los parámetros de Mandel $Q_M^{\mp}$, en la vecindad del punto $\lambda t = 1.57$.

IV. Discusión

A partir de la figura (5) encontramos que medir el Schmidt $|+\rangle$ genera un estado de campo $|\psi_+\rangle$, en el cual hay una ganancia de 3 fotones con una probabilidad ligeramente mayor al 50 por ciento, cuando $\chi/\lambda = 0.2$. Sin embargo de la figura (2) encontramos que cuando incrementa el valor de χ/λ , la entropía del campo es muy cercana a cero, con lo que podríamos pensar que la dinámica átomo-campo desaparece; por lo que debería existir un valor de χ/λ en donde el estado de campo $|\psi_+\rangle$ genere una máxima ganancia de fotones, manteniendo la interacción átomo-campo.

V. Conclusiones

La descomposición de Schmidt además de ser un teorema matemático que nos permite diagonalizar los operadores reducidos de los subsistemas de átomo y campo, nos permite generar estados de campo y átomo ortogonales, en el caso de los estados de campo; nos ofrecen ganancias en el número promedio de fotones con buenas probabilidades de detección, el carácter no-clásico de estos estados nos permite estudiar los fenómenos cuánticos de coherencia.

Agradecimientos

Le agradecemos al Dr. Arturo Zuñiga Segundo, por la oportunidad de realizar el servicio social, así como también a la escuela ESFM por presentar este tipo de eventos que fomentan el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes en las diversas áreas de la Física.

Referencias

[1] E. Schmidt, .Math. Ann. Vol. 63, pp. 433–476, (1907).
[2] A. Joshi and R.R Puri, Phys. Rev. A. Vol. 45, pp. 5056-5060, (1992).
[3] Anirban Pathak, Elements of Quantum Computation and Quantum Communication, CRC Press, New York, 2013.
[4] J. Kerr, Phil. Mag. Vol.4, pp. 337-348 , (1875).
[5] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. Vol. 57, pp. 13-16, (1986)
[6] G. S. Agarwal and R. R. Puri, Phys. Rev. A. Vol. 39, pp. 2969-2977, (1989).
[7] A. Joshi and R. R. Puri, Phys. Rev. A. Vol. 45, pp. 5056-5060, (1992).
[8] M. Araki, E. Lieb, Commun. Math. Phys. Vol. 18, no. 2, pp. 160–170, 1970.
[9] J. Von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.
[10] C.C. Gerry, and P.L Knight,Introductory Quantum Optics, Cambridge University Press, New York, 2004.
[11] L. Mandel, Opt. Lett. Vol. 4, pp. 205-207, (1979).

ISSN: 2594-1011

Fabricación y caracterización de películas delgadas hechas con nanotubos de carbono de pared simple.

I. Jimenez-Martinez[1], G. Ortega-Cervantez[1], G. L. Rueda-Morales[1], E. Díaz-Valdes[1], R. Gomez-Aguilar[2], J. Ortiz- López[1].
[1]Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Física, ESFM,
[2]Instituto Politécnico Nacional, UPTITA.
E-mail: gortegacervantez@gmail.com

Resumen — **Se presenta un método para elaborar películas delgadas de nanotubos de carbono de pared simple (SWNTs) empleando una pistola de aire comercial (*spray coating*). Para lo cual se preparó una tinta o solución a base de agua destilada y dodecilsulfato de sodio (SDS) al 1 wt.% donde se colocaron 5 mg de SWNTs. Para obtener una solución homogénea esta fue dispersada por 6 horas. Los depósitos se realizaron sobre vidrio portaobjetos y acetato comercial. Al final del proceso de deposición, se les realizó a las películas un lavado con agua destilada para remover el remanente de SDS. Las películas fueron caracterizadas por MFA y MEB, donde se puede ver que están constituidas por una red de nanotubos colocados en forma aleatoria. Por espectroscopia Raman se pudo observar que no hay remanentes de SDS. El espectro de transmisión nos da información sobre el espesor de las películas y por el método de cuatro puntas se midió su resistencia en donde las películas que mejores resultados presentaron son las de mayor depósito en vidrio, con una resistencia de capa de 248 Ω/cm y ~ 83 % de transparencia, que están en el rango con las reportadas en la literatura.**

Palabras Clave – **Películas delgadas, nanotubos de carbono, spray coating.**

Abstract — **We present a method for the manufacture of thin films with single-walled carbon nanotubes (SWNT), using a commercial spray gun (spray coating). To this end, an ink or solution based on distilled water and sodium dodecyl sulfate (SDS) at 1 wt% was prepared, where 5 mg of SWNTs were placed. To obtain a homogeneous solution, it was dispersed for 6 hours. The deposits were made on glass slides and commercial acetate. At the end of the deposition process, the films were washed with distilled water to remove the remaining SDS. The films were characterized by scanning electron microscopy (SEM) and atomic force microscopy (AFM), where it can be seen that these are constituted by a randomly placed network of nanotubes. Raman spectroscopy shows that there are no remnants of SDS. The transmission spectrum gives us information about the thickness of the films and by the four-point method its resistance was measured, where the films with the best results presented are those with the highest deposit in glass, with a layer resistance of 248 Ω / cm and ~ 83% transparency, which are in the range with those reported in the literatura.**

Keywords —**Thin films, carbon nanotubes, spray coating.**

I. Introducción

Desde su descubrimiento los nanotubos de carbono de pared simple, SWNTs han llamada mucha la atención debido a sus excelentes propiedades, por ejemplo; de elasticidad, eléctricas, altas conductividades térmicas, etc [1, 2]. Con respecto a las propiedades eléctricas se han venido desarrollando aplicaciones en dispositivos orgánicos y flexibles como son sensores, transistores de efecto de campo, celdas solares donde películas delgadas (PD) de nanotubos de carbono se han usado como electrodos, o portadores de carga en algunos de los dispositivos antes mencionados [3]. Para lograr una película delgada cuyas propiedades eléctricas sean buenas, existen varios métodos de depósitos, pero uno de los más efectivos es el de *spray coating,* esto debido a su alta uniformidad y gran área de cubrimiento [4]. Aparte del método de depósito, es importante una buena tinta o solución que contenga bien dispersados a los nanotubos de carbono. En la literatura se reportan tres métodos que han sido los de mayor uso para la dispersión de nanotubos en solventes líquidos; (1) dispersión de nanotubos de carbono, CNTs prístinos en solventes orgánicos; (2) dispersión de CNTs funcionalizados de forma covalente; y (3) la dispersión de CNTs con ayuda de dispersantes como son polímeros o surfactantes. Dependiendo de la aplicación que se le quiera dar uno utiliza el método más apropiado. El caso 3 es el más usado para PD, debido a que el surfactante mantiene mejor separados a los nanotubos, estos no se vuelvan a aglomerar y tardan más tiempo en decantarse. Los surfactantes más comúnmente usados son; el colato de sodio iónico (SC), dodecilsulfato de sodio (SDS), dodecilbencenosulfonato de sodio (SDBS), y Triton X-100 no iónico [5]. En este trabajo se fabrican películas delgadas de nanotubos de carbono de pared simple, SWNTs, sobre sustratos de vidrio portaobjetos y acetato comercial, usando la técnica de spray coating. Donde se vio el efecto de que un mayor depósito de nanotubos nos da una menor resistencia, tanto en los sustratos de vidrio como en los de acetatos, además de que estas películas muestran todavía una buena transparencia que es requerida para aplicarla como electrodos en celdas solares, y transistores de película delgada, (TFT), etc [5]. Las películas que mejores resultados presentaron fueran las depositadas en vidrio, con una resistencia de capa de 248 Ω/cm y ~ 83% de transparencia, que están en el rango con las reportadas en la literatura [5].

II. METODOLOGÍA

A. Preparación de la tinta o solución de nanotubos de carbono.

Para mejorar la solubilidad de los CNTs se usa el surfactante dodecilsulfato sódico SDS (Sigma-Aldrich, 99+%) en agua destilada al 1 wt.%. En 50 ml de agua destilada diluimos 0.5 mg de SDS y mezclamos con agitador magnético por 10 minutos. Posteriormente añadimos 5 mg de SWNTs (Sigma-Aldrich) para obtener una concentración de nanotubos de 0.1 mg/ml. Esta solución se sometió durante 6 horas en una tina de ultrasonido (modelo No. 9303, Transsonic 460/H Lab-line) para asegurar una suficiente dispersión de los SWNTs.

B. Limpieza de sustratos (vidrio y acetato comercial)

Como sustratos utilizamos vidrio portaobjetos y acetato comercial, cortados en cuadros de 1 pulgada por lado. Para mejorar la adhesión de los nanotubos a la superficie de los sustratos los sometimos a un tratamiento previo. El vidrio lo limpiamos con acetona durante 10 minutos en una tina de ultrasonido, y después con alcohol durante otros 10 minutos para eliminar cualquier contaminante de la superficie. El acetato sólo lo limpiamos con alcohol, durante 10 minutos. Posteriormente tratamos los sustratos con UV-Ozono por 10 minutos a fin de mejorar la capacidad de la superficie de ser mojada por la solución y ésta se adhiera mejor.

C. Fabricación de películas delgadas

Realizamos la fabricación por *spray coating* con una pistola de aire comercial (aerógrafo), conectada a un tanque de gas Nitrógeno con una presión de salida de 4 kg/cm. Para facilitar la vaporización del disolvente realizamos depósitos sobre los sustratos en intervalos de 30 segundos, manteniendo la pistola a unos 30 cm del sustrato para obtener una buena distribución y evitar que las gotas se aglomeren. Mediante este método se puede controlar el grueso de la película modificando el número de depósitos, ver Fig. 1. Las películas hechas sobre el vidrio y sobre el acetato fueron con 20 y 30 depósitos. Estas muestras se llamaran de ahora en adelante como SWNTs/VIDRIO/20, SWNTs/VIDRIO/30, para las películas con 20 y 30 depósitos sobre vidrio respectivamente y SWNTs/ACETATO/20, SWNTs/ACETATO/30, para las que están sobre acetato con 20 y 30 depósitos respectivamente.

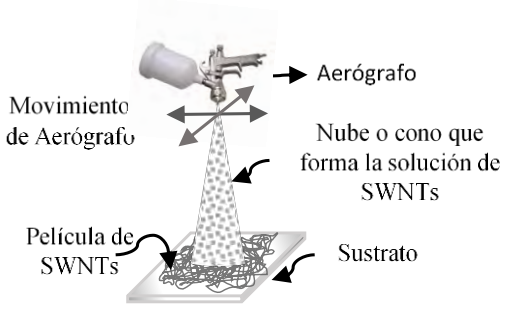


Fig. 1. Esquema del método de fabricación de películas delgadas por spray coating.

Por último, lavamos el remanente de SDS de la película sumergiendo de 3 a 7 veces en agua destilada, esto dependiendo del número de depósitos [6]. Caracterizamos las películas con microscopía de fuerza atómica AFM (Innova Veeco), microscopia electrónica de barrido, SEM (FEI QUANTA DUAL BEAM), Transmitancia, (espectrómetro de UV-VIS, Lambda 35, Perkin Elmer), Espectroscopía Raman (espectrómetro Labram HR800, Horiba Jobin Yvon, usando $\lambda = 633$ nm) y medimos su resistencia por el método de cuatro puntas (Lucas Labs. Pro4 Keithley 2400-C Source Meter).

III. RESULTADOS

A. Espectroscopia Raman

Con el fin de mostrar la ausencia de residuos de SDS en las películas después del lavado la Fig. 2, muestra el espectro Raman de las películas de nanotubos de carbono hechas sobre sustratos de vidrio (SWNTs/VIDRIO/20) y acetato comercial (SWNTs/ACETATO/20), además del espectro raman SDS y SWNTs empleados para hacer estas películas. Cabe mencionar que solo se muestran los espectros Raman de una película hecha sobre vidrio y otra sobre acetato comercial debido a que las otras de mayor deposito (30 depósitos) presenta la misma similitud en sus espectros Raman.

Comparando los espectros Raman de las películas hechas en acetato y en vidrio con el espectro del SDS podemos notar que no presenta ninguna banda Raman correspondiente al SDS (ver tabla 1), lo que indica que los lavados con agua destilada quitan el SDS [7]. Al comparar con el Raman de los SWNTs y las películas podemos ver que están presentes las bandas correspondientes de SWNTs, región RBM, D, G (G^-, y G^+), y la región 2D [8], ver tabla 1. También en la película hecha sobre acetato podemos observar que hay otras bandas. Estas bandas corresponden al acetato (ver apéndice). Lo que nos indicaría que la película de SWNTs es muy delgada por lo que se logra tener señal del acetato. Al hacer la razón de intensidades de la banda G y D, I_G/I_D podemos notar que para los SWNTs es ~17.3, para las películas SWNTs/VIDRIO/20 y

SWNTs/ACETATO/20 es de ~20. La razón de intensidades de las películas es mayor que la de los SWNTs solos, y esto se debe a los sustratos. Aun así el perfil del espectro es el mismo para todos.

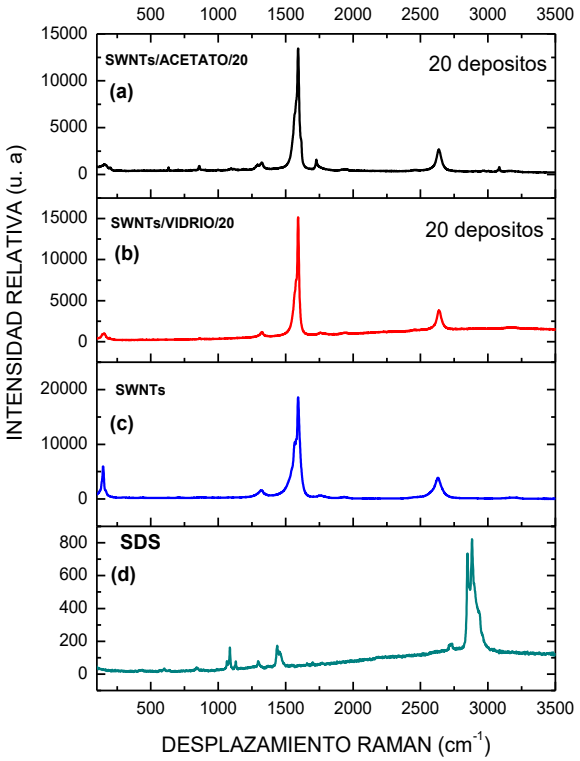


Figura 2. Espectroscopia Raman de las películas de SWNTs, (a) sobre acetato (SWNTs/acetato/20) y (b) sobre vidrio (SWNTs/Vidrio/20) con 20 depósitos respectivamente por la técnica de spray coating, (c) de los nanotubos de carbono (SWNTs) y (d) el surfactante SDS.

Tabla 1, En la tabla se pueden ver las posiciones del desplazamiento Raman de las bandas presentes en cada una de las muestras analizada.

NOMBRE	REGIÓN BAJA (100-1300 cm^{-1})	REGIÓN MEDIA (1300-2000 cm^{-1})	REGIÓN ALTA (2000-3500 cm^{-1})
SDS	1064, 1086, 1130, 1296	1437, 1457	2882, 2899, 2936.5
SWNTs	138, 151, 193, 863	1323, 1569, 1592, 1756, 1938	2456, 2638, 3189
SWNTs/ VIDRIO/20	134, 147, 190, 861	1318, 1567, 1592, 1757, 1939	2454, 2630, 3189
SWNTs/ ACETATO/20	137, 155, **171**, 196, **632**, 860, **997, 1095, 1115, 1187, 1281, 1291**	1324, 1570, 1593, 1755, 1937, **1416, 1727, 2910, 2967**	2456, 2636, **3002, 3084,** 3185

Los números en negritas en la tabla son correspondientes a las bandas Raman del sustrato de acetato empleado para depositar a los nanotubos y formar la película.

B. Transmitancia

Se mide la transmitancia, una vez que visto por Raman que no hay un remanente de SDS.

El espectro de transmitancia de las películas elaboradas se muestra en la Fig. 3. Un número mayor de depósitos resulta en una película menos transparente. De las películas más delgadas la más transparente resulta ser la depositada sobre vidrio ~ 91.2%, la película en acetato tiene una transmitancia más reducida ~86.8%, porque el acetato es más opaco que el vidrio. Al aumentar el grosor de las películas, las transmitancias de las muestras con vidrio (82.7%) y con acetato (82.6%) las podemos tomar como iguales.

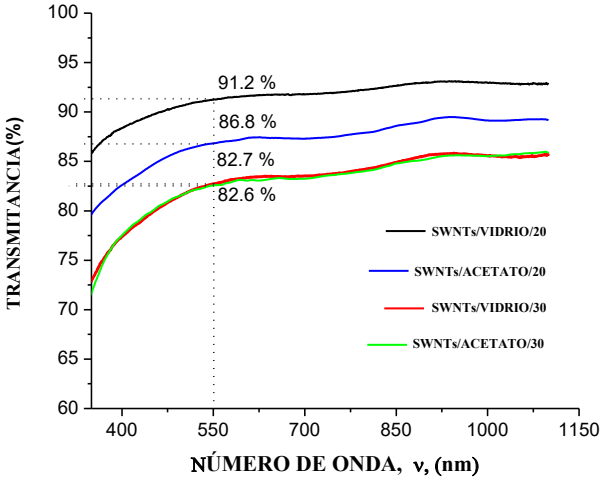


Fig. 3. Transmitancia de las películas fabricadas

C. Microscopia electrónica de barrido y microscopia de fuerza atómica de las películas fábricas.

En la figura 4, se presentan micrografías de SEM de la película hecha con 20 depósitos de SWNTs sobre acetato, (SWNTs/acetato/20). La figura 4a, muestra una imagen a x2000 aumentos donde se pueden ver la morfología de la película, que está formada por una red de nanotubos de carbono y en la parte superior izquierda una foto de la película donde se mide la resistencia. La figura 4b, es una zona de la misma muestra pero a x10000 aumentos donde se puede apreciar mejor esta red de nanotubos y en la parte superior izquierda también se muestra una foto de la película donde se puede ver que la resistencia no cambia mucho a pesar de que esta doblada. Las dimensiones de los diámetros andan en un orden de ~50 nm. De acuerdo a este orden y sabiendo que son SWNTs (diámetros entre 1 a 5 nm), podemos decir entonces que son manojos de ellos. También se pueden apreciar espacios entre estos manojos y es debido a los depósitos que se realizan, los cuales se van colocando

en capas de SWNTs hasta formar la película, además de que los nanotubos no están alineados entre sí.

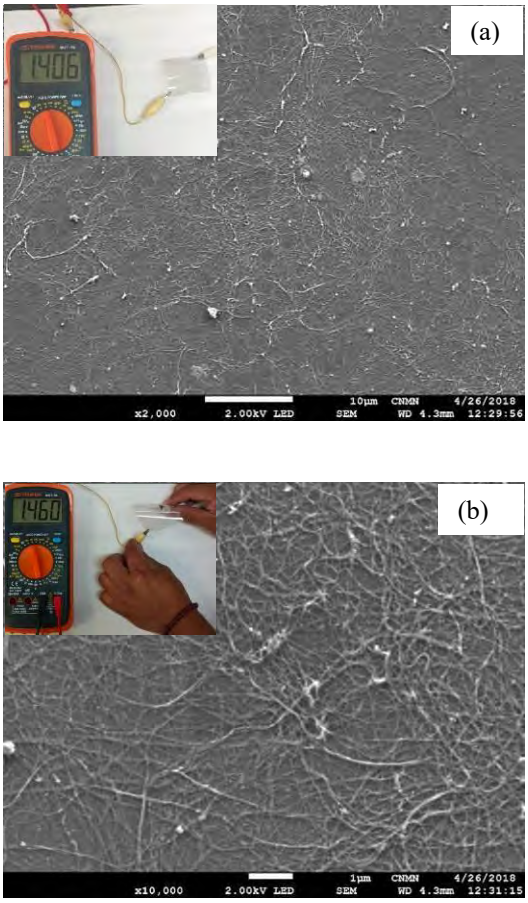


Fig. 4. Imágenes SEM de la película SWNTs/ACETATO/20, donde se puede ver en (a) la morfología de la película y en la parte superior izquierda una foto de la película donde se le mide resistencia, y en b) una micrografía a mayores aumentos donde ese puede observar mejor la red nanotubos que forman la película, además del lado superior izquierdo la foto de medición de resistencia cuando la película esta doblada.

En las Fig. 5 y 6, se muestran las micrografías de AFM, de las muestras SWNTs/vidrio/20, SWNTs/acetato/30 y SWNTs/acetato/20. La figura 5a. presenta una micrografía de 50 x 50 µm. de la película SWNTs/vidrio/20, donde se pueden apreciar nuevamente la red de nanotubos de carbono que están en forma aleatoria como el caso de la muestra SWNTs/acetato/20 vista por SEM y en su parte superior derecha una fotografía de la película. La Fig. 5b, presenta otra micrografía a 10 x 10 µm de la misma muestra, aquí podemos apreciar mejor la red de nanotubos que forma la película. También por la forma del depósito de la película se alcanzan a ver espacios entre ellos. La misma morfología es vista en las muestras SWNTs/acetato/30 y SWNTs/acetato/20, ver Fig.6a y Fig. 6b. En su parte superior derecha de cada una de ellas se presenta una fotografía de la película que se formó.

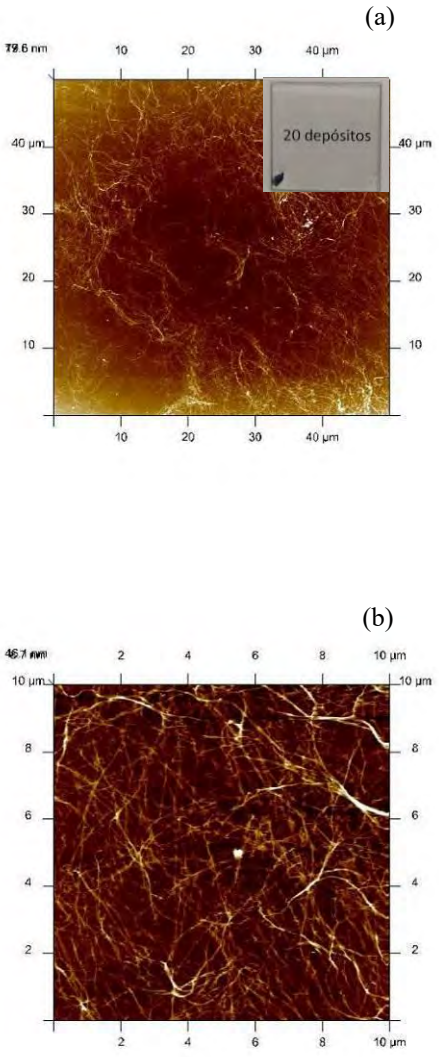


Fig. 5a y 5b. Imágenes AFM de la muestra SWNTs/VIDRIO/20.

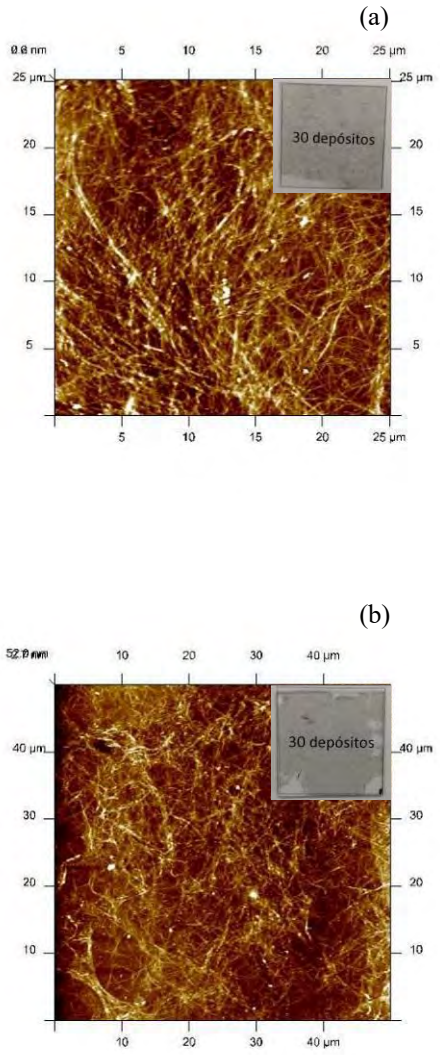


Fig. 6. Imágenes AFM de la película (a) SWNTs/ACETATO/30, y (b) SWNTs/VIDRIO/30. En su parte superior derecha de las imágenes se presenta una fotografía de la película fabricada.

D. Mediciones de Resistencia, método de 4 puntas.

Una película más gruesa goza de una menor resistividad porque la mayor abundancia de nanotubos reduce el número de espacios libres de depósito que puede haber entre ellos. En la tabla 2 se muestran las resistividades por cuadro y lineales de las películas elaboradas. Las películas más delgadas sobre vidrio y acetato tienen resistividades comparables. Si el grosor aumenta la película sobre vidrio resulta mejor conductora (Rs = 248 Ω/cm) que la que está sobre el acetato (Rs = 2.4 KΩ/cm). Esto puede deberse a que el acetato es más rugoso que el vidrio lo que hace que los espacios sobre el acetato sigan siendo más y el deposito sea menos uniforme.

Al realizar los depósitos, los nanotubos no solo tienen que llenar los espacios libres entre ellos, sino que también deben rellenar los desniveles presentes en el sustrato, esto afecta su capacidad de conducción de corriente.

TABLA 2.
RESISTIVIDAD DE LAS PELÍCULAS ELABORADAS.

Película	Pro4 Data		
	Rs (Ω/ cm)	Res (Ω-cm)	V/I (Ω)
SWNTs/VIDRIO/20	22.18 K	1.11 K	8.83 K
SWNTs/VIDRIO/30	248	12.4	99.25
SWNTs/ACETATO/ 20	20.29 K	1.01 K	8.13 K
SWNTs/ACETATO/30	2.4 K	120.26	464.12

IV. DISCUSIÓN

En la fabricación de películas delgadas nosotros notamos lo siguiente:

1. Que es necesario una buena solución de nanotubos de carbono, es decir que los nanotubos estén bien dispersados y que no se aglomeren en corto tiempo, para que a la hora del depósito de estos sobre el sustrato no se creen grumos y así la película logre ser uniforme o formarse sobre la superficie del sustrato.
2. También se observó que los sustratos deben ser lo más hidrofílicos posible en su superficie para que la película quede adherida y así no se formen pliegues en la película. Para esto se sometió a UV-Ozono para lograr este efecto en la superficie. Ya que, cuando los sustratos no eran tratados de esta forma la película no se formaba en todo el sustrato, o se desprendía causando los pliegues antes mencionados.
3. El surfactante SDS que se emplea afecta en la conductividad de las películas, para quitarlo se enjuagaron de 3 a 7 veces dependiendo del número de depósitos. Lo anterior se comprobó por espectroscopia Raman, MFA y MEB.

4. Las mediciones de resistencia nos indicaron que la película formada con 30 depósitos sobre vidrio fue la mejor con Rs = 248 Ω/cm y una transmisión de ~83 %. El orden de las resistencias está en el rango para aplicaciones en dispositivos flexibles por lo que se podría utilizar si esta se transfiere a un sustrato flexible [9].
5. En el caso de la película hecha sobre acetato con 30 depósitos presenta la misma transmitancia que la antes mencionada, pero con una Rs = 2.4 KΩ/cm, ésta bajó en un orden comparada con la de menos depósitos sobre el mismo sustrato. De acuerdo a la literatura se requieren mayores conductividades o menores resistencias Rs que la obtenida para películas sobre sustratos flexibles, lo que nos sugiere aumentar el grosor de la película para disminuir la Rs, cuidando que la transmitancia cumpla con los requerimientos tecnológicos.

V. Conclusiones

Se fabricaron películas delgadas de nanotubos de carbono de pared simple, SWNTs, sobre sustratos de vidrio y acetato comercial por la técnica de spray coating. Esta técnica es muy buena para este tipo de películas delgadas ya que se logra tener una muy buena homogeneidad de la película. Notamos que para lograr una buena película delgada conductora y con buena transparencia necesitamos cierto espesor pero cuidando los requerimientos tecnológicos, es decir depende de la aplicación que se requiera darles. Para lograr una buena homogeneidad en la película se debe tener una buena dispersión de la solución que contiene a los nanotubos, ya que de lo contrario en la película se logran ver puntos negros, una especie de moteado que no son más que aglomeraciones de SWNTS. Además es necesario que el surfactante SDS no afecte a la conductividad de la película, para ello hubo que enjuagar con agua destilada varias veces para quitar el remanente de éste. Las películas que mejor conductividad tuvieron fueron las de mayor depósito en ambos sustratos, pero la fabricada en vidrio fue la que presento menos resistencia Rs = 2.4 KΩ/cm, y una transmisión de ~83 %, en cambio la fabricada en acetato tuvo una Rs = 2.4 KΩ/cm con la misma transmitancia que la de vidrio. Aunque la ventaja de esta última es que ya no se tendría que quitar del sustrato para aplicarla en algunos dispositivos electrónicos flexibles, solo tendríamos que mejorar su conductividad (mayor espesor de película).

Apéndice

La Fig. A1. Muestra el espectro Raman del acetato comercial que se empleó como sustrato en la fabricación de las películas delgadas hechas con nanotubos de carbono de pared simple, SWNTs. Las posiciones de las bandas Raman presentes en el acetato se presentan en la Tabla A1. Las marcadas con el superíndice +, indican las de mayor intensidad.

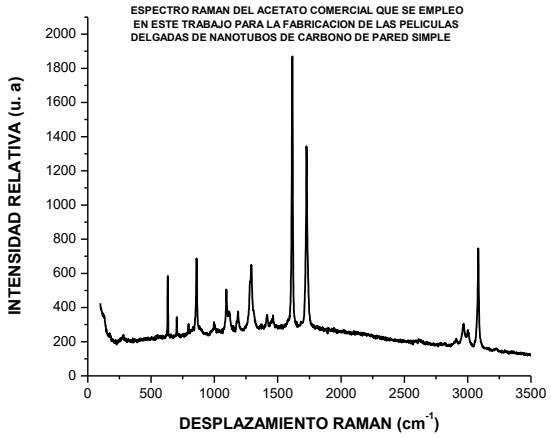


Figura A1. Espectroscopia Raman del acetato comercial empleado en la fabricación de las películas de nanotubos de carbono.

Tabla A1, En la tabla se pueden ver las posiciones del desplazamiento Raman de las bandas presentes en el acetato comercial.

NOMBRE	REGIÓN BAJA (100-1300 cm^{-1})	REGIÓN MEDIA (1300-2000 cm^{-1})	REGIÓN ALTA (2000-3500 cm^{-1})
ACETATO	**171, 281, 632+,702, 798, 857+, 997, 1095+, 1115, 1187, 1281, 1291+**	**1416, 1449, 1464, 1611+, 1727+, 2908, 2910, 2967**	**3002, 3084+**

+ Posiciones de las bandas Raman del acetato con mayor intensidad.

Agradecimientos

A COFAA-IPN/SIBE, EDI-IPN y SIP-IPN por el apoyo parcial de financiamiento.

Referencias

[1] R Saito, G Dresselhaus, and M S Dresselhaus Transport Properties of Carbon Nanotubes. Physical Properties of Carbon Nanotubes: pp. 137-162, (1998).

[2] Taylor and Francis, "Carbon Nanotubes, Properties and Application", published in 2006 by CRC Press Taylor and Francis Group, http://www.crepress.com.

[3] Steve Park, Michael Vosguerichian and Zhenan Bao, "A review of fabrication and applications of carbón nanotube film-based flexible electronics", Nanoscale, **5,** 1727–1752, 2013.

[4] R. C. Tenent, T. M. Barnes, J. D. Bergeson, A. J. Ferguson, B. To, L. M. Gedvilas, M. J. Heben, J. L. Blackburn, Adv. Mater, 21, 3210, 2009.

[5] Ying Zhou and Reiko Azumi, "Carbon nanotube based transparent conductive films: progress, challenges, and perspectives", Science and Technology of Advanced Materials, VOL . 17, NO . 1, 493–516, 2016.

[6] M. Kaempgen, G.S. Duesberg, S. Roth, "Transparent carbon nanotube coatings ", Applied Surface Science, 252, 425–429, 2005.

[7]Ahmed Abdelhalim , Alaa Abdellah, Giuseppe Scarpa, Paolo Lugli, “Fabrication of carbon nanotube thin films on flexible substrates by spray deposition and transfer printing”, CARBON **61**, 72-79, 2013.

[8] A Jorio, M A Pimenta, AGSouza Filho, R Saito, G Dresselhaus and M S Dresselhaus,” Characterizing carbon nanotube samples with resonance Raman scattering”, New Journal of Physics 5, 139.1–139.17, 2003.

[9] Ahmed Abdelhalim , Alaa Abdellah, Giuseppe Scarpa, Paolo Lugli, “Fabrication of carbon nanotube thin films on flexible substrates by spray deposition and transfer printing”, CARBON **61,** 72–79, 2013.

ISSN: 2594-1011

Relación entre hemoglobina y glucemia en diabetes tipo 1 experimental

Lilia Ivonne Olvera Cano*, Guadalupe Cleva Villanueva**, Alfredo Cruz Orea***, Norma Sánchez Salas*
Instituto Politécnico Nacional
*Escuela Superior de Física y Matemáticas, Lindavista. C.P. 07738 Ciudad de México, CDMX
** Escuela Superior de Medicina, Casco de Santo Tomas. C.P. 11340 Ciudad de México, CDMX
*** Centro de Investigación y de Estudio Avanzados, San Pedro Zacatenco. C.P. 07360 Ciudad de México, CDMX

Resumen — **En el mundo hay aproximadamente 4000 millones de personas con diabetes, solo en México en el año 2012 hay 10 millones, pero solo 1 millón llevan un tratamiento, para controlar su glucosa.** [1]

En el mundo muere una persona por segundo, siendo la segunda causa de muerte. Pero en México es la primera causa, aproximadamente mueren al año 65 mil personas por esta enfermedad. [1]

La diabetes es una enfermedad que se caracteriza por un nivel alto de glucosa en sangre, debido a una alteración de la insulina. Debido a esta enfermedad hemos desarrollado el presente estudio analizando pruebas de sangre en ratas macho Winstar con diabetes y controles, las posibles diferencias en espectros de absorción óptico entre las ratas control y diabéticas.

Palabras clave — **Diabetes, Sangre, Plasma, Fotoacustica**

Abstract — **Around the world there are approximately 4000 million people with diabetes, only in Mexico in 2012 there are 10 million, but only 1 million have a treatment, to control their glucose.**

Around the world one person dies per second, being the second cause of death. But in Mexico it is the first cause, approximately 65 thousand people die per year from this disease.

Diabetes is a disease that is characterized by a high level of blood glucose, due to an alteration of insulin. Due to this disease we have developed the present study analysing blood tests in male Winstar rats with diabetes and controls, the possible differences in optical absorption spectra between the control and diabetic rats.

Keywords — **Diabetes, Blood, Photoacoustic**

I. DIABETES

La diabetes mellitus es un grupo de enfermedades metabólicas, que es ocasionada por un exceso de glucosa en la sangre, provocado por una alteración en la secreción de insulina. Las complicaciones a largo plazo de esta enfermedad, afecta principalmente a los ojos, riñones, hígado.

El criterio para el diagnóstico de la diabetes en una glucosa en ayunas mayor a 90mg/dl, parámetro clínico que se eligió sobre la base de la aparición de las complicaciones microvasculares, tales como la retinopatía diabética. [1]

La insulina es una hormona producida en el páncreas, esta se ubica detrás del estómago y conectada al tubo digestivo. La insulina es necesaria para el metabolismo, el proceso que convierte la glucosa en energía. [2]

Sin la insulina, la glucosa formada por la azúcar producida cuando los alimentos son digeridos provoca, que no pueda ser utilizada apropiadamente por el cuerpo. Además, la glucosa se acumula en la corriente sanguínea y se derrama en la orina causando la presencia de glucosa en la orina.

Sin un tratamiento la persona con diabetes tendrá niveles altos de glucosa en la sangre y orina, lo cual con el tiempo puede causar serias complicaciones como enfermedad de los riñones, del corazón, de los nervios y ceguera.

Para las personas con diabetes deben tener una dieta baja en carbohidratos, incluyendo el tratamiento proporcionado por el médico. [2]

Existen varios tipos de diabetes, pero en presente trabajo solo estudiaremos la diabetes tipo 1 y 2.

- **Diabetes de tipos 1**, se le conoce como diabetes insulinodependiente o diabetes juvenil, se caracteriza por la producción deficiente de insulina en el organismo. Las personas con este tipo de diabetes necesitan inyecciones diarias de insulina para regular la glucemia.
  Aún se desconoce el motivo que genera la enfermedad, pero se sabe que hay destrucción de las células beta. [3]

- **Diabetes de tipo 2**, conocida como diabetes no insulinodependiente, obedece a que el organismo no usa la insulina eficazmente. Los síntomas son muy similares a la diabetes tipo 1, pero menos intensos y aún hay casos en los que no se presentan estos síntomas.

En este caso, no hay destrucción de las células betas, pero las personas son en general obesas, provocando cierta resistencia a la insulina. [3]

Donde se observa el alto contenido de glucosa es por medio de sangre y orina.

II. SANGRE

La sangre es un tejido. Este sistema funciona para transportar plasma y glóbulos. Su funcionamiento es transportar oxígeno, tener el sistema inmune y encargado de la hemostasia que entre otras estructuras requiere de plaquetas. [4]

Al enfocarnos en la sangre observaremos un elemento: hemoglobina.

A. Hemoglobina

La hemoglobina es una proteína globular, que se presenta en altas concentraciones en los glóbulos rojos y se encarga de transportar el oxígeno a todas las partes del cuerpo. [5]

La estructura de la hemoglobina consta de dos cadenas (alfa y beta) y en cada una de ellas hay un grupo hemo. El grupo hemo es una molécula de porfirina que contiene un átomo de hierro en su centro. Este átomo se encuentra en su estado de oxidación ferroso +2 y puede formar cinco o seis enlaces de coordinación dependiendo de la unión del oxígeno molecular. [5]

Cuando la hemoglobina se junta con oxigeno molecular se le conoce como oxihemoglobina y cuando no se une se le conoce como desoxihemoglobina.

Existen varias pruebas de laboratorio para caracterizar diferentes elementos de sangre. En el presente estudio se usará una técnica, no destructiva, para obtener los espectros de absorción ópticos de sangre y plasma, esta técnica se denomina espectroscopia fotoacustica.

III. ESPECTROSCOPIA FOTOACUSTICA

El efecto fotoacústico fue descubierto por Alexander Graham Bell en 1880, pero fue utilizada hasta la década de los setentas, cuando los primeros modelos teóricos aparecieron para explicarlo.

Para observar este efecto se confina gas dentro de una cámara o celda con la muestra en el interior de esta celda, se ilumina con luz de intensidad modulada. Cuando la muestra absorbe la luz eleva su temperatura de manera modulada, originando que haya un flujo de calor modulado desde la muestra hacia sus alrededores, en particular hacia el gas confinado en la celda.

La energía suministrada al gas eleva su temperatura de manera modulada, ocasionando fluctuaciones de presión modulada en el gas, las cuales pueden ser registradas por un micrófono. [7]

El efecto fotoacústico en solidos gano el interés de algunos investigadores, como Wilhelm Rontgen y John Tyndall que realizaron estudios aplicando el efecto en gases, encontrando que se producía una señal acústica, al hacer incidir un rayo de luz modulado en un gas dentro de la celda. [7]

Esta técnica cobro mucho interés, y se desarrolló una técnica espectroscópica con la cual se han hecho importantes aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento como en física, química, biología, medicina entre otras. [8]

Una ventaja es que la técnica fotoacustica da una medida directa de la absorción (mide la radiación absorbida que relaja en forma de calor). [9] Otra ventaja de esta espectroscopia es que es no destructiva, lo que permite realizar estudios en materiales biológicos “in vivo”, así como procesos electroquímicos en tiempo real.

A. Modelo Rosencwaig-Gersho

El modelo considera una fuente primaria que produce una señal acústica, debido a la difusión de calor periódica del solido al gas en contacto, esta difusión es originada por el calentamiento periódico de la muestra, debido a la absorción de luz de la fuente de luz modulada.

Solamente una capa muy pequeña de gas en contacto con el sólido responde térmicamente al flujo periódico del calor producido en el sólido hacia el aire en contacto. Esta capa se considera como el pistón vibratorio, que origina la señal acústica, la cual se relaciona con la cantidad de luz absorbida.

Proponemos, un modelo unidimensional del flujo de calor en la celda, resultado de la absorción de la energía luminosa. La luz que es absorbida por la muestra en estudio es total o parcialmente convertida en calor, pero el gas y el soporte de la celda en contacto con la muestra no absorben la luz. [10]
Explicaremos el modelo, considerando una celda cilíndrica, llamada celda fotoacustica, mostrada en la fig. 1, la cual tiene un diámetro D y una longitud l; si esta longitud es pequeña comparada con la señal acústica, se logra detectar por medio de un sensor, en este caso un micrófono, la variación de presión promedio producida en la celda.
Si consideramos una intensidad de luz modulada, su variación temporal puede ser expresada de la siguiente manera

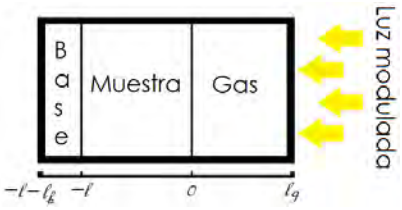


Fig. 1. Celda fotoacustica unidimensional

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + cos\omega t) \tag{1}$$

Donde I_0 es la intensidad de la luz monocromática incidente en unidades de (W/cm^2). Ahora, se considera una densidad de calor producida en cualquier punto x debido a la luz absorbida

$$\frac{1}{2}\beta I_0 e^{\beta x}(1 + cos\omega t) \tag{2}$$

Donde β es el coeficiente de absorción óptico de la muestra, en unidades de cm^{-1}.

Las ecuaciones de difusión de calor para la muestra, tomando en cuenta la fuente de calor, la base y el gas son:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial T}{\partial t} - Ae^{\beta x}(1 + e^{i\omega t}) \quad -l \le x \le 0 \quad \rightarrow Muestra \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_b}\frac{\partial T}{\partial t} \quad -l - l_b \le x \le -l \quad \rightarrow Base \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_g}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \le x \le l_g \quad \rightarrow Gas \tag{8}$$

Donde $A = \frac{\beta\eta I_0}{2k_s}$; siendo $\alpha_i \rightarrow$ la difusión térmica del medio i y $\eta \rightarrow$ la eficiencia de la luz absorbida trasformada en calor.

Resolviendo las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$T_b(x,t)) \frac{1}{l_b}(x + l + l_b)W_0 + We^{\sigma_g(x+l)+iwt} \quad ; \quad -l - l_b \le x \le -l \tag{9}$$

$$T_s(x,t) = e_1 + e_2 x + de^{\beta x} + \left[Ue^{\sigma_s x} + Ve^{-\sigma_s x} - Ee^{\beta x}\right]e^{iwt} \quad ; \quad -l \le x \le 0 \tag{10}$$

$$T_g(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l_g}\right)\theta_0 + \theta e^{-\sigma_g x + iwt} \quad ; \quad 0 \le x \le l_g \tag{11}$$

Donde W, U, V, E y θ son constantes complejas, e_1, e_2, d, W0 y θ0 son constantes reales y $\sigma_i = (1+i)a_i \ \ con \ a_i = \sqrt{\frac{w}{2\alpha_i}}$.

Aplicando las condiciones de continuidad en temperatura y flujo de calor:

$$T_g(0,t) = T_s(0,t)$$
$$T_b(-l,t) = T_s(-l,t)$$
$$k_g T'_g|_{x=0} = k_s T'_s|_{x=0}$$
$$k_b T'_b|_{x=-l} = k_s T'_s|_{x=-l} \tag{12}$$

Se obtienen los valores de las constantes. En el fenómeno fotoacústico nos enfocamos en la constante para la solución periódica del gas ya que es aquí, donde se aprecia la variación de presión del efecto fotoacústico:

$$\theta = \frac{\beta I_0}{2k_s(\beta^2 - \sigma_s^2)} \times \left[\frac{(r-1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (r+1)(b-1)e^{\sigma_s l} + 2(b-r)e^{-\beta l}}{(b+1)(g+1)e^{\sigma_s l} - (b-1)(g-1)e^{\sigma_s l}}\right] \tag{13}$$

Donde:

$$b = \frac{k_b a_b}{k_s a_s} \qquad g = \frac{k_g a_g}{k_s a_s} \qquad r = (1-i)\frac{\beta}{2a_s}$$

La variación de la temperatura, tomada la parte imaginaria de la parte del gas ya que es este medio donde se perciben las variaciones de presión y por tanto la generación de ondas acústicas:

$$T_g(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l_g}\right)\theta_0 + \theta e^{-\sigma_g x + i\omega t} \tag{14}$$

La parte dependiente del tiempo de la ecuación anterior proporciona como es la variación de la temperatura en el gas como lo muestra la figura 2.

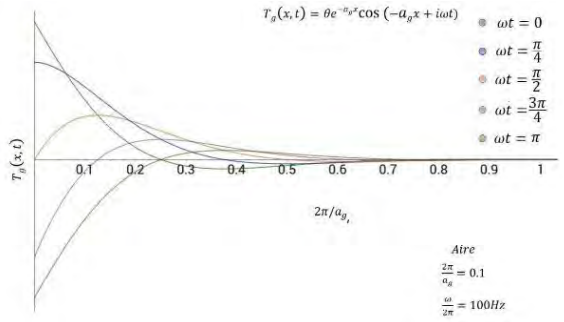


Fig. 2. Distribución espacial de la temperatura dependiente del tiempo dentro de la capa de gas adyacente a la superficie del sólido.

En esta grafica se aprecia la distancia de 2πμg=2π/ag la variación de la temperatura en el gas se amortigua casi por completo por lo cual se toma esta distancia como el pistón (capa de respuesta térmica) hacia el resto del gas, debido a la expansión térmica que se produce.

Se evalúa la expansión térmica en dicha capa, calculando el promedio espacial de la temperatura en la capa 0 a $2\pi\mu_g$

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{2\pi\mu_g}\int_0^{2\pi\mu_g} T_g(x,t)dx = \frac{\theta}{2\pi\sqrt{2}}\cos(wt - \frac{\pi}{4}) \quad (15)$$

Para el resto del gas, se considera que es un gas ideal, y en el desplazamiento del pistón se considera que hay respuesta térmica, en donde se considera un modelo unidimensional en el cual se expande.

$$\delta x_f(t) = 2\pi\mu_g \frac{\bar{T}(t)}{T_0} = \frac{\mu_g\theta}{T_0\sqrt{2}} e^{i(wt-\frac{\pi}{4})}$$

Asumimos que el resto del gas responde a la acción del pistón adiabáticamente, por lo cual el incremento de presión será:

$$\delta P = Qe^{i(wt-\frac{\pi}{4})}$$

Donde esa Q es la envolvente compleja de la variación de la presión sinusoidal quedando de la siguiente forma:

$$Q = \gamma\frac{P_o\mu_g\theta}{l_g T_o\sqrt{2}}$$

Esta ecuación es utilizada para evaluar la amplitud y fase de la onda de presión acústica.

B. Montaje del equipo

El espectrómetro fotoacústica el cual consta de:

- Lámpara de Xenón como fuente de haz de luz.
- Monocromador para la selección de diferentes longitudes de onda, provenientes de la lámpara.
- Cortador óptico mecánico para modular la luz monocromática a frecuencia fija de 17Hz.

Fibra óptica la cual guía la luz monocromática y modulada hacia la celda fotoacústica. Dentro de la celda, se encuentra un micrófono de electreto, el cual capta las variaciones de presión en ellas producidas por el efecto fotoacústico. La onda sonora captada por el micrófono es convertida a una señal eléctrica por este sensor, amplificada y enviada a un amplificador Lock-in. Finalmente, la señal fotoacústica es enviada y almacenada en una PC. [11]

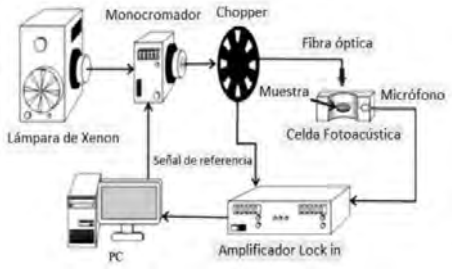


Figura 3. Esquema del equipo de espectroscopia fotoacústica

C. Aplicaciones

Usando esta técnica en el área de medicina, como una aplicación se ha sido comparar la información de propiedades de fluidos corporales anormales con respecto a fluidos corporales sanos.

Se han caracterizado diversos tipos de muestras biológicas, como el caso de la sangre por Soret en 1883.

Los picos característicos en la sangre se muestran en la figura 4, en la cual podemos ver los primeros picos, que corresponde al ADN y a los aminoácidos aromáticos.

El segundo pico corresponde al grupo hemo (γ), el tercer pico (β) y el ultimo (α) que estos dos últimos, indican la oxihemoglobina.

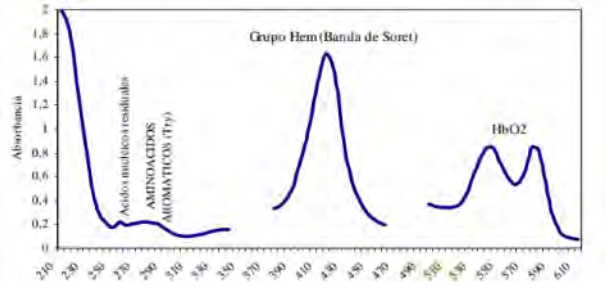


Figura 4. Banda de Soret en espectroscopia de absorción

De estos picos, se observa cierta relación entre la absorción de las razones de los picos característicos de la sangre γ/β y

γ/α cuyos valores, se ha reportado que son inversamente proporcionales a la concentración de hemoglobina. [12]

IV. METODOLOGIA

Se inducen las ratas machos Wistar a diabetes con estreptozotocina (STZ) la cantidad de esta sustancia depende del peso de cada rata.

Se toma la glucosa a los 3 días, de ser inducidas a la diabetes, además de ser pesadas, se toman 3 ratas control y 3 ratas diabéticas extrayendo muestras de sangre. Se tomará cada semana durante 10 semanas.

Se extrae 2.5ml de sangre del cual se toma 100µl para medirse en el equipo de fotoacustica.

En la ESM se recolecta la sangre, se guardan en hielo seco y se llevan al Cinvestav-Zacatenco.

V. RESULTADOS

Se analiza las muestras de sangre cuyos picos γ, β y α, si están ubicados y sus valores se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Valores de los picos de Soret y la razón entre estos

Glucosa (mg/dl)	Peso (g)	γ	λ (nm)	β	λ (nm)	α	λ (nm)	γ/β	γ/α
Semana 1 - Diabetes									
600	178	1.433	418	0.914	550	0.900	580	1.568	1.592
600	190	1.350	423	0.800	549	0.771	579	1.688	1.751
481	182	1.285	418	0.804	552	0.785	580	1.598	1.637
Semana 1 - Control									
118	210	1.208	421	0.703	551	0.680	579	1.718	1.776
121	195	1.353	420	0.720	548	0.696	582	1.879	1.944
119	188	1.227	417	0.741	550	0.715	581	1.656	1.716
Semana 3 - Diabetes									
549	218	1.258	416	0.943	547	0.938	580	1.334	1.341
598	224	1.222	419	0.823	551	0.798	581	1.485	1.531
600	190	1.287	423	0.907	552	0.877	577	1.419	1.468
Semana 3 - Control									
114	262	1.258	418	0.811	551	0.799	579	1.551	1.574
140	270	1.184	417	0.825	552	0.812	580	1.435	1.458

Cuyos espectos se muestran en la imagen 1, mostramos la evolucion de la enfermedad, y como cambian los espectros, en 1 y 3 semanas.

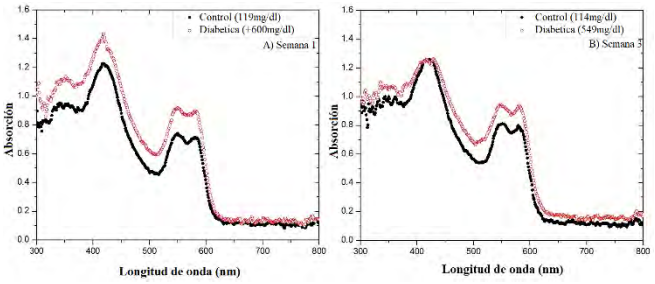


Fig. 5. Muestra la evolución de la diabetes y control, durante A) 1 semana y B) 3 semanas.

VI. CONCLUSIÓN

Para el resultado de la sangre entera, notemos que las razones γ/β y γ/α en las ratas control son más grande que en las ratas diabéticas, esto nos quiere decir, que son inversamente proporcional a la cantidad de hemoglobina que hay. Es decir, que las ratas diabéticas tienen mayor concentración hemoglobina. [13]

En la diabetes, esto se asocia a menudo con niveles elevados de hemoglobina, que a su vez se asocia con un mayor estrés en los riñones. [14]

VII. REFERENCIAS

1 Dra. Margaret Chan. **"Informe Mundial Sobre La Diabetes"** Organización Mundial de la Salud. 2016

2 Juvenile Diabetes Research Foundation. "**Información de la Insulina**" http://www.jdrf.org/austin/wp-content/uploads/sites/3/2013/02/Insulina.pdf Ingrese 9 enero 2018

3 Dra. Margaret Chan. **"Informe Mundial Sobre La Diabetes"** Organización Mundial de la Salud. 2016

4 María Eugenia Victoria Bianchi "**Introducción a la fisiología**" Catedra de Fisiología Humana. Carrera de Enfermería, UNNE. Capítulo 6: Sangre

5 Peñuela, Oscar Andrés. "**Hemoglobina: una molécula modelo para el investigador**". Colombia Médica, vol. 36, núm. 3, julio-septiembre, 2005, pp. 215-225. Universidad del Valle. Cali, Colombia

6 Garrido Amando "Fundamentos Bioquímica de Estructural" 2da edición. Editorial Tebar, S.L. Madrid año 2006. ISBN 978-8-7360-228-0. Tema 11 Proteínas plasmáticas y coagulación sanguínea, pagina 163.

7 Gutiérrez. A., "**Técnica fotoacustica aplicada a la determinación de propiedades térmicas de muestras de silicio poroso**". Revista Mexicana de Física 57 (2) 99-105

8 Tesis: Lorena Patricia Ramirez Rangel "**Caracterización térmica y microscópica de materiales usando un micrófono electrect en la técnica fotoacustica**" ESIME. Mex. DF. 2013

9 Jesús Madrigal Melchor "Una alternativa para la detección temprana del cáncer de mama: Espectroscopia optoacústica pulsada Parte 2" http://www.eslocotidiano.com/articulo/tachas-12/alternativa-deteccion-temprana-cancer-mama-espectroscopia-optoacustica-pulsada-parte-2/20130824103341004893.html Ingrese el dia 11 de enero 2018

10 Rosencwaig A., "**Theory of Photoacoustic effect of Solids**". J. Appl. Phys., 7, Pag 64-69 (1976)

11 Gutiérrez. A., "**Técnica fotoacustica aplicada a la determinación de propiedades térmicas de muestras de silicio poroso**". Revista Mexicana de Física 57 (2) 99-105

12 Peñuela, Oscar Andrés. "**Hemoglobina: una molécula modelo para el investigador**". Colombia Médica, vol. 36, núm. 3, julio-septiembre, 2005, pp. 215-225. Universidad del Valle. Cali, Colombia

13 J L González-Domínguez, C Hernández-Aguilar, F A Domínguez-Pacheco, E Martínez-Ortiz, A Cruz-Orea, and F Sánchez-Sinencio, "**Absorption Peaks: α, β, γ and Their Covariance with Age and Hemoglobin in Human Blood Samples Using Photoacoustic Spectroscopy**" Int. J Thermophys 33 (2012), no. 33.

14 Dra. Lizbeth "**Niveles altos de hemoglobina: diecisiete razones por las que aumenta la producción de hemoglobina**" https://www.saludconsultas.com/niveles-altos-de-hemoglobina-diecisiete-razones-por-las-que-aumenta-la-produccion-de-hemoglobina/33768 Ingrese el dia 11 de enero 2018

ISSN: 2594-1011

Mini-Módulo Fotovoltaico (5cm^2 x10cm^2) interconectado y analizado bajo diferentes condiciones

C. Hernández Vasquez[1], M. A. González Trujillo[2], M.L Albor Aguilera[1], L. A. Esquivel Mendez[1], R.C. Ruiz Ortega[1], F.A. Pulgarín Agudelo[1]

[1] Instituto Politécnico Nacional-ESFM, Depto. de Física, U.P.A.L.M., San Pedro Zacatenco, CDMX. 07738, México
[2] Instituto Politécnico Nacional-ESCOM, Depto. de Formación Básica, U.P.A.L.M., Lindavista, CDMX, 07738, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55054 Fax (55) 5729-55015 E-mail: chernandezex@gmail.com

Resumen — **Celdas solares a nivel laboratorio (ESFM-IPN) han sido estudiadas por largo tiempo obteniendo eficiencias de hasta 17%. Sin embargo, se hace necesario desarrollar celdas en áreas grandes (100 cm^2) para su posterior comercialización, utilizando tecnologías económicas. Un mini-módulo fotovoltaico (40cm^2) con una eficiencia de 2% fue desarrollado; el dispositivo fue analizado durante diferentes horas del día con el fin de observar el desempeño eléctrico (I, V, R y P), logrando observar una estabilidad en corriente y una reducción de potencia de salida del mini-módulo.**

Palabras Clave – **CdS/CdTe, Desempeño fotovoltaico, Mini-Módulo fotovoltaico**

Abstract — **Solar cells at laboratory level (ESFM-IPN) have been studied for a long time obtaining efficiencies of up to 17%. However, is necessary develop solar cells in large areas (up to 100 cm^2) for subsequent commercialization, using economic technologies. A mini- module photovoltaic (40cm^2) and efficiency of 3% was developed; its was analyzed along the day, studying the electrical behavior (I, V, R, P), observing stable current and a reduction in the power of the mini-module photovoltaic.**

Keywords — **CdS/CdTe, Photovoltaic performance, Mini-module photovoltaic**

I. Introducción

Módulos fotovoltaicos son componentes de un sistema que permite convertir radiación solar directamente en electricidad. Teniendo establecido el funcionamiento de estos se pueden diseñar y generar diferentes condiciones para que estas produzcan mejores eficiencias. Los módulos fotovoltaicos deben de cumplir con ciertas condiciones para que sean rentables, es decir deben de ser producidas con un bajo costo, tener rentabilidad a largo plazo y sobre todo un buen desempeño de conversión. La eficiencia de los módulos fotovoltaicos es importante para el área de energía ya que ayuda a la reducción de CO_2, considerando la instalación de grandes sistemas fotovoltaicos [1].

De tal forma que para poder diseñar un buen sistema se debe de tener un completo entendimiento del proceso, operación y desarrollo del mismo; sin embargo, deben de ser estudiadas bajo condiciones ambientales que son los verdaderos problemas [2].

Otro de los principales problemas en el estudio los módulos fotovoltaicos es degradación, dicha degradación puede estar presente en diferentes partes, etapas de procesamiento como lo son la interconexión, los materiales semiconductores con los que se procesan las celdas solares están pueden ser películas delgadas o materiales en bulto, dependiendo de la tecnología utilizada en el procesamiento de las celdas [3].

El módulo fotovoltaico es fuertemente afectado por la acción de la temperatura a lo largo del día, ya que tiene un impacto directo en la eficiencia.

En este trabajo se analizó un mini-modulo fotovoltaico desarrollado en los laboratorios de la ESFM-IPN obteniendo una eficiencia de 3% interconectando 8 celdas en serie. A lo largo de un día fueron analizados los valores de corriente, Voltaje y resistencia del dispositivo funcionando con un led (naranja), de dicho estudio se logró observar el comportamiento del mini-modulo bajo diferentes intensidades de radiación proveniente del sol.

II. Metodología

El módulo fotovoltaico fue desarrollado con la tecnología de película delgada donde se utilizó una configuración superestrato (incidencia de la luz por el vidrio), la configuración utilizada como se muestra en la figura 1, permite observar el sustrato de vidrio con un recubrimiento comercial de óxido de estaño dopado con flúor o mejor conocido como un conductor transparente (FTO por sus siglas en inglés Fluorine doped Tin Oxide), seguido de una película delgada de CdS como material ventana o bien semiconductor tipo-n depositado por baño químico (DBQ), seguido de esta película se depositó una película de CdTe como material absorbente que es conocido como semiconductor tipo-p este material se deposita por sublimación en el sistema CSVT (por sus siglas en inglés Close Space Vapor Transport), finalmente se depositan contactos de Cu/Au por evaporación. Durante el desarrollo del módulo se generaron tres rayados laser para realizar una interconexión en serie de las 14 celdas, estos rayados se observan en la figura 2 donde el rayado P1 subdivide el contacto anterior, el rayado P2 se realiza sobre la unión CdS/CdTe lo cual garantiza la separación de las celdas y finalmente se realiza el rayado P3 que subdivide el contacto posterior (Cu/Au) [4].

Se utiliza un láser de λ= 532 nm con duración de pulso de 50 ns, un expansor de haz de 10X, una lente de enfoque y una mesa XYZ. Se interconectan 14 celdas en serie. Después de realizado el mini-modulo se colocó sobre una base que permite colocarlo de manera fija y poder hacer la

adquisición de datos del dispositivo, así como el poder conectarle diferentes dispositivos al módulo fotovoltaico.

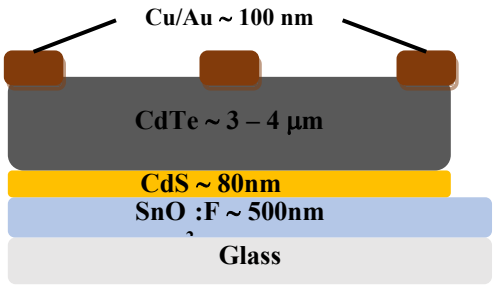


Fig. 1. Configuración superestrato de una celda solar de CdS/CdTe

El mini-modulo fotovoltaico fue caracterizado eléctricamente utilizando un simulador solar del cual se obtuvieron mediciones I-V utilizando un equipo Sol3A Class AAA IEC/JIS/ASTM, 1000 Watt Xenon con una fuente de luz de 100mW/cm^2 – AM1.5. Para el análisis bajo diferentes horas del día se utilizó un amperímetro, voltímetro con el fin de monitorear a diferentes horas del día el comportamiento del mini-modulo fotovoltaico.

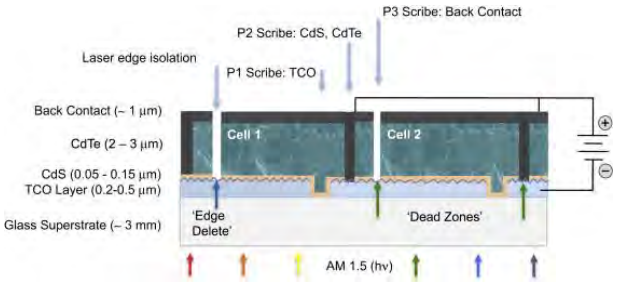


Fig. 2. Configuración de los rayados para la interconexión de un mini-módulo de CdS/CdTe [4]

III. Resultados

A. Caracterización eléctrica del mini-módulo de CdS/CdTe

El mini-modulo fotovoltaico (ver figura 3) fue estudiado principalmente utilizando el simulador solar para observar el efecto fotovoltaico, determinar la eficiencia del dispositivo interconectado, así como los puntos de máxima potencia, los valores de densidad de corriente en corto circuito y el voltaje de circuito abierto.

Fig. 3. Mini-módulos de CdS/CdTe

Los valores obtenidos son valores esperados para este módulo, considerando que se interconectaron 14 celdas y se obtuvo un voltaje de la interconexión de 8V podemos inferir que cada celda que compone el modulo tiene una V_{OC} de 571 mV este valor es un valor que tiene una relación directa con las celdas en área pequeña (una pulgada cuadrada) que se desarrollan.

TABLA I.
PARÁMETROS ELÉCTRICOS DEL MINI-MODULO FOTOVOLTAICO

Mini-Módulo	Parámetros eléctricos			
	J_{SC} (mA/cm2)	V_{OC} (V)	FF (%)	η (%)
C-4	1.075	8	32	2.8

La figura 4 permite observar la curva I-V del mini-módulo fotovoltaico, así como la curva de potencia del dispositivo donde se logra determinar el punto de máxima potencia (82mW) que puede proporcionar el módulo. Por otro lado es fácil apreciar que debido a la interconexión de las celdas solares por medio del rayado laser, el voltaje no decae lo cual es bueno obteniendo un voltaje de 8V al interconectar 14 subceldas. Por otro lado el factor de llenado del módulo (FF) es fuertemente afectado por los valores de resistencia en serie y resistencia en paralelo, las cuales son promovidas por los materiales semiconductores al estar en contacto con los contactos metálicos Cu/Au, aunado a esto el rayado laser genera zonas muertas que representan una perdida resistiva de corriente.

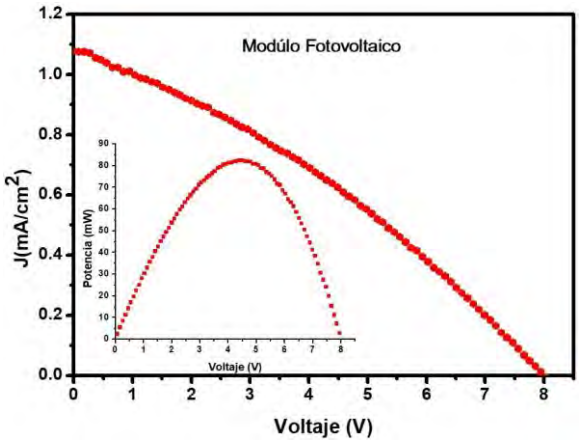


Fig. 4. Curvas J-V y P-V del mini-módulo de CdS/CdTe

B. Análisis del mini-módulo bajo diferentes horas del día

El mini-modulo fotovoltaico fue analizado y sometido a diferentes radiaciones, a lo largo del día y utilizando un simulador solar como se observa en la figura 5.

Fig. 5. Imágenes de mini-módulo sometido a diferentes radiaciones.

El desempeño del módulo fotovoltaico bajo diferentes horas del día (de 11:00 am a 18:00 pm) se observa en el estudio realizado de la corriente, voltaje y resistencia al tener un diodo emisor de luz (LED) conectado y en funcionamiento. Como se logra observar en la figura 6 la corriente medida desde las 11:00 am hasta las 18:00 pm se mantiene constante, de tal forma que podemos decir que independiente de la radiación se puede generar una corriente constante para el dispositivo que se pueda conectar al mini-módulo fotovoltaico.

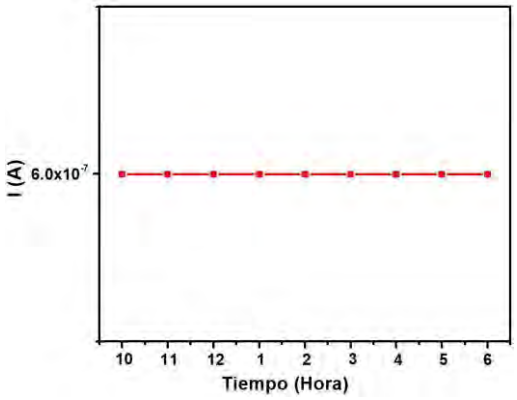


Fig. 6. Datos de corriente (I) medida a lo largo del día con un LED funcionando.

El voltaje que se genera por las celdas solares varia conforme el tiempo transcurre a lo largo del día, es fácil observar que de las 10:00 am a las 12:00 pm se observa un bajo voltaje lo cual es comprensible debido a que la intensidad de la radiación es menor a los 100mW/cm^2 para este caso de estudio es decir se trata de simular y tener las condiciones simulares a las generadas por un simulador solar, situación similar se presenta de las 2:00 pm a las 5:00 pm donde la intensidad baja respecto a la posición del sol, es importante mencionar que el mini-módulo se mantuvo en la misma posición (0°- horizontal) sin seguir en ningún momento al sol. Finalmente se observa una región constante en la cual se observa un máximo en la intensidad del sol así como en voltaje (ver figura 7).

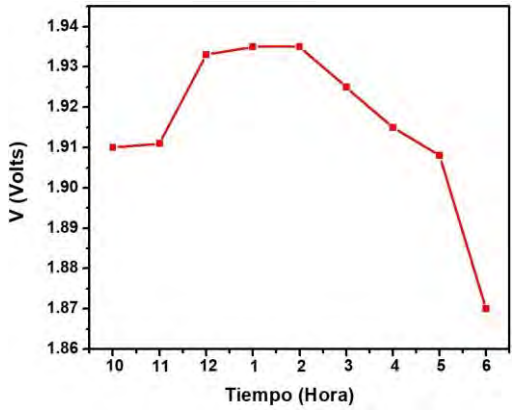


Fig. 7. Datos de corriente (I) medida a lo largo del día con un LED funcionando.

Por otro lado bajo las mismas horas se analizó la resistencia que se estaba generando en el mini-modulo y el dispositivo conectado, se debe de considerar que la resistencia tiene una relación directa con la temperatura, en este caso se puede observar que mientras menor radiación incide sobre el mini-modulo la resistencia es baja lo cual sucede entre 10:00 am a 11:00 am y 5:00 pm a 6:00 pm. De tal forma que con el dispositivo conectado se observan claramente incrementos de resistencia (ver figura 8).

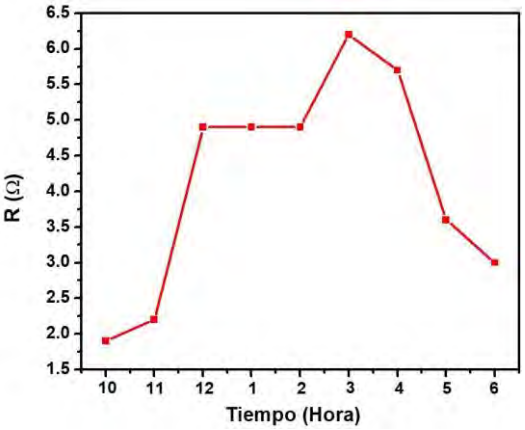


Fig. 8. Valores de resistencia (R) medida a lo largo del día con un LED funcionando.

IV. Conclusiones

El desarrollo de celdas solares con eficiencias del orden de 17% en áreas pequeñas, permitió entender cuáles son las condiciones óptimas por la cuales el mini-modulo pudo funcionar y ser interconectado de tal forma que se obtuvieron eficiencias del 3%. La implementación de un rayado laser generar una interconexión mucho más fina y con menores perdidas, además de que solamente se utilizó una sola longitud de onda para realizar los tres rayados. El desempeño de la celda solar a lo largo de un día es fundamental conocer ya que de esta forma se pueden determinar cuáles son las partes o regiones de la celda que deben de ser revisadas. La corriente es estable en la celda

solar a lo largo del día, el voltaje vario respecto la intensidad de radiación así como la resistencia.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por el proyecto CEMIe-Sol P25, SENER así como los proyectos SIP-2018439, SIP-20180398.

REFERENCIAS

[1] Masakazu Ito, Kazuhiko Kato, Keiichi Komoto, Tetsuo Kichimi and Kosuke Kurokawa, “A comparative study on cost and life cycle analysis for 100MW very large-scale PV (VLS-PV) systems in Deserts Using m-Si, a-Si, CdTe, and CIs Modules” *Prog. Photovolt: Res. Appl.*, 2008, 16, pp. 17-30.

[2] M. A. Quintana and D. L. king, Sandia, ”Commonly observed degradation in field-aged photovoltaic modules”, IEEE Press, 2002, pp. 1436-1439.

[3] E. Skoplaki, J. A. Palyvos, “Operating temperature of photovoltaic modules A survey of pertinent correlations”, *Renewable Energy 34, 2009, 23-29*.

[4] Daniel Jiménez Olarte, “Interconexión eléctrica en celdas solares de CdS/CdTe por escritura laser y su efecto en las propiedades de los materiales policristalinos que las constituyen” Tesis de doctorado 2015.

ISSN: 2594-1011

Influencia del uso de tolueno sobre la dispersión de micropartículas de Ag en PDMS.

Obregón G. Jesús[1], García P. Georgina[1], Munguía C. Jacobo Esteban[2]
[1]ESIME Unidad Ticomán-IPN, Ciudad de México, México
[2]CNMN-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 E-mail: ogarciajesus@hotmail.com

Resumen —**En este trabajo se estudia el efecto del uso del tolueno en la calidad de la dispersión de micropartículas de Ag (1-3 µm) en una matriz de PDMS, en particular para la fabricación de películas. Se presenta la comparación de la dispersión en muestras resultado de dos procesos de fabricación, con y sin tolueno. Las imágenes obtenidas a partir de microscopia óptica indican una disminución significativa del grado de aglomeración de las micropartículas de Ag de aproximadamente un 70% en relación a la película sin tratamiento con tolueno.**

Palabras Clave – **micropartículas, dispersión, Ag, PDMS**

Abstract — **In this work the effect of use toluene on the dispersion quality of Ag microparticles (1-3 µm) in a PDMS matrix is studied, in particular for the manufacture of films. The comparison of dispersion in samples resulting from two manufacturing processes, with and without toluene, is presented. The images obtained from optical microscopy indicate a significant decrease in the degree of agglomeration of the Ag microparticles of approximately 70% in relation to the film without treatment with toluene.**

Keywords — **microparticles, dispersion, Ag, PDMS**

I. Introducción

En años recientes, se ha incrementado el interés por materiales compuestos por mezclas de dos tipos de fases, una conductora y una aislante. En específico, para la fabricación de dispositivos electrónicos flexibles, debido a la contribución de los dos componentes a las propiedades finales del material. La fase dieléctrica, normalmente matriz del compuesto, contribuye con una alta flexibilidad; mientras que la fase conductora al aumento de la movilidad electrónica. En este contexto, polidimetilsiloxano (PDMS) es el material más ampliamente utilizado como matriz en este tipo de compuestos electrónicos, ya que, sus propiedades físicas y químicas permanecen estables a lo largo de un amplio rango de temperaturas, de -50 a 200 °C [1].

La fase conductora suele componerse de micro o nano partículas de Ag y/o C [2-3] dispersadas en la matriz de PDMS. La contribución de dichas partículas sobre la conductividad del compuesto se observa a partir de una fracción volumétrica mínima, denominada umbral de percolación. Para concentraciones superiores a este valor se forman caminos continuos de partículas conductoras que permiten el flujo de corriente eléctrica a través del material, mientras que, en concentraciones menores, la separación entre ellas, es tan significativa, tal que no se observa un cambio en la conductividad.

El umbral de percolación, como se ha demostrado experimentalmente [4], disminuye al disminuir el tamaño de partícula; debido a que, aumenta el área superficial, favoreciendo la proximidad entre las partículas. Por tanto, el tamaño de partícula y la homogeneidad de la dispersión son fundamentales para generar compuestos poliméricos conductores con menor umbral de percolación, lo que deriva en compuestos más flexibles y baratos.

Las microparticulas de Ag tienden a formar aglomerados de diversos tamaños. Al dispersar estas partículas en una matriz de PDMS se generan dispersiones no homogéneas. Por ello, en este trabajo se propone disminuir el grado de aglomeración utilizando surfactantes, los cuales son solventes orgánicos, tal como; tolueno, metanol y heptanol.

II. Metodología

En la Fig. 1 se ilustran los procesos de fabricación utilizados, sin el uso de solvente y con el uso de solvente. En ambos casos el volumen de compuesto final deseado son 2 ml.

Sin solvente, la cantidad deseada de micropartículas (1-3 µm) de Ag, 30 %peso, es distribuida en el monómero de PDMS, adicionado con un agente catalizador a una razón de 10:1 (w/w, de PDMS), por medio de agitación de alta velocidad. La mezcla resultante se somete a vacío durante 30 min para eliminar burbujas de aire y se deposita en un sustrato de vidrio, distribuyéndola por centrifugación a 2000 rpm para generar una película delgada. Finalmente se somete la muestra a curado térmico a 75 °C durante 2 h.

El segundo procedimiento, implica la acción del surfactante sobre las partículas de Ag. Inicialmente, se realizó una dispersión con 1 ml de tolueno y 0.47 g de micropartículas de Ag en un baño ultrasónico con 3 ciclos de operación de 2 minutos con 20 s de descanso. Posteriormente, se agrega el monómero de PDMS y se repiten nuevamente los 3 ciclos de operación del baño ultrasónico, para finalmente añadir el catalizador en una razón de 1:10 en peso.

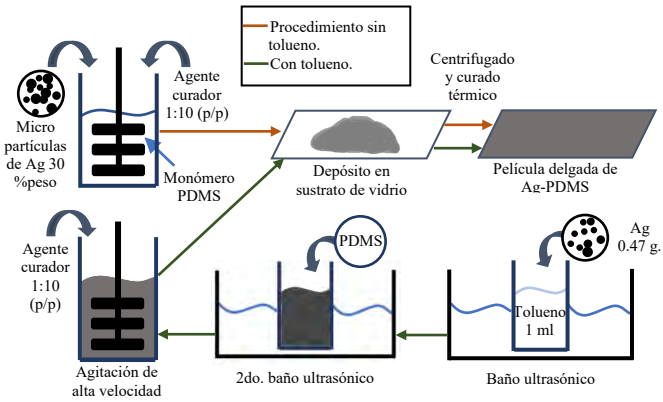


Fig. 1. Esquema de los procesos de fabricación de películas delgadas de Ag-PDMS

III. Resultados

En las Fig. 2 y 3 se observan las imágenes de microscopio óptico de las dos muestras obtenidas en cada uno procedimientos anteriores.

En la Fig. 2 se muestran aglomerados de micropartículas de tamaños y distancias entre ellos muy variados, siendo los más grandes de hasta 100 µm de diámetro. Estos grandes cúmulos irregulares de partículas incluso sobresalen de la matriz polimérica, obteniéndose así diversos espesores de película.

Para el caso con tolueno (Fig. 3), toda la fase conductora se encuentra embebida en la matriz, por lo que se logra un espesor uniforme en la película. Los tamaños de cúmulos de partículas continúan teniendo morfología irregular, pero el grado de aglomeración disminuye significativamente, siendo el tamaño promedio más grande de ~30 µm y consecuentemente, se obtiene mayor homogeneidad en la dispersión.

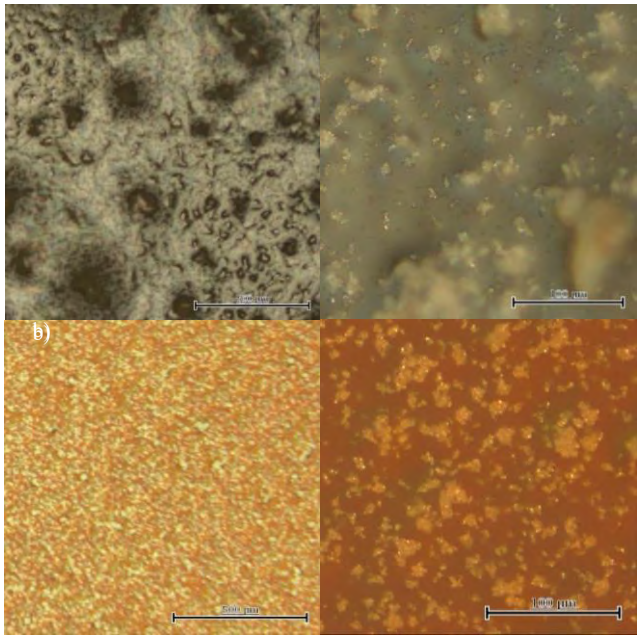


Fig. 3. Película de Ag-PDMS obtenida con tolueno.

IV. Discusión

Los primeros resultados preliminares indican que el uso de tolueno, modifica la calidad de la dispersión de las micropartículas de Ag en PDMS. Si bien, aún se tienen aglomerados, se redujeron un 70% en tamaño y la homogeneidad lograda es mayor que en el proceso de fabricación sin solvente.

De acuerdo con [5], esta mejora en la dispersión se debe a que, una vez disminuido el grado de aglomeración, la viscosidad del solvente/matriz polimérica les permite reagruparse, mejorando la calidad de la dispersión.

V. Conclusiones

A partir de la evidencia experimental proporcionada, es factible que el uso de surfactantes como el tolueno mejore la homogeneidad de la dispersión de micropartículas de Ag en PDMS. No obstante, es necesario probar otros surfactantes como el metanol o heptanol para entender de manera general su influencia en este compuesto.

Agradecimientos

Este trabajo fue finaciado con el proyecto SIP 28181499 del IPN. Jesús Obregón García es becario CONACyT y BEIFI del IPN, Georgina García Pacheco es becaria COFAA y EDD, Jacobo Esteban Munguía Cervantes pertenece al SNI y es becario COFAA y EDI.

Referencias

[1] H. Cong and T. Pan "Photopatternable Conductive PDMS Materials for Microfabrication" Advanced Functional Materials, 2008, pp. 1912-1921.

[2] X. Niu, S. Peng, L. Liu, W. Wen, P. Sheng. "Characterizing and Patterning of PDMS-Based Conducting Composites" Advanced Functional Materials, 2007, pp. 2682-2686.

[3] J. J. Wang, M. Y. Lin, H. Y. Liang, R. Chen and W. Fang "Piezoresistive Nanocomposite Rubber Elastomer For Stretchable MEMS Sensor" MEMS, 2016, pp. 24-28.

[4] X. Jing, W. Zhao and L. Lan "The effect of size on electric conducting percolation threshold in polymer/conducting particle composites" Journal of Materials Science Letters, 2000, pp. 377-379.

[5] A. Khosla "Nanoparticle-doped Electrically-conducting Polymers for Flexible Nano-Micro Systems" The electromechanical Society, 2012, pp 67-70.

ISSN: 2594-1011

Propiedades estructurales de películas de CdS dopadas con zinc

Uziel Galarza Gutiérrez[1], María de Lourdes Albor Aguilera[1*], Miguel Ángel González Trujillo[2], José Manuel Flores Márquez[3]

1. Instituto Politécnico Nacional-ESFM, Depto. de Física, U.P.A.L.M. Zacatenco, CDMX, 07738, México
2 Instituto Politécnico Nacional-ESCOM, Depto. de Ciencias Básicas, U.P.A.L.M. Zacatenco, CDMX, 07738, México
3 Instituto Politécnico Nacional-ESIQIE, Depto. de Ingeniería en Metalurgia y Materiales, U.P.A.L.M. Zacatenco, CDMX, 07738, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55054 *E-mail: lourdesalbor10@gmail.com

Resumen —**El Sulfuro de Cadmio (CdS) continúa siendo uno de los semiconductores más estudiados debido a sus propiedades físicas óptimas para su uso en dispositivos optoelectrónicos. Películas de CdS fueron depositadas por la técnica de depósito por baño químico, algunas muestras fueron dopadas in situ con soluciones de Zinc en diferentes concentraciones, sus propiedades optoelectrónicas y estructurales fueron estudiadas.**

Palabras Clave – **CdS, Dopaje con Zinc, Baño Químico.**

Abstract — **Cadmium sulfide (CdS) remains as a widely studied semiconductor due to its optimum properties to be applied in optoelectronic devices. CdS thin films were deposited by chemical bath deposition technique and some samples were in situ doped with Zicn Solutions at different concentrations. The optical and structural properties were studied.**

Keywords — **CdS, Zinc Doped, CBD.**

I. Introducción

El Sulfuro de Cadmio continúa siendo el material más estudiado para aplicaciones en celdas solares debido a que ha alcanzado las eficiencias más altas en estos dispositivos. Es depositado generalmente por depositado en baño químico debido a que es un proceso de bajo costo y de grandes áreas [1]. Sin embargo, el uso de CdS no se limita a celdas solares sino que también tiene aplicación en diodos emisores de luz, fotodetectores IR, láseres eléctricamente conducidos y nanocristales estables solución tienen posibles aplicaciones biológicas como etiquetas fluorescentes [2]. En celdas solares dos requisitos son básicos para la capa ventana: alta transmitancia y baja resistividad para evitar el efecto de corto circuito entre las fronteras de grano del semiconductor. Sin embargo la resistividad del CdS sin dopar limita su uso en celdas solares.[3]. En general, se ha observado que, cuando se agregan iones dopantes con radios iónicos ligeramente más pequeños que el Cd^{+2} la conductividad incrementa y la celda unitaria se compacta [4]. En este sentido, el Zinc es un importante metal de transición y con un radio iónico de 0.074 nm, ligeramente más pequeño que Cd^{+2} que puede penetrar en la red del CdS y sustituir en posiciones de Cadmio[5].

En este trabajo se estudiaron los cambios estructurales de películas de CdS dopadas en el mismo experimento con soluciones de Zinc a diferentes concentraciones.

II. Metodología

Se depositaron películas delgadas de Sulfuro de Cadmio por la técnica de baño químico con soluciones precursoras de NH_4Cl (0.2) M, $CdCl_2$ (0.12) M, NH_3 (2M) y $CS(NH_2)_2$ (0.3) M en sustratos de vidrio con oxido conductor transparente SnO_2:F (FTO) a una temperatura de 75 °C durante 6 minutos. Se realizaron dopajes en el mismo experimento de depósito a partir de soluciones de $ZnCl_2$ a 1M usando 1, 0.5 y 0.1 ml respectivamente. Después del depósito todas las muestras fueron tratadas térmicamente en una atmósfera de aire a 450°C por una hora.

Las propiedades estructurales fueron analizadas usando la técnica de difracción por rayos X en la modalidad Haz rasante a 0.5° por un sistema Bruker D8 Advance usando la línea CuK.. Análisis de espectroscopia Raman fueron hechos usando un microscopio Raman Thermo Scientific con un láser de argón de 514.5nm.

III. Resultados

En la figura 1 se muestran los difractogramas obtenidos de las películas delgadas de CdS, donde se observa una mezcla entre fases provenientes del sustrato FTO, cuyos planos cristalinos fueron identificados de acuerdo a la carta PDF 41-1445, la fase hexagonal del CdS, cuyos planos cristalinos fueron identificados de acuerdo a la carta PDF 41-1049, y la fase cúbica del óxido de cadmio, cuyos planos cristalinos fueron identificados de acuerdo a la carta PDF 05-0640.

La Figura 2 muestra un acercamiento del plano (002) correspondiente a la estructura hexagonal del CdS, como se puede observar, existe un corrimiento hacia ángulos más bajos, cuando las películas son dopadas con Zinc, lo que puede indicar una deformación en la red debido a la incorporación de Zinc en la misma.

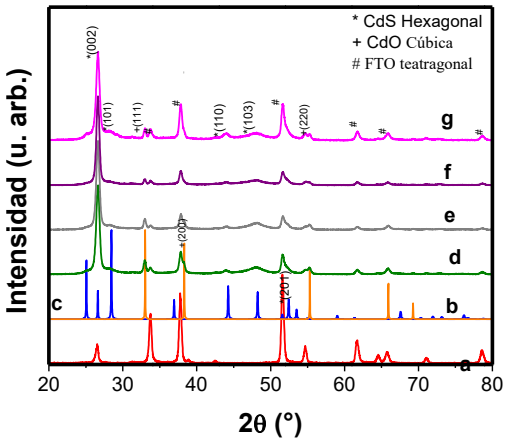


Fig. 1 Difractogramas obtenidos de a) Sustrato FTO b) CdS modelado c) CdO modelado d) CdS:Zn sin dopar e) CdS:Zn 0.1 f) CdS:Zn 0.5 g) CdS:Zn 1

Los parámetros "a" y "c" fueron calculados de acuerdo a la forma del sistema hexagonal como sigue:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{4}{3}\frac{h^2+hk+l^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} \qquad (1)$$

Los resultados se muestran en la Tabla 1, la pequeña deformación de los parámetros de red de las películas CdS:Zn puede deberse a la incorporación de Zinc en la red debido a la diferencia entre los radios iónicos de Zn y Cd, sugiriendo así la sustitución de átomos de cadmio por zinc.

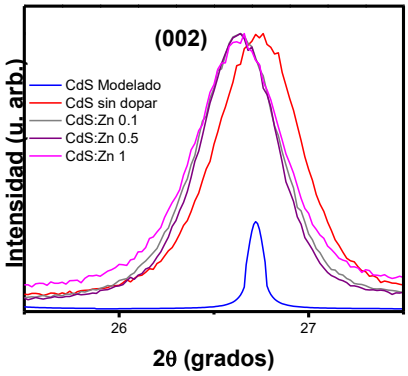


Fig. 2 Difractogramas obtenidos de CdS modelado, CdS sin dopar, CdS:Zn 0.1, CdS:Zn 0.5 y CdS:Zn 1

TABLA 1 PARÁMETROS DE RED DE LAS PELÍCULAS DE CdS OBTENIDAS

Muestra	Ángulo 2θ (002)	d	a	c
CdS Sin dopar	26.742	3.3309	4.0794	6.6618
CdS:Zn 0.1	26.642	3.3432	4.0945	6.6864
CdS:Zn 0.5	26.640	3.3434	4.0947	6.6868
CdS:Zn 1	26.659	3.3411	4.0919	6.6822

La figura 3 muestra los espectros medidos de espectroscopia Raman de las películas obtenidas. Todas las muestras presentan la vibración longitudinal (LO) característica del CdS a 300 cm^{-1} y para la muestra dopada con 1ml de solución de Zinc otra señal de resonancia de primer orden aparece en 601 cm^{-1} (2LO). La intensidad de la señal LO se ve considerablemente reducida para la muestra Cds:Zn 0.5, lo cual sugiere una incorporación sustitucional del Zn en la red de CdS lo cual corresponde a los resultados obtenidos en DRX.

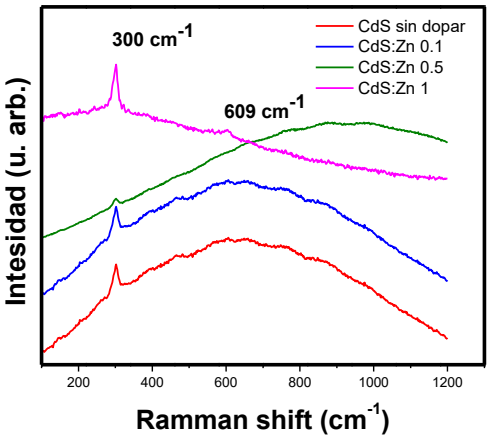


Fig. 3 Espectros Raman obtenidos de CdS sin dopar, CdS:Zn 0.1, CdS:Zn 0.5 y CdS:Zn 1

IV. Conclusiones

Se obtuvieron películas delgadas de Sulfuro de Cadmio por la técnica de baño químico. Algunas de estas películas fueron dopadas con Zinc en el mismo experimento de depósito a partir de soluciones de Cloruro de Zinc.

Los resultados de difracción de rayos X revelan la deformación de la red de CdS debido a la incorporación del Zinc de forma sustitucional. Estos resultados fueron confirmados por espectroscopia Raman donde se observa una disminución de la señal de vibración longitudinal característica del CdS.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por los proyectos CeMIE-Sol P25, SIP 20180398 y 20180439

Referencias

[1]A. Romeo, M. Terheggen, D. Abou-Ras, D.L.Batzner, F.-J. Haug, D. Rudmann, A. N. Tiwari. Prog. Photovolt: Res. Appl. 2004; 12:93–111
[2] H. Sekhar, Narayana Rao. J Mater Sci (2012) 47:1964–1971
[3] P. Roy and S. Kumar Srivastava J. Phys. D: Appl. Phys. **39** (2006) 4771–4776
[4] Sathyamoorthy R., Sudhagar P., Balerna A., Balasubramanian C., Bellucci S., Popov A.I., Ashokan K., J. Alloy. Compnd., 493 (2010), 240.
[5] M. ANBARASI, V.S. NAGARETHINAM, A.R. BALU Materials Science-Poland, 32(4), 2014, pp. 652-660.

ISSN: 2594-1011

Influencia del tiempo de depósito en las propiedades morfológicas y estructurales de películas delgadas de ZnS depositadas por la técnica de baño químico.

J. A. Ortega Cardenas[1], M. L. Albor Aguilera[1], H. T. Yee Madeira[1], M. A. González Trujillo[2].
[1] Instituto Politécnico Nacional, ESFM, U.P.A.L.M., San Pedro Zacatenco 07738, CDMX, México.
[2] Instituto Politécnico Nacional, ESCOM, U.P.A.L.M., San Pedro Zacatenco 07738, CDMX, México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55054 E-mail: j.angelica.ortegac@gmail.com

Resumen — **En los últimos años el material semiconductor ZnS se ha convertido en un gran candidato para ser implementado como capa buffer en celdas solares de película delgada. El sulfuro de zinc tiene un valor de brecha prohibida de $3.7\ eV$ y una transmitancia óptica entre 80-90 % en la región del visible. Las películas de ZnS fueron crecidas mediante la técnica de depósito por baño químico sobre sustratos de soda-lima FTO (SnO_2: F) variando solo el parámetro tiempo. Se obtuvieron una serie de películas y fueron analizadas por las técnicas de Perfilometría, SEM, EDS-X y DRX.**

Palabras Clave – **baño químico, tiempo de depósito, ZnS**

Abstract — **In recent years the ZnS semiconductor material has become a great candidate to be implemented as a buffer layer in thin film solar cells. Zinc sulfide has a band gap value of 3.7 eV and optical transmission between 80-90% in the visible region. ZnS films were growth by Chemical Bath Deposition technique on substrates of soda-lime FTO (SnO_2: F) varying only the deposit time. The films obtained were analyzed by the Profilometry, SEM, EDS-X and XRD techniques.**

Keywords — **chemical bath, deposit time, ZnS**

I. Introducción

La energía solar forma parte de las energías renovables, esta es obtenida a partir del aprovechamiento de la radiación electromagnética procedente del Sol [1]. En la actualidad, la luz del sol puede aprovecharse por medio de diversos captadores, como lo son las celdas solares, transformando la radiación en energía eléctrica. Por otro lado, entre las principales técnicas para el depositó de películas delgadas se destaca la de Deposito por Baño Químico (DBQ) donde los parámetros temperatura y tiempo de depósito son las principales variables ya que la técnica consiste en sumergir un sustrato en una solución determinada [2]. En la técnica de DBQ existen cuatro diferentes mecanismos de crecimiento, ion a ion, por hidróxidos, ion a ion con descomposición de complejos y por hidróxidos con descomposición de complejos [3]. Para el caso de ZnS el mecanismo de crecimiento se lleva a cabo por hidróxidos con descomposición de complejos, puesto que se necesita el compuesto intermedio $Zn(OH)_2$ para dar lugar al ZnS. El mecanismo de crecimiento se muestra en la figura 1.

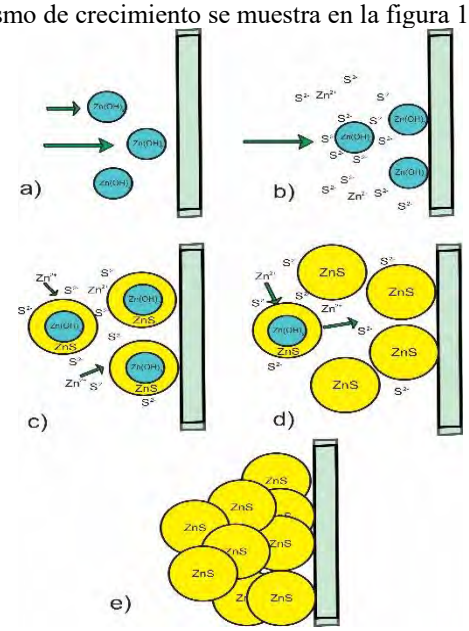


Figura 1. Mecanismo de crecimiento del ZnS.

La figura anterior muestra el mecanismo de crecimiento para las películas de ZnS en el inciso *a)* las partículas coloidales se difunden en el sustrato, donde se adhieren, *b)* ocurre la formación del hidróxido de zinc, *c)* reacción del ion sulfuro produce la transformación del hidróxido de zinc en sulfuro de zinc de la superficie en la partícula coloidal, *d)* la reacción ocurre tanto en partículas coloidales adheridas a la superficie del sustrato como en aquellas dispersas en la solución y la reacción sigue su curso hasta que la mayor parte del hidróxido de zinc se convierte en sulfuro de zinc y finalmente en la parte *e)* las partículas de ZnS sintetizadas se adhieren entre sí formando una película constituida por conglomerados [4].

II. Metodología

Para hacer un depósito por el método químico es necesario tres soluciones, las cuales tienen una función durante la reacción química que se efectúa en el vaso reactor.

Cabe mencionar que el orden en las que se agregan las soluciones afecta las propiedades de las películas obtenidas. Las soluciones que se usaron en los depósitos por DBQ se muestran en la tabla 1 con sus respectivas molaridades y en la figura 2 se muestra el sistema experimental.

TABLA 1
REACTIVOS USADOS EN EL DEPÓSITO DE PELÍCULAS

Reactivos	Formula Química	Molaridad (M)
Sulfato de Zinc	$ZnSO_4$	0.26
Hidróxido de Amonio	NH_4OH	6.5
Tiourea	CH_4N_2S	0.75

Se mezclan las soluciones de sulfato de zinc e hidróxido de amonio y al final se agrega la tiourea [5]. El depósito se hizo a una temperatura de 80°C y se varió el tiempo de depósito de 15 a 70 min. Lo anterior con la finalidad de analizar películas con distintos espesores

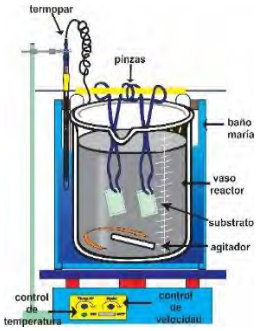


Figura 2. Configuración de un depósito por baño químico.

III. RESULTADOS

Los depósitos de ZnS fueron hechos por DBQ, para ello fue necesario optimizar el sistema, fijando parámetros como agitación, sales precursoras y temperatura del depósito para solo tener una variable el *tiempo* durante el crecimiento. Se comenzó a trabajar con un tiempo de depósito de 15 min. y se fue variando hasta llegar a los 70 min.

La figura 3 muestra la relación lineal que existe entre el tiempo de depósito y el espesor obtenido en las películas de ZnS. En el método DBQ existe un término conocido como equilibrio químico, el cambio de color de la solución en el vaso reactor es un indicador de que se ha alcanzado dicho equilibrio.

Para el ZnS, el equilibrio se alcanza transcurridos aproximadamente 50 min. La tabla 2 muestra los espesores de las películas de ZnS con tiempos de depósito de 15, 20, 30, 40, 50 y 70 min.

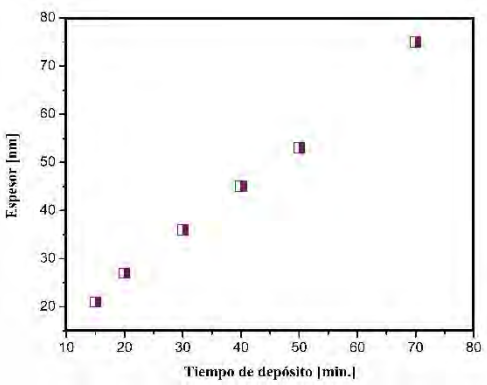


Figura 3 Grafica t_d vs espesor de las películas de ZnS

El grafico anterior se observa la tendencia lineal que existe entre el tiempo de depósito y los espesores de las películas de ZnS, dichos espesores fueron medidos en un perfilómetro Ambios technology XP-100 en tres puntos de la película esto con la finalidad de tener una mayor estadística y verificar si, las películas son uniformes. Los valores reportados en la siguiente tabla son valores promedio.

TABLA 2
ESPESORES DE LAS PELÍCULAS DELGADAS

Tiempo de depósito (min.)	Espesor (nm)
15	21
20	27
30	36
40	45
50	53
70	75

Las primeras películas obtenidas tuvieron un espesor alrededor de los 21 nm y fueron analizadas por la técnica de SEM en un microscopio electrónico de barrido modelo JEOL JSM7X, usando un voltaje relativamente bajo de 2 keV puesto que el espesor de las películas es muy pequeño. A aplicarle un voltaje bajo las micrografías SEM no alcanzan a tener una buena resolución como se observa en la figura 4, sin embargo, se aprecian una especie de conglomerados

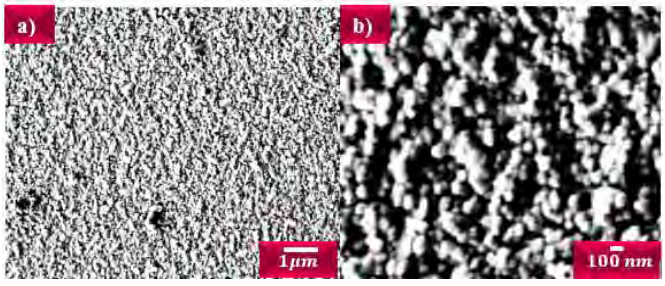


Figura 4 Imágenes SEM a) x 10,000 y b) 50,000 magnificaciones de las películas delgadas de ZnS con un espesor de 21 nm

Dado que las micrografías de la película con un espesor de 21 nm no tienen la resolución necesaria para identificar la morfología del material, las subsecuentes micrografías fueron hechas con un voltaje de 5 keV y todas fueron tomadas con electrones secundarios. Para la película con un espesor de 27nm, las micrografías se muestran en la figura 5. En las imágenes SEM se aprecia una morfología aparentemente uniforme, salvo algunos conglomerados señalados en la micrografía b).

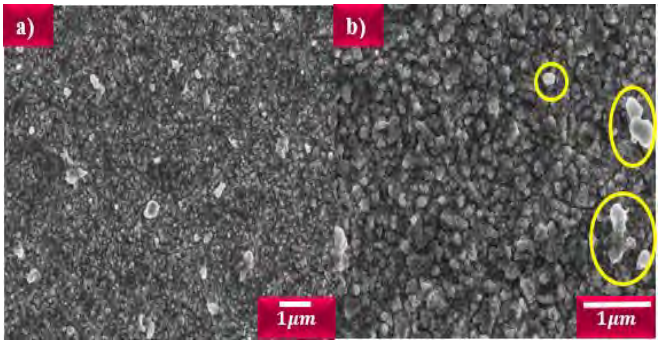


Figura 5 Imágenes SEM a) x 10,000 y b) 25,000 magnificaciones de las películas delgadas de ZnS con un espesor de 27 nm

Para estudiar los conglomerados señalados en la micrografía b) se hizo un estudio con electrones *retrodispersados* y un análisis semi-cuantitativo puntual para saber la composición y de este modo descartar algún tipo de contaminación o remanente de las reacciones intermedias en el depósito.
Como se mencionó anteriormente existe una reacción intermedia donde se forma un $Zn(OH)_2$ que da lugar al ZnS y estos conglomerados son de hidróxido de zinc, los cuales están presentes en todas las películas sin importar el espesor. Para el caso de la película con un espesor de 27 nm se observa en la figura 6 que el depósito no es uniforme, porque todavía se alcanza a observar la morfología del FTO.

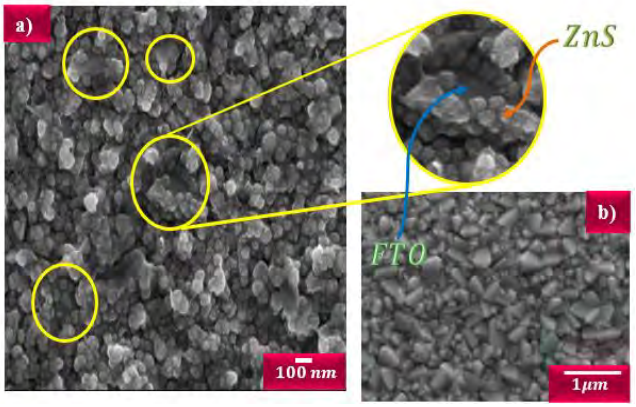


Figura 6 Imágenes SEM a) x 50,000 de la película de ZnS y b) x 25,000 de una película de FTO.

Entonces se puede concluir que para este caso la película de ZnS es muy delgada que no cubre completamente la superficie del FTO, por esta razón se trató de obtener películas más gruesas comparadas con las dos anteriores, esto fue posible aumentando el tiempo de depósito.

Para las películas de 36, 45 y 53 nm se mantuvo la morfología uniforme y con una geometría esférica. Las micrografías se muestran en la figura 7.

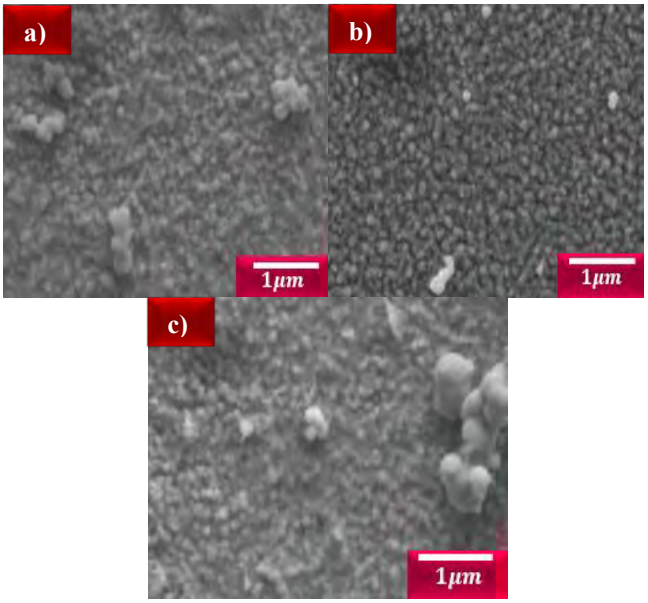


Figura 7 Imágenes SEM x 25,000 de las películas de ZnS con espesores de a) 36nm, b) 45 nm y c) 53 nm

Las películas anteriormente mencionadas preservaron la morfología y además la relación estequiométrica de los elementos zinc y azufre con un 70% y 30% respectivamente.

Por otro lado, la película con un espesor de 75 nm cambio completamente de morfología como se muestra en la figura 8.

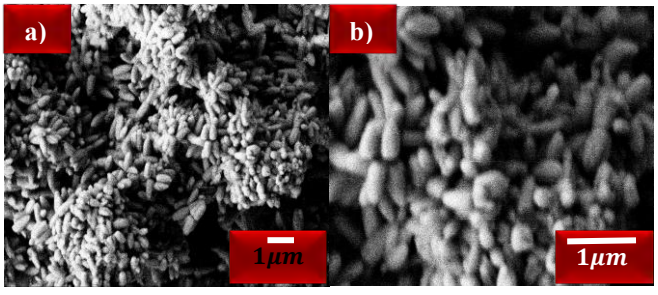


Figura 8 Imágenes SEM a) x 10,000 y b) 25,000 magnificaciones de las películas delgadas de ZnS con un espesor de 75 nm

La morfología de la película cambia completamente, los conglomerados tienen una geometría distinta y al ser analizados por EDS los elementos presentes son oxígeno y zinc.

Las películas más gruesas de ZnS con un espesor de 45 nm y 53 nm respectivamente fueron analizadas por la técnica de Difracción de Rayos X (DRX) en un difractómetro D8 de la firma de Bruker. Lo anterior con la finalidad de conocer la estructura cristalina del ZnS, las mediciones fueron hechas en la modalidad de haz rasante con una longitud de onda λ_CuKα=1.5406 Å y un ángulo de penetración de 0.5°. La figura 9 muestra los difractogramas correspondientes a cada muestra.

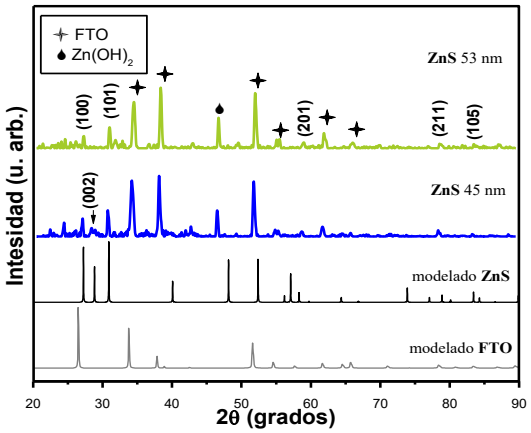


Figura 9 Difractogramas de las películas de ZnS con un espesor de 45 y 53 nm respectivamente

En la figura anterior muestra el patrón modelado del FTO (PDF 41-1445), el patrón modelado del ZnS (PDF 36-1450) y los difractogramas correspondientes a las películas de ZnS. Se obtuvieron difractogramas con picos bien definidos los cuales fueron indexados, también se aprecian picos asociados al FTO dado al espesor de las películas, aunque las mediciones se hicieron con un ángulo de penetración de 0.5 hay presencia del óxido conductor transparente. La estructura cristalina del ZnS es hexagonal tipo wurtzita.

Para el caso de la película con un espesor de 75 nm, el difractograma es mostrado en la figura 10.

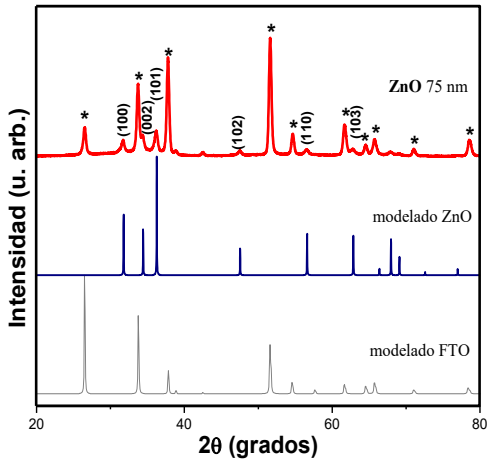


Figura 10 Difractogramas de la película de ZnS con un espesor de 75 nm.

Como se aprecia en la figura anterior el difractograma asociado a la película de sulfuro de zinc con un espesor de 72 nm se obtuvo una estructura totalmente diferente en este caso se trata de una estructura cristalina cubica la cual corresponde al compuesto ZnO (PDF 36-1451). Mas aun la morfología también cambio y los elementos presentes en el análisis EDS fueron justamente zinc y oxígeno.

Sin embrago la señal del sustrato todavía se observa esto se debe a los espesores del FTO y de las muestras.

IV. Discusión

Las películas se depositaron a distintos tiempos y a partir de los 15 min se tuvo deposito sin embargo este no era uniforme y tampoco cubría por completo al FTO. Se obtuvieron espesores diferentes para tiempos distintos a demás conforme se aumentaba el tiempo de depósito el espesor también aumentaba. Como se mencionó al inicio d este trabajo la relación que existe entre el tiempo de depósito y el espesor de las muestras es lineal.

Al analizar las películas con distintos espesores por SEM se determinó que las películas conservan la morfología constituida por conglomerados y la razón estequiometria que existe entre los elementos zinc y azufre. Referente a la estructura cristalina de las películas de ZnS estas poseen una estructura cristalina hexagonal tipo wurtzita.

Lo anterior cambio para la película con un espesor de 75 nm, tanto la morfología, elementos presentes en la muestra y la estructura cristalina cambio. Esto debido a que se obtuvo un compuesto distinto el ZnO, lo cual indica que para tiempos de depósito mayores a los 50 min el equilibrio químico se ha alcanzado y se comenzaran a depositar otros compuestos como lo es el ZnO.

V. Conclusiones

La técnica de DBQ es viable para el crecimiento de las películas delgadas de ZnS, considerando ciertos parámetros como la temperatura idónea para estos deposito debe de ser de 80°C.

El tiempo mínimo para obtener películas delgadas de ZnS de buena calidad debe de ser a partir de 30 min y no mayor que 50 min.

De acuerdo al análisis SEM la geometría esférica de la morfología de las películas de ZnS se conservó aun cuando se varió el tiempo de depósito y por ende el espesor de las muestras. Además, la estequiometria de las películas obtenidas por medio del análisis EDS fue de 70%-Zn y 30%-S confiriéndole una conductividad tipo n al material dado a las vacancias de azufre que existen en el ZnS.

Considerando los patrones de difracción de rayos X el ZnS tiene una estructura cristalina hexagonal

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a CONACyT, al proyecto CIMIE-SOL P25 y a los proyectos SIP 20181289, SIP 20180318 y SIP 20180439 por el apoyo financiero brindado en este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Yamanishi, K., Tsukasaki, H., and Hashimoto, Y. 1985. Proceedings of 5th International Conference on Ion and Plasma Assisted Techniques. May 13- 15. Munich, Germany.
[2] Yildrim, A.M., Aytunc, A., and Aykut, A. 2009. "Physical. E. Annealing Effect on Structural, Optical and Electrical Properties of ZnS Thin Films". 41:1365-1372.
[3] Yan, C. and Xue, D. 2008. Cryst. Growth Des. 8:1849. 20. Zhu, Y.C., Bondo, Y., and Xue, D.F. 2003. App
K. Kushiya, T. Nii, I. Sugiyama, Y. Sata, Y. Inamori, H. Takeshita, Jpn. J. Appl. Phys. 35 (1996) 4383.
[4] T. Nakada, K. Furumi, A. Kunioka, IEEE Trans. Electron Devices 46 (1999) 2093.
[5] T. Nakada, M. Hongo, E. Hayashi, Thin Solid Films 431–432 (2003) 242.
K. Kushiya, O. Yamase, Jpn. J. Appl. Phys. 39 (2000) 2577.

ISSN: 2594-1011

Estudio de la recristalización de CdTe por medio de tratamientos térmicos de $CdCl_2$, $MgCl_2$ y $TeCl_4$.

M. Macías Martínez[1], M.L. Albor Aguilera[2], C. Hernández Vásquez[2]
[1]Departamento de Ingeniería Aeronáutica y Espacial, ESIME-IPN Unidad Ticomán, CDMX, México.
[2] Departamento de Física, ESFM-IPN, CDMX, México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55054 E-mail: maciasm06@gmail.com

Resumen — **Las celdas de CdS/CdTe se han establecido como una alternativa viable para la generación de energía solar. Uno de los factores claves de estos dispositivos es el proceso conocido como activación, el cual normalmente consiste en un depósito de $CdCl_2$ sobre la superficie del CdTe, seguido de un tratamiento térmico. Aunque este procedimiento resulta efectivo, la búsqueda de alternativas no tóxicas que sustituyan al $CdCl_2$ ha sido objeto de investigación en la actualidad.**
En este trabajo se realiza el estudio del nivel de recristalización del CdTe mediante el análisis de sus propiedades estructurales y morfológicas producidas por la implementación de los tratamientos de $CdCl_2$ y las sales alternativas de $MgCl_2$ y $TeCl_4$.

Palabras Clave – **Tratamiento térmico, activación, CdTe, CdCl2, MgCl2, TeCl4.**

Abstract — **The CdS/CdTe cells have been established as a viable alternative for the production of solar energy. One of the key factors of these devices is a process known as activation which normally consists of a deposit of $CdCl_2$ on the surface of the CdTe, followed by a thermal treatment. Nowadays, although this procedure is effective, the search for non-toxic alternatives that replace CdCl2 has been reviewed.**
In this work, we have studied the recrystallization level of CdTe by analyzing its structural and morphological changes produces by the treatment of $CdCl_2$ and the alternative salts of $MgCl_2$ y $TeCl_4$.

Keywords — **Thermal treatment, activation, CdTe, CdCl2, MgCl2, TeCl4.**

I. Introducción

La tecnología de CdTe aplicada celdas solares de segunda generación ha demostrado ser una de las mejores opciones para la fabricación de dispositivos de alta eficiencia debido a las ventajas que presenta con respecto a otras tecnologías. La eficiencia de las celdas de CdS/CdTe ha tenido un creciente aumento en los últimos años, alcanzando un récord de 22.5% logrado por la empresa First Solar [1], la cual se logra aplicando un recocido de la capa de CdTe después de un depósito de $CdCl_2$ sobre ella, proceso conocido como activación [2].

En los últimos años, las investigaciones se han concentrado en encontrar una alternativa no tóxica que sea adecuada para aplicaciones a nivel industrial. Entre los activadores estudiados se encuentran $ZnCl_2$ [3], NaCl, NH_4Cl [4], $Cd(CH_3CO_2)_2$, $TeCl_4$ [5] y $MgCl_2$ [6], siendo este último el único que ha manifestado resultados equiparables al $CdCl_2$ [7].

En este trabajo se analizan los cambios en la cristalinidad del material por la influencia del tratamiento usando como activadores el $CdCl_2$, $MgCl_2$ y $TeCl_4$ depositados mediante soluciones en metanol, las cuales se atomizan sobre la superficie del CdTe.

Las propiedades morfológicas del CdTe posterior al tratamiento térmico (TT) son observadas utilizando MEB, además del empleo de DRX para analizar las propiedades estructurales de la película

II. Metodología

Para las películas empleadas en la experimentación, se prepararon sustratos de vidrio recubierto de una capa de SnO_2:F en los cuales se depositó CdTe por evaporación en sistema CSVT (*Close Space Vapour Transpor*). Con esta técnica se lograron capas de CdTe de aproximadamente 5 nm de espesor utilizando temperaturas de 630°C y 530°C para los bloques de fuente y sustrato respectivamente, en una atmósfera controlada de O y Ar con una presión de 100 mTorr.

Las soluciones fueron preparadas con cada uno de los compuestos de cloro en metanol a una concentración de 0.7 mg/ml, para después ser atomizadas sobre el CdTe con la ayuda de un aerógrafo Paasche TALON TG – 3F de doble acción alimentación por gravedad. Posterior a esto, se llevó a cabo el proceso de recocido por 30 minutos a una temperatura de 400°C. Para finalizar con el proceso, las muestras se colocaron en agua destilada, en un baño ultrasónico Cole – Parmer 8890 con la finalidad de eliminar restos de sal de la superficie.

Las características estructurales fueron determinadas mediante los patrones producidos por la técnica de Difracción de Rayos X (DRX) en un equipo DRX Bruker D8 con CuKα (1.5406 Å) mientras que la parte morfológica se observó con la ayuda del equipo de Microscopía Electrónica de Barrido (MEB) de alta resolución, JEOL JSM-6701F.

III. Resultados

A. *Propiedades morfológicas*

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**a muestra la morfología de las películas de CdTe antes

de recibir el tratamiento de activación, en donde se observa una alta densidad de defectos superficiales de tipo macla además de la presencia de granos pequeños de aproximadamente 1 µm. Después de la aplicación del tratamiento térmico con cada una de las sales, se aprecia una considerable disminución de maclas, además de una reducción de fronteras de gano para el caso del $CdCl_2$ (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**b), producto de un aumento en el tamaño de grano debido a la posible unión de núcleos pequeños [8]. En el caso del uso del $MgCl_2$ y $TeCl_4$, el cambio más significativo se dio sobre los granos. Mientras que el Mg generó una superficie más limpia en comparación con los demás tratamientos, el Te parece tener un conjunto de vacíos distribuidos de manera uniforme. Es posible que se trate de un desprendimiento de sal que se llevó consigo pequeños trozos de CdTe [9], en este caso debido al lavado que recibió.

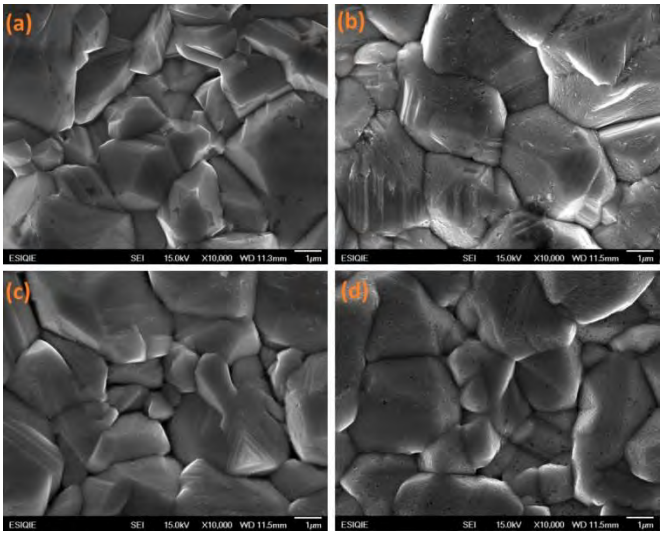


Fig. 1. Imágenes de MEB de las muestras de CdTe (a) sin tratamiento, (b) con tratamiento de $CdCl_2$, (c) con tratamiento de $MgCl_2$ y (d) con tratamiento de $TeCl_4$.

Otra posibilidad sería que la aplicación con el aerógrafo generara que la sal en solución dañara la película al momento de su aplicación. Debido a que el peso atómico del $TeCl_4$ $\left(1\,077.64\ \frac{g}{mol}\right)$ resulta ser absolutamente superior al del $MgCl_2$ $\left(95.211\ \frac{g}{mol}\right)$ y $CdCl_2$ $\left(183.32\ \frac{g}{mol}\right)$, puede ser que con la velocidad con la que sale del aerógrafo, pequeños cristales de sal se conviertan en diminutos proyectiles que impacten con la película dejando la superficie como se observa la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**d.

|La Tabla I presenta el análisis elemental EDS aplicado a las muestras, revelando los porcentajes atómicos de Cd y Te en cada una de ellas. El no detectar rastros de las sales podría ser un indicativo de que la concentración de estas en el CdTe se encentran por debajo de la capacidad de detección del equipo, provocando que no sea posible detectar rastros [10].

TABLA I.
CONCENTRACIÓN ELEMENTAL DE LAS MUESTRAS CON LOS DIFERENTES TRATAMIENTOS TÉRMICOS

Muestra	Cd [At %]	Te [At %]
Sin tratamiento	51	49
TT $CdCl_2$	51	49
TT $MgCl_2$	51	49
TT $TeCl_4$	52	48

B. Propiedades estructurales

El difractograma de rayos X de las muestras se presenta en la Fig. 2. Utilizando las cartas cristalográficas PDF #15-0770 y PDF #41-1445, se identificó la estructura cúbica del CdTe, además de la presencia de fases de SnO_2 provenientes del sustrato sobre el cual fueron depositadas las películas de CdTe. De acuerdo con la información de los patrones de difracción, nuevamente existe la ausencia de indicativos de la presencia de las sales del tratamiento.

Debido a la normalización del plano preferencial (111), el análisis pasa a los siguientes dos planos, (220) y (311) ya que fueron estos los que se vieron afectados de manera más significativa. En las muestras tratadas se generó un aumento de intensidades con respecto a la forma sin tratamiento lo cual podría tratarse de un aumento de aleatorización de planos [11], sin embargo, esto traería como consecuencia una disminución de tamaños de grano lo cual no se observa en MEB, de tal manera que una opción más viable sería la idea de que el tratamiento logró producir una mayor cantidad de fracciones de volumen en estos planos [12].

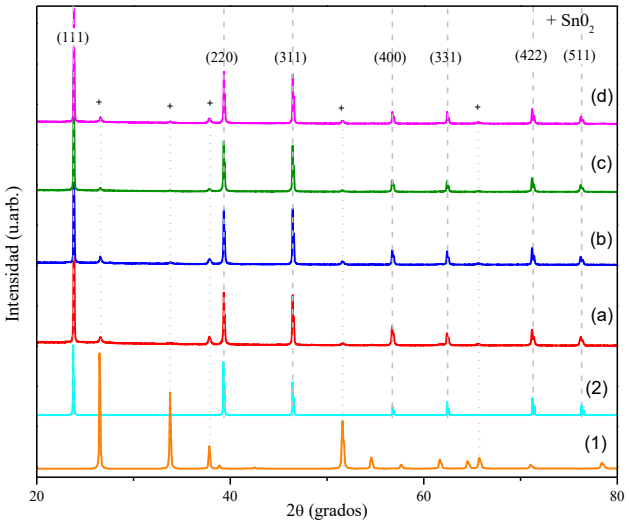


Fig. 2. Patrones de difracción de las muestras de CdTe (a) sin tratamiento, (b) con tratamiento de $CdCl_2$, (c) con tratamiento de $MgCl_2$ y (d) con tratamiento de $TeCl_4$, además de los patrones modelados de (1) SnO_2 y (2) CdTe.

Un cálculo rápido arroja que el parámetro de red de la muestra sin tratamiento (a = 6.484 Å) no se ve afectado por

ninguno de las sales ya que prácticamente permanece constante (a_{Cd} = 6.483 Å, a_{Mg} = 6.484 Å y a_{Te} = 6.482 Å), de manera que aunque se generó una recristalización del material, la estructura no se vio afectada.

C. Propiedades eléctricas

Debido a que el CdTe es un material altamente resistivo, el análisis de los cambios en la resistividad resulta práctico para determinar los efectos del tratamiento sobre las propiedades eléctricas.

Antes del depósito de las sales sobre la superficie del CdTe, este presentó una resistividad de $\rho = 1.03 \times 10^6$ Ωcm. La medición posterior al finalizado del tratamiento arrojó una disminución significativa en cada muestra, manifestando los valores de $\rho_{Cd} = 1.78 \times 10^4$ Ωcm, $\rho_{Mg} = 5.28 \times 10^4$ Ωcm y $\rho_{Te} = 6.70 \times 10^3$ Ωcm.

De manera general, de observa como los tres tratamientos mejoraron la conductividad del CdTe, lo que supone un aspecto positivo para la implementación final en un dispositivo fotovoltaico.

IV. CONCLUSIONES

La implementación del depósito de las sales activadoras mediante el atomizado de soluciones resultó en cambios positivos para las películas de CdTe, traducidas en una recristalización del material. De acuerdo con los resultados de DRX y de MEB, la recristalización fue mayor al aplicar el $CdCl_2$, sin embargo, el $TeCl_4$ presentó una mayor mejora en las propiedades eléctricas. Aunque no fue detectada la presencia de las sales en el CdTe, los cambios que se generaron son claramente visibles, lo que significa que se requiere del uso de técnicas más sensibles capaces de detectar niveles bajos de concentración de materiales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo contó con el apoyo de CEMIE – SOL P25, Instituto Politécnico Nacional SIP – 20180398 y SIP – 20180439.

REFERENCIAS

[1] M. A. Green, K. Emery, Y. Hishikawa, W. Warta, E. D. Dunlop, D. H. Levi y A. W. Y. Ho-Baillie, «Solar cell efficiency tables (version 49),» *Progress in photovoltaics: research and applications,* vol. 25, nº 1, pp. 3-13, 2016.

[2] I. M. Dharmadasa, «Review of the CdCl2 Treatment Used in CdS/CdTe Thin Film Solar Cell Development and New Evidence towards Improved Understanding,» *Coatings,* vol. 4, nº 2, pp. 282-307, 2014.

[3] C. Drost, B. Siepchen, V. Krishnakumar, B. Späth, C.Kraft, T.Modes y O. Zywitzki, «Activation of CdTe-based thin films with zinc chloride and tetrachlorozincates,» *Thin Solid Films,* vol. 582, pp. 100-104, 2015.

[4] B. L. Williams, J. D. Major, L. Bowen, W. Keuning, M. Creatore y K. Durose, «A comparative study of the effects of nontoxic chloride treatments on CdTe solar cell microstructure and stoichiometry,» *Advanced Energy Materials,* vol. 5, nº 21, 2015.

[5] B. Maniscalco, A. Abbas, J. Bowers, P. Kaminski, K. Bass, G. West y J.M.Walls, «The activation of thin film CdTe solar cells using alternative chlorine containing compounds,» *Thin Solid Films,* vol. 582, pp. 115-119, 2015.

[6] R. Mis-Fernández, I. Rimmaudo, V. Rejón, E. Hernandez-Rodriguez, I. Riech, A. Romeo y J. Peña, «Deep study of MgCl2 as activator in CdS/CdTe solar cells,» *Solar Energy,* vol. 155, pp. 620-626, 2017.

[7] I. M. Dharmadasa y A. A. Ojo, «Unravelling complex nature of CdS/CdTe based thin film solar cells,» *Journal of Materials Science: Materials in Electronics,* pp. 1-20, 2017.

[8] K. Punitha, R. Sivakumar, C. Sanjeeviraja y V. Ganesand, «Influence of post-deposition heat treatment on optical properties derived from UV–vis of cadmium telluride (CdTe) thin films deposited on amorphous substrate,» *Applied Surface Science,* vol. 344, pp. 89-100, 2015.

[9] A. Bosio, G. Rosa y N. Romeo, «Past, present and future of the thin film CdTe/CdS solar cells,» *Solar Energy,* 2018.

[10] P. Kuisma-Kursula, «Accuracy, precision and detection limits of SEM-WDS, SEM-EDS and PIXE in the multielemental analysis of medieval glass,» *X-ray Spectrometry,* vol. 29, nº 1, pp. 111-118, 2000.

[11] Y. Jung, G. Yang, S. Chun y D. Kim, «Post-growth CdCl 2 treatment on CdTe thin films grown on graphene layers using a close-spaced sublimation method,» *Optics Express,* vol. 22, nº 103, pp. A986-A991, 2014.

[12] C. H. Vasqueza, M. A. Aguilera, M. G. Trujillo y J. F. Márquez, «Study of CdTe recrystallization by hydrated-CdCl2 thermal treatment,» *Revista Mexicana de Física,* vol. 63, pp. 469-473, 2017.

ISSN: 2594-1011

Simulaciones de galaxias de disco y observaciones artificiales

Alejandro López Gómez[1], Isaura Luisa Fuentes-Carrera[1], Ruslan Gabbasov[2, 3]
[1]ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Sistemas Computacionales, UAEH, Pachuca de Soto, Hidalgo
[3]Departamento de Computación, UAM Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: alopezg0800@egresado.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se presentará una forma de escoger los parámetros que rigen la estabilidad de una galaxia de disco aislada simulada usando el código de *N*-cuerpos GADGET-2. Si la estabilidad del disco (*Q*) es óptima para dichos parámetros, se obtendrán observaciones "artificiales" para estas galaxias. Estas observaciones son, en breve, la curva de rotación y perfil de brillo correspondientes a cada simulación. Las galaxias han sido simuladas usando sólo las interacciones gravitacionales de dos componentes galácticos: halo de materia oscura y disco estelar.**

Palabras Clave – **astrofísica, galaxias, simulaciones**

Abstract — **In this work we will present a way to choose the parameters that determine the stability of a simulated isolated disk galaxy using the *N*-body code GADGET-2. If optimal disk stability (*Q*) is achieved for said parameters, we will obtain "artificial" observations for such galaxies. This observations are, briefly, the rotation curve and brightness profile for each simulation. The galaxies have been simulated only accounting for the gravitational interaction of two components: dark matter halo and stellar disk.**

Keywords — **astrophysics, galaxies, simulations**

I. Introducción

El aumento exponencial de poder de procesamiento computacional ha hecho que la representación de eventos astronómicos por medio de simulaciones tome una relevancia aún mayor de la que poseía hace 20 años.

Actualmente ya no sólo es posible simular encuentros entre dos galaxias o estudiar la formación de estructuras a mediana escala; trabajos que, aunque importantes, carecían de una interpretación profunda en términos de los fenómenos que sucedían durante el flujo de la simulación [1][2][3]. El avance en la capacidad de procesamiento de datos y en los algoritmos encargados de ejecutar los cálculos matemáticos han mejorado la resolución de las simulaciones a tal grado que es posible analizar fenómenos como los efectos del viento en el medio interestelar o el calentamiento de una galaxia debido a la fricción viscosa presente por la interacción intercapa de la galaxia.

También, con las simulaciones se ha roto (parcialmente) la barrera temporal antes presente en los estudios observacionales de la evolución de galaxias. El estudio de algunas perturbaciones seculares en galaxias puede ser desarrollado por medio de simulaciones a lo largo de escalas temporales tan o más grandes que las del universo, pudiendo así observar la aparición (o no) de elementos galácticos como barras o brazos espirales, o ver el resultado de la interacción entre dos galaxias y sus efectos en sus componentes (halo de materia oscura, disco estelar, bulbo, medio interestelar, etc.)

En 1963, Toomre analizó la estabilidad de discos compuestos únicamente de estrellas [1], llegando a la conclusión de que un sistema estelar debe permanecer en equilibrio dinámico si sus componentes (estrellas) se mantenían dentro de ciertos rangos de velocidad de dispersión en el eje paralelo al plano del disco. Este criterio de estabilidad, representado por Q, también depende de la densidad superficial de las partículas del disco.

$$Q = \frac{\sigma\Omega}{G\Sigma_{\text{star}}}, \qquad (1)$$

donde σ es la dispersión de velocidades de las estrellas en el disco, Ω es la velocidad angular del disco y Σ_{star} es la densidad superficial de estrellas del disco.

Posteriormente, Hohl (1971), partiendo de modelos numéricos con discos de estrellas aislados [2], llegó a la conclusión de que aún a pequeñas escalas de tiempo (~ dos rotaciones completas en las partes centrales del disco), el sistema se volvía inestable, lo suficiente para crear una estructura barrada central. Las simulaciones de Hohl tenían un detalle, la densidad de sus galaxias tendía a ser relativamente baja, y la discretización de su potencial sesgaba los resultados de forma generosa, pero son una buena representación de la estabilidad en discos aislados. Subsecuentes modelos de discos han sido simulados en ambientes de N-cuerpos[1] [4][5] y los resultados confirman dos conclusiones propuestas por Hohl:

- El criterio de estabilidad local de Toomre $Q > 1$ da predicciones precisas de estabilidad en modelos axisimétricos.

[1] Son programas que siguen el movimiento de un gran número de partículas bajo mutua interacción gravitacional.

A.L.G. agradece la beca de Maestría CONACYT con número 631862.
I.F.C. agradece el apoyo al proyecto SAPPI con número SIP-20181136.

- Si la mayoría de la energía cinética del disco se encuentra como movimiento rotacional, el disco usualmente será inestable a modos barrados en gran escala.

En simulaciones numéricas de galaxias, uno de los parámetros que está más relacionado con la estabilidad del disco es el **suavizado**[2], aquí denotado con la letra ε. El suavizado simplemente restringe el cálculo de las fuerzas gravitacionales interpartícula; de otra forma el procesamiento de cada fuerza requeriría de una gran capacidad de cómputo, además de que representa adecuadamente al potencial de una galaxia, donde las interacciones entre estrellas no existen.
La interdependencia de ε y la estabilidad del disco [6][7][8] fue estudiada por Romeo (1994, 1997, 1998) donde llega a una expresión matemática que acota los valores de ε para los cuales el comportamiento físico del disco es consistente.
Para que exista consistencia física, se define un parámetro de estabilidad "s" que debe cumplir

$$s < \frac{\varepsilon}{2}\frac{2\pi G\Sigma_{\text{star}}}{\kappa^2}, \qquad (2)$$

donde κ es la frecuencia epicíclica de la estrella. Con esta expresión se propone un umbral de "seguridad",

$$\varepsilon \sim \frac{2}{5}. \qquad (3)$$

Este umbral representa la barrera entre ser un disco físicamente consistente o ser físicamente inconsistente, i.e., para valores más altos que (3) muchos de los artefactos que puedan aparecer en el disco serán de manufactura numérica y no físico. El caso anterior se cumple para discos sólo con estrellas, la generalización al caso de gas y estrellas es mucho más compleja y no hay una expresión analítica que evalúe a ε de una forma tan elegante como para el caso del disco con estrellas.
El suavizado no es el único parámetro que interviene en la estabilidad local del sistema. La elección del **número de partículas** (N) es de vital importancia pues se relaciona íntimamente con la cantidad de suavizado a escoger, debido a su dependencia con la densidad de partículas en (2). Otro de los parámetros que comúnmente se introducen en una simulación en aquel que dicta el intervalo en el cual se realiza el cálculo de las fuerzas gravitacionales en cada partícula, denominado **timestep** (Δt).
En 2006, Gabbasov estudió la interdependencia de estos tres parámetros (ε, N, y Δt) en simulaciones de galaxias aisladas [11] concluyendo que la variación en N no afecta demasiado a la estabilidad del disco (Q sólo varía un 5 por ciento). En este artículo las simulaciones fueron hechas con un **suavizado de Plummer**, el cual discretiza el perfil de densidad de Plummer descrito en [9]. Después se replicaron las mismas simulaciones usando el código GADGET, el cual usa un **suavizado *spline***. Este suavizado usa un kernel *spline* [10] para el cálculo de la fuerza gravitacional, teniendo como ventajas que cuando las distancias son más grandes que la magnitud del suavizado, el cálculo de la fuerza es prácticamente Newtoniano.
Para valores bajos de N ($< 3 \times 10^5$), los rangos de valores de ε y Q aumentan. Además, Q disminuye si el suavizado de Plummer [9] aumenta. La aparición de barras se acelera si se cambia del suavizado de Plummer al suavizado *spline* [11].
En este trabajo se estudiarán estos tres parámetros (ε, N, y Δt), junto con otro parámetro llamado **altura de escala del disco**, z_0, que simplemente define la anchura en el eje perpendicular al plano del disco.
Una vez determinados los parámetros para el suavizado, número de partículas y *timestep* que resulten en un criterio de Toomre que cumpla con las condiciones propuestas por [11] para una galaxia simulada en particular, se extraerá su curva de rotación y su perfil de densidad y/o de brillo, las cuales llamaremos "observaciones artificiales"[3]. Al igual que cualquier otra observación astronómica, las observaciones artificiales deben cumplir ciertas relaciones fundamentales como la relación Tully-Fisher o el cociente masa-luminosidad, de otra manera serán descartadas. Posteriormente, las observaciones artificiales se compararán con observaciones de galaxias reales que posean características muy similares a la galaxia simulada. Si la comparación es satisfactoria, será posible inferir como suceden algunos eventos seculares presentes en las galaxias como la aparición de perturbaciones (barras, anillos, brazos espirales,...) o si existe alguna evolución secular perceptible en ellas.

II. Metodología

La construcción de una simulación de galaxias (incluyendo la creación de sus condiciones iniciales) comienza con la elección del par potencial-densidad que regirá el comportamiento general de la galaxia. Se escoge, para cada componente de la galaxia, una distribución de densidad acorde a sus características físicas observables: morfología, concentración de masa, composición, etc. Seguiremos las recetas propuestas por Hernquist (1990) [12], Barnes (1998) [13], y [11] para seleccionar las distribuciones de cada componente y [11][13] para ajustar los valores de los parámetros ε, N, y Δt.

[2] En este caso, lo que se "suaviza" es el potencial de la galaxia, en lugar de tomarlo como una ley de potencia $1/r^2$, se limita el cálculo de las fuerzas cuando $r \to 0$, introduciendo un factor ε tal que la fuerza siga una ley de $1/(r+\varepsilon)^2$.

[3] Se le llaman "artificiales" porque son obtenidas a partir de métodos de simulación numérica. Algunos de los observables en estas simulaciones pueden ser provocados por artificios numéricos que nada tienen que ver con un fenómeno físico realista.

A. Pares Potencial-Densidad

Halo. Para el halo de materia oscura se asigna un perfil de densidad esférico introducido por primera vez en [12]. Este perfil tiene como ecuación,

$$\rho_{\mathrm{h}}(r) = \frac{M_{\mathrm{h}} a_{\mathrm{h}}}{2\pi} \frac{1}{r(r+a_{\mathrm{h}})^3}, \qquad (4)$$

donde M_{h} es la masa del halo y a_{h} es la longitud de escala de halo.
Esta distribución fue diseñada originalmente para modelar galaxias con forma esférica y bulbos centrales pero al ser un modelo sencillo de codificar, ha sido ampliamente usado para la generación de condiciones iniciales de halos de materia oscura.

Disco. La distribución de la densidad del disco es un poco más complicada [14], pero generalmente se asume como exponencial,

$$\rho_{\mathrm{d}}(r,z) = \frac{M_{\mathrm{d}}\alpha^2}{4\pi z_0} e^{-\alpha r} \mathrm{sech}^2\left(\frac{z}{z_0}\right), \qquad (5)$$

donde M_{d} es la masa del disco, α^{-1} es la longitud de escala de disco y z_0 es la altura de escala del disco. En la ecuación (5) se puede notar la dependencia en la densidad superficial del disco, también hay dependencia en cómo se distribuyen las partículas a lo largo del eje perpendicular (z) en el plano del disco.

B. Condiciones iniciales

Para la generación de condiciones iniciales[4] es necesario asumir que:

i. Los sistemas tendrán N partículas con igual masa, para reducir efectos impropios de relajación y dispersión de masa.
ii. La proporción de masa para las componentes será $M_{\mathrm{d}}: M_{\mathrm{h}} = 3:16$. Esto definirá el número de partículas del sistema.
iii. La distribución de masa para cada componente será truncado en el radio donde la masa corresponda al 95 por ciento de la masa total

Los parámetros que serán definidos para cada condición inicial se enlistan en la tabla 1. Para conocer los detalles de las condiciones aplicadas en las simulaciones ver [11][13].

Tabla 1. Párametros fijos para modelos de galaxias.

Componente	Masa	Número de partículas (N)	Longitud de escala
Disco	0.25	0.2N	0.0833
Halo	1	0.8N	0.1

Las condiciones iniciales son creadas con **Starscream**[5], código en lenguaje *C* desarrollado por Jay Jay Billings en el 2008.

C. GADGET-2

Para calcular las fuerzas sobre cada partícula dentro de una distribución de densidad dada es necesario conocer la posición y velocidad de cada una. Esto se hace resolviendo la ecuación correspondiente a la función de distribución de las partículas en el espacio fase del sistema,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G \int f(\mathrm{r},\mathrm{v},t)\mathrm{dv}, \qquad (6)$$

donde f es la función de distribución de partículas con posición **r** y velocidad **v**, asociada a un potencial Φ. Este potencial debe ser solución de la ecuación de Boltzmann sin colisiones (**CBE**, por sus siglas en inglés), la cual describe la variación en la densidad respecto a un observador que se mueve con velocidad **v** correspondiente a una estrella en el espacio fase.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}} = 0. \qquad (7)$$

El potencial introducido en GADGET-2 es un potencial suavizado, cuando la distancia entre las partículas es muy pequeña se invoca un radio de corte donde el cálculo de la fuerza sobre la partícula será suprimido. La selección del número de partículas es de vital importancia, debe ser suficientemente grande tal que los efectos de relajación debido al encuentro de dos cuerpos sean eliminados, de otra manera el sistema de N-cuerpos no será una representación real de un sistema sin colisiones. Para elegir un suavizado óptimo se han usado los métodos propuestos en [6][7][8].
Para el cálculo de la fuerza autogravitacional sobre cada partícula, GADGET-2 usa una combinación de dos algoritmos diferentes.

[4] Son el punto de partida para toda simulación a cualquier escala (cosmológica o no cosmológica). Es donde se especifican las distribuciones y parámetros que después seguirá el código de N-cuerpos para el cálculo de las fuerzas gravitacionales.

[5] El código y manual de Starscream pueden ser encontrados en *https://github.com/jayjaybillings/starscream*.

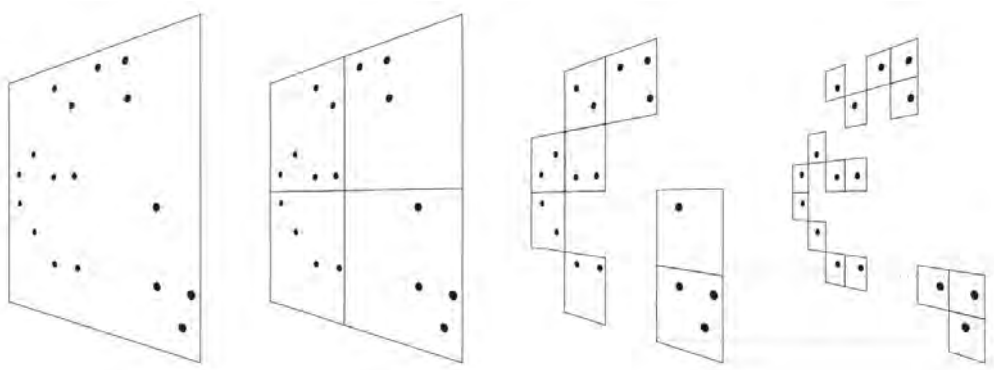


Figura 1. Presentación bidimensional del árbol octal de Barnes & Hut. La densidad total de partículas se envuelve en una malla (nodo raíz), cada iteración divide al nodo principal en cuatro hasta que cada partícula se encuentre sola en los nodos pariente (hojas del árbol).

Algoritmo de árbol

Son una alternativa a los métodos de **suma directa**[6] de fuerzas. En este método, el volumen total de la galaxia se divide en mallas o *grids*, donde cada *grid* es dividido en grupos de partículas y a cada grupo se le asigna un valor jerárquico. Cuando se procesa la fuerza que actúa sobre una partícula, la fuerza ejercida por grupos distantes es aproximada a sus momentos multipolo más bajos[7], esto reduce el número de cálculos que se deben realizar para encontrar la fuerza (de N^2 a $N\log N$). Comúnmente se deja de computar cuando se alcanza el momento cuadrupolo.
La forma en que se construye el árbol sigue la prescripción de Barnes & Hut (1986) [15] donde cada malla asociada a una densidad de partículas es parte de una estructura octal, conectadas jerárquicamente de modo que cada malla tiene ocho "parientes" y cada pariente tiene la mitad en longitud de su **nodo padre** (malla superior en el árbol). La construcción del árbol termina cuando cada nodo contiene una partícula (ver Figura 1).

Enmallado de partículas

Estos códigos, también conocidos como códigos PM (*Particle-mesh codes*), usan una **malla** para envolver a la densidad y al potencial de la galaxia. Era común aplicar este método para crear simulaciones cosmológicas debido a que son códigos muy rápidos y el número de partículas que se podía ser gigantesco (ver [16]). Este método resuelve la ecuación de Poisson usando estimaciones de la densidad en puntos espaciados uniformemente, siendo estos los nodos de la malla. La clave está en estimar la densidad en un nodo de la malla sólo por medio de las posiciones de las partículas en ese nodo (a este proceso se le llama **asignación de masa**). Una vez estimada la densidad en la malla, es posible resolver la ecuación de Poisson para encontrar el potencial. En los códigos PM se deben asignar unas **condiciones de frontera** que definirán hasta qué punto se calculará el potencial; para nuestro caso se utilizarán las condiciones de frontera en el **vacío**. Estas condiciones requieren que a largas distancias $\boldsymbol{\Phi} \to -GM/r$, donde M es la masa total de la malla. Los detalles del método ser pueden ver en [17][18].

El híbrido de estos dos métodos es el código **TreePM** [19], el cual es el que GADGET-2 usa para el cálculo de la fuerza gravitacional. Este método fue propuesto por Xu en 1995.
Partiendo de

$$\phi(x) = \sum_i m_i \varphi(x - x_i), \qquad (8)$$

donde $\phi(x)$ es el potencial discretizado del sistema de partículas con masa m_i, y φ es el potencial debido a la interacción de cada partícula, se divide el potencial en el espacio de Fourier en dos componentes: largo alcance y corto alcance, tales que, $\phi_k = \phi_k^{\text{long}} + \phi_k^{\text{short}}$, donde

$$\phi_k^{\text{long}} = \phi_k \exp(-\boldsymbol{k}^2 r_s^2), \qquad (8)$$

donde r_s es la escala espacial en el espacio de Fourier. Este potencial se calcula usando el método PM.
La componente de corto alcance con

$$\phi_k^{\text{short}}(\boldsymbol{x}) = G \sum_i \frac{m_i}{r_i} \operatorname{erfc}\left(\frac{r_i}{2r_s}\right), \qquad (9)$$

donde $r_i = \min(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{n}L|)$ y se define como la distancia más corta que puede tomar la partícula respecto del punto $\boldsymbol{x}$; erfc es una función de error que suprime las fuerzas a distancias más largas que el radio de escala r_s, L es la separación entre mallas consecutivas y $\boldsymbol{n}$ es la proyección de L a lo largo de $\boldsymbol{x}$ [20].
El cálculo se la fuerza gravitacional a corto alcance sobre la partícula *i* se lleva a cabo usando un algoritmo de árbol. Este método aumenta el cómputo de la fuerza sustancialmente,

[6] Método que calcula la fuerza sobre una partícula debido al campo gravitacional de otra partícula. Es un algoritmo algo costoso en términos de recursos computacionales pues el cálculo se realiza uno a uno.

[7] La expansión multipolo es un método que permite encontrar el potencial de distribuciones esferoidales. Binney & Tremaine la describen de forma detallada en [16].

además, la precisión en el cálculo de la fuerza a largo alcance es básicamente exacto.

D. Curvas de rotación

Una curva de rotación está definida como la velocidad de rotación en función de la distancia respecto al centro de la galaxia. En observaciones de galaxias, la velocidad se encuentra a partir del corrimiento al rojo de las líneas (de emisión o absorción) de los elementos de la galaxia.

La obtención de la curva de rotación[8] de una imagen en un tiempo determinado de una simulación es la parte más importante para la extracción de las observaciones artificiales.

Conociendo el potencial debido a una distribución de densidad dada, e.g., NFW[9], es posible derivar una expresión para la velocidad circular, $v_c(r)$, correspondiente a un radio r. En primera instancia, las condiciones iniciales tienen por defecto definidas una distribución de partículas de halo y de disco, por tanto, es posible determinar su velocidad circular a cualquier radio. Para el halo se tiene,

$$\Phi_h(r) = -\frac{GM}{r+a}, \qquad (10)$$

donde a es un parámetro que depende del radio de escala del halo, r_s, $a = r_s\sqrt{2[\ln(1+c) - c/(1+c)]}$, y c es la concentración del halo. Este potencial tiene una v_c asociada,

$$v_c^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{GM}{r(r+a)^2}. \qquad (11)$$

Para el disco, el potencial se debe a una distribución exponencial con anchura nula ($z \to 0$), por tanto,

$$\Phi(r,0) = -\pi G\Sigma_0 r[I_0(y)K_1(y) - I_1(y)K_0(y)], \qquad (12)$$

donde I y K son funciones Bessel cilíndricas modificadas y $y = r/2r_d$, con r_d como el radio del disco. La velocidad circular, v_c, es

$$v_c^2(r) = r\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 4\pi G\Sigma_0 r_d y^2[I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)] \qquad (13)$$

Las curvas de rotación se pueden observar en la Figura 2. El perfil de velocidades del disco es notoriamente exponencial debido a la baja densidad en sus partes externas. El perfil de halo es de NFW.

Si se desea comparar esta curva con una curva de rotación de una observación real, es necesario corregir la medición de las velocidades si la galaxia posee alguna inclinación o un ángulo de posición diferente al de la galaxia simulada.

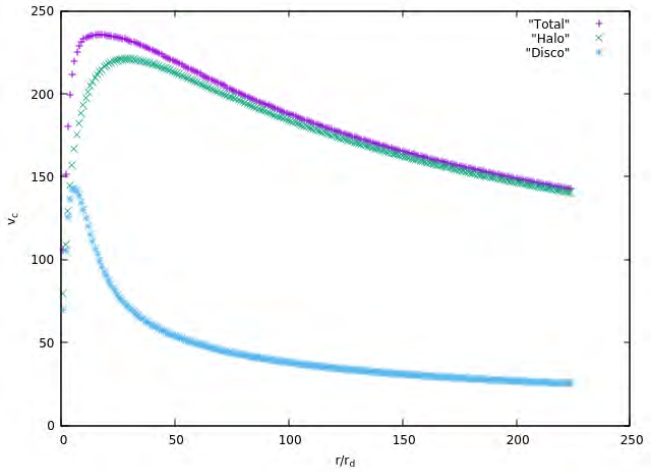


Figura 2. Curvas de rotación correspondientes a las condiciones iniciales de Starscream. Las unidades de velocidad son km s^{-1} y de longitud en parsecs (pc).

III. Resultados y Discusión

No cabe duda de la interdependencia entre los parámetros ε, N, Δt y z_0. El parámetro que, de cierta forma, es más fácil de estudiar es el número de partículas. Gabbasov en [11] determinó que la dispersión en simulaciones de galaxias de disco disminuye si N aumenta, pero no en sobremanera. Aun así, la elección de N afecta claramente en los rangos de estabilidad que puede tomar una galaxia.

A continuación se muestran simulaciones de dos galaxias con diferente N y dejando los demás parámetros fijos.

Los valores de suavizado en cada simulación son $\varepsilon_h = 1, \varepsilon_d = 0.4$; donde ε_h es el suavizado para el halo y ε_d es el suavizado del disco. Los demás valores se enlistan en la tabla 2.

Tabla 2. Valores para parámetros de cada simulación. La dependencia de entre estos parámetros se observa al evaluar el parámetro Q para estas simulaciones. El parámetro z_0 y Δt fueron escogidos para que $Q_{mín} \sim 1 - 1.5$.

Simulación	N_{halo}	N_{disco}	Δt	z_0	$Q_{mín}$
1	60,000	40,000	0.000610352	0.06	1
2	130,000	100,000	0.000854492	0.11	1.5

Como puede observarse en cada una de estas simulaciones, el carácter numérico del cálculo de las fuerzas se hace evidente al aparecer artificios como los anillos en la simulación 1, que aparentemente es un producto natural en estas simulaciones según [13] debido al poco número de partículas introducido en las condiciones iniciales, o la acumulación de materia central que aparece en la simulación 2, un artificio numérico provocado por el generador de condiciones iniciales.

[8] Técnicamente, la curva de rotación (junto con el perfil de brillo) **son** las observaciones artificiales pero, cuando se quiera comparar con observaciones reales se deberá ajustar estas curvas de forma que emulen las características de la galaxia observada.

[9] Por Navarro-Frenk-White, los cuales en 1996 dieron una descripción de los halos de materia oscura de forma analítica por medio de múltiples simulaciones.

Simulación 1

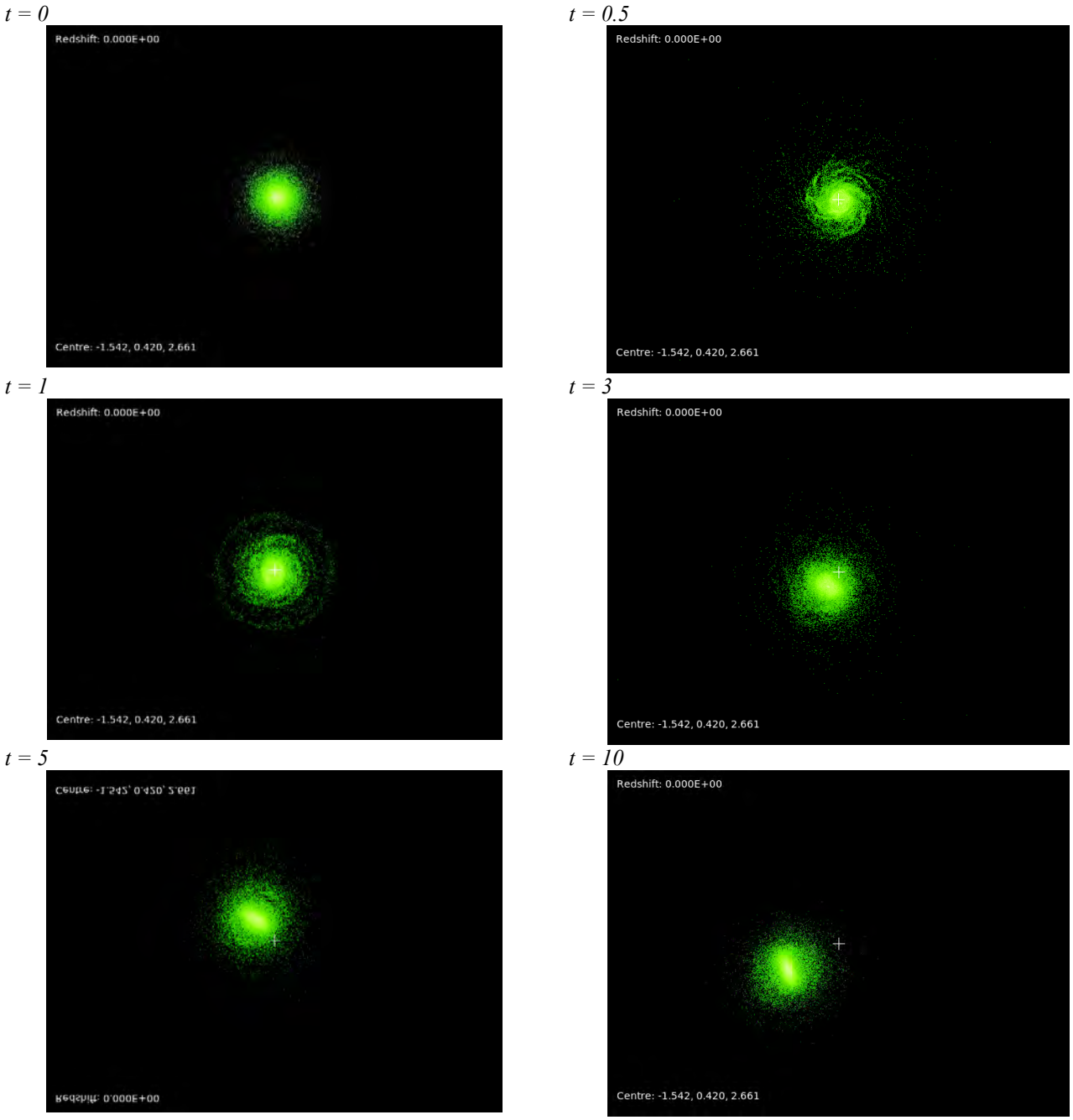


Figura 3. Simulación con N_h = 60,000 y N_d = 40,000 partículas. Se muestra sólo la parte del disco estelar. Los parámetros introducidos en Starscream son: m_d = 0.025, j_d = 0.025, c = 15, λ = 0.05 y v_{200} = 160 km s^{-1} que son la fracción de la masa del disco respecto al halo, la fracción del momento angular del disco respecto al halo, la concentración de halo, el parámetro *spin* y la velocidad virial del disco, respectivamente. Estos parámetros están definidos en [21]. El disco en t = 0.5 se perturba bruscamente para encontrar un estado estable, esto provoca la aparición de algo parecido a unos brazos espirales. Posteriormente, en t = 1, aparecen unos anillos, producto de la baja cantidad de partículas. En tiempos posteriores el disco parece haber encontrado el equilibrio pero parece perturbado en sus partes interiores por lo que parece tener una barra (muy ensanchada). La simulación se llevó a cabo bajo un universo ΛCDM con parámetros: Ω_0 = 0.3, Ω_λ = 0.7, Ω_{baryon} = 0.04 y H = 70 km s^{-1} Mpc. El tiempo de la simulación es de ~4.5 Gyr.

Simulacion 2

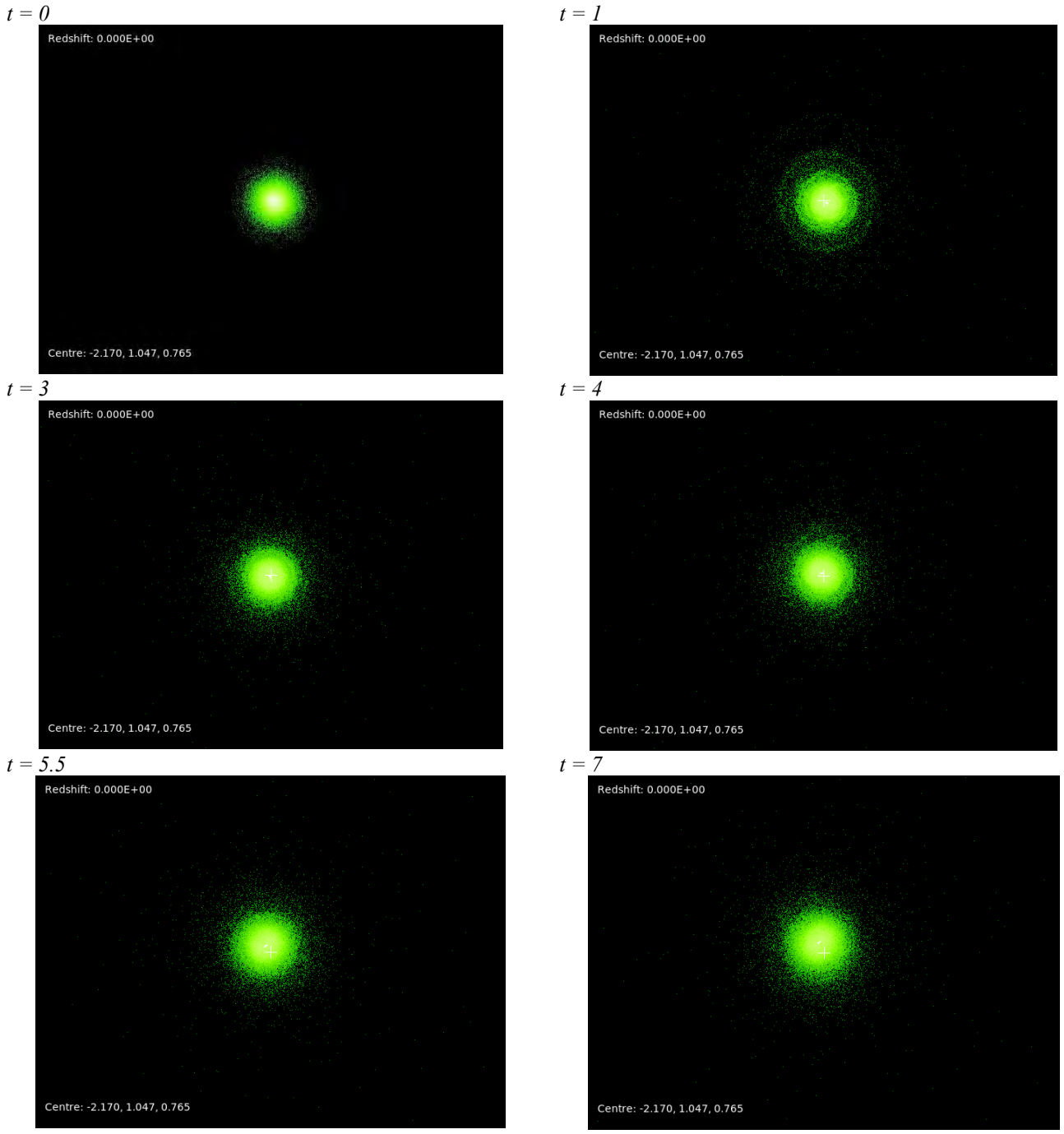


Figura 4. Simulación con N_h = 130,000 y N_d = 100,000 partículas. Se muestra sólo la parte del disco estelar. Los parámetros introducidos en Starscream son: m_d = 0.025, j_d = 0.025, c = 15, λ = 0.05 y v_{200} = 160 km s^{-1} que son la fracción de la masa del disco respecto al halo, la fracción del momento angular del disco respecto al halo, la concentración de halo, el parámetro *spin* y la velocidad virial del disco, respectivamente. Estos parámetros están definidos en [21]. El disco parece alcanzar la estabilidad sin la aparición (tentativa) de una perturbación de patrón espiral, pero siguen apareciendo anillos (t = 1) en la frontera del disco. Hay que notar que, aunque el disco permanece estable durante casi toda la simulación, desde el inicio de la simulación aparece una concentración de masa en la parte central de la galaxia que, seguramente, se debe a como han sido generadas las condiciones iniciales. La simulación se llevó a cabo bajo un universo ΛCDM con parámetros: Ω_0 = 0.3, Ω_λ = 0.7, Ω_{baryon} = 0.04 y H = 70 km s^{-1} Mpc. El tiempo de la simulación es de ~3 Gyr.

El halo presenta una alta dispersión, pero este efecto puede ser reducido introduciendo en el código de las condiciones iniciales un límite en las velocidades de escape de las partículas en el halo (de igual forma para el disco).
El desplazamiento que se observa durante la simulación se debe más a una acumulación de pequeños errores al hacer el cálculo de la velocidad de cada partícula, esto añade una componente extra a su velocidad, modificando el centro de masa del sistema. Estos errores pueden ser corregidos modificando el muestreo de partículas en el código de GADGET-2.
Debido a que el valor de suavizado aplicado en estas simulaciones es totalmente arbitrario, es posible que no sea el valor correcto. Naturalmente, si se aumenta *N*, el valor del suavizado debe disminuir, de otra manera de están despreciando fuerzas a distancias que podrían afectar significativamente la consistencia del sistema.
Otro elemento interesante a mencionar es que en la simulación 1 se observa una concentración de materia central parecida a el inicio de una barra, pero el disco se ha ensanchado considerablemente, por tanto esta perturbación puede no ser de índole física, sino numérica.
Por último, hay que comentar que en [11] se relaciona *N* con la elección de suavizado para encontrar un valor mínimo que nos permita resolver la estructura vertical del disco, para esto es requerido que $\varepsilon \lesssim z_0$. Generalmente, mientras mayor sea *N*, mejor será la resolución de la galaxia.

IV. Conclusiones

Los resultados presentados aquí, aunque limitados, dan una idea de cómo escoger los parámetros que gobiernan el comportamiento de una simulación.
La evaluación del suavizado será de vital importancia para determinar la estabilidad de simulaciones posteriores, porque, a pesar de contar con una sólida base teórica para su estudio, la naturaleza numérica de las simulaciones da lugar a sesgos en los efectos que el suavizado provoca en los sistemas.
El uso de distribuciones de partículas diferentes para el halo y el disco no se ha descartado, pero eso requeriría de ajustar la forma en que se generan las condiciones iniciales.
Se han obtenido las curvas de rotación y perfiles de densidad de algunos de los discos simulados hasta el momento. No se presentan en este trabajo porque los parámetros base no han sido fijados. Por ahora las curvas y perfiles dicen que la distribución de partículas en el disco se mantiene durante la simulación si la dispersión en el disco es poca. Falta hacer más pruebas con simulaciones que presenten inestabilidades en el disco (barra o patrón espiral).
Las condiciones iniciales creadas con Starscream poseen diversos errores debido a las limitaciones del código. El cálculo de las posiciones y velocidades no es lo suficientemente preciso como para eliminar los efectos de dispersión presentes en las simulaciones de este trabajo. Existen otros generadores que pueden mejorar estos detalles. **GALIC**[10] es un generador de condiciones iniciales desarrollado por Denis Yurin y Volker Springel en 2014 [22] que mejora la evaluación de las posiciones y velocidades de las partículas en modelos de galaxias para que se encuentren en equilibrio sin presencia de colisiones. Esto lo logra iterando el cálculo de las órbitas de cada partícula usando métodos estocásticos. La mejora en precisión en la ubicación y velocidad de cada partícula también tiene un impacto en la rapidez con la que GADGET-2 hace el desarrollo de las fuerzas en el potencial suavizado.

[10] Si se desea conocer el código ir a: *https://www.h-its.org/tap-software-en/galic-code/*

Referencias

[1] Toomre, A., 1964, ApJ, 139, 1217.
[2] Hohl, F., 1971, ApJ, 168, 343.
[3] Sellwood, J. A., 1981, A&A, 99, 362.
[4] Sellwood, J. A., Moore, E. M., 1999, ApJ, 510, 125.
[5] Sellwood, J. A., 1985, MNRAS, 217, 127.
[6] Romeo, A. B., 1994, A&A, 286, 799.
[7] Romeo, A. B., 1997, A&A, 324, 523.
[8] Romeo, A. B., 1998, A&A, 335, 922.
[9] Plummer, H.C., 1911, MNRAS, 71, 460.
[10] Hernquist, L., Katz, N., 1989, ApJS, 70, 419.
[11] Gabbasov, R., 2006, A&A, 449, 1043.
[12] Hernquist, L., 1990, ApJ, 356, 359.
[13] Barnes, J. E., 1998, en *Galaxies: Interaction and Induced Star Formation*, ed. Friedly, D., Matinet, L., Pfenniger, D., Springer-Verlag, Berlin, pág. 275.
[14] Freeman, K. C., 1970, ApJ, 160, 811.
[15] Barnes, J., Hut, P., 1986, Nat, 324, 446.
[16] Binney, J., and Tremaine, S., 1998, *Galactic Dynamics*, Princeton, p. 78.
[17] Springel, V., Yoshida, N., White, S. D. M., 2001, New Astronomy, 6, 79.
[18] Hockney, R. W., Eastwood, J. W., 1988, *Computer Simulation Using Particles*, CRC Press.
[19] Xu, G., 1995, ApJS, 98, 355.
[20] Bagla, J. S., Ray, S., 2003, New Astronomy, 8, 665.
[21] Springel, V., White, S. D. M., 1999, MNRAS, 307, 162.
[22] Yurin, D., Springel, V., 2014, MNRAS, 444, 62.

ISSN: 2594-1011

Resonador mecánico múltiple como modelo de la Cóclea

José Antonio Peralta, Héctor Aguilera Trujillo y Pedro Vidales Rosales
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono 5729-6000 Ext. 55007 E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presenta en este trabajo una propuesta de artefacto mecánico que tiene algunas semejanzas con el caracol del oído o Cóclea. Con este artefacto queremos demostrar que el modelo propuesto por Bekesy adolece de algunos errores, como por ejemplo, que el sonido para ser percibido debe entrar necesariamente por al conducto auditivo generando una onda que se propaga a lo largo del caracol, en donde es descompuesto espacialmente dependiendo de su frecuencia. Este modelo no explica cómo es posible escuchar sonidos cuando el conducto auditivo es obturado, en cambio este hecho sí podría ser explicado si consideramos que es la vibración del cráneo el que produce zonas de resonancia en la membrana debido a los cilios que la componen los cuales son rígidos y tienen diferente longitud.**

Palabras Clave – **Oído, vibraciones, resonancia**.

Abstract — **A proposal for a mechanical artifact that has some similarities with the ear snail or Coclea is presented in this work. With this artifact we want to demonstrate that the model proposed by Bekesy suffers from some errors such as for example that the sound to be perceived must necessarily enter through the auditory canal generating a wave that propagates along the snail where it is spatially decomposed depending on its frequency. This model does not explain how it is possible to hear sounds when the auditory canal is clogged, but this fact could be explained if we consider that it is the cranial vibration that produces resonance zones in the membrane due to the cilia that support it. They are rigid and have different lengths.**

Keywords — **Ear, vibration, resonance.**

I. Introducción

Cuando las ondas sonoras en el aire inciden sobre la superficie de un material líquido o sólido en general tienden a reflejarse, por tanto, si se intenta trasmitir la energía del aire a un medio más denso, el intento falla en gran medida ya que solo una pequeña fracción de la energía penetra al nuevo medio. En cambio, cuando las vibraciones sonoras se trasmiten directamente de un medio sólido a otro medio de mayor densidad y consistencia que el aire, mediante un contacto mecánico se logra lo que técnicamente se conoce como un acoplamiento de impedancias, es decir, una trasmisión muy eficiente de un medio a otro medio de la energía. Sabido es que en el oído la trasmisión de las vibraciones de la membrana timpánica al interior del caracol se logra por intermedio del acoplamiento del martillo, el yunque y el estribo [1,2], con esto se logra aumentar la presión original de la membrana timpánica sobre la ventana oval por unas 22 veces (ver figura 1); en otras palabras, la presión sobre la membrana de la ventana oval se realiza no por contacto del aire sobre un medio líquido, sino por el contacto mecánico del estribo (sólido) sobre la membrana oval que traspasa la presión al liquido interno de la cóclea.

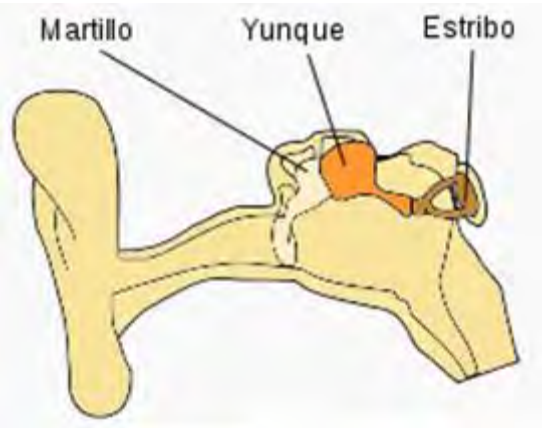


Figura 1. Huesecillos que permiten el acoplamiento de impedancias entre las oscilaciones de la membrana timpánica y el caracol.

Esta trasmisión mejorada por medio de un contacto de sólido contra sólido o líquido, se entiende si pensamos en que una columna de aire que se empuje contra una pared sólida, debido a su alto grado de elasticidad se comprimirá, conservando en forma de energía potencial su energía original, para después expandirse con lo cual la onda se reflejará; por el contrario, un resorte con mayor rigidez relativa que la del aire al empujar a un sólido o líquido elástico lo comprimirá también trasmitiéndole con mayor eficiencia su energía.

Muchos autores proponen que es el bombeo del estribo sobre la ventana oval lo que provoca que una onda se propague a lo largo del interior del líquido que contiene el caracol; esta supuesta onda al viajar a lo largo de la membrana basilar, debido a las propiedades físicas de esta membrana, adquiere gran amplitud en zonas específicas de la membrana; en la zona proximal la amplitud crece para los sonidos de alta frecuencia, en las zonas intermedias lo hacen las frecuencias medias, mientras que en la zona distal lo hacen las ondas de baja frecuencia.

Una crítica que se puede hacer a este modelo es que no toma en cuenta que la velocidad de una onda dentro de los líquidos con densidad semejante a la del agua es de más de 1000 m/s, con lo cual, por ejemplo, para una frecuencia de

1000 Hz nos daría una longitud de onda de más de un metro de longitud, por tanto, que aún para frecuencias tan altas como 10 000 Hz, la longitud de onda sería de unos 14 cm, mucho mayor que la corta longitud del caracol, la cual es de apenas unos 3.4 centímetros. Con todo hay autores [3,4] que ilustran este supuesto fenómeno (ver figura 2) con trenes de ondas o con ondas completas recorriendo la membrana basilar. Este modelo tampoco toma en cuenta que hay cuando menos 3 tipos de ondas recorriendo el interior del caracol: la onda sobre la membrana misma, la onda sobre la superficie del líquido, y la onda en el interior de éste.

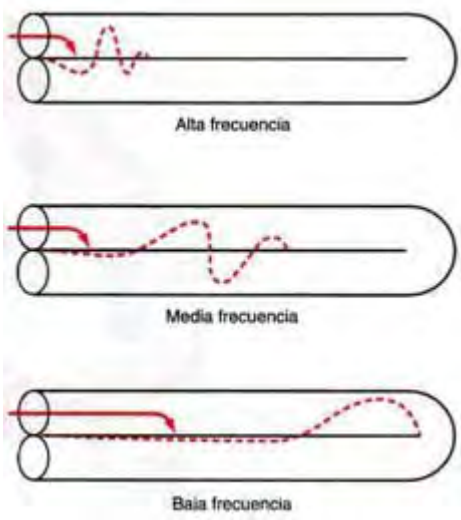


Figura 2. Supuesto desplazamiento de una "onda viajera" sobre la membrana basilar.

Pero a este modelo se le puede oponer una contradicción aún más fuerte: ¿cómo es posible que una onda recorra el largo de la membrana basilar cuando el conducto auditivo es obstruido? En efecto, con el oído tapado no se generaría tal onda, sin embargo a pesar de ello la percepción del sonido cuando se coloca la base de un diapasón sobre los dientes es extraordinariamente clara, también ocurre esto, si bien con menor intensidad, cuando el diapasón se coloca sobre la frente, o cuando unos audífonos se colocan (con el oído tapado) a unos cuantos centímetros por debajo de la oreja. Hay ciertos autores que aceptan que no es una onda propagándose por la membrana basilar la que genera en esta oscilaciones locales por resonancia, sino que es la vibración global del oído interno lo que induce la resonancia: "las ondas sonoras llegan al oído interno directamente por medio de la oscilación de los huesos del cráneo. Ello es fácilmente comprobable si colocamos un diapasón vibrando sobre el parietal o sobre el hueso mastoideo (detrás del pabellón). Dado que el oído interno se encuentra inserto en una cavidad del hueso temporal las oscilaciones del cráneo hacen entrar en oscilación directamente el fluido linfático, de una manera que no está totalmente clara aún. Lo que sí resulta evidente es que cualquiera de las dos formas de transmisión de las ondas es igualmente efectiva, sirviendo la transmisión ósea como medio alternativo cuando hay enfermedades en el oído medio" [5]. Por estas razones y basándonos en autores [3] que afirman que la membrana basilar está acoplada a fibras rígidas y elásticas con diferente longitud que va creciendo desde la ventana oval hasta la parte distal del helicotrema, proponemos que es la vibración global de la cóclea, ya sea inducida a través del estribo, o a través de las vibraciones del cráneo, las que deben generar estados de resonancia en el sistema acoplado de la membrana basilar y de las fibras rígidas y elásticas que la sostienen [5]. Proponemos que esto es equivalente a sostener la membrana a lo largo de sus orillas mediante pequeñas barritas rígidas de diferente longitud, las cuales tienen frecuencias de resonancia en función de esta longitud: las barras cortas entran en resonancia a altas frecuencias, las largas a bajas frecuencias. Así, el ensamble de las barras elásticas con una membrana longitudinal sería la causa de que la membrana oscilara con diferente amplitud impulsada por las barras y no porque la membrana en sí sola tuviese propiedades resonantes.

II. Descripción del dispositivo experimental

Este trabajo continua la investigación ya presentada en un trabajo anterior [6], en ese trabajo se había registrado las frecuencias de oscilación de las varillas acopladas a una membrana de plástico con un estroboscopio de frecuencia variable, pero no se hizo ningún registro directos de las oscilaciones de las varillas ni se registró el comportamiento simultáneo de todas las varillas, tal como se hace ahora en el presente trabajo. El dispositivo consta de 4 barras delgadas de acero en cuyo extremo se ha colocado un pequeño imán; de esta manera se forma un arreglo de de pequeñas vigas voladizas con una masa en su extremo; la rigidez, la longitud de la barra, así como la masa del imán, definirán su frecuencia natural de oscilación. Estas barras jugarán el papel de las fibras acopladas a la membrana basilar, que la harán oscilar en diferentes zonas a lo largo de su longitud dependiendo de la frecuencia que estimule el sistema de resonadores. En la figura 3 se muestra el arreglo de varillas y de imanes acopladas a una delgada membrana de plástico que jugará el papel de la membrana basilar; en la figura 4 mostramos el arreglo de imán y bobina para registrar las oscilaciones del imán. La base sobre la que están soportadas las varillitas de alambre con el imán está acoplada a un pivote que la hará oscilar a una frecuencia variable utilizando un equipo computarizado de Pasco. Las 4 bobinas colocadas encima del imán captarán por inducción las oscilaciones de los diferentes imanes y registrarán el momento en que el acoplamiento varilla masa y membrana entre en resonancia. Una vez amplificadas las señales de las bobinas con un amplificador de instrumentación, todas las señales se sumarán con un circuito adecuado como se muestra en la figura 5. La salida de este circuito se conectará a una interface para ser registrada con un programa diseñado en lenguaje G de LabVIEW, que además de exhibir la señal en modo osciloscopio le hará un análisis de Fourier,

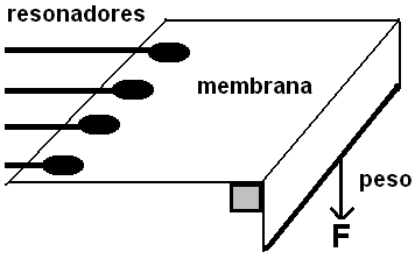


Figura 3. Resonadores acoplados a una membrana de tensión variable

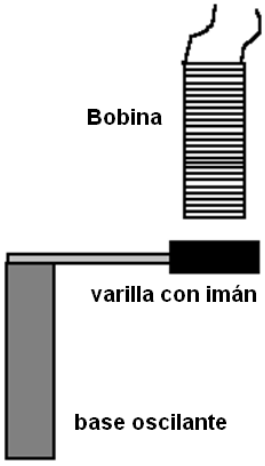


Figura 4. Forma como se detectaron las oscilaciones para cada uno de los resonadores utilizando 4 bobinas que enviaban en paralelo sus señales a un circuito sumador.

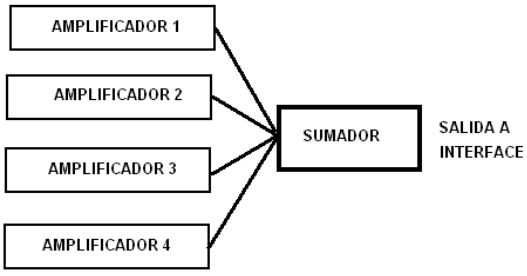


Figura 5. Arreglo instrumental para conectar las señales de la bobina a la computadora a través de una tarjeta de captura.

III. Resultados

Resonadores acoplados a una membrana de plástico

Cuando se varió la frecuencia de estimulación mecánica, haciéndose resonar sucesivamente cada una de los 4 imanes acoplados a una varilla y a la membrana, se encontró que efectivamente las varillas con el imán oscilaban con amplitud creciente hasta estabilizarse e las frecuencia de 10. 21, 17.60, 20.12 y 36.97 Hz. El espectro de frecuencias en 2 casos presentó frecuencias puras, pero en los otros 2 presentó una frecuencia principal y también algunos armónicos, tal como se muestra en la figura 6. Las zonas de la membrana pegadas a la varilla que entraba en resonancia vibraban con gran amplitud. Cuando se incrementó la amplitud de la oscilación de la base que hacía oscilar a todo el sistema se llegó a un punto en que las varillas de metal con el imán se rompieron, aunque ya en un primer experimento se había provocado un estado de resonancia en cada varilla.

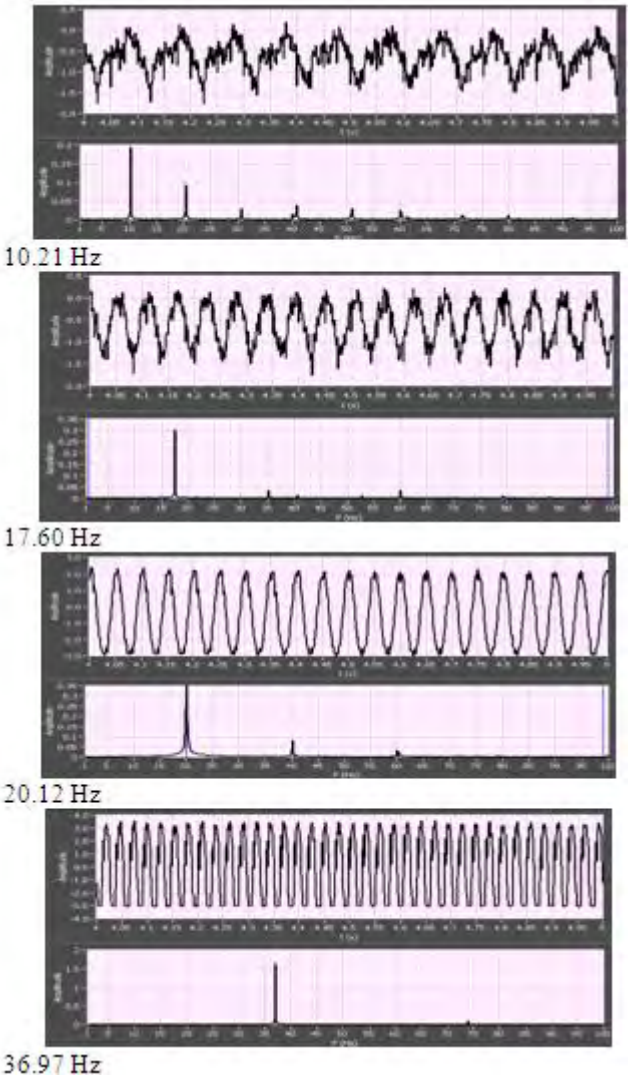


Figura 6. Oscilaciones de cada una de los resonadores con sus respectivos espectros de frecuencia indicando su frecuencia de resonancia.

IV. Discusión de resultados

Los primeros resultados muestran que si la tensión de la membrana de plástico es nula los resonadores individuales responden a una determinada frecuencia en forma independiente de los demás, esto es, que su frecuencia de oscilación, por muy grande que sea su amplitud no se trasmite o contamina a los otros resonadores, Por otra parte, las oscilaciones del resonador hacen vibrar localmente a la zona de la membrana a la que están acoplados tal como

ocurre con la membrana basilar. Por otra parte, en este segundo experimento con los 4 resonadores montados sobre una barra los imanes de neodimio fueron atraídos fuertemente por los núcleos de ferrita de las bobinas, hecho que deformó la forma sinusoidal pura de las oscilaciones y de ahí la aparición de armónicos en 2 casos..

Estos resultados preliminares llevan a plantear un nuevo experimento en el que no se usaran bobinas con núcleo metálico de ferrita sino con aire; así, se podrán acercar más a los imanes para incrementar los efectos de inducción. Por otra parte hay que individualizar las respuestas, no sumando las señales eléctricas sino capturándolas y mostrándolas de forma simultánea en diferentes canales. Hay que hacer notar que entre el 2º y el 3er resonador la diferencia de frecuencia resonante es de poco menos de 3 Hz, pese a esta cercanía de las frecuencias de resonancia la diferencia en la respuesta es muy clara.

V. Conclusiones

Los efectos de resonancia sobre este dispositivo mecánico que tiene algunas similitudes con la cóclea permite suponer que no son las propiedades resonantes de la membrana las que separan las frecuencias de las ondas sonoras, sino que es la composición global de este órgano el que provoca la resonancia; en particular se hace la hipótesis de que son las fibras rígidas y de diferente longitud las que pueden inducir las vibraciones en la membrana basilar. Esto explicaría porque son las vibraciones inducidas en este órgano a través de la vibración, ya sea a través del oído o a través del cráneo, las que permiten escuchar sonidos, Así, pese a que se mantenga obstruida la entrada normal del sonido por medio del conducto auditivo, esto es, tapándonos los oídos, se percibe el sonido cuando se pega un diapasón en la frentes o cuando se coloca una bocina en la mandíbula. También esto da una sugerencia de que, tal como sucedió con los resonadores, sus fibras rígidas se pueden dañar a causa de una carga de energía mecánica excesiva, cuando las oscilaciones a los que son sometidos por un sonidos muy intenso tienen una gran amplitud.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la COFAA la ayuda prestada para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] F. Winckel, ***Music, sound and sensatios***, Dover, 1967.
[2] A. Tomatis, ***El oído y el lenguaje***, Ediciones Orbis, 1969.
[3] http://bioinstrumentacion.eia.edu.co/webestudiantes/2006ii/audiometro/desmorf.htm
[4] https://www.google.com/search?q=ondas+dentro+de+la+cóclea
[5] A. R. ***Luria, Sensación y percepción***, Planeta, 1994.
[6] ***Las propiedades de la cóclea desde el punto de vista de la física***, José Antonio Peralta y Germán González Santos, XIX Reunión Nacional de Física y Matemáticas, 2014.

ISSN: 2594-1011

Celdas Solares del tipo CdS/CdTe interconectadas en áreas de 40 cm^2

L. A. Esquivel Mendez[1], R. C. Ruiz Ortega[1], M.L. Albor Aguilera[1], C. Hernández Vasquez[1], D. Jiménez Olarte[1], F. A. Pulgarin Agudelo[1], M.A. González Trujillo[2],
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Formación Básica, ESCOM-IPN, México D. F., México

Resumen — **En este trabajo, presentamos el procesamiento y caracterización de módulos fotovoltaicos del tipo CdS/CdTe en áreas de 40 cm2. Las películas delgadas de Sulfuro de Cadmio (CdS) fueron depositadas empleando la técnica de Baño Químico (DBQ) y las películas de Teluro de Cadmio fueron obtenidas mediante la técnica de Sublimación en Espacio Cerrado (CSS por sus siglas en inglés). Se depositó CdS en substratos de vidrio conductor TCO de soda lima, después la película de CdTe sobre el CdS y posteriormente se evaporaron contactos metálicos de Cu-Au sobre la película de CdTe. El modulo está constituido de 14 celdas interconectadas en serie mediante escritura laser con área de contacto de 29.4 cm^2; se determinaron los parámetros fotovoltaicos obteniendo valores para el mejor módulo solar de Voc=7.36 V, Isc= 31.60 mA, FF=35.89% y una eficiencia de conversión de energía solar del 3 %.**

Palabras Clave – **Módulo, CdS, CdTe, rayado láser**

Abstract —**In this paper, we present the processing and characterization of photovoltaic modules of the type CdS/CdTe in areas of 40 cm2. Thin films of cadmium sulfide (CdS) were deposited using the chemical bath Technique (DBQ) and cadmium tellurium films were obtained through the closed space sublimation technique (CSS). CdS were deposited in conductive glass substrates TCO of soda Lime, then the thin film of CdTe on the CdS and metallic contacts of Cu-Au after they were evaporated on the film of CdTe. The module consists of 14 cells interconnected in series using laser writing with contact area of 29.4 cm^2. We determined the photovoltaic parameters obtaining values for the best solar module of Voc = 7.36 V, Isc= 31.60 mA, FF = 35.89% and solar energy conversion efficiency of 3%.**

Keywords — **Fonts, margins, tables**

1. INTRODUCCIÓN

Las celdas solares policristalinas del tipo CdS/CdTe son consideradas en la actualidad una excelente opción para la conversión fotovoltaica y producción a gran escala de módulos fotovoltaicos basados en esta tecnología, Esto es debido a su simplicidad, bajo costo de procesamiento y buenos resultados [1]. La vida media de los paneles fotovoltaicos del tipo CdS/CdTe va desde los 20 hasta los 30 años dependiendo de los materiales involucrados, la técnica de depósito, el tipo de encapsulado, el lugar donde están expuestos dichos paneles, la cantidad de radiación solar, la temperatura a la que se encuentren entre otros factores [2].

La eficiencia fotovoltaica y la estabilidad en la respuesta eléctrica de las celdas solares del tipo CdS/CdTe dependen de gran manera del tipo de material usado como contacto posterior. Debido a la alta afinidad electrónica del CdTe (χ = 4.28 eV) la elección de un metal con función de trabajo > 5.7 eV es necesaria para formar un contacto óhmico entre el CdTe y el metal [3]. Entre los contactos más utilizados están: Cu/Au [4], ZnTe [5], Cu/Mo [6]; sin embargo, una ´ desventaja del Cu como contacto posterior es debido a que su pequeño radio atómico 1.28 °A, permite su interdifusión a través de las fronteras de grano del CdTe. La pérdida en la estabilidad fotoeléctrica de las celdas solares del tipo CdS/CdTe, principalmente por el decremento en la respuesta del factor de llenado (FF) en la curva I vs. V, se ha demostrado que está estrechamente relacionada con el uso del Cu como contacto posterior; puesto que el Cu usado como contacto posterior en celdas solares del tipo CdS/CdTe en algunos casos forma un contacto diodo en inversa lo que provoca el llamado "roll-over" en la curva I vs. V, limitando la eficiencia fotovoltaica [7].

2. METODOLOGÍA

La estructura de las películas policristalinas de CdS y CdTe obtenidas fueron identificadas utilizando la técnica de rayos-x, para lo cual se utilizó un difractometro Rigaku SmartLab usando radiación Cu-Kα1. Se realizó un análisis de composición química utilizando un microscopio electrónico de barrido JEOL modelo JSM-6300. El espesor Fue medido por un perfilómetro Ambios XP 100 (±1 nm de resolución). La transmitancia óptica fue medida con un espectrofotómetro de doble haz UV-VIS Shimadzu 3101-PC.

2.1 Depósito de películas delgadas de CdS por la técnica DBQ.

Las películas delgadas de CdS fueron depositadas utilizando la técnica DBQ, utilizando como solución precursora $CdCl_2$ (0.12M), NH_4Cl (0.2 M), NH_3 (2 M) y tiourea (0.3 M), con tiempos de depósito de 6 min para las

mono-capas y 6 min para las bi-capas con temperaturas de depósito de 72 °C.

2.2 Depósito de películas delgadas de CdTe por la técnica CSS.

Las películas delgadas de CdTe fueron crecidas sobre películas de CdS en un equipo CSS, el cual se observa en la Fig. 1 y consta principalmente de tres componentes A: cámara de evaporación, B: sistema eléctrico de medición y control y C: sistema de vacío. En la figura 2 se observa como está constituida la cámara de evaporación, por bloques calefactores metálicos fuente y sustrato, en los cuales se coloca una chalupa donde se deposita el material que se va a evaporar (bloque fuente) para obtenerlo en forma de película delgada.

Los parámetros de crecimiento de las muestras de CdTe depositadas en el CSS fueron los Siguientes: se utilizó un polvo de CdTe Sigma-Aldrich del 99.99% de pureza, con temperaturas de fuente *Tf* de 600°C y Temperatura de sustrato *Ts* de 430°C; en una atmosfera controlada de Ar y O2 (50+50%) a una presión de 150 mTorr y un tiempo de depósito de 20 minutos.

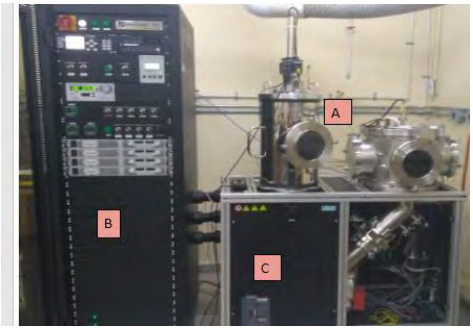


Fig. 1. La fotografía muestra el sistema CSS, en el cual se observan las tres partes principales que lo constituyen: (A) cámara de evaporación, (B) sistema eléctrico de medición y control (C) sistema de vacío.

Fig. 2. Fotografía de la cámara de vacío en el lado izquierdo y de la parte interna de la cámara en el lado derecho.

La estructura obtenida es sometida a un tratamiento térmico en CdCl2, utilizando la misma técnica de evaporación térmica en una atmosfera inerte controlada de 100% Ar; los parámetros de crecimiento se muestran en la Tabla I. Subsecuentemente se someten las películas a un tratamiento térmico de recocido a 400°C durante 30 min.

TABLA I.
PARÁMETROS DE CRECIMIENTO PARA EL DEPÓSITO DE $CdCl_2$

	Tf (°C)	Ts (°C)	*P (mTorr)*	*Tc (min)*
C4	350	200	100	5
C5	350	200	100	5
C6	350	200	100	10
16	350	200	100	10

La estructura obtenida es sometida a un tratamiento térmico en CdCl2, utilizando la misma técnica de evaporación térmica en una atmosfera inerte controlada de 100% Ar; los parámetros de crecimiento se muestran en la Tabla I. Subsecuentemente se someten las películas a un tratamiento térmico de recocido a 400°C durante 30 min.

Los contactos metálicos son depositados por evaporación térmica de Cu al vacío, con un espesor promedio de 5 nm., seguido de la evaporación de Au, con un espesor promedio de 100 nm. Finalmente, los módulos se someten a un tratamiento térmico de 200°C durante 20 minutos.

2.3 Interconexión de los dispositivos fotovoltaicos mediante rayado laser.

El sistema de escritura láser, consiste de un láser pulsado de 532 nm de longitud de onda, un expansor de haz de 10x, una lente de enfoque y una mesa XYZ. Para realizar la escritura laser de una forma secuencial en las mejores condiciones como se observa en la figura 3., el proceso de interconexión de rayado laser, se lleva a cabo en tres procesos que se llevan alternadamente al proceso de depósito de las películas delgadas de CdS/CdTe. La interconexión del módulo se llevó a cabo en serie, mediante la interconexión de 14 celdas, con un área de contacto de 29.4 cm^2.

El proceso comienza en el primer rayado al TCO al que le llamamos (P1). En este primer rayado se define el tamaño de las celdas y el número de celdas a interconectar que en este caso es de 14 celdas dentro del módulo simplemente haciendo rayados láser separados una distancia “d” entre ellos, como se busca el aislamiento entre celdas se debe garantizar que no queden residuos del contacto dentro del rayado, también llamado canal. En la figura 4 se muestra un esquema de 2 rayados láser que definen 3 subceldas. Por otra parte, no debe dañarse el sustrato de vidrio porque al estar sometido a esfuerzo térmicos por la exposición a la radiación solar durante el funcionamiento del módulo, éste podría fracturarse.

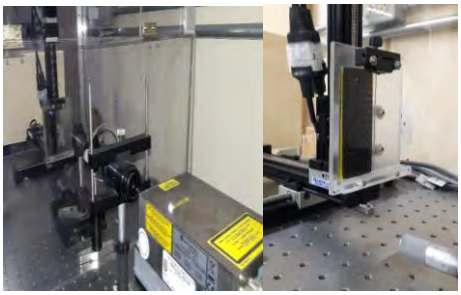


Figura 3. Sistema de escritura láser y portamuestras

En el proceso de interconexión el segundo rayado se realiza es sobre las películas de CdS/CdTe/ posterior al tratamiento térmico con $CdCl_2$, esto para el fin de establecer un punto de conexión entre celdas adyacentes, a este lo nombramos rayado (P2). En este debe garantizarse el aislamiento total entre subceldas y finalmente el canal debe estar libre de residuos de CdS o CdTe pues como se mencionó anteriormente es este rayado el punto de conexión entre el contacto frontal de una celda con el contacto trasero de la siguiente subcelda. Como se muestra en la figura 5 el rayado P2 se realiza muy cerca del rayado P1 por lo que el equipo de posicionamiento del láser debe ser de alta precisión.

En la etapa final se realiza el rayado P3 posterior al depósito de los contactos metálicos Cu-Au, este rayado aísla el contacto trasero de la celda, como se observa en la figura 6.

Figura 4. Esquema del proceso de rayado láser P1. En este proceso se define el tamaño de las celdas que forman el módulo.

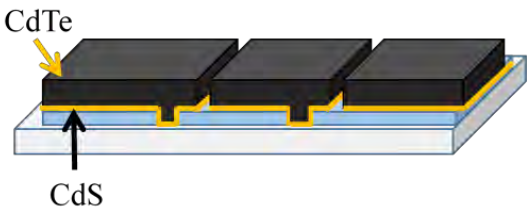


Figura 5. Esquema del proceso de rayado laser P2.

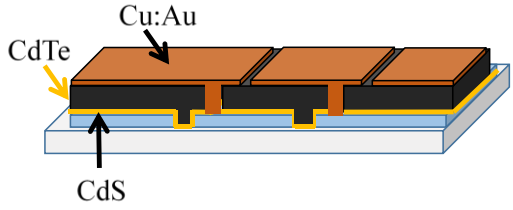


Figura 6. Esquema del proceso de rayado laser P3

3. Resultados

3.1. Caracterización de las películas delgadas de CdS

El análisis de DRX revela que se obtienen películas policristalinas con orientación preferencial sobre su superficie; su estructura cristalina corresponde a la fase hexagonal de la estructura tipo wurtzita con orientación cristalina preferencial en la dirección 002.

En la figura 7, se muestra un espectro de transmitancia de la película de CdS, en donde se puede observar que las películas muestran en general una transmitancia del orden del 85-90 %; la cual tiene un comportamiento de máximos y mínimos de interferencia debida a reflexiones múltiples, causada por cristales de CdO depositados en la superficie del CdS.

La posición energética de los puntos críticos es entonces determinada de los máximos de la derivada del coeficiente de absorción con respecto a la energía del fotón como se muestra en la figura 9. Este método permite obtener una estimación de la brecha prohibida (Eg) , ya que la condición de existencia de puntos críticos se satisface en los puntos de la zona de Brillouin, donde las bandas de valencia y conducción adquieren un valor extremo (máximo y mínimo, respectivamente), por lo que el CdS aquí depositado muestra un valor de gap del orden de 2.3 eV.

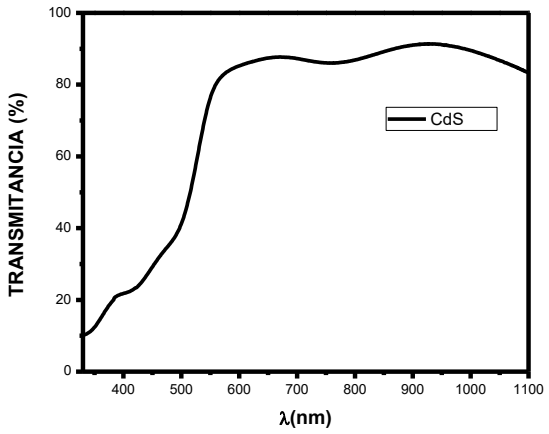


Figura 7. Espectro de transmitancia óptica de las muestras CdS, crecidas a 72°C y 6 minutos.

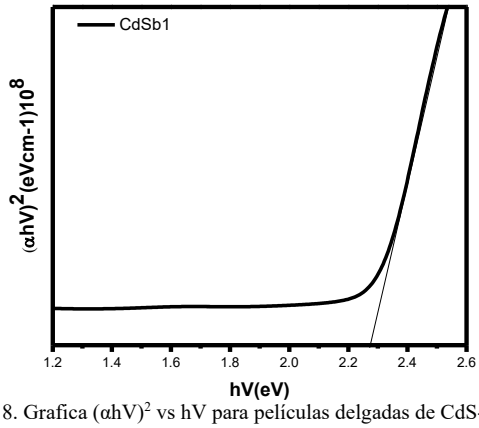


Figura 8. Grafica $(\alpha hV)^2$ vs hV para películas delgadas de CdS-bicapa crecidas por DBQ.

En la figura 9. se muestran las características morfológicas de las películas delgadas de CdS, en las que se puede observar que presentan un deposito uniforme con espesores promedio de 90 nm, también se observa la aparición de pequeños cristales blancos de 0.3 µm de diámetro, esto es debido a la conversión de parcial de CdS a oxido de cadmio (CdO) debido al incremento de temperatura al ser sometidas al tratamiento térmico.

En la siguiente tabla se muestra el análisis de composición química del CdS, donde se observa claramente una cantidad mayor de Cd con respecto al S, esto quiere decir que predominan las vacancias de azufre y el exceso de cadmio, lo cual indica que se están obteniendo películas delgadas de CdS tipo n.

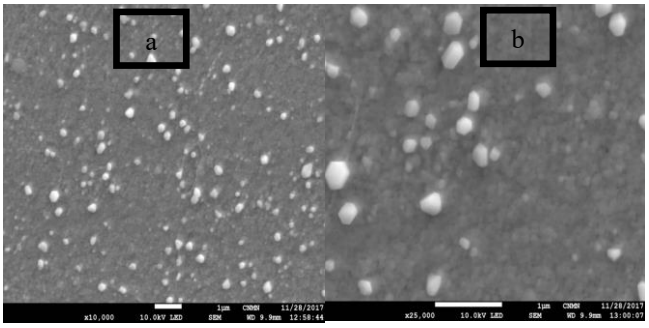


Figura 9. Imágenes obtenidas por MEB a 10 kV de aceleración, escala visible de 1µm.y magnificaciones de a)1000 x, b)25,000 x.

TABLA II.
RESULTADOS DE COMPOSICIÓN QUÍMICA

Muestra	Cd (% atom)	S (% atom)
CdS	55.81	44.19

3.2. Caracterización de las películas delgadas de CdTe

El análisis del difractograma de DRX nos indica que se obtienen películas policristalinas, así como identificar la estructura que se está obteniendo la cual, es una fase cúbica tipo zinc blenda con orientación preferencial en el plano (111), junto con las reflexiones (220), (311),(422), (331), (511) y (400), como se observa en la Figura 10.

En la Figura 11, se muestra en la micrografía que los granos de CdTe crecen con un tipo de apilamiento, en la cual se puede observar el tipo de grano característico en forma de cubos y facetas cristalográficas bien definidas distintivas de la estructura cúbica; en la micrografía se observa un tamaño de grano ~1.8 µm de la matriz. Se espera que con el tratamiento térmico de $CdCl_2$ los granos que se encuentran en la cúspide se recristalicen y eviten ser problemas de difusión por las fronteras de grano presentes.

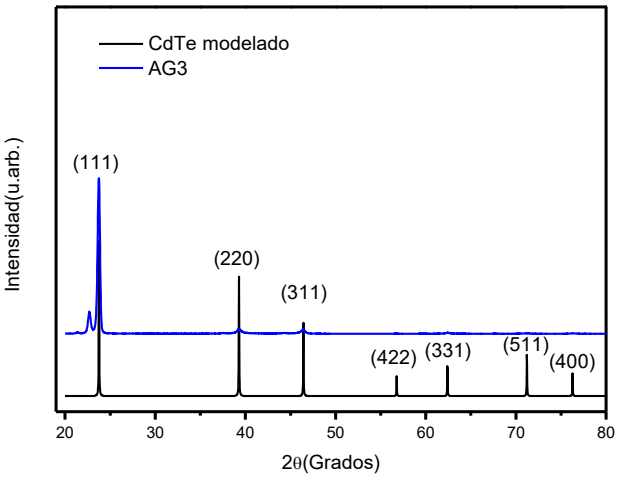


Figura 10 . Espectro de difracción de rayos x de la muestra de CdTe crecida en el sistema CSS.

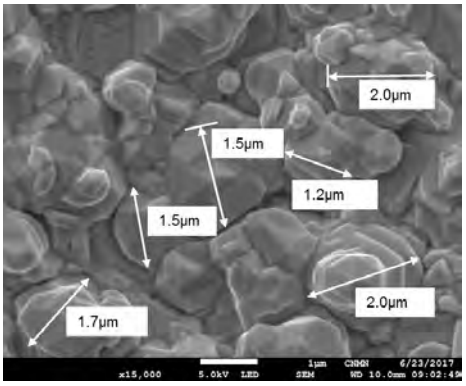


Figura 11. Micrografía a 5 kV de aceleración, escala visible de 1µm y magnificación a 15000 x.

TABLA III. DE RESULTADOS DE LA MUESTRAS DE CdTe

Muestra	Espesor (µm)	Cd (% atom)	Te(%atom)	Parametro de Red (°A)
CdTe	2-2.5	48	52	6.481

En la anterior tabla III, se muestra un análisis global composicional químico de la película delgada de CdTe, esté se realizó mediante espectroscopia de energía dispersiva de rayos x (EDXS) a 15000x ;en la cual se observa una cantidad de Te ligeramente mayor con respecto al cadmio, lo cual nos indica que predominan las vacancias de Caadmio, esto es alentador ya que nos proporciona información de que se está obteniendo el CdTe como semiconductor tipo P.

3.3. Caracterización de los módulos fotovoltaicos

La Tabla IV. Muestra los valores obtenidos de los parámetros fotovoltaicos de los módulos del tipo CdS/CdTe procesados. En donde se mencionan los valores de los siguientes parámetros: Voltaje a circuito abierto *Voc*, corriente de corto circuito *Isc*, factor de llenado *ff*, y eficiencia de conversión *η*. Las películas de CdS y CdTe fueron depositadas con los mismos parámetros de crecimiento para todos los módulos, la variante se encuentra en el tratamiento térmico al cual fue sometido cada uno de los módulos procesados como se mencionó anteriormente en la tabla I.

Se determinaron las características de corriente vs. voltaje (*I vs. V*) de los módulos procesados, bajo iluminación y en polarización directa o positiva; como fuente de iluminación se utilizó un simulador solar con lámpara de tungsteno halógena, el cual está ajustado para que la irradiancia que emitiera sobre el módulo fuera de 100 mW/cm^2 correspondiente a la condición atmosférica global AM 1.5 (air mass 1.5). Las características *I vs. V* de los módulos se obtuvieron variando el voltaje aplicado con la fuente y midiendo la corriente generada en el módulo iluminado.

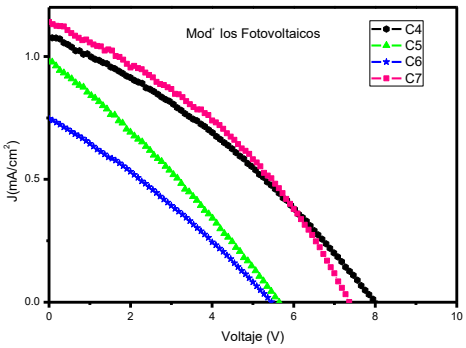


Figura 12. Curvas I-V de los 4 módulos solares en un área de contacto de 29.4 cm^2

TABLA I. Propiedades eléctricas de los modulos Fotovoltaicos

Muestra	Voc(V)	Isc (mA/cm^2)	FF	η (%)
C4	8.0	31.60	0.32	2.8
C5	5.64	28.83	0.28	1.58
C6	5.67	23.27	0.28	1.34
C7	7.36	31.60	0.35	3.01

4. DISCUSIÓN

Como se puede observar en los módulos fotovoltaicos del tipo CdS/CdTe en áreas de 40 cm^2 procesados bajo condiciones de oscuridad e iluminación de una fuente de irradiancia de 100 mW/cm^2, correspondiente a la condición atmosférica global AM 1.5. Se observa una disminución abrupta en la densidad de corriente en el módulo C6, probablemente asociado al aumento de la densidad de defectos como pueden ser desuniformidad en las películas, densidad de pinholes entre otros defectos los cuales son probables causantes a que disminuyan los portadores de carga encargados de la fotocorriente y que se evidencia en los parámetros fotovoltaicos de la curva I-V; Jsc,Voc, FF y η.

Cabe mencionar que al disminuir el valor del factor de llenado es debido al incremento de la resistencia en serie Rs y por tanto disminuye la eficiencia de conversión, Los valores de Voc están fuertemente condicionados por los valores de la corriente inversa de saturación Jo, bajos valores de Voc y altos valores Jo, están relacionados con una alta recombinación de portadores de carga como mecanismo de transporte dominante en la heterounión o interface CdS/CdTe, afectando de igual manera las características eléctricas de los módulos.

Otro factor importante que puede afectar el buen funcionamiento de los módulos es el rayado laser, por lo que, si el rayado es deficiente, o no hay una buena interconexión entre celdas cortocircuitando las celdas; dando como resultado pérdidas en la densidad de corriente y por tanto una baja eficiencia de los módulos.

Lo anterior pone en manifiesto la importancia de obtener películas policristalinas con una cantidad mínima de defectos o propiedades adecuadas que mejoren las propiedades de los módulos.

5. CONCLUSIONES

El objetivo fundamental de este trabajo consistió en el procesamiento y caracterización de módulos fotovoltaicos del tipo CdS/CdTe en áreas de 40 cm^2, si bien los valores reportados de eficiencia de nuestros módulos son de mediano rango, se seguirá trabajando en los dispositivos tratando de mejorar los resultados obtenidos al momento.

- Se lograron sintetizar películas de CdS con espesores inferiores a los 100 nm y con uniformidad en los mismos, esto constituye una parte importante para seguir con la mejora y caracterización del material ventana.
- Se lograron obtener películas delgadas de CdTe por la técnica CSS, logrando obtener películas con espesores y tamaños de grano uniformes y características apropiadas para ser utilizada como material absorbente en celdas solares.

Se continuará con el trabajo y mejoramiento de este tipo de tecnologías a nivel laboratorio, para lograr el incremento en las eficiencias de estos dispositivos.

Esto se logrará al ir optimizando los parámetros de crecimiento de los materiales involucrados en la obtención de este tipo de módulos fotovoltaicos y los procesos de interconexión y rallado de los módulos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado gracias a los proyectos CEMIE-SOL P25, SIP-20180398 y SIP-20180439.

REFERENCIAS

[1] First Solar, “First solar sets world record for CdTe solar PV efficiency” (2011), http://investor.firstsolar.com/releasedetail.cfm?ReleaseID=593994.
[2] J. A. del Cueto, J. Pruett and D. Cunningham, Conference paper NREL (NREL/CP-520-33543, Mayo 2003).
[3] N. Romeo, A. Bosio, R. Tedeschi y V. Canevari, Thin Solid Films 361-362 (2000) 327-329.
[4] C. S. Ferekides, V. Viswanathan, D. L. Morel, RF sputtered back contacts for CdTe/CdS thin film solar cells; 26th Photovoltaic Solar Energy Conference, Anaheim (1997) 423-426.
[5] J. Tang, D. Mao, T. R. Ohno, V. Kaydanov, J. U. Trefny, Properties of ZnTe:Cu thin films and CdS/CdTe/ZnTe solar cells; 26th (Photovoltaic Specialists Conference, Anaheim 1997), (Conference Record of the Twenty-Sixth IEEE Publication, 439-442).
[6] N. Romeo, A. Bosio y V. Canevari, International Journal of Sustainable Energy Issue 12 (1992) 183-186.
[7] D. Bonnet y P. V. Meyers, J. Mater Res. 13 (1998) 2740-2753.

ISSN: 2594-1011

Análisis fractal y multifractal de series de terremotos sintéticos

Ana María Aguilar Molina [1], Alejandro Muñoz Diosdado [2], Fernando Angulo Brown [1]

[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Ciencias Básicas, UPIBI-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 56493 E-mail: amunozdiosdado@gmail.com

Resumen — **En este trabajo se usa el modelo de Olami. Feder y Christensen (OFC) para generar series de terremotos sintéticos con un amplio rango de niveles de conservación β. Los resultados del modelo reproducen las gráficas en escalera de la sismicidad real. Se aplicó el formalismo multifractal a estas series. Se calcularon los valores de los parámetros $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_{der}$, $\Delta\alpha_{izq}$ y el parámetro de simetría r, para caracterizarlas. Además, se introdujo la medición de la curvatura *K*, alrededor del máximo de los espectros multifractales para un mejor análisis. Observamos que la complejidad aumenta conforme aumenta el valor de β. Los espectros multifractales están sesgados hacia la izquierda y la curvatura disminuye a medida que β disminuye. Se concluye que el análisis multifractal nos proporciona información de la complejidad de estas series de tiempo y nos da una idea de lo que podría suceder en las series de tiempo de sismicidad real.**

Palabras Clave – **fractal, multifractal, spring-block, terremotos**

Abstract — **In this work, the Olami, Feder and Christensen (OFC) model is used to generate time series of synthetic earthquakes with a wide range of conservation levels β. The results of the model reproduce the staircase graphs of real seismicity. Multifractal formalism is applied to these time series. The values of the parameters $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_{right}$, $\Delta\alpha_{left}$ were calculated. And the symmetry parameter *r*, to characterize them. In addition, the curvature measurement *K* around the maximum of the multifractal spectra is introduced for better analysis. The multifractal spectra are left skewed and the curvature decreases as β decreases. It is concluded that multifractal analysis gives us information of the complexity of these time series and it gives us an idea of what could happen in time series of real seismicity.**

Keywords — **Fractal, multifractal, spring-block, earthquakes**

I. INTRODUCCIÓN

Los terremotos son probablemente el mayor paradigma de auto-organización crítica. La geología de México refleja que gran parte de su territorio esté sometido a enormes esfuerzos que causan, entre otros efectos, grandes terremotos. Actualmente se puede dar una explicación de estos fenómenos. Sin embargo, el conocimiento que se tiene no permite predecir con exactitud su ocurrencia. La distribución de energía liberada durante los terremotos obedece a la ley de Gutenberg-Richter que es esencialmente una ley de potencia y puede interpretarse como una manifestación del comportamiento crítico auto-organizado de la dinámica de la Tierra. Olami, Feder y Christensen (OFC) introdujeron un modelo no conservativo el cual se mapea directamente en una versión bidimensional del modelo de resorte-bloque de Burridge-Knopoff para terremotos. Al aplicar el modelo muchas veces se obtienen series de magnitudes de estos sismos sintéticos, estas series tienen comportamientos fractales. La dimensión fractal proporciona información de los cambios en la dinámica interna de la serie. En este trabajo se usa el método de Chhabra y Jensen para el cálculo directo del espectro de singularidades. Para analizar el espectro multifractal los parámetros de simetría (r), el grado de multifractalidad ($\Delta\alpha$) y el valor de la curvatura en el máximo del espectro nos proporcionan una descripción de las series de tiempo. En este trabajo se usa el modelo OFC para generar series de terremotos sintéticos de 10 000 000 de datos, con un amplio rango de niveles de conservación β, entre 0.01 y 0.25. Se construye la gráfica de Gutenberg-Richter y se observa que la pendiente disminuye proporcionalmente con la disminución de β. Se grafica también la frecuencia acumulada de las mismas series y se observa que el valor aumenta a medida que crece β. Además, se aplicó el formalismo multifractal a estas series. Se obtuvieron los valores de $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_{der}$, $\Delta\alpha_{izq}$, r y se introdujo la medición de la curvatura alrededor del máximo de los espectros para un mejor análisis. Los espectros son más anchos para valores grandes de β y menores para valores pequeños. La mayoría de los espectros estaban sesgados hacia la derecha y el valor del parámetro de simetría aumenta a medida que se incrementa β. Para un mejor análisis medimos la curvatura de cada uno de los espectros y obtuvimos que para $\beta = 0.01$ la curvatura alrededor del máximo del espectro es mayor que para el valor de 0.25.

II. METODOLOGÍA

La dinámica de las fallas del terremoto quizá proporciona una realización física de la idea recientemente propuesta de críticamente auto-organizado (SOC). Bak, Tang y Wiesenfeld (BTW) introdujeron el concepto de criticidad auto-organizada [1] y lo aplicaron al análisis de sismicidad sintética con modelos muy parecidos al modelo básico de la pila de arena en la cual los sismos sintéticos son

equivalentes a las avalanchas del modelo de la pila de arena, esto se ha aplicado también al análisis de los terremotos de la sismicidad real.

Según la mayoría de los sismólogos teóricos los terremotos son probablemente el paradigma más relevante críticamente auto-organizada. En 1956 Gutenberg y Richter se dieron cuenta de que la tasa de ocurrencia de terremotos de magnitud *M* mayor que *m* está dada por la relación

$$\log_{10} N(M > m) = a - bm$$

Esta es la ley de Gutenberg-Richter [6]. Se ha registrado que el parámetro *b* tiene un amplio rango de valores para diferentes fallas. Se ha registrado que *b* toma valores de 0.80 a 1.06 para pequeños terremotos y 1.23 a 1.54 para terremotos grandes [1].

Se cree que la energía (momento sísmico) *E* liberada durante el terremoto aumenta exponencialmente con la magnitud del terremoto,

$$\log_{10} E = c + dm \qquad (1)$$

donde el parámetro *d* es 1 y 3/2 para terremotos pequeños y grandes, respectivamente. Así, la ley de Gutenberg-Richter se transforma en una ley de potencia para el número de terremotos observados con una energía mayor que *E*,

$$N(E_0 > E) \sim E^{-b/d} = E^{-\beta} \qquad (2)$$

Note que β está en el mismo rango para pequeños y grandes terremotos [0.80-1.05].

Bak y Tang indicaron que los modelos simples conservativos de SOC pueden servir como marco para explicar el comportamiento de ley de potencia, dando un valor de $\beta = 0.2$ [1].

Olami, Feder y Christensen (OFC) en 1992 introdujeron un modelo de autómata celular generalizado, continuo, no conservativo que muestra SOC. La ventaja de utilizar este modelo consiste en que se puede controlar el nivel de conservación β. La propuesta de este modelo es una versión en dos dimensiones del modelo de resorte bloque de Burridge-Knopoff. Ellos obtuvieron un comportamiento SOC que les permitió encontrar la ley de potencias de Gutenberg-Richter [1].

El modelo de bloque-resorte OFC es un sistema dinámico bidimensional de bloques interconectados por resortes. Cada bloque está conectado a los cuatro vecinos más cercanos. Además, cada bloque está conectado a una sola placa de conducción rígida por otro conjunto de resortes, así como conectada por la fuerza de fricción a una placa rígida fija (ver Fig.1). Los bloques son conducidos por el movimiento relativo de las dos placas rígidas. Cuando la fuerza en uno de los bloques es mayor que algún valor umbral F_h (la fricción estática máxima), el bloque se desliza. Suponemos que el bloque móvil se deslizará a la posición de fuerza cero. El deslizamiento de un bloque redefinirá las fuerzas en sus vecinos más cercanos. Esto puede resultar en lejanos desplazamientos y una reacción en cadena puede evolucionar.

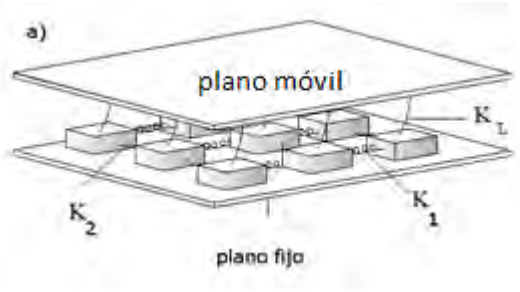


Fig. 1. Sistema bidimensional de bloques conectados. La tensión en el bloque aumenta uniformemente como una respuesta del movimiento relativo del plano rígido.

Con el fin de mapear el modelo de bloque-resorte en un modelo de autómata celular definimos una matriz L x L de bloques por *(i, j)*, donde *i*, *j* son enteros restringidos al intervalo entre 1 y L. El desplazamiento de cada uno de los bloques desde su posición relajada sobre la red se define como $dx_{i,j}$. La fuerza total ejercida por los resortes sobre un bloque dado *(i, j)* se expresa por

$$\begin{aligned} F_{i,j} &= K_1\left[2dx_{i,j} - dx_{i-1,j} - dx_{i+1,j}\right] + \\ &+K_2\left[2dx_{i,j} - dx_{i,j-1} - dx_{i,j+1}\right] + K_L\, dx_{i,j} \end{aligned} \qquad (3)$$

donde K_1, K_2 y K_L denotan las constantes elásticas de los resortes.

Cuando las dos placas rígidas se mueven entre sí, la fuerza total sobre cada bloque aumenta uniformemente (con una velocidad proporcional a $K_L V$, donde *V* es la velocidad relativa entre las dos placas rígidas) hasta que un sitio alcance el valor umbral y el proceso de relajación comienza (se desencadena un terremoto). Se puede demostrar fácilmente que la redistribución de la deformación después de un deslizamiento local en la posición *(i, j)* está dada por la relación

$$\begin{aligned} F_{i\pm1,j} &\to F_{i\pm1,j} + \delta F_{i\pm1,j}, \\ F_{i,j\pm1} &\to F_{i,j\pm1} + \delta F_{i,j\pm1}, \\ F_{i,j} &\to 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

donde los aumentos en las fuerzas vecinas más cercanas son

$$\begin{aligned} \delta F_{i\pm1,j} &= \frac{K_1}{2K_1 + 2K_2 + K_L} F_{i,j} = \alpha_1 F_{i,j}, \\ \delta F_{i\pm1,j} &= \frac{K_2}{2K_1 + 2K_2 + K_L} F_{i,j} = \alpha_2 F_{i,j}, \end{aligned} \qquad (5)$$

Por simplicidad denotamos los radios elásticos por α_1 y α_2,

respectivamente. Observamos que la redistribución de la fuerza no es conservativa [1].

Este modelo está limitado al caso isotrópico, $K_1 = K_2$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$. La condición de frontera del modelo es rígida, lo que implica que $F=0$ en la frontera. El intervalo de tiempo entre los terremotos es mucho mayor que la duración real de un terremoto. Por lo tanto, el mapeo del modelo de bloque-resorte en un autómata celular continuo, no conservativo que modela terremotos se describe por el siguiente algoritmo.

(1) Inicializar todos los sitios a un valor aleatorio entre 0 y F_{th}.

(2) Si algún $F_{i,j} \geq F_{th}$ entonces la fuerza en $F_{i,j}$ se redistribuye a sus vecinos de acuerdo a la regla

$$F_{n,n} \rightarrow F_{n,n} + \alpha F_{i,j}, \qquad F_{i,j} \rightarrow 0, \tag{6}$$

donde $F_{n,n}$ son las tensiones de los cuatro vecinos más cercanos. Un terremoto se desarrolla.

(3) Se repite el paso 2 hasta que el terremoto esté completamente desarrollado.

(4) Localizar el bloque con mayor tensión. $F_{máx.}$ Sumar F_{th} - $F_{máx.}$ a todos los sitios (perturbación global) y repetir el paso 2.

Este modelo reproduce algunas propiedades sísmicas tales como la ley de Gutenberg-Richter para el tamaño de distribución [1,2].

Muchas series de tiempo obtenidas de mediciones realizadas en sistemas complejos tienen características multifractales. Esto se debe a que los sistemas complejos están compuestos por muchas componentes que interaccionan entre sí de forma no lineal. Las señales multifractales tienen una complejidad mayor, son intrínsecamente complejas e inhomogéneas, pueden descomponerse en muchos subconjuntos (posiblemente un número infinito) caracterizados por diferentes dimensiones fractales, las cuales cuantifican el comportamiento local singular y por lo tanto se refieren al escalamiento local de las series de tiempo. El grado de multifractalidad es una medida de la complejidad del sistema y proporciona información sobre qué tan no lineal y no estacionario es el mismo. Sin embargo, los espectros multifractales de sistemas reales son difíciles de manejar, en el sentido de que es complicado obtener información a partir del mismo. El análisis fractal y multifractal es uno de los métodos más prometedores para extraer la información contenida en las series de tiempo. Es importante porque permite conocer algunos de los mecanismos involucrados en el proceso. Obtener la dimensión fractal permite tener un valor estable que refleje en una forma general los cambios en la dinámica interna [2].

Las series de tiempo obtenidas con el modelo OFC presentan características multifractales, por esta razón procedimos a realizar su análisis multifractal.

Las distribuciones multifractales se caracterizan por la función $f(\alpha)$ (la dimensión fractal) contra α (el exponente de Hölder), a la gráfica de esta función se le llama espectro multifractal. Chhabra y Jensen [3] desarrollaron un método simple y preciso para el cálculo directo del espectro de singularidades $f(\alpha)$. Se puede considerar a la serie de tiempo como una medida singular $P(x)$ si se normaliza la serie. Se calcula la curva $f(\alpha)$ primero cubriendo la medida con cajas de igual longitud $L = 2^{-n}$ y calculando las probabilidades $P_i(L)$ en cada una de las cajas. Entonces se construye la familia uni-paramétrica de medidas

$$\mu_i(q,L) = [P_i(L)]^q \Big/ \sum_j [P_j(L)]^q \tag{7}$$

donde la dimensión fractal es

$$f(q) = -\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_i^N \mu_i(q,L)\log[\mu_i(q,L)]}{\log N} = \lim_{L\to 0} \frac{\sum_i \mu_i(q,L)\log[\mu_i(q,L)]}{\log L} \tag{8}$$

y la potencia de singularidad o el exponente de Hölder es

$$\alpha(q) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_I^N \mu_i(q,L)\log[P_i(L)]}{\log N} = \lim_{L\to 0} \frac{\sum_i \mu_i(q,L)\log[P_i(L)]}{\log L} \tag{9}$$

Finalmente, para cada valor de q se evalúan los numeradores en los lados derechos de las ecuaciones (8) y (9), para cajas de tamaño decreciente (N creciente). Se extraen $f(q)$ y $\alpha(q)$ de las pendientes de las rectas que son las gráficas de los términos de los numeradores versus $\log L$. El parámetro q proporciona una especie de microscopio en el sentido de que permite explorar diferentes regiones de la medida singular. Para $q > 1$, se amplifican las regiones más singulares de P, mientras que para $q < 1$ se acentúan las regiones menos singulares, y para $q = 1$ la medida $\mu(1)$ reproduce la medida original. Las ecuaciones (8) y (9) dan una relación entre la dimensión fractal f y la potencia promedio de singularidades α como funciones implícitas del parámetro q.

Para caracterizar cuantitativamente al espectro multifractal de diferentes series de tiempo, es común calcular el ancho del espectro o grado de multifractalidad de las series de tiempo, $\Delta\alpha = \alpha_{máx.} - \alpha_{min}$, esta cantidad mide el rango de exponentes fractales en la serie de tiempo; por lo tanto, si $\Delta\alpha$ es grande, la señal es más rica en estructura. Se puede usar $\Delta\alpha_{der} = \alpha_{máx.} - \alpha_0$ y $\Delta\alpha_{izq} = \alpha_0 - \alpha_{min}$, donde α_0 es el punto donde $f(\alpha)$ tiene su máximo, como indicadores de simetría, si $\Delta\alpha_{der} = \Delta\alpha_{izq.}$ entonces el espectro es simétrico,

pero si $\Delta\alpha_{der} > \Delta\alpha_{izq.}$ el espectro está cargado hacia la derecha y si $\Delta\alpha_{der} < \Delta\alpha_{izq.}$ entonces el espectro está cargado hacia la izquierda [3].

El estudio de la curvatura de una curva, permite obtener la tasa de variación de la dirección de una curva con respecto a su longitud. Para el cálculo de la curvatura del espectro multifractal, fue necesario realizar el cálculo de la primera y segunda derivadas numéricas.

Posteriormente, se emplean los valores obtenidos en la primera y segunda derivada para el cálculo de la curvatura del espectro de las singularidades. La curvatura es calculada a partir de:

$$\bar{K} = \frac{f''(\alpha_i)}{(1 + f'(\alpha_i)^2)^{3/2}} \qquad (10)$$

Si la curvatura K de un punto P de la curva C no es cero, entonces la circunferencia de radio $R = 1/K$, cuyo centro se encuentra del lado cóncavo de C, se llama circunferencia de curvatura de P. Su radio R y su centro son el radio de curvatura y el centro de curvatura, respectivamente, en el punto P [4].

III. Resultados

En este trabajo usamos el modelo OFC para generar series de terremotos sintéticos de 10 000 000 de datos, con un amplio rango de niveles de conservación β, entre 0.01 y 0.25. Los resultados del modelo reproducen las gráficas en escalera de la sismicidad real pero se obtienen valores de la pendiente de Gutenberg-Richter en un amplio intervalo de valores, incluso muchos de los valores obtenidos pueden considerarse sin mucho sentido físico, por ejemplo, como se puede observar en la Fig. 2 para valores pequeños del nivel de conservación se obtienen valores muy grandes del exponente de Gutenberg-Richter y es para valores alrededor de 0.2 donde se obtienen valores parecidos a la sismicidad real.

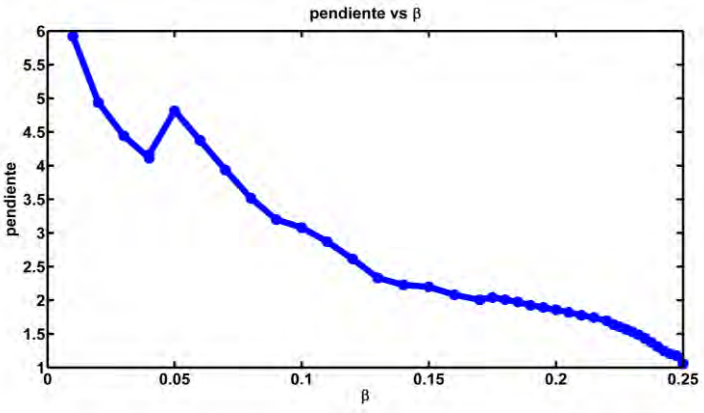


Fig. 2. Gráfica de la variación del exponente de Gutenberg-Richter para niveles de conservación $\beta \epsilon [0.01,0.25]$.

Resumiendo, la pendiente disminuye con el aumento del valor de β. Igualmente se graficó la frecuencia acumulada Fig.3 y se observa que el valor aumenta a medida que β crece.

A cada una de las ventanas se les aplicó el análisis multifractal utilizando el algoritmo de Chhabra y Jensen para obtener su espectro multifractal. En la Fig. 4 mostramos cuatro espectros multifractales para distintos valores de β.

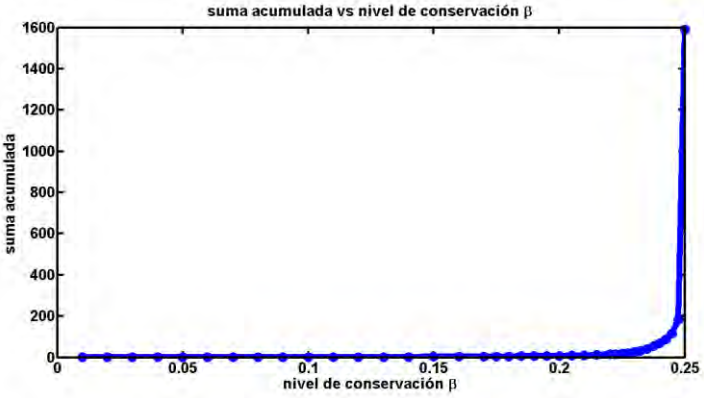


Fig. 3. Gráfica de la frecuencia acumulada para $\beta \epsilon [0.01,0.25]$

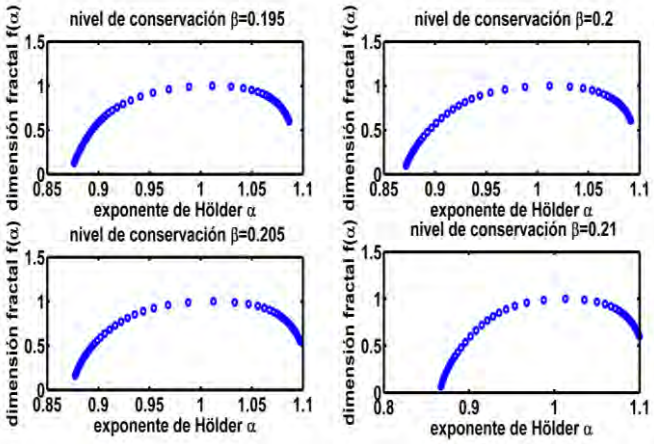


Fig. 4. Algunos espectros multifractales para $\beta \epsilon [0.01,0.25]$

Para cada uno de los espectros multifractales se calcularon los valores del ancho del espectro $\Delta\alpha$. En la fig. 5 se muestran los valores de $\Delta\alpha$ para los diferentes valores de β.

Se observa que los espectros se vuelven más complejos a medida que aumenta el valor de β.

Se obtuvieron los valores de $\Delta\alpha_{der}$ (puntos magenta en la Fig, 6), $\Delta\alpha_{izq.}$ (puntos azules en la Fig. 6) para conocer el asimetría de los espectros multifractales. En la Fig. 6 se muestra que los espectros multifractales de los distintos valores de β están sesgados hacia la izquierda. Sin embargo, se aprecia que este comportamiento se invierte alrededor del valor de $\beta = 0.2425$.

También notamos que los espectros para β pequeños tienden a ser simétricos, pero a medida que β aumenta tienden a ser más asimétricos. Sin embargo, este comportamiento se ve revertido alrededor $\beta = 0.2425$ donde nuevamente se observa que tienden a ser simétricos.

Para complementar esto calculamos el parámetro de simetría r para cada uno de los espectros multifractales. Este parámetro nos dice cuantitativamente que tan sesgado a la derecha o a la izquierda está sesgado el espectro multifractal, es decir, para $r > 1$ el espectro se encuentra sesgado hacia la derecha, para $r < 1$ el espectro se encuentra sesgado hacia la izquierda y para valores $r = 1$ el espectro es simétrico.

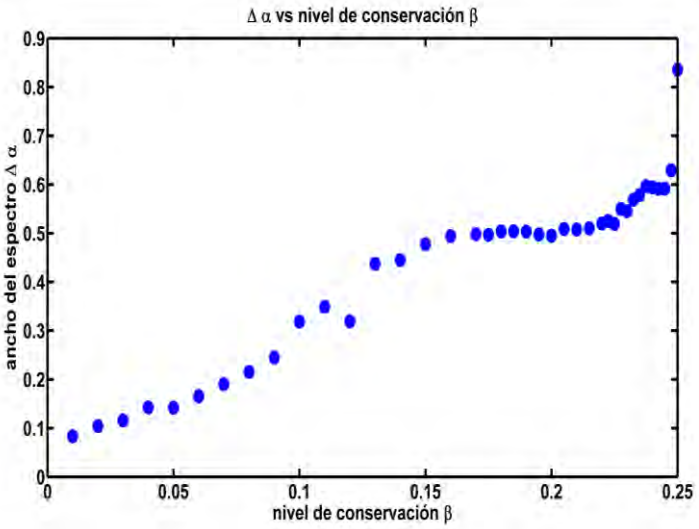


Fig. 5. Valores de $\Delta\alpha$ para $\beta \epsilon [0.01, 0.25]$

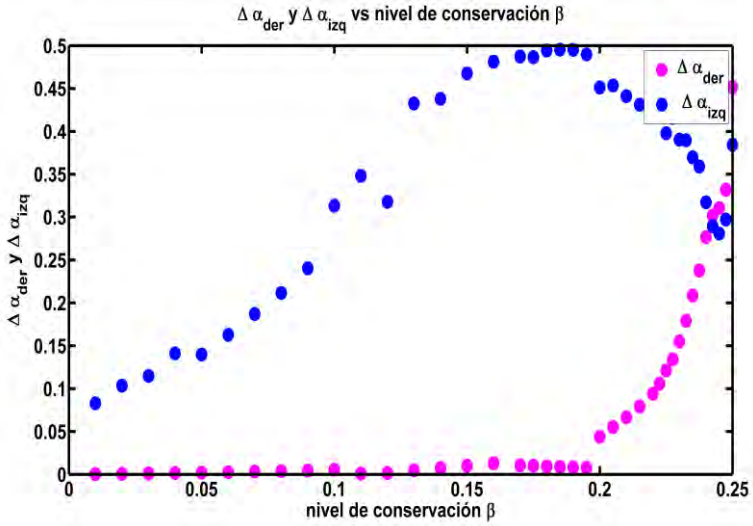


Fig. 6. Valores de $\Delta\alpha_{der}$ y $\Delta\alpha_{izq.}$ para $\beta \epsilon [0.01, 0.25]$

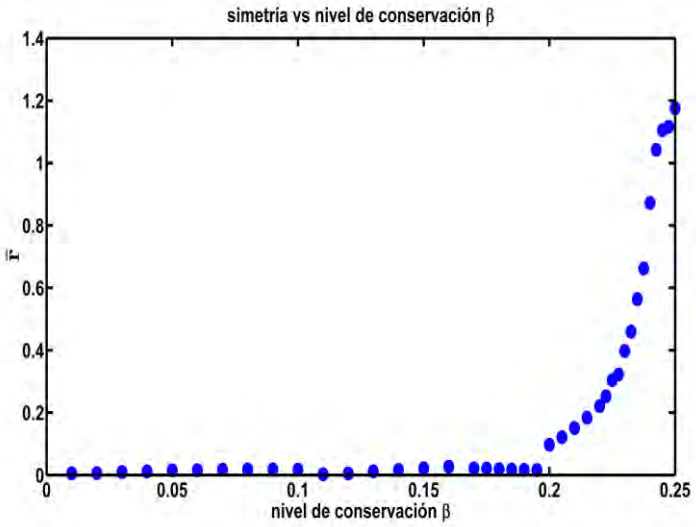


Fig. 7. Valores de r para $\beta \epsilon [0.01, 0.25]$

La Fig.7 muestra los valores del parámetro de simetría. Se aprecia que estos espectros multifractales para β pequeños tienden a estar muy sesgados a la izquierda, pero a medida que β aumenta estos tienden a sesgarse hacia la derecha.

Calculamos por último los valores de K alrededor del máximo de los espectros multifractales para un mejor análisis. En la Fig. 8 mostramos los valores de curvatura para los distintos valores de β. Se observa que los valores de K para β es mayor para valores pequeños y toma valores pequeños a medida que β aumenta.

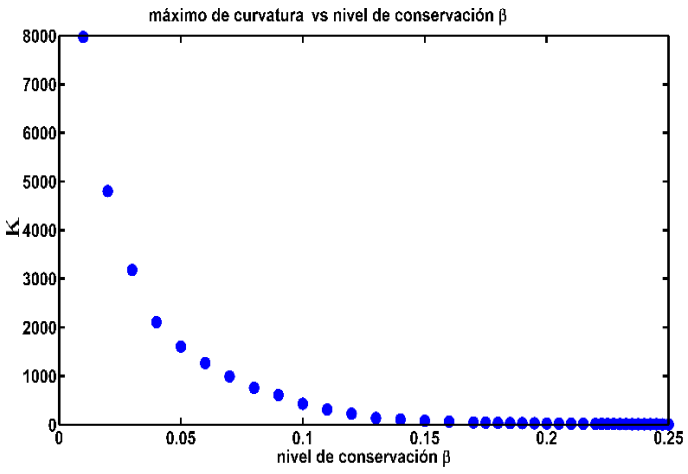


Fig. 8. Se muestran los valores del parámetro $\bar{K}$ para $\beta \epsilon [0.01, 0.25]$

IV. Discusión y Conclusiones

El usar el modelo OFC para generar series de terremotos sintéticos para los distintos valores de β nos permitió darnos una idea del comportamiento de los

terremotos, ya que los resultados del modelo reproducen las gráficas de Gutenberg-Richter de la sismicidad real y producen patrones de sismicidad análogos a los reales. Esto nos dio confianza para realizar el análisis fractal y multifractal de las series de tiempo donde notamos que al caracterizar cada una de las series con los parámetros $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_{der}$, $\Delta\alpha_{izq.}$, r y K nos proporciona información valiosa de la complejidad del sistema y una idea más precisa de lo que sucede en la sismicidad real para cada uno de los valores de β y sobre todo alrededor del valor de $\beta = 0.2$ que es donde por lo general suceden los terremotos en la sismicidad real.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo está parcialmente apoyado por COFAA y SIP-IPN.

REFERENCIAS

[1] Olami, Z., Feder, H.J.S. & Christensen, K., 1992. “Self organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton model”, Phys. Rev. Lett., 68, 1244-1247.

[2] A. Muñoz Diosdado, J. A. Zamora-Justo, R. Suriano Reyes, C. D. Virgilio González, D. S. Ibarra García, A. M. Aguilar Molina.¨ Multifractales y procesos multiplicativo¨”. XVIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, México, D. F. 2013.

[3] A. B. Chhabra, and R. V. Jensen, “Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum”, *Physical Review Letters* vol. 62, pp. 1327, 1989.

[4] Leithold, Louis. El Cálculo. Mexico, D.F.: Oxford University Press, 1998.

ISSN: 2594-1011

Crecimiento y caracterización de película delgada de Selenuro de Cadmio, por medio de la técnica CSVT

J.J. Mireles Olvera[1], M.L. Albor Aguilera[2], C. Hernández Vasquez[2].
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, CINVESTAV-IPN, México D. F., México
E-mail: jj.miro.01@gmail.com

Resumen — **El presente trabajo es un desarrollo para la obtención del material semiconductor Selenuro de Cadmio (CdSe) por medio de la técnica de Trasporte de Vapor en Espacio Cerrado (CSVT). Este material es depositado en sustrato de vidrio con una película delgada de Oxido de estaño fluorado (FTO) de aproximadamente 0.5µm de espesor. A partir del análisis del patrón de difracción de rayos X (DRX) se observan planos de crecimiento de estructura hexagonal tipo Wurzita. Utilizando la técnica de microscopia electrónica de barrido (MEB) es posible observar una matriz homogénea del material. Con perfilometría y cuatro puntas lo cual permite conocer la conductividad del material, así como su espesor.**

Palabras Clave – **CdSe, CSVT, SEM, DRX**

Abstract —**The present work is a development for the semiconductor material Selenide of Cadmium (CdSe) by means of the technique of Closed Space Vapor Transport (CSVT). This material is deposited on a glass substrate with a thin film of fluorinated tin oxide (FTO) of approximately 0.5µm thickness. From the analysis of the X-ray diffraction pattern (XRD), the growth planes of the Wurzite hexagonal structure are observed. Using the technique of scanning electron microscopy (SEM) it is possible to observe a homogeneous matrix of the material. With profilometry and four tips which allows knowing the conductivity of the material, as well as its thickness.**

Keywords — **CdSe, CSVT, SEM, DRX.**

I. Introducción

El material semiconductor CdSe pertenece a la familia de los grupo II^B y VI^A de la tabla periódica. Es utilizado actualmete en dispositivos electrónicos principalmente; tiene una brecha prohibida 1.7eV[1]. El material es utilizado en múltiples dispositivos como son la celda fotoconductora, donde la respuesta espectral se encuentra 615nm y el tiempo de respuesta es de cerca 10ms. En las celdas fotoconductoras no poseen una unión como el fotodiodo. Una capa delgada de material conectado entre las terminales simplemente se expone a la energía luminosa [2]. y en celdas solares el semiconductor ha sido utilizado e implementado bajo las técnicas de puntos cuánticos (QDs)[3] así como también la técnica por el método de baño químico [4]. Y hasta el día de hoy el material CdSe por sus propiedades de semiconductor se siguen avanzando en nuevas investigaciones y sus posibles implementaciones en los diferentes campos de la electrónica y de celdas solares.

II. Metodología

Las muestras se depositaron sobre sustratos de vidrio con película delgada FTO de uso comercial llamado TEC7 y los cortes cuadrada de 1 $inch^2$.
Los sustratos se limpiaron previamente con agua desionizada, acetona y alcohol isopropílico con su respectivo baño ultrasónico con la finalidad de evitar impurezas con el material a depositar.
La evaporación se realiza con temperatura fuente de 630°C como lo muestra la figura 1; con una presión de 110mTorr. Con un tiempo de crecimiento y bajo un ambiente de gases de Oxigeno (O_2) y Argón (Ar).

Figure 1 Deposito de pelicula CdSe en CSVT

III. Resultados

a) Difracción de RX

La figura 2 muestra el espectrograma de rayos X del CdSe y se puede observar los planos (002), (102) y (103) que corresponden a una fase hexagonal [5]. El difractograma también muestra otra serie de planos correspondientes al sustrato (FTO) [5].

Tabla 1 Tamaño promedio del cristal.

Muestra	τ (tamaño)
CdSe	50nm

Para la obtención del tamaño promedio de cristalita se calcula mediante la ecuación de Scherrer como lo muestra (1) [6].

$$\tau = \frac{k\lambda}{\beta cos\theta} \quad (1)$$

Donde k representa una constante 0.9. en la que se considera la forma de los picos; θ es el ángulo de Bragg, β es el ancho medio del pico y λ=1.5405Å (ver tabla 1)

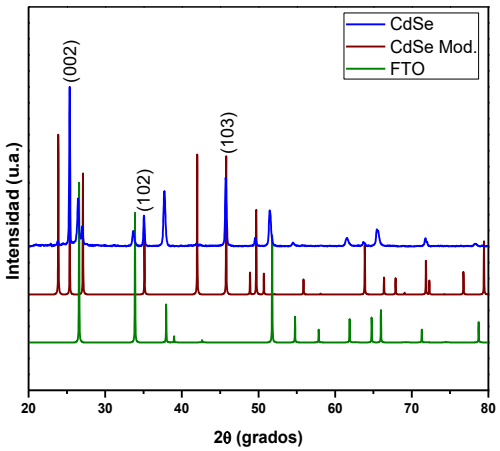


Figure 2 DRX del CdSe

La figura 3 muestra la morfología del CdSe, donde se observa una matriz homogénea; en la imagen a) es realizada con 5000 aumentos; mientras que la imagen b) tiene una resolución de 25000 aumentos. El crecimiento tiene una apariencia hacia el eje z pero esto no es posible determinar hasta realizar la técnica de microscopia de fuerza atómica AFM.

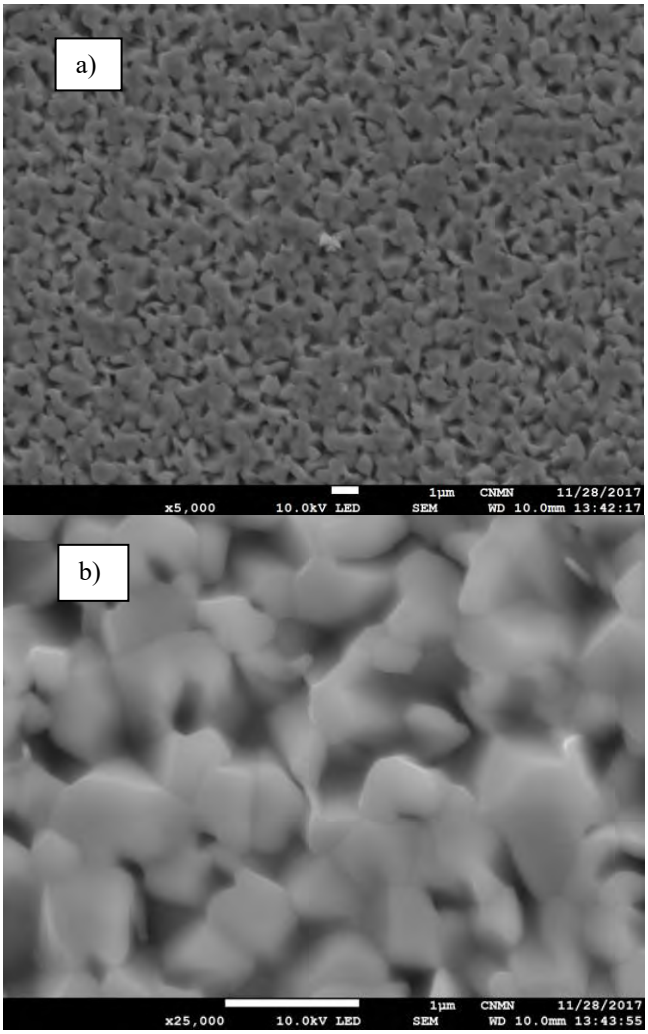


Figure 3 Imagen superficial del CdSe a)5 000X b)25 000X

b) Propiedades eléctricas.

Para la caracterización del espesor de la muestra, es utilizado el perfilómetro Ambios Technology XP-100, la cual cuenta con una platina con movimiento x-y y una punta con un sensor de baja inercia (LIS).

Con la caracterización de 4 puntas se obtiene la resistencia laminar de la película delgada. La tabla 2 presenta un resumen de las dos caracterizaciones y con los parámetros obtenidos permite conocer la resistividad del material.

El orden de la resistividad del CdSe es similar al CdTe.[7]

Tabla 2 Espesor, Resistencia, y Resistividad.

Espesor (nm)	**R (Ω/cm)**	**ρ (Ω*cm)**
850	$3.4x10^{7}$	$2.9x10^{3}$

IV. Conclusiones

El crecimiento del material semiconductor CdSe fue logrado con los parámetros de crecimiento en el equipo CSVT, permitiendo obtener una película delgada uniforme, como lo muestran las imágenes de SEM. En el difractograma de rayos-X permite identificar como material policristalino e identificar la fase hexagonal del material tipo Wurzita; así como las orientaciones planares (002), (102) y (103). El valor obtenido de la resistividad eléctrica muestra un material poco resistivo como lo es el CdTe ya que son de la misma magnitud.

Agradecimientos

El presente trabajo fue apoyado por CEMIE-SOL P25, SIP-IPN 20180398, SIP-IPN 20180439.

Referencias

[1] https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-7898-0_139
[2] R. L. Boylestad,, L. Nashelsky "Electrónica, teoría de circuitos y dispositivos electrónicos" Pearson Educación, 2003, pp. 906-907
[3] http://pubs.rsc.org/en/Content/ArticleHtml/2012/CP/c2cp42487h
[4] Carta cristalográfica PDF 8-459
[5] R. Swanepoel, J.Phys. E: Sci. Instrum. 16 (1983) 1214
[6] Carta cristalográfica PDF 41-1445
[7] C. V. Hernandez "Generacion y studio de una region p+ (Te, ZnTe) para el desarrollo de contactos posteriors eficientes en celdas solares de CdTe", Mexico D.F., 2015, pp. 78.

ISSN: 2594-1011

Función de Evans en el estudio del efecto de inhibición en la propagación de ondas viajeras corticales en un modelo de campo neural

Laura R. González-Ramírez[1]
[1]Departamento de Formación Básica Disciplinaria, Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad del Conocimiento y la Cultura, Carretera Pachuca-Actopan km 1+500, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, México. E-mail: lrgonzalezr@ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se establece una función de Evans para un modelo de campo neural basado en actividad consistente en una población excitatoria directamente regulada con una adaptación lineal así como una población inhibitoria. Los ceros de dicha función de Evans corresponden a los eigenvalores puntuales que surgen al estudiar la estabilidad lineal de soluciones de tipo onda viajera presentes en el modelo. La función de Evans que desarrollamos es una generalización de funciones existentes pero en este trabajo no se hace ninguna suposición previa entre la relación existente entre la conectividad excitatoria e inhibitoria.**

Palabras Clave – **Función de Evans, Inhibición, Modelo de campo neural, Solución de tipo onda viajera.**

Abstract — **In this work, we establish an Evans function for an activity-based neural field model consistent of an excitatory population directly regulated by a linear adaptation term together with an inhibitory population. The zeroes of this Evans function correspond to point eigenvalues that arise in the study of the linear stability of traveling wave solutions present in the model. The Evans function that we establish is a generalization of existent functions but in our work we do not make any assumption regarding the relationship between excitatory and inhibitory connectivity.**

Keywords — **Evans Function, Inhibition, Neural Field Model, Traveling Wave Solution.**

I. Introducción

El estudio del balance entre excitación e inhibición es un aspecto muy importante para la descripción de actividad cortical observada *in vivo* e *in vitro* [1]. Los modelos de campo neurales (neural field models ó modelos neurales) han sido utilizados en un esfuerzo por entender la naturaleza de dicho balance [1,2,9]. Existen diversas aplicaciones de estos modelos para el estudio de patrones de actividad cortical como lo es el estudio de patrones de tipo onda viajera. En particular, en [10] se establece un modelo neural basado en actividad con una población excitatoria directamente regulada por una adaptación lineal así como una población inhibitoria. Así mismo, en referencia [10] se obtiene una solución de tipo onda viajera de manera explícita. Esto es posible gracias al uso de una función de Heaviside en reemplazo de una más realista función Sigmoide como descripción del término que colecta la conectividad neuronal. Una vez que se establece la solución de tipo onda viajera se procede a estudiar el efecto de la población inhibitoria en la existencia de patrones de actividad cortical observados en datos clínicos de potencial de campo local [10]. Al tener soluciones de tipo onda viajera explícitas surge la inquietud natural de determinar su estabilidad. El objetivo de este trabajo es hacer un estudio de la estabilidad lineal de dichas soluciones de tipo onda viajera. Para realizar este estudio y dada la presencia de la función de Heaviside en el término no lineal debemos proceder a linealizar el sistema en el sentido de distribuciones. Así mismo, estableceremos una formulación débil del problema de tal forma que podamos atacar un sistema dinámico suave que nos permita inferir la estabilidad lineal de dichas soluciones. Procederemos a establecer una cota del espectro esencial en el semiplano izquierdo de tal forma que la estabilidad (inestabilidad) lineal de las soluciones de tipo onda viajera queden determinados por la localización de los eigenvalores puntuales en el plano complejo. Para poder determinar esos eigenvalores puntuales estableceremos una función de Evans en términos del determinante de una matriz conveniente. Esta función de Evans es lo suficientemente general de tal forma que no necesitamos hacer ninguna suposición acerca de la relación existente entre la conectividad de la población excitatoria e inhibitoria.

II. Existencia de soluciones de tipo onda viajera en un modelo de campo neural basado en actividad

En esta sección establecemos el modelo de campo neural basado en actividad [1] en el cual basamos nuestro estudio. Dicho modelo esta motivado de los trabajos desarrollados en [3,4] y ha sido utilizado en la modelación de patrones de actividad cortical de tipo onda viajera observada *in vivo* [9]. El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{du_e}{dt}(x,t) &= -\alpha_e u_e(x,t) - \beta q(x.t) \\ &\quad +\alpha_e H(\, g_{ee}\otimes u_e(x) - g_{ie}\otimes u_i(x) - k_e) \\ \frac{dq}{dt}(x,t) &= \delta u_e(x,t) - \delta q(x.t) \\ \\ \frac{du_i}{dt}(x,t) &= -\alpha_i u_i(x,t) \\ &\quad +\alpha_i H(\, g_{ei}\otimes u_e(x) - g_{ii}\otimes u_i(x) - k_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $u_e(x,t)$ y $u_i(x,t)$ representan una medida de la actividad sináptica (synaptic drive) de la población excitatoria e inhibitoria, respectivamente. El término $q(x,t)$ representa un término de adaptación sináptica que permite la presencia de oscilaciones amortiguadas que son capaces de replicar cuantitativamente ondas de actividad cortical observadas en grabaciones clínicas [9]. La función $\mathrm{H}(x)$ representa de manera general una medida de la razón de disparo por medio de una función de tipo Sigmoide. Para facilitar la obtención explícita de soluciones de tipo onda viajera se toma el caso límite y se considera en su lugar una función de tipo Heaviside Los términos de convolución determinan la interacción espacial entre la población excitatoria e inhibitoria y están definidos como:

$$g_{jk}\otimes u_l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{jk}(x-y)u_l(y,t)dy \qquad (2)$$

Donde $g_{jk}(x)$ es una función integrable, par y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g_{jk}(x)dx = 1$ (por ejemplo, $g_{jk}(x) = \frac{1}{\sigma_{jk}} e^{-\frac{|x|}{\sigma_{jk}}}$ ó $g_{jk}(x) = \frac{1}{\sigma_{jk}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{jk}{}^2}}$). Todos los parámetros del modelo son positivos. Los parámetros α_e y α_i son las razones de decaimiento para la actividad excitatoria e inhibitoria, respectivamente, y δ es la razón de decaimiento para la adaptación. Los parámetros σ_{jl} para $j,l = \{e,i\}$ determinan el decaimiento espacial de la conectividad sináptica entre poblaciones excitatoria e inhibitoria. El parámetro k_j para $j = \{e,i\}$ determina el umbral sináptico para cada población, es decir el umbral de activación de la función de Heaviside. El término β representa la intensidad de la adaptación en el término excitatorio. En el resto de este trabajo se asume que $\beta > \frac{(\delta-\alpha_e)^2}{4\delta}$, esta suposición dará lugar a soluciones de tipo onda viajera que regresan al estado de reposo por medio de oscilaciones amortiguadas.

Se realiza el cambio de variables del sistema (1) hacia el marco de referencia movible $(z = x - ct)$ y se buscan soluciones estacionarias de este sistema de tipo onda viajera que se mueven a velocidad constante c, ancho constante w y forma fija. En la búsqueda de estas soluciones se incorporan las condiciones al infinito: $\lim_{z\to\pm\infty} u_e(z) = 0$, $\lim_{z\to\pm\infty} u_i(z) = 0$, $\lim_{z\to\pm\infty} q(z) = 0$, $\lim_{z\to\pm\infty} u_e'(z) = 0$, $\lim_{z\to\pm\infty} u_i'(z) = 0$ y $\lim_{z\to\pm\infty} q'(z) = 0$. También, se asume la existencia de pulsos estacionarios por lo que la actividad sináptica de ambas poblaciones cruza el umbral de activación de la función de Heaviside en exactamente dos puntos, siendo estos $\{w_{e0}, w_{ef}\}$ para la población excitatoria y $\{w_{i0}, w_{if}\}$ para la población inhibitoria. Esto determina soluciones de tipo onda viajera explícitas con condiciones de existencia determinadas por los puntos de activación de la función de Heaviside.

Las soluciones de tipo onda viajera explícitas en el caso de eigenvalores complejos ($\beta > \frac{(\delta-\alpha_e)^2}{4\delta}$) son las siguientes:

$$u_e^*(z) = \begin{cases} 0 & , \ si\ z \geq w \\ v_e(z-w)(c_3\cos(z\varphi) + c_4\sin(z\varphi)) + \frac{\alpha_e}{\alpha_e+\beta}, & si\ 0 < z < w \\ v_e(z)(c_1\cos(z\varphi) + c_2\sin z\varphi) & , \ si\ z \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Donde:

$$v_e(z) = \frac{\alpha_e e^{\frac{\alpha_{e+\delta}}{2c}z}}{(\alpha_e+\beta)\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}, \quad \vartheta = \frac{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}{2c},$$
$$c_1 = \sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2} + e^{-w\frac{\alpha_{e+\delta}}{2c}}[(2\beta+\alpha_e-\delta)\sin(w\vartheta) - \sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}\cos(w\vartheta)],$$
$$c_2 = (2\beta+\alpha_e-\delta) + e^{-w\frac{\alpha_{e+\delta}}{2c}}\left[-(2\beta+\alpha_e-\delta)\cos(w\vartheta) - \sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}\sin(w\vartheta)\right],$$
$$c_3 = (2\beta+\alpha_e-\delta)\sin(w\vartheta) - \sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}\cos(w\vartheta)]$$
$$c_4 = -(2\beta+\alpha_e-\delta)\cos(\mathrm{w}\vartheta) - \sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}\sin(w\vartheta)] \qquad (4)$$

Para la población inhibitoria se obtiene:

$$u_i^*(z) = \begin{cases} 0, & si\ z \geq w_{if} \\ 1 - e^{\frac{\alpha_i}{c}(z-w_{if})}, & si\ w_{i0} < z < w_{if} \\ e^{\frac{\alpha_i}{c}z}(e^{\frac{-\alpha_i}{c}w_{i0}} - e^{\frac{-\alpha_i}{c}w_{if}}), & si\ z \leq w_{io} \end{cases} \qquad (5)$$

Las condiciones de existencia de las soluciones de tipo onda viajera están determinadas por la activación de la función de Heaviside de la siguiente manera:

$$g_{ee}\otimes u_e(x) - g_{ie}\otimes u_i(x) = k_e, donde\ x = w_{e0}\ y\ x = w_{ef} \quad (6)$$

$$g_{ei}\otimes u_i(x) - g_{ii}\otimes u_i(x) = k_i, donde\ x = w_{i0}\ y\ x = w_{if} \quad (7)$$

Los detalles acerca de la obtención de soluciones de tipo onda viajera del sistema pueden ser consultados en la referencia [10]. Así mismo en dicha referencia se puede obtener una descripción detallada de condiciones de existencia de dichas soluciones.

III. Estabilidad lineal de soluciones de tipo onda viajera

A continuación estudiamos la estabilidad lineal de las soluciones de tipo onda viajera del modelo anterior. Para realizar dicho análisis debemos estudiar la linealización del sistema (1) en las soluciones de tipo onda viajera. Ya que este sistema contiene a la función de Heaviside al linealizar debemos proceder en el sentido de distribuciones. De esta forma al linealizar obtendremos un sistema dinámico no

suave. Para poder analizar dicho sistema formularemos una versión débil del problema realizando convoluciones con kerneles adecuados obteniendo así un sistema dinámico suave. Posteriormente se podrá acotar el espectro esencial en el semiplano izquierdo. Para determinar los eigenvalores puntuales se construirá una función de Evans. La función de Evans es una función analítica compleja cuyos ceros coinciden con los eigenvalores puntuales del operador linealizado alrededor de una solución de tipo onda viajera. Una vez establecido de manera conveniente el espectro esencial la función de Evans permite inferir la estabilidad (inestabilidad) lineal de la solución de tipo onda viajera [5,7,8]. En la construcción de esta función de Evans no se considera ninguna restricción o suposición sobre la relación existente entre la conectividad de población excitatoria e inhibitoria.

A. Linealización del Sistema y Formulación Débil

Consideremos una familia general de operadores lineales acotados T definidos por:

$$T(\lambda) = C^1(R, C^2) \to C^0(R, C^2)$$
$$f \to -cf_z + A(\lambda)f - K(f) \tag{8}$$

donde K da lugar a la parte nolocal del operador $T(\lambda)$, y esta definida por $K(f(z)) = \sum_{j=1}^{m} g(z - z_j)f(z_j)$, donde $g \in C^0(R, C)$. La parte nolocal se factoriza a través del espacio de dimensión finita C^m por lo que es compacta.

Consideremos $A(\lambda) = A - \lambda I$ donde $A \in C^{2\times 2}$. Se define la parte local del operador T como $T_{loc}(\lambda) = -c\frac{d}{dz} + A(\lambda)$. Ya que los operadores T y T_{loc} difieren por un operador compacto tenemos que la propiedades de Fredholm de dichos operadores es la misma. Por lo tanto se obtiene que el espectro esencial de ambos operadores es lo mismo [6].

Ahora procedemos a realizar la linealización del sistema (1) alrededor de las soluciones de tipo onda viajera (4) y (5). Hacemos el cambio de coordenadas del sistema (1) al marco de referencias movible $(z = x - ct)$ y linealizamos de manera formal alrededor de las soluciones estacionarias $u_e^*(z)$ y $u_i^*(z)$:

$$\begin{pmatrix} u_e \\ q \\ u_i \end{pmatrix}_t = A\begin{pmatrix} u_e \\ q \\ u_i \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} u_e \\ q \\ u_i \end{pmatrix}_z +$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_e\delta\,(g_{ee}\otimes u_e^*(z) - g_{ie}\otimes u_i^*(z) - k_e)(g_{ee}\otimes u_e(z) - g_{ie}\otimes u_i(z)) \\ 0 \\ \alpha_i\delta\,(g_{ei}\otimes u_e^*(z) - g_{ii}\otimes u_i^*(z) - k_i)(g_{ei}\otimes u_e(z) - g_{ie}\otimes u_i(z)) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} -\alpha_e & -\beta & 0 \\ \delta & -\delta & \delta \\ 0 & 0 & -\alpha_i \end{pmatrix}$ y la parte no lineal del sistema está determinada por el término:

$$NG_j(z) = \alpha_e\delta\,(g_{ej}\otimes u_e^*(x) - g_{ij}\otimes u_i^*(x) - k_j) \times (g_{ej}\otimes u_e(z) - g_{ie}\otimes u_i(z)) \tag{10}$$

Donde $j = \{e, i\}$.

Usando propiedades de la función delta de Dirac y las ecuaciones (6) y (7) se puede simplificar el término (10) para $j = \{e, i\}$, obteniendo la siguiente expresión:

$$NG_j(z) = \frac{\delta(z - w_{j0})}{h_j(w_{j0})}(g_{ej}\otimes u_e(w_{j0}) - g_{ij}\otimes u_i(w_{j0})) + \frac{\delta(z - w_{jf})}{h_j(w_{jf})}(g_{ej}\otimes u_e(w_{jf}) - g_{ij}\otimes u_i(w_{jf})) \tag{11}$$

Donde $h_j(z) = \left|(g_{ej}\otimes u_e^*)'(z) - (g_{ij}\otimes u_i^*)'(z)\right|$ (12)

Ahora procedemos a construir una versión débil del problema al realizar una convolución del sistema (9) con los kerneles $g_{jk}(z)$ donde $j, k = \{e, i\}$, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix}_t = A\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix}_z + \begin{pmatrix} g_{jk}\otimes NG_e(z) \\ 0 \\ g_{jk}\otimes NG_i(z) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Donde la parte no lineal del sistema anterior puede ser simplificada a:

$$g_{jk}\otimes NG_l(z) = \alpha_e\frac{g_{jk}(z - w_{l0})}{h_l(w_{l0})}(g_{el}\otimes u_e(w_{l0}) - g_{ie}\otimes u_i(w_{l0})) + \frac{g_{jk}(z - w_{lf})}{h_l(w_{lf})}(g_{el}\otimes u_e(w_{lf}) - g_{il}\otimes u_i(w_{lf})) \tag{14}$$

Donde $j, k, l = \{e, i\}$. Posteriormente se considera el problema de eigenvalor del sistema (13) incorporando ecuación (14) obteniendo:

$$\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix}_z = A(\lambda)\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix} + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes NG_e(z) \\ 0 \\ g_{jk}\otimes NG_i(z) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Donde $A(\lambda) = \frac{1}{c}A - \lambda I$, y λ ha sido escalada por c.

La formulación (15) es la formulación débil que utilizaremos para estudiar la estabilidad lineal de las soluciones de tipo onda viajera. Recordemos que para poder inferir la estabilidad (inestabilidad) lineal de la solución de tipo onda viajera necesitamos establecer el espectro esencial y el espectro puntual del operador correspondiente. Si podemos acotar el espectro esencial del operador en el semiplano izquierdo entonces el espectro puntual determinará la estabilidad (inestabilidad) lineal de la solución de tipo onda viajera. Si el espectro puntual del operador T está contenido en el semiplano izquierdo con la excepción de un eigenvalor simple en λ=0 (debido a la invariancia traslacional de la solución de tipo onda viajera) entonces la solución de tipo onda viajera es asintóticamente estable. Por otro lado, si el operador T tiene un eigenvalor puntual en el semiplano derecho entonces la solución de tipo onda viajera es inestable.

B. Determinación de espectro esencial

Se establecen los operadores $T(\lambda) = -c\frac{d}{dz} + A(\lambda) + N(_)$, donde $N(_)$ es la parte nolineal del operador definido por el sistema (15) y $T_{loc}(\lambda) = -c\frac{d}{dz} + A(\lambda)$. El espectro esencial del operador T_{loc} se puede determinar explícitamente al realizar una transformación de Fourier del sistema obteniendo que se encuentra acotado en el semiplano izquierdo de tal forma que se puede encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{ess}(T_{loc}) \in \{\lambda \parallel Re(\lambda) < -\varepsilon\}$. Debido a que el espectro esencial de T_{loc} y T es el mismo [6,7] podemos acotar el espectro esencial del operador T en el semiplano izquierdo. Por lo que para determinar la estabilidad lineal de las soluciones de tipo onda viajera debemos determinar el espectro puntual.

C. Función de Evans

A continuación se construye la función de Evans para eigenvalores puntuales del operador T en la región $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \parallel eigenvalores\ de\ A(\lambda)\ con\ Re(\lambda) < 0\}$. Para ello se utiliza la fórmula de variación de parámetros en el sistema (15), obteniendo que las únicas soluciones acotadas de (15) en la región Ω están determinadas por:

$$\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e \\ g_{jk}\otimes q \\ g_{jk}\otimes u_i \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{z} e^{A(\lambda)(z-y)} \begin{pmatrix} g_{jk}\otimes NG_e(y) \\ 0 \\ g_{jk}\otimes NG_i(y) \end{pmatrix} dy \qquad (16)$$

donde $e_{m,n}^{A(\lambda)(z-y)}$ es una matriz exponencial. Resolviendo dicha matriz exponencial podemos reducir el sistema a:

$$\begin{pmatrix} g_{jk}\otimes u_e(z) \\ g_{jk}\otimes q(z) \\ g_{jk}\otimes u_i(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{z} e_{1,1}^{A(\lambda)(z-y)}\, g_{jk}\otimes NG_e(y)dy \\ \int_{-\infty}^{z} e_{2,1}^{A(\lambda)(z-y)}\, g_{jk}\otimes NG_e(y)dy \\ \int_{-\infty}^{z} e_{3,3}^{A(\lambda)(z-y)}\, g_{jk}\otimes NG_i(y)dy \end{pmatrix} \qquad (17)$$

donde $e_{m,n}^{A(\lambda)(z-y)}$ es la entrada en el renglón m y columna n de la matriz exponencial $e^{A(\lambda)(z-y)}$, que puede ser resuelto explícitamente en el caso de eigenvalores complejos $(\beta > \frac{(\delta-\alpha_e)^2}{4\delta})$, obteniendo:

$$e_{1,1}^{A(\lambda)z} = e^{-\left(\frac{\alpha_{e+\delta}}{2c}+\lambda\right)z}\left(\cos\frac{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}{2c}z + \frac{\delta-\alpha_e}{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}\sin\frac{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}{2c}z\right) \qquad (18)$$

$$e_{2,1}^{A(\lambda)z} = e^{-\left(\frac{\alpha_{e+\delta}}{2c}+\lambda\right)z}\left(-\frac{2\delta}{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}\sin\frac{\sqrt{4\delta\beta-(\delta-\alpha_e)^2}}{2c}z\right) \qquad (19)$$

$$e_{3,3}^{A(\lambda)z} = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{c}+\lambda\right)z} \quad . \qquad (20)$$

Denotemos a:

$$U(z) = \begin{pmatrix} u_e(z) \\ q(z) \\ u_i(z) \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Realicemos las siguientes sustituciones en el sistema (17): $z = w_{e0}$ con $j = e$ y $k = e$; $z = w_{e0}$ con $j = i$ y $k = e$; $z = w_{ef}$ con $j = e$ y $k = e$; $z = w_{ef}$ con $j = i$ y $k = e$; $z = w_{i0}$ con $j = e$ y $k = i$; $z = w_{i0}$ con $j = i$ y $k = i$; $z = w_{if}$ con $j = e$ y $k = i$; $z = w_{if}$ con $j = i$ y $k = i$. El resultado de las sustituciones anteriores lo escribiremos en forma matricial obteniendo una matriz $D(\lambda)$ de $24x24$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} g_{ee}\otimes U(w_{e0}) \\ g_{ie}\otimes U(w_{e0}) \\ g_{ee}\otimes U(w_{ef}) \\ g_{ie}\otimes U(w_{ef}) \\ g_{ei}\otimes U(w_{i0}) \\ g_{ii}\otimes U(w_{i0}) \\ g_{ei}\otimes U(w_{if}) \\ g_{ii}\otimes U(w_{if}) \end{pmatrix} = D(\lambda) \begin{pmatrix} g_{ee}\otimes U(w_{e0}) \\ g_{ie}\otimes U(w_{e0}) \\ g_{ee}\otimes U(w_{ef}) \\ g_{ie}\otimes U(w_{ef}) \\ g_{ei}\otimes U(w_{i0}) \\ g_{ii}\otimes U(w_{i0}) \\ g_{ei}\otimes U(w_{if}) \\ g_{ii}\otimes U(w_{if}) \end{pmatrix} \qquad (22)$$

La matriz $D(\lambda)$ tiene entradas no triviales en las posiciones $x_{p,q}$ siguientes, donde los subíndices $\{p,q\}$ están entre $\{1 \leq p,q \leq 24\}$ y denotan el renglón y la columna del elemento no trivial.

$$\begin{pmatrix}
x_{1,1} & \cdots & x_{1,6} & x_{1,7} & \cdots & x_{1,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{2,1} & \cdots & x_{2,6} & x_{2,7} & \cdots & x_{2,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{3,13} & \cdots & x_{3,18} & x_{3,19} & \cdots & x_{3,24} \\
x_{4,1} & \cdots & x_{4,6} & x_{4,7} & \cdots & x_{4,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{5,1} & \cdots & x_{5,6} & x_{5,7} & \cdots & x_{5,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{6,13} & \cdots & x_{6,18} & x_{6,19} & \cdots & x_{6,24} \\
x_{7,1} & \cdots & x_{7,6} & x_{7,7} & \cdots & x_{7,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{8,1} & \cdots & x_{8,6} & x_{8,7} & \cdots & x_{8,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{9,13} & \cdots & x_{9,18} & x_{9,19} & \cdots & x_{9,24} \\
x_{10,1} & \cdots & x_{10,6} & x_{10,7} & \cdots & x_{10,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{11,1} & \cdots & x_{11,6} & x_{11,7} & \cdots & x_{11,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{12,13} & \cdots & x_{12,18} & x_{12,19} & \cdots & x_{12,24} \\
x_{13,1} & \cdots & x_{13,6} & x_{13,7} & \cdots & x_{13,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{14,1} & \cdots & x_{14,6} & x_{14,7} & \cdots & x_{14,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{15,13} & \cdots & x_{15,18} & x_{15,19} & \cdots & x_{15,24} \\
x_{16,1} & \cdots & x_{16,6} & x_{16,7} & \cdots & x_{16,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{17,1} & \cdots & x_{17,6} & x_{17,7} & \cdots & x_{17,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{18,13} & \cdots & x_{18,18} & x_{18,19} & \cdots & x_{18,24} \\
x_{19,1} & \cdots & x_{19,6} & x_{19,7} & \cdots & x_{19,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{20,1} & \cdots & x_{20,6} & x_{20,7} & \cdots & x_{20,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{21,13} & \cdots & x_{21,18} & x_{21,19} & \cdots & x_{21,24} \\
x_{22,1} & \cdots & x_{22,6} & x_{22,7} & \cdots & x_{22,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{23,1} & \cdots & x_{23,6} & x_{23,7} & \cdots & x_{23,12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & x_{24,13} & \cdots & x_{24,18} & x_{24,19} & \cdots & x_{24,24}
\end{pmatrix} \quad (23)$$

Sea

$$G_{m,1}^{jk}(z,w) = \int_{-\infty}^{z} e_{m,1}^{A(\lambda)(z-y)} \frac{\alpha_e g_{jk}(z-w)}{h_e(w)} dy \quad (24)$$

$$G_{3,3}^{jk}(z,w) = \int_{-\infty}^{z} e_{3,3}^{A(\lambda)(z-y)} \frac{\alpha_e g_{jk}(z-w)}{h_i(w)} dy \quad (25)$$

Donde $m = \{1,2\}$, $jk = \{ee, ei, ie, ii\}$ y $w = \{w_{e0}, w_{ef}, w_{i0}, w_{if}\}$.

Las entradas no triviales en las posiciones $x_{p,q}$ de (23) de la matriz $D(\lambda)$ establecida en el sistema (22) se definen de la siguiente manera. Las entradas en renglones $\{1,4,7,10,13,16,19,22\}$ son iguales a $G_{1,1}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{1,7\}$ e iguales a $-G_{1,1}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{6,12\}$; para renglones $\{2,5,8,11,14,17,20,23\}$ las entradas son iguales a $G_{2,1}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{1,7\}$ e iguales a $-G_{2,1}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{6,12\}$; para renglones $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ la entrada es igual a $G_{3,3}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{13,19\}$ e iguales a $-G_{3,3}^{jk}(z,w)$ para columnas $\{18,24\}$. Además establecemos que para renglones $\{1,2,3,7,8,9\}$, $jk = \{ee\}$; para renglones $\{4,5,6,10,11,12\}$, $jk = \{ie\}$; para renglones $\{13,14,15,19,29,21\}$, $jk = \{ei\}$; para renglones $\{16,17,18,22,23,24\}$, $jk = \{ii\}$. Finalmente, para renglones $\{1-6\}$, $w = \{w_{e0}\}$; , para renglones $\{7-12\}$, $w = \{w_{ef}\}$; para renglones $\{13-18\}$, $w = \{w_{i0}\}$ y para renglones $\{19-24\}$, $w = \{w_{ef}\}$.

Finalmente, de acuerdo con lo realizado la ecuación de eigenvalor (17) tendrá una solución no trivial cuando la función de Evans $E(\lambda)$ se desvanece, donde la función de Evans se define como:

$$E(\lambda) = \det[\mathbb{I} - D(\lambda)] \quad (26)$$

IV. Discusión

En este trabajo estudiamos la estabilidad lineal de soluciones de tipo onda viajera existentes en un modelo de campo neural (1). El estudio del balance entre excitación e inhibición es muy importante para determinar la existencia de patrones espacio-temporales de actividad cortical así como para establecer criterios que determinen la estabilidad de dichas soluciones. En este trabajo no podemos establecer la estabilidad espectral de la solución de tipo onda viajera ya que no contamos con un sistema dinámico suave y no podemos hacer uso de un teorema de mapeo espectral. Sin embargo, la formulación débil que hemos planteamos resulta atractiva para hacer un estudio de la estabilidad lineal de las soluciones y podría permitir la relación de esta información con mediciones observables *in vivo* e *in vitro*.

V. Conclusiones

La función de Evans que hemos desarrollado permite estudiar la estabilidad lineal de las soluciones de tipo onda viajera de un modelo de campo neural basado en actividad. Esta función es lo suficientemente general de tal forma que no requerimos ninguna suposición sobre relaciones existentes entre la conectividad de población excitatoria e inhibitoria. Esto hace que la función de Evans resulte útil como herramienta en el estudio de la relación existente entre excitación e inhibición en modelos de campo neurales.

VI. Referencias

[1] P.C. Bressloff "Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields," in *Physica D*, 2012, 155, pp.83-100.

[2] G.B. Ermentrout "Neural networks as spatio-temporal pattern-forming systems" in *Reports on Progress in Physics*, 1998, 61, pp.353-430.

[3] H.R. Wilson y J.D. Cowan "Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons" in *Biophys J.*,1972, 12(1). pp. 1-24.

[4] S. Amari "Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields" in *Biol Cybern*, 1977, 27(2) pp. 77–87

[5] B. Sandstede "Stability of traveling waves," in *Handbook of Dynamical Systems*, Elsevier Science, 2002, vol. 2 pp.983-1055.

[6] T. Kapitula and N. Kutz "The Evans function for nonlocal equations," in *Indiana U. Math. J.*, 2004, 53, pp.1095-1126.

[7] B. Sandstede "Evans functions and nonlinear stability of traveling waves in neuronal network models," in *Int .J. of Bifurcation and Chaos,* 2007, 17, pp.2693-2704.

[8] J.C. Alexander, R.A. Gardner and C.K.R.T. Jones "A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves," in *J. reine angew Math,* 2002, 410, pp.167-212.

[9] L.R. González-Ramírez et al. "A Biologically Constrained Mathematical Model of Cortical Wave Propagation Preceding Seizure Termination," in *PLoS Comput Biol,* 2015, 11(2):e1004065.

[10] L.R. González-Ramírez y M.A. Kramer "The effect of inhibition on the existence of traveling wave solutions for a neural field model of human seizure termination" in *Journal of Comput Neuro,,* 2018, doi.org/10.1007/s10827-018-0685-9.

ISSN: 2594-1011

Cálculo, Gravitación y Newton

Raúl Amezua Gómez, Arturo Cueto Hernández, Rogelio Herrera Aguirre
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, Ciudad de México
Teléfono (55) 53189014 E-mail: rag@azc.uam.mx

Resumen — **El presente trabajo es una semblanza somera de la historia del cálculo y su desarrollo conceptual enfocándose en la ley de gravitación formulada por Newton en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* como explicación de las órbitas de los cuerpos celestes.**

Palabras Clave – **Newton, gravitación, cálculo**

Abstract — **The present work is a simple overview of the history of the Calculus and its conceptual development with emphasis in the gravitational law formulated by Newton in his work *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* as an explanation of the orbits of the celestial bodies.**

Keywords — **Newton, gravitation, calculus**

I. Introducción histórica del cálculo

Los antiguos babilonios y egipcios construyeron un cuerpo teórico matemático a partir de sus observaciones y necesidades naturales. Tales de Mileto quizá introduce los métodos deductivos, de hecho la matemática de los antiguos pitagóricos era de carácter deductivo.

La visión escolástica del medievo era que el Universo es nítido e inteligible. En el siglo XIV se hizo claro que la visión cualitativa peripatética pudiera ser mejor reemplazada por un estudio cuantitativo. Estos dos conceptos, junto con un renovado interés del punto de vista platónico, trajeron en los siglos XIV y XVI un reforzamiento de la convicción de que la matemática es en alguna medida independiente y a priori al conocimiento intuitivo y experimental.

La atención en los procedimientos más que en las bases de la matemática se acentuó en el siglo XVIII con grandes logros en la aplicación del cálculo. Una aproximación más crítica se da en el siglo XIX con esfuerzos para encontrar fundamentos para los conceptos involucrados en el cálculo y el análisis. El rigor matemático fue agudizado y se descubrió que los postulados de Euclides no son juicios categóricos sintéticos como Kant asumía sino simples suposiciones. Al final del siglo se logró introducir a la matemática el concepto de infinitud sin perder la consistencia en la lógica.

El formalismo simbólico y la aritmetización en la matemática se encontraron con grandes éxitos en el estudio del continuo.

El cálculo tuvo origen en las dificultades que encontraron los antiguos griegos para expresas ideas sobre razones o proporciones de líneas que manejaban de forma discreta. Se llegó a desarrollar el concepto de infinitesimal con todo y su insatisfactoria consistencia lógica. El rigor griego excluyó lo infinitamente pequeño de las demostraciones geométricas y superó problemas con el método de Eudoxo, llamado "exhaución". No se desarrolló método alguno para tratar la cinemática como el método de exhaución lo hizo para la geometría; nótese, por ejemplo, las paradojas de Zenón.

Un gran salto del álgebra griega lo realiza en el siglo III Diofanto de Alejandría con su obra *Arithmetica*

El estudio cuantitativo de variabilidad se desarrolló en el siglo XIV por los filósofos escolásticos. Este estudio fue dialéctico pero hizo posible que en el siglo XVII se elaborara la geometría analítica y la representación de cantidades variables.

En el siglo XVI Viète hace análisis geométrico con el álgebra desarrollada ya por Al-Khwarizmi en el siglo IX y su trabajo fue importante para el cálculo infinitesimal.

Descartes decía que las matemáticas eran la ciencia del orden y la medida en la primera parte del siglo XVII y su contraparte Pierre Fermat daba bases sólidas a lo que ahora se maneja como geometría analítica.

A mediados del siglo XVII se firma la Paz de Westafalia que dio por terminada la Guerra de los Treinta Años e inicia el resurgimiento de Francia mientras el Sacro Imperio Romano Germano empieza a declinar. La segunda mitad del siglo XVII florece el Renacimiento con personajes de la talla de Molière, Shakespeare, Cervantes, Rubens, Rembrandt, Bach, Hobbes o Locke. La ciencia toma un carácter aplicado y da las bases para una futura revolución industrial desde principios de este siglo hasta el final con aportación de científicos como Galileo, Kepler, Huygens, Harvey o Leeuwenhoeck. Se había dado un giro de respeto a los antiguos griegos a una actitud más flexible y basada en la experiencia. Francis Bacon propugna por una sociedad dirigida por científicos en su obra *Nueva Atlántida* y Leibniz planteaba sistemas mineros o desarrollaba su filosofía con el movimiento de los cuerpos después que Cavalieri planteaba en 1635 que las figuras están formadas por un número indefinido de "indivisibles".

Todo este nuevo tratamiento o análisis condujo, junto con el libre uso de infinitésimos, a los algoritmos de Newton y Leibniz en el siglo XVII, que es lo que constituye el cálculo.

Leibniz, a diferencia de Newton, sostenía que siempre había la misma cantidad de "vis viva" que pasaba de un lado a otro por leyes naturales y que no necesitaba de Dios. Newton y Leibniz mantuvieron toda su vida una agria disputa como autores del cálculo infinitesimal sin reparar que lo habían desarrollado paralela e independientemente.

En el siglo XVIII aunque se intentó infructuosamente dar fundamentos, se logró liberar al cálculo de la intuición exclusiva del movimiento y la magnitud geométrica. En el siglo XIX el concepto de derivada se fundamentó y con la definición rigurosa de número y del continuo se consolidó y completó los fundamentos del cálculo. Así, después de más de veinticinco siglos de esfuerzos se culminaba con conceptos precisos un cuerpo teórico sobre la continuidad y que representa algo más allá de la experiencia sensorial con construcciones abstractas que la ciencia y matemáticas han encontrado como ayuda a la economía del pensamiento.

Las definiciones del cálculo, derivada e integral, ahora son establecidas claramente en los libros de texto sobre la materia, y las operaciones que involucran son fácilmente dominadas, esto hace fácil olvidar el largo y tortuoso camino que se ha recorrido en más de dos milenios para establecer con rigor conceptos fundamentales como límite, continuidad, etc., para mantener el cálculo como un conjunto de conceptos abstractos independientes de descripciones físicas o explicaciones metafísicas. El cálculo en su forma moderna, una refinación de los aportes de Newton y Leibniz llevada a cabo por Augustin-Louis Cauchy (1789) y Karl Weistrass (1815-1897) puede definirse como la rama de las matemáticas que estudia el cambio.

II. Newton

El año 1642 es la muerte del italiano Galileo Galilei y el nacimiento del inglés Isaac Newton.

Newton fue hijo póstumo y único de un labrador. Su madre Hannah Ayscough era de familia letrada y se volvió a casar con un pastor anglicano de nombre Barnabas Smith cuando Newton tenía tres años. Newton quedó al cuidado de su abuela materna. Estos hechos marcaron profundamente la personalidad de Newton.

Un reflejo de su personalidad se puede observar en un cuaderno-diario llamado Cuaderno Fitzwilliam, por el nombre del museo de Cambridge donde está depositado. Entre los pecados referidos en el cuaderno dos dicen: "Amenazando a mi padre y madre Smith con quemarlos vivos" y "Deseando la muerte y esperándola para alguien".

En las diferentes disputas científicas, Newton refleja sus facetas oscuras de personalidad; así en 1715 escribió refiriéndose al descubrimiento del cálculo: "Porque segundos inventores no tienen derecho", haciendo alusión a Leibniz.

Un farmacéutico de nombre William Clark fue quien le dio hospedaje e inculcó una afición por la alquimia cuando Newton estudiaba en Graham por el año de 1754.

Tras acabar Newton sus estudios en Graham y teniendo diecisiete años regresó a la granja de su madre para ayudar en la administración. En su confesión referente a 1662 se señala algunos pecados: "Negarme ir al patio a requerimiento de mi madre" o "Pegar a mi hermana". Un tío lo relevó de tan desagradable carga enviándolo a estudiar en el Trinity College de Cambridge.

Durante sus años en Cambridge fue llenando su cuadernillo de notas sobre la luz y el color, sobre la gravitación, sobre Dios.

Transcurren seis años de oscurantismo intelectual, ahondado por la muerte de la madre y se dedica a estudiar la tradición hermética, astrólogos, alquimia, teología, historia y ocultismo. En plena crisis, abandona la filosofía natural (física) y se refugia en la teología y la matemática.

Hagamos un flashback para ver a gigantes que permitieron ver a Newton desde sus hombros. En 1543 se publicó en Nuremberg un libró que revolucionó al conocimiento "Las revoluciones de los orbes celestes" de Nicolás Copérnico (1473-1543). Hasta ese momento la astronomía aristotélica explicaba que había dos universos: la central que abarcaba a la Tierra y su atmósfera y la región celeste que iba de la Luna al más allá.

El mundo terrestre constaba, como lo planteó Empédocles, de lo húmedo, frío, caliente y lo seco. Este mundo era corruptible. El reino celeste consistía de un quinto elemento llamado éter en donde se encontraban esferas acopladas que giraban, y sobre cuyas superficies se desplazaban los cuerpos celestes.

Copérnico pretendía que el centro del Universo era el Sol. Esto fue un avance al estado del arte aunque no mucho más exacta que la del "Almagesto" de Ptolomeo.

En 1600, el monje italiano Giordano Bruno fue quemado por sostener la teoría copernicana.

Johannes Kepler (1571-1630), quién con ayuda de las tablas astronómicas de Tycho Brahe (1560-1601) sintetizó el movimiento de los planetas con sus leyes dadas a conocer en su libro "Astronomía nova" (1609), a saber,

-Los planetas su mueven en forma elíptica, con el So en uno de sus focos.

-El área barrida por el vector radial desde el Sol al planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.

La tercera ley de Kepler fue publicada en su libro *Harmonice mundi* (1609), y dice:

-El cuadrado de los tiempos de revolución de cualesquiera dos planetas alrededor del Sol son proporcionales al cubo de sus distancias medias al Sol.

Ahora faltaba saber lo que hacía girar los planetas alrededor del Sol con estas leyes.

Galileo Galilei nace en Italia en el año 1564 y encara al Santo Oficio en 1633 por sostener la hereje teoría copernicana. Galileo estudio la caída de los cuerpos y, contra lo que afirmaba Aristóteles, estableció que caen en el mismo tiempo sin importar su peso. En su libro "Diálogo sobre sus dos máximos sistemas del mundo, ptolomaico y copernicano" planteó el principio de inercia y que Newton eligió como su

primera ley de la mecánica. Con todos estos antecedentes Newton resume el comportamiento de los cuerpos en tres leyes.

-Un cuerpo seguirá en línea recta y velocidad constante si no hay fuerza que lo perturbe.

-Fuerza es igual a masa por aceleración.

-A toda acción corresponde una reacción.

En 1684 el doctor y astrónomo Halley (un cometa lleva su nombre) le pregunta a Newton cuál sería la curva de un planeta suponiendo la ley gravitacional, Sir Isaac respondería una elipse. El doctor le preguntó cómo lo sabía. Newton responde porque lo había calculado. El doctor le pide los cálculos y el resultado final es la publicación en 1687 de la máxima obra científica de la humanidad: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.*

Estos logros ya habían hecho célebre a Newton y en 1672 con menos de treinta años, Newton fue electo miembro de la Real Sociedad de Londres. En su disertación de aceptación expuso la teoría de la luz en que se hacía notar que la luz blanca es la superposición de todos los demás colores.

Robert Hooke cuestionó esta disertación, hecho que generó un disgusto a Newton, al grado de renunciar a la Real Sociedad bajo el pretexto de que le era dificultoso trasladarse desde Cambridge a Londres.

Sin embargo, Newton enfocó su pensamiento al recibir una carta de Hooke en que le pedía una opinión sobre una fuerza gravitatoria que se debilitaba con el cuadrado de la distancia a la Tierra.

Newton había calculado hace 14 años el resultado que tanteaba Hooke. Newton descartó la teoría de remolinos de Descartes que no explicaba la manzana que cae sobre la superficie de la Tierra.

En 1688 los ingleses ya habían decidido destronar al nuevo rey católico Jacobo II y el Parlamento dispondría de una autoridad para designar reyes.

En el libro primero de los *Principia* se exponen las tres leyes de Newton y se aclara conceptos de fuerza centrípeta y masa.

El libro segundo es un tratado acerca de la mecánica de fluidos y sobre la fricción en un medio líquido, incluyendo la ley de la resistencia como función del cuadrado de la velocidad. Se critica los vórtices de Descartes para explicar el movimiento planetario y agrega que existen fuerzas que actuaban a distancia, esto se tratará con más profundidad en el libro tercero.

El libro tercero, "El sistema del mundo", se deducen los movimientos de los cuerpos celestes. Se concluye que la gravitación es la causa de mareas, movimiento de la Luna, la precesión de los equinoccios y la llamó "ley de gravitación universal". Se identifica la fuerza centrípeta que mantiene a los planetas en órbitas elípticas, con la gravedad, en consecuencia, la fuerza que retiene a la Luna es la misma que hace caer una manzana del árbol.

Con ello el mundo occidental había comenzado a suplantar a Dios de su gobierno al igual que lo hacía la astronomía. Se dio la separación de la Iglesia y el Estado; la ciencia se separó de la religión.

Como dirá Halley en la Oda que precede el *Principia*, los hombres podrán en lo subsiguiente "penetrar en las mansiones de los dioses y escalar las alturas del cielo", pues Newton "el amado de las Musas", fue usado por Apolo para imprimir el "brillo de su propia divinidad", para terminar la Oda dice "Ningún mortal puede acercarse más a los dioses". A los científicos anteriores se les achacaba espíritus diabólicos pero a Newton se le divinizó en su tiempo; sin embargo, Newton dudoso de la capacidad humana para explicar la causa de las leyes matemáticas que descubrió, lo mantuvo como estudioso de la Biblia y las profecías.

Newton está enterrado en la abadía de Westminster y de lo munificente de su entierro en abril de 1727 nos quedan las palabras de Voltaire: "Vivió honrado por sus compatriotas y fue enterrado como un rey que ha hecho el bien a sus súbditos".

Con la ley de Newton fue posible descubrir a Neptuno y pisar Armstrong la Luna; aunque algunas irregularidades como el comportamiento del perihelio de Mercurio que se desplaza más rápido de lo que la ley newtoniana predice, llevó a que Einstein en 1905 propusiera un espacio tiempo ligados en que se el espacio se curva por la presencia de cuerpos, según la teoría general de la relatividad (1915) de él mismo, con lo que se explica perfectamente el movimiento de Mercurio. A velocidades bajas y alejados de cuerpos muy masivos las Leyes de Newton describen con alta precisión el movimiento de cuerpos, a diferencia, por ejemplo, de cuando Mercurio viaja muy rápido en su perihelio y está muy cerca del Sol. La mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, desarrolladas en el siglo XX, vinieron a abrir un campo de visión más amplia del universo y no hubieran sido posible elaborarlas sin las bases de gigantes como Newton.

III Gravitación

Reproduzcamos las derivaciones de Newton para determinar las trayectorias de los cuerpos celestes en términos de la presentación de un libro de cálculo actual estándar [3], y veamos el papel del cálculo en este momento estelar de logro científico. Recordemos primero la ley de gravitación con la fórmula

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (1)$$

Utilizamos la segunda ley de Newton, una fuerza F que actúa sobre una masa m imprime a la masa una aceleración a y

$$F = ma \qquad (2)$$

Consideremos la masa del Sol S de masa M atrayendo a un planeta P de masa m de acuerdo con la ley de gravitación. Por las distancias involucrado pensaremos a ambos cuerpos de manera puntual y con el sol fijo, también supondremos que el planeta tiene una velocidad dirigida hacia un punto diferente del sol cuando empiece a actuar la fuera de la gravedad, supongamos que toda la acción se desarrolla en un

solo plano. Conviene estudiar el movimiento de un objeto alrededor de otro en coordenadas polares. La distancia del Sol al planeta SP la denotaremos por ρ y será la coordenada del planeta. Así pues tenemos

$$\frac{GMm}{\rho^2} = ma$$

Como la aceleración actúa en la dirección en que decrece ρ. De esto se tiene

$$a_\rho = -\frac{GM}{\rho^2}$$

La aceleración radial se da entonces por

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{\rho^2} \qquad (3)$$

Sólo se tiene la aceleración central, luego la aceleración transversal es cero y tenemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (4)$$

Si multiplicamos ahora por ρ e integramos respecto a t obtenemos

$$\rho^2\dot{\theta} = h \qquad (5)$$

Donde h es una constante. Ahora bien, el área entre una curva entre los radios vectores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

Y por el teorema fundamental del cálculo esto se traduce en

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2 \qquad (6)$$

Y por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} \qquad (7)$$

Por la ecuación de arriba que relaciona a h con la coordenada radial al cuadrado y la derivada de la coordenada angular obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \qquad (8)$$

es decir, la derivada del área es constante. Luego el área barrida por el radio vector de S a P es

$$A = \frac{ht}{2} + C \qquad (9)$$

Esta ecuación significa que el área barrida en intervalos iguales de tiempo es la misma que es la segunda ley de Kepler.

De las ecuación (5) sustituyendo $\dot{\theta}$ en (3), entonces (3) se convierte en

$$\ddot{\rho} - \frac{h^2}{\rho^3} = -\frac{GM}{\rho^2} \qquad (10)$$

Una ecuación diferencial de segundo orden. Si la resolvemos y hacemos algo similar para θ tendríamos a las dos coordenadas polares del planeta en función del tiempo. En lugar de ello obtendremos la primera coordenada en términos de la segunda de la manera siguiente.

Primero obtendremos la segunda derivada de la coordenada radial respecto de la coordenada angular.

Tenemos que

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta}$$

De (5) escribimos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{h}{\rho^2} \qquad (11)$$

Podemos desarrollar

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\frac{h}{\rho^2}\right)\dot{\theta}$$

Considerando (5), obtenemos

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\frac{h^2}{\rho^4} - \frac{2h^2}{\rho^5}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \qquad (12)$$

Para efecto de llegar a lo que queremos, nos conviene el cambio de variable

$$u = \frac{1}{\rho} \qquad (13)$$

Por regla de la cadena aplicada a (13)

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}$$

Y sustituyendo el valor de la derivada de ρ con respecto de θ de esta ecuación en (11) tenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = -h\frac{du}{d\theta} \qquad (14)$$

Derivo con respecto al tiempo y uso regla de la cadena

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} \qquad (15)$$

Y por (5) y (13) obtenemos

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -h^2u^2\frac{d^2}{d\theta^2} \qquad (16)$$

Ahora si reemplazamos esto en (10) y usamos (13)

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -GMu^2$$

o

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \qquad (17)$$

Si hacemos el cambio de variable

$$y = u - \frac{GM}{h^2} \qquad (18)$$

Entonces

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

y de (17)

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$$

es decir, tenemos la ecuación del movimiento armónico simple cuya solución es

$$y = Cos(\theta + \alpha)$$

y por (18)

$$u = Cos(\theta + \alpha) + \frac{GM}{h^2} \qquad (19)$$

que se puede escribir

$$u = \frac{GM}{h^2}(1 + eCos(\theta + \alpha)) \qquad (20)$$

con

$$e = \frac{h^2 C}{GM} \qquad (21)$$

Finalmente, por (13),

$$\rho = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + eCos(\theta + \alpha)} \qquad (22)$$

Hemos logrado nuestro objetivo. Los valores de e, h, α son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales de movimiento. Esta ecuación es fácil de identificar con una cónica en coordenadas polares (véase el apéndice) aunque con el eje polar desviado un ángulo α de la recta que va del foco al vértice, y su determinación específica depende de las constantes de integración.

APÉNDICE SOBRE CÓNICAS

La ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Una cónica se define a partir de un foco, una directriz y un número llamado excentricidad. Un punto pertenece a una cónica si la relación entre punto y el foco, a la distancia entre el punto y la directriz, es la excentricidad. Supongamos que conocemos el foco F, la directriz d, localizada a p unidades de F, y la excentricidad e.

Introduzcamos coordenadas polares de modo que el polo sea el foco F y la directriz sea perpendicular al eje polar en el punto de coordenadas (p, π). Sea P un punto de la cónica con coordenadas (r, θ). La ecuación cartesiana de la directriz es $x = -p$, de modo que la distancia entre P y d es $|p + rCos\theta|$. Así la definición de una cónica nos dice que

$$\frac{|r|}{|p + rCos\theta|} = e$$

y simplificando, adoptando un signo del valor absoluto, despejamos r; consideraremos como una ecuación normal de nuestra cónica:

$$r = \frac{ep}{1 + eCos\theta}$$

Se puede mostrar que si $e > 1$ se tiene una hipérbola, si $e > 1$ se tiene una elipsis y si $e = 1$ se tiene una parábola.

REFERENCIAS

[1] Newton, I, *Principios matemáticos de la Filosofía natural,* Madrid, Tecnos, 1987.

[2] Muñoz, J., *La invención del cálculo infininitesimal Leibniz*, España, RBA, 2017.

[3] Kline, M., Calculus *An Intuitive and Physical Approach*, New York, Dover, 1998.

[4] Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Coceptual Development*, New York, Dover, 1959.

[5] Durán, A. J., *La ley de la gravedad Newton La fuerza más atractiva del Universo*, España, National Geographic, 2012

[6] Guillen, M., *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*, México, Random House Mondadori, 2007.

[7] Fisher, R. C., Allen, Ziebur, A. D., *Cálculo y Geometría Analítica,* Bilbao, Urmo, 1974.

[8] Boorstin, D. J., *Los descubridores Vol II,,* Barcelona, Grijalvo Mondadori, 1997

ISSN: 2594-1011

Números

Rogelio Herrera Aguirre[1], Raúl Amezcua Gómez[2], Arturo Cueto Hernánez[3]
[1,2,3]Departamento de Ciencias Básicas UAM-Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9494 E-mail: rha@correo.azc.uam.mx

Resumen — **Uno de los conceptos que se encuentran en la base de la cultura es el de número, dicho concepto ha variado en la historia de la humanidad, siendo diferente por ejemplo el concepto clásico griego de número, como reunión de unidades, del concepto de Newton, número como razón entre cantidades del mismo género. En este trabajo se presenta una panorámica de lo que se ha entendido por dicho concepto.**

Palabras Clave — **Números, estructuras, relaciones, supremo, arquimeeano.**

Abstract — ***The concept of number is found at the base of the human culture, this concept has varied along the history of humanity; being different for example the classic Greek concept, of number as a meeting of units, of the concept of Newton, number as a reason between quantities of the same gender.*** **In this work an overview of what has been understood by this concept is presented.**

Keywords — **Numbers, structures, relationships, supreme, archimedean.**

I. Introducción

La importancia el concepto de número, de los números en sí y de la forma de trabajar con ellos es indudable en el desarrollo de nuestra cultura, actualmente, el hablar de números, se puede entender muy diversas formas dependiendo del contexto y de los interlocutores, así por ejemplo se tienen tratados clásicos en los que se aborda el problema del número de diversas formas, $v.g.$, [1], [2], [4] y [6].

En este trabajo se presenta primero un somero panorama histórico, el cual puede ampliarse en [3], para a continuación presentar algunas de las concepciones con las que hoy se trabaja al hablar de números, un par casos de particular importancia son, el de los números p-ádicos para el cual se puede consultar [5], en las secciones IV y V, se a una construcción e los números reales a partir de los naturales, para consultar más sobre esto puede recurrirse a [4], [6] y [8], en [10] encontramos reflexiones sobre los complejos y los cuaterniones en particular.

Cabe destacar que como estamos acostumbrados los clásicos griegos han sido de singular importancia en la historia de la concepción del número, sobre esto ponemos el acento en la sección II, en particular se menciona la particularidad que para ellos significo la unidad, lo uno, haciendo mención al diálogo Parménides de Platón.

A lo largo de este trabajo, se usa la notación usual, estacamos las siguientes:

- Si A es un conjunto contenido dentro de un espacio con una topología, denotamos con $\bar{A}$, su cerradura topológica en dicho espacio.
- Si A es un conjunto contenido dentro de un conjunto con alguna estructura algebraica denotamos como $-A$ o como A^{-1}, sus conjuntos de inversos aditivos y multiplicativos, en caso de existir, respectivamente.
- Si A y B, son subconjuntos de algún conjunto dotado de una operación $*$, entonces se tiene el conjunto $A * B = \{a * b \,|a \in A \;\; y \;\; b \in B\}$

II. Panorama del número a través de la historia

Uno de los elementos que se considera diferencia al ser humano del resto del reino animal, es la capacidad de transmitir conocimiento, cultura, a través del tiempo y el espacio, para que exista esta capacidad es necesario, antes tener códigos de comunicación, lenguaje. Un aspecto de particular importancia en estos códigos, es el que nos permitan medir y contar, parte de la importancia de esta posibilidad se ilustra con la siguiente cita de Lord Kelvin.

"A menudo digo que cuando puedes medir aquello de lo que estás hablando y expresarlo en números puedes conocer algo acerca de ello; pero que cuando no puedes medirlo, cuando no puedes expresarlo con números, tu conocimiento es precario e insatisfactorio: puede ser el comienzo del conocimiento, pero apenas has avanzado en tus ideas en la etapa científica, cualquiera que pueda ser la materia"

El concepto de número se considera parte de la cultura común al hombre, y éste se ha venido afinando a partir de mediados del siglo XIX. La definición de lo que hoy se considera número, abarca una variedad de posibles "números", y para llegar a tales definiciones, ha sido necesaria la contribución de la humanidad en su conjunto, sin dejar de destacar las aportaciones de algunas de las mentes más agudas de nuestra especie.

Una pequeña muestra de los diferentes derroteros que hemos tenido que transitar para llegar a perfeccionar el concepto de número, haciendo de él una herramienta que ha sido fundamental en el desarrollo de nuestras sociedades y culturas, se cita en los siguientes ejemplos:

Mientras que hoy cualquier niño de nivel secundaria tiene un “concepto” del infinito, Arquímedes de Siracusa en el siglo tercero antes de nuestra era, escribió un trabajo, intitulado “El Arenario" para justificar que la cantidad de granos de arena en las playas de su natal Siracusa no era un número infinito.

Es conocida la historia de que en la escuela pitagórica, alrededor del siglo quinto antes de nuestra era, se descubrió la inconmensurabilidad de la longitud de la hipotenusa con la de los catetos de un triángulo rectángulo, con éstos de igual medida, esencialmente lo que hoy se indica diciendo que la raíz cuadrada de dos es un número irracional. De hecho la leyenda cuenta que cuando uno de los discípulos de dicha escuela divulgó esta singular propiedad, fue condenado a muerte, sentencia que se dice se cumplió mediante ahogamiento.

Esta reacción en la Escuela Pitagórica ante el descubrimiento de la inconmensurabilidad de la raíz cuadrada de dos, se sustentaba en el concepto de número imperante en tal escuela, a saber:

El número es una reunión de unidades.

De lo anterior ni siquiera el uno sería un número, bajo esa concepción, los griegos concebían que cualquier propiedad de la naturaleza se podría expresar mediante “proporciones numéricas”, las cuales equivalían a nuestros racionales positivos.

De hecho si uno revisa en los Diálogos de Platón el Parménides, uno puede percatarse de la especial significación que la unidad, lo uno, tenía para ellos.

Para superar el problema, de la inconmensurabilidad de la raíz de dos, los griegos consideraron dentro de la geometría una teoría de las proporciones, razones entre magnitudes, concebida por Eudoxo (400-347 ANE). La visión que tenían los griegos de número en la época antes mencionada, concuerda con la idea que de ellos tenía Leopoldo Kronecker (1823-1891), quien afirmó:

“Dios ha creado los números naturales, el resto es obra del hombre.”

Por otro lado una concepción de número más próxima a la noción de Eudoxo, es la planteada por Isaac Newton (1642-1727):

“Entendemos por número no tanto una multitud de unidades si no la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad.”

El número $\sqrt{2}$ también es conocido en otras culturas antiguas:

En una tablilla Babilónica (2000-1650 ANE) usando una representación sexagecimal se tiene una aproximación, que en notación actual se puede escribir como:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{26}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1.41421296$$

Otra aproximación antigua a este número irracional:

En la antigua India en el texto matemático Baudhaiana-sulba-sutra (entre el 600 y el 300 ANE) se encuentra la siguiente estimación:

Incrementa la longitud [del lado] por su tercera parte, y la cuarta parte de su tercera, luego resta la treinta y cuatroava parte de la cuarta parte de su tercera.

Lo que en nuestra notación se escribe:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1.41421568$$

Podemos comparar el bagaje necesario para conseguir estas antiquísimas aproximaciones numéricas, con un dato presentado por George Gamow, en su conocido libro de divulgación “Uno, dos tres, infinito”, donde informa de: la existencia de un pueblo habitante del sur de África, los Hotentotes, los cuales poseen un sistema para contar usando sólo cuatro números, teniendo en su lengua palabras para denotar los conceptos de uno, dos y tres, pero después del número tres usaban una palabra genérica para denotar cualquier cantidad mayor.

III. LOS NÚMEROS HOY EN DÍA

Cuando hoy pensamos en los números, hacemos referencia normalmente a los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$, o los complejos $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Todos estos números tienen en común el poseer dos operaciones llamadas suma y multiplicación, de hecho en nuestra actual definición de ellos se cumple la cadena de contenciones: □□□□□

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathcal{C}$$

Respecto de las operaciones mencionadas, los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$, y los complejos $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, forman lo que se conoce como un campo, mientras que $\mathbb{Z}$ tiene estructura de anillo, de hecho es un dominio entero, y $\mathbb{N}$ sólo tiene estructura de semigrupo para cada una de sus operaciones.

El teorema del buen orden, derivado del axioma de elección por E. Zermelo en 1904, nos dice que todo conjunto puede bien ordenarse, pero cuando un conjunto tiene estructura algebraica, se dice de él, en su caso, que es un grupo, anillo, campo ordenado, si está dotado de un orden total compatible con su estructura algebraica, en ese sentido, naturales, enteros racionales y reales son ordenados, mientras que los complejos no lo son.

Si K es un conjunto dotado de una estructura algebraica ordenada entonces uno de sus subconjuntos distinguidos es K^+, el conjunto de los elementos positivos de K.

Que un campo o un anillo K, sea un campo ordenado o un anillo ordenado, con la relación de orden $\leq$, significa que se cumplen las siguientes propiedades:

- $(\forall x, y, z \in K)(x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z)$
- $(\forall x, y \in K)(\forall z \in K^+)(x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$
- $(\forall x \in K)(x \in K^+ \text{ ó } x = 0 \text{ ó } -x \in K^+)$

Se puede ver que todo campo ordenado contiene de manera natural una copia de $\mathbb{N}$, a saber el conjunto formado por todas las sumas, incluida la vacía, con sólo uno como sumandos, $i.e.$, $n \cdot 1 \coloneqq +1 + \cdots + 1$, y en consecuencia contiene copias de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$.

Las primeras dos de estas propiedades, son las que garantizan la compatibilidad de la relación de orden con la estructura algebraica, y la última, es conocida como "tricotomía", estas propiedades nos permite justificar que $1 \in K^+$, en efecto, se puede ver que $K^+K^+ \subseteq K^+$, y como necesariamente se debe cumplir o bien $1 \in K^+$ o $-1 \in K^+$, si suponemos que se cumple el segundo caso, como se tiene $1 = (-1)(-1) \in K^+$, luego, necesariamente $1 \in K^+$.

Con una línea de razonamiento semejante se puede ver que no puede existir un orden en los complejos que sea compatible con su estructura algebraica, en efecto si así fuera se tendría que además de que $1 \in \mathcal{C}^+$, $-1 = i^2 = (-i)^2 \in K^+$, lo cual es una contradicción.

Actualmente en diferentes ámbitos se usan otros conjuntos de números:

- Una extensión de los complejos son los cuaterniones que forman lo que se dice un álgebra de división.
- Los enteros módulo n, $\mathbb{Z}_n$, que forman un anillo, en el caso particular cuando n = p, número primo, se tiene un campo finito con p elementos F_p.
- Los campos de números algebraicos K, extensiones finitas de $\mathbb{Q}$, y sus respectivos anillos de enteros.
- Los campos finitos con q elementos, F_q, para todo q potencia de primo.
- Si se definen diferentes valores absolutos sobre $\mathbb{Q}$, uno para cada p número primo, conocidos como valores absolutos p-ádicos se obtiene los campos p-ádicos correspondientes $\mathbb{Q}_p$.

Hemos anotado que una diferencia entre racionales y reales por un lado y complejos por el otro es que los primeros son campos ordenados, mientras que $\mathcal{C}$ no lo es; por otro lado otra propiedad que comparten $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es la de ser campos Arquimedeanos, según la siguiente definición.

Definición. III.1. Un Campo ordenado K, se dice Arquimedeano, si se cumple:

$$(\forall x, y \in K^+)(\exists n \in \mathbb{N})(n \cdot x > y) \quad \blacksquare$$

Un campo ordenado que no es Arquimedeano, es el de los números hiper-rreales, i:e: el campo que se obtiene al agregar a los reales los infinitésimos.

Otro campo ordenado no arquimedeano es el campo de funciones racionales con coeficientes reales, $R(X)$, cuyos elementos, que son los cocientes de polinomios con coeficientes reales, .con la suma y multiplicación correspondientes satisfacen las propiedades de campo, se puede verificar que es un campo ordenado, con la relación de orden definida a continuación.

Definición. III.2. Para $\alpha(X), \beta(X) \in R(X)$, se define la relación $\preccurlyeq$, como sigue:

$$\alpha(X) \preccurlyeq \beta(X) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \geq N)\big(\alpha(X) \leq \beta(X)\big) \quad \blacksquare$$

Si bien $R(X)$ con la suma y producto usual y con la relación "$\preccurlyeq$" antes definida es un campo ordenado, no es arquimedeano, en efecto se tiene que 1 y X son elementos positivos de $R(X)$, pero para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple $n \cdot 1 < X$.

Se puede decir que la diferencia esencial entre racionales y reales es que estos últimos no tienen huecos, esto último es una propiedad topológica, y se puede caracterizar mediante la relación de orden, indicando que los reales cumplen el siguiente resultado:

Lema III.1 (Principio del supremo) Todo subconjunto no vacío de los reales acotado superiormente, tiene supremo. ■

Se puede ver que todo campo ordenado que cumpla el principio del supremo, es Arquimedeano, pero el recíproco es falso, por ejemplo para $\mathbb{Q}$, que es arquimedeano, se tiene que el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$$

es acotado pero no tiene supremo.

Considerando las propiedades anotadas, se puede definir de manera axiomática a los reales tomando en consideración el siguiente resultado.

Teorema III.1 $\mathbb{R}$ es el campo ordenado que satisface el principio del supremo. ■

Así si, damos por sentado el campo de los números reales, entonces se pueden definir a partir de él:

- $\mathbb{N}$ es el menor de los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ que contienen al cero.
- $\mathbb{Z}$ es el menor de los dominios enteros contenidos en $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ es el menor de los subcampos de $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}$ es la cerradura algebraica de $\mathbb{R}$.

La diferencia topológica que se anotó para distinguir a los reales de los racionales, se puede expresar, diciendo que $\mathbb{R}$ es la cerradura topológica de $\mathbb{Q}$.

Esta propiedad es la que históricamente permitió concluir una construcción de los números reales, partiendo de una presentación axiomática de los naturales; en la siguiente sección, damos un guion de cómo se recorre este camino.

IV. NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES

Se inicia con una definición axiomática de los naturales, dada por Giuseppe Peano (1858-1932), la cual se presenta a continuación.

Se tienen tres objetos primitivos:

- Un conjunto $\mathbb{N}$.
- Un elemento 0.
- Una relación σ definida en $\mathbb{N}$.

Con estos elementos se define al conjunto de números naturales, como sigue:

Definición IV.1 El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, cumple los siguientes axiomas:

1- $0 \in \mathbb{N}$.
2- Para cada $x \in \mathbb{N}$, existe un único elemento con el que se relaciona según σ, denotado $\sigma(x)$.
3- Ningún $x \in \mathbb{N}$, cumple $\sigma(x) = 0$.
4- Para $x, y \in \mathbb{N}$, si $\sigma(x) = \sigma(y)$, entonces $x = y$.
5- Si $D \subseteq \mathbb{N}$, cumple:
   a) $0 \in D$.
   b) Para cada $n \in D$, se tiene, $\sigma(n) \in D$.
   Entonces, $D = \mathbb{N}$. ■

Con los naturales definidos mediante los axiomas antes presentados, se definen las operaciones de suma y producto y la relación de orden de la siguiente manera:

Definición IV.2 En $\mathbb{N}$, se define la operación suma de manera recursiva como sigue:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = n$.
- Para $n, k \in \mathbb{N}$, $n + \sigma(k) = \sigma(n + k)$. ■

Definición IV.3 En $\mathbb{N}$, se define la operación producto de manera recursiva como sigue:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 0 = 0$.
- Para $n, k \in \mathbb{N}$, $n \cdot \sigma(k) = (n \cdot k) + n$. ■

Observación IV.1 Manteniendo las definiciones anteriores, con excepción del axioma número tres, y en este caso si $m_0 \neq 0$ y es el único elemento que cumple:

$$\sigma(m_0) = 0$$

Se tiene una presentación axiomática del anillo de enteros módulo. m_0, $\mathbb{Z}_{m_0}$. ■

Definición IV.4 En $\mathbb{N}$, se define la relación de orden, $\leq$, como sigue:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})\big(x \leq y \Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{N})(y = x + d)\big)$$ ■

Se puede ver que en este caso $\mathbb{N}^+$ coincide con todos los elementos diferentes de cero, y que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$, tomando $n = y$, se tiene:

$$n \cdot x > y$$

Dado $\mathbb{N}$, se puede construir $\mathbb{Z}$, según la siguiente definición.

Definición IV.5 El anillo de enteros $\mathbb{Z}$, se define como el conjunto de clases de equivalencia de la siguiente relación dada en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

junto con las operaciones y la relación siguientes:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$.

- $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow (a+d \leq b+c)$. ■

Para la definición antes presentada, se requiere justificar que la relación presentada es de equivalencia; debe observarse que para representar la clase de cualquier par ordenado (a,b), se usa al mismo par, y que dicho par está representando al "entero" $a-b$, finalmente se debe verificar que las operaciones y la relación de orden no dependen de los representantes; una vez realizadas las justificaciones previas, se puede ver que se tiene un anillo ordenado, en particular se tiene que $(0,0)$ es el neutro aditivo y $(1,0)$ es a su vez el neutro multiplicativo, aun mas la estructura es un dominio entero ya que se cumple:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (0,0) \Leftrightarrow (a,b) = 0 \; o \; (c,d) = 0$$

Por otro lado, respecto del hecho de ser un anillo ordenado, se puede ver que se cumple:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{(0,0)\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Donde los conjuntos $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$, de enteros positivos y negativos respectivamente, se pueden definir como sigue:

- $\mathbb{Z}^+ = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{N}^+\}$
- $\mathbb{Z}^- = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{N}^+\}$

Antes de construir el campo de los números racionales a partir de los enteros, obsérvese que la siguiente función inyecta a $\cdot$ en $\cdot$, de tal forma que se preservan las operaciones y la relación de orden.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto (n,0) \end{aligned}$$

Para definir $\mathbb{Q}$, a partir de $\mathbb{Z}$, se procede de manera semejante a como se procedió en el caso de. $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$

Definición IV.6 El campo $\mathbb{Q}$, se define como el conjunto de clases de equivalencia de la siguiente relación dada en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$.

$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

junto con las operaciones y la relación siguientes:

- $(a,b) + (c,d) = (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)$.
- $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$.
- $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow (a \cdot d \leq b \cdot c)$. ■

Como en el caso de la construcción de $\mathbb{Z}$, la de $\mathbb{Q}$ se sustenta en que la relación usada es de equivalencia, en que las operaciones y la relación de orden definidas, no dependen de los representantes, a cada clase se le representa, nuevamente, mediante cualquier par (a,b) contenido en ella, representando con dicho par al "racional" $^{a}/_{b}$; en este caso la estructura obtenida es un campo ordenado, y los neutros, aditivo y multiplicativo, son, respectivamente, $(0,1)$ y $(1,1)$, también puede verificarse que si $(a,b) \neq (0,1)$, entonces, tanto a como b son diferentes de cero y el inverso multiplicativo de (a,b) es (b,a), considere que el par

Para el campo $\mathbb{Q}$ los conjuntos $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{Q}^-$, de racionales positivos y negativos respectivamente, se definen como sigue:

- $\mathbb{Q}^+ = \{(a,b) \mid a \cdot b \in \mathbb{Z}^+\}$
- $\mathbb{Q}^- = \{(a,b) \mid a \cdot b \in \mathbb{Z}^-\}$

Cumpliéndose entonces:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{(0,1)\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Se puede ver que la siguiente función inyecta a $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, de tal forma que se preservan las operaciones y la relación de orden.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ z &\mapsto (z,1) \end{aligned}$$

Observación IV.2 Las construcciones de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, tienen que ver, respectivamente, con que dentro de nuestros conjuntos de números, tengan solución todas las ecuaciones de los tipos:

$$a + b = c \quad \& \, a \cdot b = c \;\; con \;\; b \neq 0$$ ■

La construcción de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, a partir de $\mathbb{R}$, se puede ver como la forma de que la ecuación $x^2 + 1 = 0$, tenga solución, y para ello se agrega de manera adecuada la raíz imaginaria i, resultando con ello que todo polinomio con coeficientes complejos tiene todas sus raíces en $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, éste resultado es consecuencia del conocido Teorema Fundamental del Álgebra, demostrado por C. Gauss.

Teorema IV.1 (Teorema Fundamental del Álgebra) Todo polinomio en una variable y con coeficientes en $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, tiene al menos una raíz en $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. ■

V. LOS NÚMEROS REALES

A diferencia de las construcciones dadas en la sección anterior, que son fundamentalmente algebraicas, el paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, es de carácter topológico, consistente en llenar huecos, como el encontrado por los Pitagóricos con el irracional $\sqrt{2}$.

De las diversas formas de construir la cerradura topológica de $\mathbb{Q}$,$i.e.$, de construir $\cdot$, mencionamos las debidas a Richard Dedekind (1831-1916) y a Georg Cantor (1845-1918) .

R. Dedekind definió los números reales como "cortaduras", de la forma que a continuación se presenta.

Definición V.1 Un par ordenado (A, B) de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, forman una cortadura, si son una partición de $\mathbb{Q}$ y todo elemento de A es menor que cualquier elemento de B. ■

Ejemplo V.1 Se presentan tres cortaduras, la primera es lo que definimos como una cortadura "irracional", mientras que las dos últimas, siendo cortaduras "racionales", se considerarán como la misma cortadura, como se anota en la observación (V.2).

- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \; o \; x^2 < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \; y \; x^2 > 2\}$.
- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqq 2\}$.
- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 2\}$. ■

Observación V.1 Si se tienen una cortadura (A, B), entonces, los conjuntos A y B cumplen las siguientes propiedades:

- $B = A^C$
- A es un conjunto acotado superiormente y B coincide con su conjunto de cotas superiores, salvo, posiblemente, si existe, el máximo de A.
- B es un conjunto acotado inferiormente y A coincide con su conjunto de cotas inferiores, salvo, posiblemente, si existe, el mínimo de B.
- Si $M_A = máx.A$, entonces, $M_A = inf.B$ y B no tiene mínimo.
- Si $m_B = mín.B$, entonces, $m_B = sup.A$ y A no tiene máximo.
- A tiene supremo S_A, si y sólo si, B tiene ínfimo I_B; en este caso $S_A = I_B$, y este valor común, es o bien el máximo de A o el mínimo de B. ■

Observación V.2 Aquellas cortaduras (A, B) tales que A y B no tengan supremo e ínfimo, respectivamente, serán las cortaduras irracionales, las restantes serán las cortaduras racionales, y dentro del conjunto de cortaduras representaran al racional que las "separa", así para no tener ambigüedad si se tienen cortaduras (A, B) y (A', B') tal que se cumpla $\max A' = \min B$, entonces se consideran la misma cortadura, y en este caso se usara la cortadura (A, B) como la representante de ambas. ■

Como se anotó antes, R. Dedekind, uso las cortaduras antes presentadas para definir al conjunto de los números reales, para conseguir esto se tienen las siguientes definiciones.

Definición V.2 En el conjunto de particiones se define la relación $\precsim$ como sigue:

$$(A, B) \precsim (C, D) \Leftrightarrow A \subseteq C \quad ■$$

Observación V.3 La relación $\precsim$ es una relación de orden en el conjunto de particiones, $i.e.$, es una relación reflexiva, transitiva y simétrica, de hecho es un orden total, y otras formas equivalentes de definir dicha relación se dan en las siguientes equivalencias.

- $(A, B) \precsim (C, D) \Leftrightarrow D \subseteq B$
- $(A, B) \precsim (C, D) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in C)(x \leq y)$
- $(A, B) \precsim (C, D) \Leftrightarrow (\forall x \in D)(\exists y \in B)(y \leq x)$

Definición V.3 Definimos la suma de particiones, de la siguiente manera:

$$(A, B) + (C, D) = (A + C, (A + C)^C) \quad ■$$

De la definición de suma dada para las cortaduras, puede verificarse que dicha operación es conmutativa y asociativa, también puede verse que si damos la cortadura $(\ominus, \oplus)$, donde:

- $\ominus = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$
- $\oplus = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$

se cumple $(A, B) + (\ominus, \oplus) = (A, B)$, para toda cortadura (A, B), $i.e.$, es el neutro aditivo, por otro lado la cortadura (B_-, A_-), donde:

$$A_- = \overline{-A} \quad y \quad B_- = {A_-}^C$$

cumple $(A, B) + (B_-, A_-) = (\ominus, \oplus)$, $i.e.$, es el inverso aditivo.

Para poder definir el producto en nuestro conjunto de cortaduras, al cual podemos representar como $\mathbb{R}$, definimos el conjunto de positivos, $i.e.$, las cortaduras mayores que cero, como sigue:

$$\mathbb{R}^+ = \{ (A, B) \mid 0 \in A\}$$

Definición V.4 Definimos el producto de las particiones (A, B) y (C, D), de la siguiente manera:

1. Si $(A, B), (C, D) \in \mathbb{R}^+ \cup \{(\ominus, \oplus)\}$, entonces, $(A, B)(C, D) = (A \odot C, (A \odot C)^C)$, donde $A \odot C$ es la reunión de los racionales menores o iguales a cero con el conjunto $(A \cap \mathbb{Q}^+) \cdot (C \cap \mathbb{Q}^+)$.

2. Si $(A,B),(C,D)\in\mathbb{R}^-$, entonces, $(A,B)(C,D)=(B_-,A_-)(D_-,C_-)$
3. Si $(A,B)\in\mathbb{R}^+$ y $(C,D)\in\mathbb{R}^-$, entonces, $(A,B)(C,D)=(A,B)(D_-,C_-)$.
4. Si $(A,B)\in\mathbb{R}^-$ y $(C,D)\in\mathbb{R}^+$, entonces, $(A,B)(C,D)=(B_-,A_-)(C,D)$. ■

La operación producto definida, cumple ser asociativa, conmutativa y tiene como neutro multiplicativo a la cortadura (I_i,I_d), donde $I_d=\{x\in\mathbb{Q}\,|x\geq 1\}$ y $I_i=I_d^C$, además para $(A,B)\in\mathbb{R}^+$, su inverso multiplicativo es la cortadura (A_{-1}^C,A_{-1}), donde:

$$A_{-1}=\overline{(A\cap\mathbb{Q}^+)^{-1}}$$

si $(A,B)\in\mathbb{R}^-$, su inverso multiplicativo será de manera natural el inverso aditivo del inverso multiplicativo, de su propio inverso aditivo.

De lo anterior el conjunto de las cortaduras, con las operaciones y la relación de orden definidas, al cual denotamos como $\mathbb{R}$, se puede ver que forma un campo ordenado, para el cual se satisface la relación:

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}^-\cup\{(\ominus,\oplus)\}\cup\mathbb{R}^+$$

donde el conjunto de los reales negativos, $\mathbb{R}^-$, se puede caracterizar como sigue:

$$\mathbb{R}^-=\{\,(A,B)\mid 0\notin A\ y\ 0\notin B\}$$

En este caso destacamos que el campo obtenido satisface el principio del supremo, lo cual se justifica en el siguiente teorema.

Teorema V.1 El campo ordenado de cortaduras antes definido, $\mathbb{R}$, satisface el principio del supremo.

Dem. Si $\mathcal{F}\subseteq\ \mathbb{R}$ es un conjunto diferente del conjunto vacío y acotado superiormente, entonces existe una cortadura (C_1,C_2), t.q., para toda $(A,B)\in\mathcal{F}$, se tiene, $A\subseteq C_1$, luego se puede definir la cortadura $(A_{\mathcal{F}},B_{\mathcal{F}})$, donde:

$$A_{\mathcal{F}}=\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\quad y\quad B_{\mathcal{F}}=A_{\mathcal{F}}{}^C=\overline{\bigcap_{B\in\mathcal{F}}B}$$

De tal forma que se cumplen:

- $(\forall(A,B)\in\mathcal{F})(A\subseteq A_{\mathcal{F}})$
- Si (U,V) es una cortadura que cumple $(U,V)\prec(A_{\mathcal{F}},B_{\mathcal{F}})$, entonces se tiene $U\subsetneq A_{\mathcal{F}}$, luego existen $(A_0,B_0)\in\mathcal{F}$ y $a_0\in A_0$, t.q., $a_0\notin$U, luego $A_0\nsubseteq U$

La primera de estas propiedades nos garantiza que $(A_{\mathcal{F}},B_{\mathcal{F}})$ es una cota superior de $\mathcal{F}$ y la segunda que ninguna cortadura menor a $(A_{\mathcal{F}},B_{\mathcal{F}})$ es cota superior, en consecuencia se tiene:

$$(A_{\mathcal{F}},B_{\mathcal{F}})=sup.\mathcal{F}$$ ■

Nuevamente como en las construcciones de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Z}$, se tiene una inyección de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, que preserva las operaciones y la relación de orden, a saber.

$$\begin{aligned} i\ :\ \mathbb{Q}\ &\to\ \mathbb{R}\\ x\ &\mapsto (I_x,D_x)\end{aligned}$$

donde:

- $I_x=\{y\in\mathbb{Q}\mid y<x\}$
- $D_x=\{y\in\mathbb{Q}\mid y>x\}$

Como se anotó al principio de esta sección, G. Cantor dio una forma diferente de completar $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, y esto lo hizo definiendo para las sucesiones de Cauchy con valores racionales, la siguiente relación:

$$\{x_n\}\sim\{y_n\}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$$

La relación arriba definida es una relación de equivalencia, y a la familia de clases de equivalencia se le puede dotar de una estructura de campo ordenado, que satisface el principio del supremo, y en consecuencia y ateniéndonos al teorema (III.1) se tiene otra forma de construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

Para finalizar esta sección presentamos sucintamente, las definiciones de las operaciones, la relación de orden y el conjunto de reales positivos, $\mathbb{R}^+$, para esta construcción, donde nuevamente tomamos arbitrariamente un elemento de la clase para representarla, en consideración de que dichas definiciones no dependen del representante.

Definición V.5. Dado $\mathbb{R}$ el conjunto cociente obtenido mediante la relación de equivalencia se definen

a) La suma de dos clases $\{x_n\},\{y_n\}$, como

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$$

b) El producto de dos clases $\{x_n\},\{y_n\}$, como

$$\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_ny_n\}$$

c) La relación de orden $\leq$ mediante la relación

$$\{x_n\}\preccurlyeq\{y_n\}\Leftrightarrow(\exists N\in\mathbb{N})(\forall m>N)(x_m\leq y_m)$$

a) El conjunto de elementos positivos como

$$\mathbb{R}^{+} = \left\{ \{x_n\} \middle| (\exists N, k \in \mathbb{N})(\forall m > N)(x_m > \frac{1}{k}) \right\}$$

Puede observarse que cualquier representante de un elemento diferente del neutro aditivo en $\mathbb{R}$, tiene a lo más un número finito de ceros, que tales elementos tienen como inverso multiplicativo el elemento representado por la sucesión definida como ${x_n}^{-1}$ si $x_n \neq 0$ y con un valor arbitrario en caso contrario, finalmente anotamos que la inyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, en este caso, está dada como sigue

$$\begin{aligned} i: \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$$

donde $\{x\}$ es la sucesión constante correspondiente.

VI. CONCLUSIONES

Puede verse que como se afirmó en la introducción el concepto y uso del número ha sido y es un acompañante del ser humano a través de su historia y su desarrollo, actualmente el uso de los números se da en un abanico, que abarca desde aplicaciones realizadas mediante el uso de las computadoras, teniendo gran influencia en el desarrollo de la algorítmica, hasta estudios sobre la fundamentación de la matemática, podemos por lo tanto afirmar que existe un horizonte promisorio para el estudio de que son y cómo se usan los números, basta mencionar que en aplicaciones a la criptografía los "números" que hoy prometen aportar al desarrollo de esta área, son los puntos sobre curvas elípticas, teniendo estos conjuntos de puntos una estructura de grupo.

REFERENCIAS

[1] R. Courant, H. Robins, ¿Qué es la Matemática?, quinta edición, Aguilar, Madrid, 1979.

[2] R. Dedekind, ¿Qué son y para qué sirven los númerous? Y otros sscritos sobre los fundamentos de la Matemática, Alianza Editorial. Madrid, 2014.

[3] H. D. Ebbinghaus et al, Numbers, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] S. Feferman, The number systems: foundations of analysis, segunda edición, Chelsea Pub. Co., New York, 1989.

[5] F. Q. Gouvea, p-adic numbers, Springer, Berlin, 1993.

[6] D. Hilbert, Fundamentos de las Matemáticas, segunda edición MATHEMA, UNAM, México, 2014.

[7] E. Mendelson, Numbers systems and the foundations of analysis, Dover, New York, 2008.

[8] C. A. Trejo, El Concepto de Número, segunda edición, monografía num. 7, Serie de Matemáticas, OEA, 1973

[9] Platón, Diálogos: Critón, Fedón, El Banquete, Parménides, Biblioteca EDAF, Madrid, 2016.

[10] L. Pontryaguin, Generalizaciones de los numerous, Ed. URSS, MOscu, 2017.

ISSN: 2594-1011

Estudio del choque séptico experimental mediante espectroscopia Fotoacustica

Sindy J. Olvera Vazquez[1], Cleva Villanueva López[2], Marcos Macías Mier [3], Margarita Lizeth Alvarado Noguez [4], Alfredo Cruz Orea [3]

[1] Instituto Politécnico Nacional (IPN), Escuela Superior de Física y Matemáticas, México, 2Escuela Superior de Medicina, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

[2] Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Medicina, Plan de San Luis y Salvador Díaz Mirón S/N, Col. Casco de Santo Tomás, Del. Miguel Hidalgo, C.P. 11340. México.

[3] Departamento de Física, CINVESTAV– IPN, Av. IPN no. 2508, col. San Pedro Zacatenco, A.P. 14-740, Ciudad de México 07360, México.

[4] Instituto Politécnico Nacional - SEPI-ESIME, Zacatenco, Edificio 5, 3er Piso, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos". Col. Lindavista, Ciudad de México 07738, México., México.

Resumen — **La espectroscopia fotoacustica (EFA) tiene sus orígenes con el descubrimiento del efecto fotoacustico en 1880 y desde entonces es usada en varias áreas, entre ellas medicina, ya que es considerada una técnica no invasiva ni destructiva. En este trabajo se usa esta técnica para el estudio del choque séptico, el cual ocupa el primer lugar en causas de muerte en el área de terapia intensiva en México. Para ello se indujo a choque séptico a una rata macho Wistar mediante la administración de un lipopolisacárido (LPS), se extrajeron muestras de sangre durante 6 horas continuas, estas muestras se analizaron con espectroscopia fotoacustica y su obtuvieron así su espectro de absorción de cada muestra identificando sus picos característicos, γ en 412 nm (banda de Soret), β en 550 nm y α en 580 nm. Según lo reportado en la literatura, las razones entre estos picos γ/β y γ/ α son inversamente proporcionales a las concentraciones de hemoglobina. Se encontró una relación de los espectros de absorción ópticos con la gravedad del choque, por lo que esta técnica resulta ser de gran utilidad para evaluar a pacientes con dicha afección.**

Palabras Clave – **Espectroscopia fotoacustica (EFA). Choque séptico, diagnóstico temprano.**

Abstract — **Photoacoustic spectroscopy has its origins with the discovery of the photochemical effect in 1880 and since then it has been used in several areas, including medicine, which is considered a non-invasive or destructive technique. In this work this technique is used for the study of septic shock, which occupies the first place in causes of death in the intensive care area in Mexico. For this, a septic shock was induced to a Wistar male rat by means of the administration of a lipopolysaccharide (LPS), blood samples were taken for 6 continuous hours, these samples were oriented with photoacoustic spectroscopy and its result as well as the absorption spectrum of each sample identifying its characteristic characteristics, γ at 412 nm (Soret band), β at 550 nm and α at 580 nm. As reported in the literature, the ratios between these γ / β and γ / α peaks are inversely proportional to hemoglobin concentrations. The relationship of the spectra with the severity of the shock, this technical is of the great utility for the evaluation of patients with this condition.**

Keywords — **Photoacoustic spectroscopy (PAS). septic shock early diagnoses.**

I. Introducción

La fotoacústica (FA) es un área con mucha aplicación, en la actualidad se ha aplicado con éxito a varios problemas en física, química, biología, medicina e ingeniería. En el área de la medicina, ha sido ampliamente aceptada ya que se pueden estudiar muestras biológicas sin dañar su estructura, también es posible mediante esta técnica obtener parámetros térmicos entre otros.

El efecto fotoacústico fue descubierto en 1880 por Alexander Graham Bell, pero fue hasta 1976 que Allan Rosencwaig y Allen Gersho desarrollaron el principio teórico que dio una explicación de este fenomeno[1], el cual es la base de la técnica que lleva su nombre, espectroscopia fotoacústica (PAS por sus siglas en ingles). En este fenomeno, la luz periódica que incide sobre la muestra es parcialmente transformada en calor, consecuentemente la temperatura de la muestra varía, con la misma frecuencia que la radiación incidente, produciendo un calentamiento periódico también en el medio en el que está inmersa la muestra (figura 1).

En la técnica FA, la muestra se coloca en una celda herméticamente cerrada, llamada celda fotoacústica (Figura 2). Como resultado de la absorción de la radiación modulada, la muestra se calienta y el calor se transmite a la capa de gas adyacente a la superficie de la muestra, causando variaciones de presión en el resto del gas, lo que se traduce en ondas acústicas las cuales son detectadas por un micrófono[2].

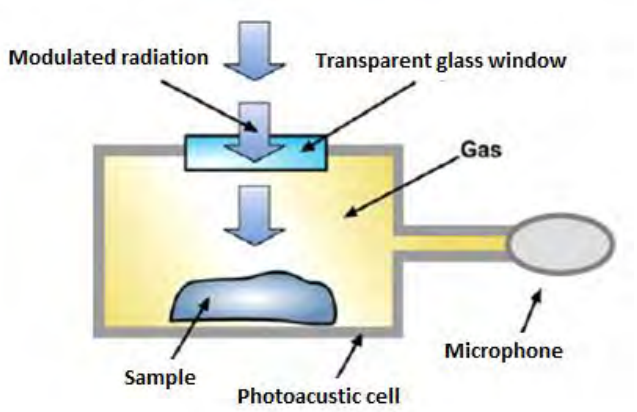


Figure. -1 Celda fotoacustica.

Según estudios hechos por la Organización Mundial de la Salud, la sepsis y el choque séptico son la decimotercera causa de muerte en Estados Unidos Por otro lado en México el shock séptico es una condición con una alta tasa de mortalidad, ocupando el primer lugar de muerte en pacientes que ingresan a la unidad de cuidados intensivos[3]. Dentro del área clínica existen pocos métodos que ayuden en el pronóstico temprano de esta afección [4], además de que los métodos que existen proporcionan valores muy imprecisos en el monitoreo de diferentes concentraciones vitales a lo largo del choque séptico. Sin embargo, hay factores que pueden ayudarnos en el pronóstico temprano de esta afección, un ejemplo de ellos son las concentraciones de hemoglobina y como estás varían durante el shock séptico, las cuales están directamente relacionadas con la gravedad de este.

En este trabajo, la técnica de espectroscopía fotoacústica se utiliza como una herramienta de alta sensibilidad que brinda información de las concentraciones de hemoglobina en el choque séptico. Para esto, se obtuvieron muestras de sangre de una rata macho Wistar inducida a choque séptico mediante la administración de un lipopolisacárido (LPS), se tomaron muestras cada hora, durante 6 horas a lo largo del choque séptico.

Al obtener el espectro de absorción óptico de las muestras de sangre, por espectroscopia fotoacústica, se identifican los picos característicos de la sangre γ, β y α ubicados en 412nm, 550nm y 580nm, respectivamente. Se ha reportado que las razones de γ / β y γ / α son inversamente proporcionales a la concentración de hemoglobina[5], de esta manera se puede monitorear la evolución de dichas razones a lo largo del choque, lo que de forma indirecta nos daría una idea de la variación en la concentración de hemoglobina en la sangre durante esta afección.

II. Metodología

La rata macho Wistar fue anestesiada y cateterizada por aorta y carótida, se indujo a choque séptico por LPS [6].. Se tomo una muestra basal de sangre antes de la administración de LPS, después de la administración de este se tomaron muestras de sangre durante las siguientes 6 horas seguidas,

A. Manejo de muestras (sangre)

Las muestras de sangre (100 microlitros) son transportadas desde el laboratorio de medicina ESM-IPN en nitrógeno líquido a 77K, a esta temperatura se asegura la vitalidad celular de la muestras, así como el mantenimiento de las características estructurales [7]. Una vez en el laboratorio de espectroscopia fotoacustica, se toman aproximadamente 80 microlitros de muestra y se colocan dentro de la célula fotoacústica.

B. Medición de muestras por espectroscopía fotoacústica.

La fuente luminosa (lámpara de xenón) del espectrómetro fotoacústico pero a 700W, cuyo haz de luz se enfocó hacia un monocromador para barrer un rango de longitudes de onda de 350 nm a 800 nm, a una frecuencia fija de 17 Hz. Este haz modulado es enfocado a una fibra óptica la cual conduce este haz hasta la celda fotoacústica donde está la muestra, produciéndose el fenómeno fotoacústico. Las variaciones de presión en la celda debidas a la absorción de la luz modulada son detectadas por el micrófono incorporado en la celda y la señal de este amplificada por un amplificador lock in. Finalmente, una PC es utilizada para mostrar la señal fotoacústica como función de la longitud de onda de la luz incidente, generándose así los espectros de las muestras obtenidas a 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas para cada rata.

III. Resultados

La evolución de los espectros de absorción ópticos obtenidos por espectroscopia fotoacústica se muestran en las figuras 2.

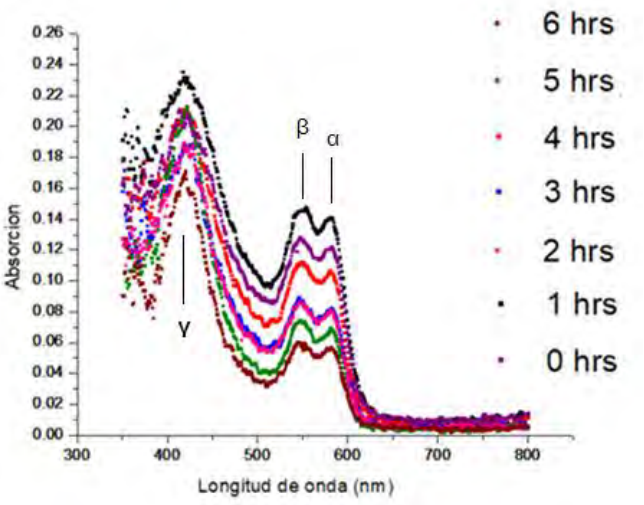


Figure 2.- Espectro del curso temporal de la absorción óptica.

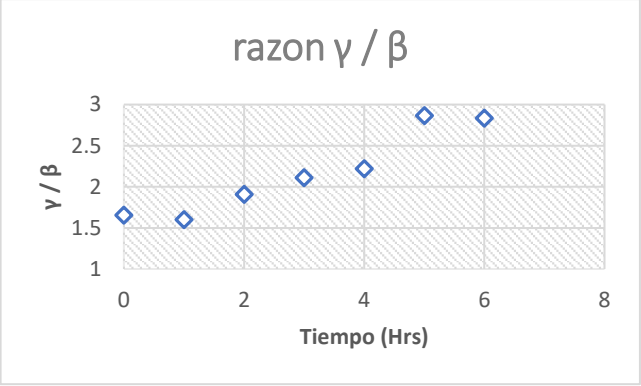
En el gráfico anterior se puede observar que a lo largo de las 6 horas las razones entre los picos γ / β y γ / α aumentan, lo que se corrobora en la Tabla 1, donde se muestran las razones específicas para estos picos.

SANGRE ENTERA GRUPO CONTROL

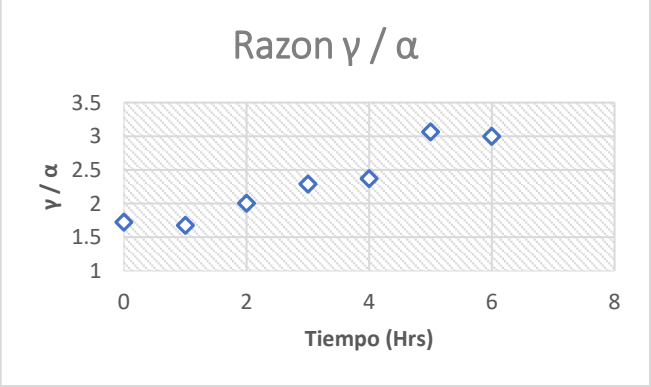
rata 1	tiempo	nm	Gamma	nm	betha	nm	alpha	gamma/betha	gamma/alpha
	0	413	0.21088	548	0.12737	582	0.12216	1.655648897	1.726260642
	1	417	0.23563	554	0.14731	583	0.14034	1.599551965	1.678993872
	2	422	0.21288	549	0.11165	581	0.10622	1.906672638	2.004142346
	3	425	0.1884	546	0.08928	582	0.0823	2.110215054	2.289185905
	4	418	0.18973	548	0.08558	583	0.08005	2.216989951	2.370143 66
	5	421	0.21299	547	0.07439	581	0.06951	2.86315365	3.06416343
	6	420	0.17173	546	0.0606	581	0.0573	2.833828383	2.997033159

Table. -1 razones de los picos γ/β y γ/α.

Los resultados de la tabla 1 se pueden observar de mejor manera en el siguiente gráfico.



Grafica 1. – razón entre los picos γ y β



Grafica 2.- razón entre los picos γ y α

Al analizar los espectros, se puede observar que estas razones aumentan conforme transcurre el tiempo, en consecuencia la concentración de hemoglobina disminuiría, lo cual está relacionado con la gravedad del choque. Esto demuestra la sensibilidad de la técnica.

IV. Conclusiones

Se observa que la relación de los picos γ / β y γ / α aumenta a lo largo del choque séptico, en consecuencia, se infiere que las concentraciones de hemoglobina disminuirían a lo largo del mismo. Por otro lado, la técnica de espectroscopía fotoacústica demostró ser una herramienta útil y sensible para los sistemas biológicos, que al interactuar la radiación (luz modulada) con las muestras de sangre nos dio resultados satisfactorios, gracias al análisis de los espectros de absorción ópticos de la sangre, fue posible determinar cómo varían las concentraciones de hemoglobina en la rata con choque séptico

Referencias

[1] H. C. Chow, "Theory of three-dimensional photoacoustic effect with solids," *J. Appl. Phys.*, vol. 51, no. 8, pp. 4053–4058, 1980.

[2] G. Gómez and R. Carlos, "Espectroscopia Fotoacústica : Una teoría antigua con nuevas," *Concienc. Tecnológica*, 2004.

[3] A. Cabrera Rayo, G. L. Hernández, G. L. Huerta, A. V. Ortiz, R. M. Reyes, and R. G. Gómez, "Mecanismos patogénicos en sepsis y choque séptico," *Med. Interna México Vol.*, vol. 24, no. 1, 2008.

[4] N. Sharawy, "Vasoplegia in septic shock: Do we really fight the right enemy?," *J. Crit. Care*, vol. 29, no. 1, pp. 83–87, 2014.

[5] J. L. González-Domínguez, C. Hernández-Aguilar, F. A. Domínguez-Pacheco, E. Martínez-Ortiz, A. Cruz-Orea, and F. Sánchez-Sinencio, "Absorption Peaks: α, β, γ and Their Covariance with Age and Hemoglobin in Human Blood Samples Using Photoacoustic Spectroscopy," *Int J Thermophys*, vol. 33, no. 33, 2012.

[6] F. Laszlo, B. J. Whittle, and S. Moncada, "Time-dependent enhancement or inhibition of endotoxin-induced vascular injury in rat intestine by nitric oxide synthase inhibitors.," *Br. J. Pharmacol.*, vol. 111, no. 4, pp. 1309–1315, 1994.

[7] "Congelar células." [Online]. Available: http://www.lavanguardia.com/estilos-de-vida/20131213/54395450254/congelar-celulas.html. [Accessed: 13-Dec-2017].

ISSN: 2594-1011

Síntesis y caracterización DRX y UV-Vis de catalizadores $VOCuO_x/TiO_2$-ZrO_2

F. Morales Anzures[1], P. Salinas-Hernández[1], F. Chávez-Rivas[2]
[1]Universidad del Istmo, Av. Universidad s/n, Barrio Sta. Cruz, Santo Domingo Tehuantepec, C. P. 70760, Oaxaca, México
[2]Departamento de Física, ESFM-Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
Teléfono (971) 522 40 50 Ext. 123: fmanzures@yahoo.com.mx

Resumen — **Se prepararon mediante el método de sol-gel de una etapa, óxidos mixtos de Vanadio-Cobre-Titania-Zirconio con una relación molar de TiO_2/ZrO_2 de 1:1, un contenido de vanadio de 12 % en peso y un contenido de cobre de 1, 3 y 5% en peso, también se preparo el óxido mixto Vanadio-Titania-Zirconio con contenido de vanadio de 12% en peso (sin cobre). Estos catalizadores se calcinaron a 400 °C y se caracterizaron por Difracción de rayos-X (XRD, por sus siglas en ingles) y espectroscopia UV-Vis de reflectancia difusa (DR). Los patrones de difracción del conjunto de muestras presentan escasa cristalinidad, es decir, son amorfos. El análisis UV-Vis sugiere la presencia de diferentes especies de iones V^{5+} y V^{4+} aislados en solución sólida y de iones Cu^{2+} aislados en solución sólida en el volumen del soporte TiO_2-ZrO_2. Los iones V^{5+} se caracterizan por bandas en la región de 350 a 550 nm, los iones V^{4+} por bandas débiles en la región de 600 a 750 nm y los iones Cu^{2+} por la banda de transiciones electrónicas d-d alrededor de 800 nm. La inclusión de iones de Vanadio y cobre en la matriz de TiO_2-ZrO_2 también se manifiesta por los cambios en la posición del borde de banda de los óxidos mixtos.**

Palabras Clave – **Sol-gel**, **Óxidos mixtos, cobre, vanadio, DRX, UV-Vis-DR.**

Abstract — **Vanadium-Copper-Titanium-Zirconium mixed oxides with a molar ratio of TiO_2/ZrO_2 of 1: 1, and vanadium content of 12% by weight, and copper content of 1, 3 and 5% by weight were prepared by sol-gel method of one-stage. The Vanadium-Titanium-Zirconium oxide mixed with vanadium content of 12% by weight (without copper) was also prepared. These catalysts were calcined at 400 °C and were characterized by X-ray diffraction (DRX) and UV-Vis diffuse reflectance (DR) spectroscopy. The diffraction patterns of the set of samples have little crystallinity, that is, they are amorphous. The UV-Vis analysis suggests the presence of different species of V^{5+} and V^{4+} ions isolated in solid solution and of Cu^{2+} ions isolated in the volume of the particles. V^{5+} ions are characterized by bands in the region of 350 to 550 nm, V^{4+} ions by weak bands in the region of 600 to 750 nm and Cu^{2+} ions by bands of *d-d* electronic transitions around 800 nm. The inclusion of Vanadium and copper ions in the TiO_2-ZrO_2 matrix is also manifested by changes in the band-edge position of the mixed oxides.**

Keywords — **Sol-gel, Mixed oxides, copper, vanadium, XRD, UV-Vis-DR.**

Este trabajo ha sido patrocinado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20180083 y por COFAA-IPN.

I. Introducción

Los óxidos de Vanadio se han usado ampliamente como catalizadores en varias reacciones de oxidación [1-3]. En la mayoría de los casos, para aumentar la actividad catalítica, el V_2O_5 es modificado combinándolo con óxidos de otros metales. Se han hecho intentos para determinar el papel de los aditivos en relación con las propiedades estructurales, electrónicas y fisicoquímicas de los catalizadores de V_2O_5 [1-4]. El V_2O_5 es un óxido ácido típico, por lo que se puede predecir que la adición de un óxido metálico modificará las propiedades ácido-base del sistema catalítico, lo cual puede conducir a un cambio en su actividad catalítica [3-4]. También se ha reportado en la literatura que el número, fuerza y naturaleza de los sitios ácidos superficiales de los catalizadores son afectados por su estructura, la cual se ve modificada por la temperatura de calcinación [5].

Los estudios termo-difracto-métricos muestran que en los óxidos mixtos de TiO_2-ZrO_2 preparados por el método sol-gel, la cristalización se lleva a cabo a tratamiento térmico arriba de 700 °C usando diferentes precursores con una relación de concentración metálica (1:1) de Ti y Zr [6,7].

Por otro lado, los estudios de RMN en estado sólido del óxido de vanadio en el óxido mixto TiO_2-ZrO_2 presentan especies de vanadio tetraédrico en forma polimérica a baja carga de vanadio y V_2O_5 amorfo en los catalizadores con alto contenido de vanadio [8].

En la literatura no hay reportes sobre sólidos mixtos Vanadio-Cobre-Titania-Zirconia preparados por el método sol-gel, por lo que, el objetivo de este trabajo es estudiar el efecto del contenido de Cu en el catalizador de Vanadio por medio de las técnicas espectroscópicas de DRX y UV-Vis-DR.

II. Metodología

A. Síntesis de catalizadores

Los catalizadores se prepararon mediante el método sol-gel empleando una concentración de precursor que corresponde a la relación molar Ti:Zr de 1:1 y concentración de Cu de 1, 3 y 5% en peso y concentración de Vanadio de 12% en peso. El n-butóxido de titanio ($Ti(O(CH_2)_3CH_3)_4$, pureza 97%, Aldrich) se mezcló con etanol en un matraz de reflujo y se dejó en agitación durante 2 h. Posteriormente, se añadió n-butóxido de zirconio ($Zr(O(CH_2)_3CH_3)_4$, pureza 76,80%, Strem Chemicals), junto con ácido nítrico (HNO_3,

pureza 66,3%, Reasol) para alcanzar pH 3. La solución resultante se dejó bajo agitación constante durante 24 h antes de agregar acetato de cobre (Cu $(CH_3COO)_2H_2O$, Aldrich) y/o acetilacetonato de vanadio $(CH_3COCH=C(O-)CH_3)_3V$ al 97 %, marca ALDRICH) en la cantidad requerida para obtener 12 % en peso de vanadio y la concentración de Cu deseada en el catalizador final. La suspensión se dejó en agitación durante 48 h, antes de comenzar el proceso de hidrólisis por adición gota a gota de 20 ml de H_2O en 100 ml de etanol. Los geles formados se secaron a 100 °C durante 24 h y luego se calcinaron a 400 °C por 24 h. Las muestras de $CuOxVO/TiO_2$-ZrO_2 resultantes se identifican a continuación como CxVTZ, donde x representa la concentración nominal de cobre en % en peso (x = 1, 3 y 5) y V representa la concentración nominal de vanadio de 12 % en peso. El material VO/TiO_2-ZrO_2 exento de cobre y concentración nominal de vanadio de 12 % en peso fue preparado con el mismo método y se etiqueta como VTZ. El material de referencia TiO_2-ZrO_2 exento de cobre y vanadio fue preparado con el mismo método y se etiqueta de aquí en adelante como TZ.

B Difracción de rayos X

Para determinar la cristalinidad y las fases cristalinas de los sólidos calcinados, se obtuvieron patrones de difracción en un difractómetro de rayos X D8 Advance marca Bruker AXS, acoplado a un tubo de rayos X de ánodo de cobre (radiación CuKα) bajo las siguientes condiciones: la configuración fue theta-theta, utilizando un monocromador gráfico, el equipo operó a 35 kV con un intervalo de 1s por punto, en un rango 2θ de 10 a 80 ° y un paso de 0.05.

B. Espectroscopia UV-Vis-DR

Los espectros de reflectancia difusa (UV-Vis-RD), se midieron a temperatura ambiente con un espectrofotómetro Varian Cary 100 (versión 9) equipado con una esfera integrante de 60 mm, en el intervalo de longitudes de onda de 200 a 800 nm, con un paso de 2 nm. $BaSO_4$ se utilizó como material de referencia. Los espectros UV-Vis-DR se convirtieron a la función Kubelka-Munk. La simulación de distribuciones Gaussianas de las diferencias de las figuras 3 y 4 para estimar la posición y concentración de la contribución de Vanadio en los catalizadores C1VTZ y C3VTZ se realizó con el software OriginPro8.0 (Origin Co., EE. UU.).

III. Resultados

A Difracción de rayos X

La Fig. 1 muestra que los patrones de difracción de rayos-X de los materiales VTZ, C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ, tratados a 400 °C son amorfos, esto está de acuerdo con los resultados de los estudios FTIR y DRX de Reddy et al. [9] quienes encontraron que los materiales soportados en TiO_2-ZrO_2, no cristalizan a temperaturas menores de 700 ºC. Además, no hay picos de difracción de las fases de CuO ó V_2O_5. En catálisis esto es muy importante, ya que indica que el óxido de Vanadio y las especies de Cu, están muy dispersos o con tamaño de partícula por debajo del límite de detección de la técnica DRX. Por último, se observa un pico ancho principal entre 20° y 40° para el conjunto de muestras, y un pico estrecho en 30° (correspondiente a la fase de titanato de zirconio) para la muestra C5VTZ.

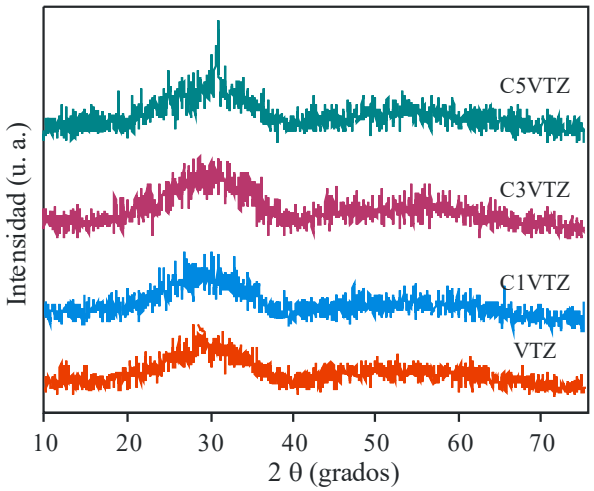


Fig. 1. Patrones de difracción de rayos X de VTZ y el sistema CxVTZ.

B Espectroscopia UV–Vis-DR

Los espectros UV-Vis-DR de los catalizadores VTZ, C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ se reportan en la Fig. 2, junto con el de la muestra TZ libre de cobre para comparación. El espectro UV-Vis de TZ (línea naranja) muestra dos máximos en 215 y 321 nm, que se pueden asignar a las transiciones de transferencia de carga del ligando al metal (LMCT por sus siglas en ingles ligand to metal charge transfer) $O^{2-} \rightarrow Ti^{4+}$ (o Zr^{4+}) [10].

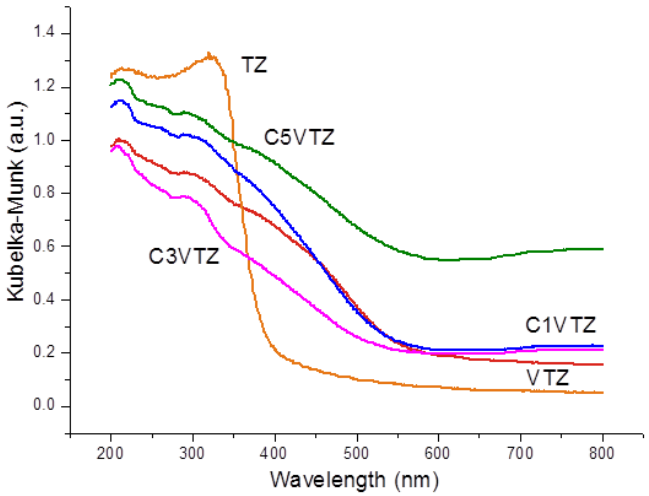


Fig. 2. Espectros DR UV-Vis de TiO_2-ZrO_2 (línea anaranjada), VTZ (línea roja), C1VTZ (línea azul), C3TZ (línea rosa) y C5TZ (línea verde).

El espectro UV-Vis de la muestra que contiene únicamente Vanadio, VTZ (línea roja) presenta dos máximos en 217 y

295 nm. También se observa una banda ancha entre 300 y 600 nm centrada aproximadamente en 450 nm que puede ser relacionada con la carga de Vanadio y una débil absorción remanente entre 550 y 800 nm.

Los espectros UV-Vis de las muestras C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ muestran una absorción intensa y similar con máximos también alrededor de 217 y 295 nm, y también muestran una banda ancha entre 300 y 600 nm, con un hombro alrededor de 450 nm similar a la observada en VTZ, la cual, consideramos que está relacionada con la carga de Vanadio. Por último, se observó una amplia absorción centrada a 795 nm, atribuida a las transiciones *d-d* de iones Cu^{2+} aislados en coordinación octaédrica distorsionada [11]. La intensidad general y relativa de los dos máximos son similares en las muestras C1VTZ y C5VTZ, mientras que en comparación con C3VTZ, este catalizador tiene una intensidad más baja, además, su contribución de carga de vanadio no es evidente ya que el hombro alrededor de 450 nm es muy débil.

Con la finalidad de determinar la posición e intensidades relativas de la especies de Vanadio en la región de 300 a 600 nm en los espectros UV-Vis de las muestras C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ, hemos realizado las diferencias de los espectros UV-Vis de estas muestras con sus correspondientes UV-Vis de las muestras sin vanadio sintetizadas por el mismo procedimiento de sol-gel de un paso, es decir, con las muestras C1TZ, C3TZ y C5TZ ya reportadas [10].

En la Fig. 3 se muestran los espectros UV-Vis de C1VTZ y C1TZ. La diferencia de estos dos espectros comprende dos regiones espectrales, la primera entre 200 y 340 nm que corresponde a los cambios de las contribuciones LCMT del oxigeno al Ti (o Zr) o al Cu o al V, la segunda región de esta diferencia de espectros UV-Vis corresponde a el área determinada entre 340 y 700 nm de estas dos mediciones, la cual ha sido reproducida con tres bandas gaussianas con máximos en 378, 430 y 512 nm (contribución del vanadio, ver Fig. 3)). La línea discontinua de esta figura es el resultado de restar a C1VTZ las bandas simuladas en 378, 439 y 512 nm.

En la Fig. 4 se muestran los espectros UV-Vis de C3VTZ y C3TZ. La diferencia de estos dos espectros corresponde a el área determinada entre 200 y 700 nm de estas dos mediciones. Esta región espectral ha sido reproducida con las cuatro bandas gaussianas mostradas en la figura 4 con máximos en 223, 288, 425 y 563 nm. La línea discontinua de esta figura es el resultado de restar a C3VTZ estas cuatro bandas.

En la Fig. 5 se muestran los espectros UV-Vis de C5VTZ y C5TZ. En este caso no realizamos cuantificación de la contribución del vanadio con la diferencia de espectros para carga de cobre de 5% debido a que la contribución de la banda de cobre en 750 nm no coincide en intensidad con y sin vanadio (que fue el criterio para poder simular con bandas gaussianas la contribución del vanadio en las muestras C1VTZ y C3VTZ), este resultado, de que las bandas en 750 nm no coincidan se puede interpretar suponiendo que para 5% de carga de cobre, este no se inserta en el soporte Titania-Zirconia con las mismas especies cuando está presente el vanadio, en cambio en las muestras con 1 y 3% de carga de cobre la contribución en los espectros UV-Vis de la banda de cobre alrededor de 750 nm es la misma en presencia o ausencia de vanadio ya que las intensidades de estas bandas coinciden, ver Figs. 3 y 4.

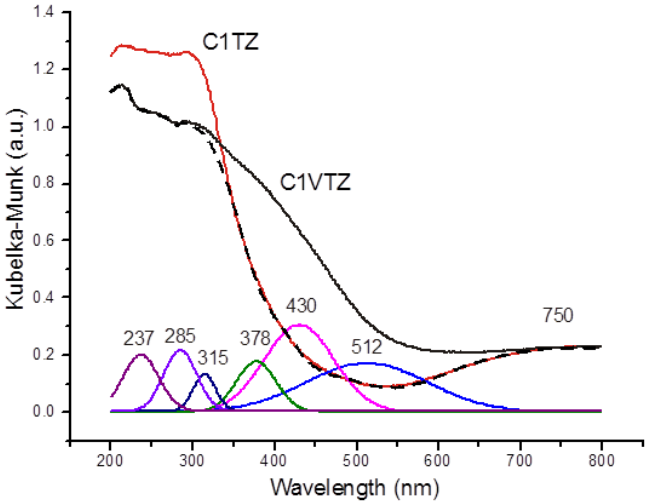


Fig. 3. Espectros UV-Vis-DR de: C1VTZ (línea negra), C1TZ (línea roja). La línea discontinua es el resultado de restar a C1VTZ las bandas en 378, 439 y 512 nm y de sumar las bandas en 237, 285 y 315 nm.

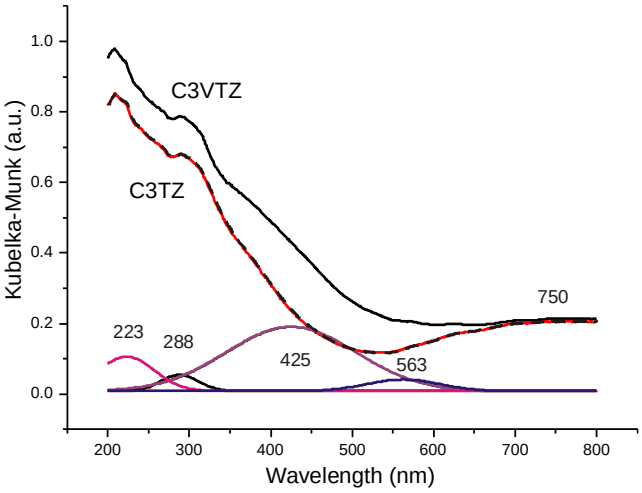


Fig. 4. Espectros UV-Vis-DR de: C3VTZ (línea negra), C3TZ (línea roja). La línea discontinua es el resultado de restar a C1VTZ las bandas en 223, 288, 425 y 563 nm.

Las bandas gaussianas con máximos en 378, 430 y 512 nm para la muestra C1VTZ, las bandas en 425 y 563 nm para la muestra C3VTZ, así como la región UV-Vis entre 350 y 550 nm de C5VTZ la atribuimos a iones aislados V^{5+} en el volumen en solución solida sustituyendo a iones Ti^{4+} o Zr^{4+} del soporte [12,13].

La Fig. 5 muestra un recuadro con una magnificación de 28 a las Absorbancias Kubelka-Munk de las muestras C1VTZ,

C3VTZ y C5VTZ en la región UV-Vis de 600 a 800 nm. Esta magnificación ha permitido encontrar tres bandas débiles para la muestra C3VTZ con máximos en 647, 690 y 745 nm, atribuimos estas bandas a transiciones *d-d* de iones aislados V^{3+}/V^{4+} en el volumen en solución solida sustituyendo a iones Ti^{4+} o Zr^{4+} del soporte [11,12,14].

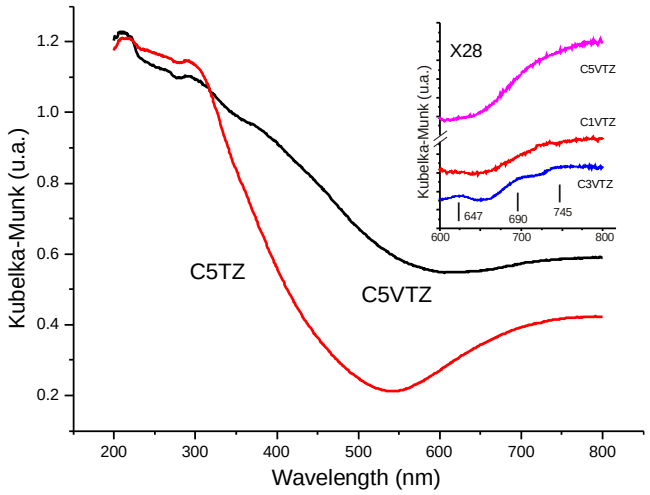


Fig. 4. Espectros UV-Vis-DR de C5VTZ (línea negra) y C5TZ (línea roja). En el recuadro se muestra la magnificación de la absorbancia Kubelka-Munk de los catalizadores C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ en la región de 600 a 800 nm.

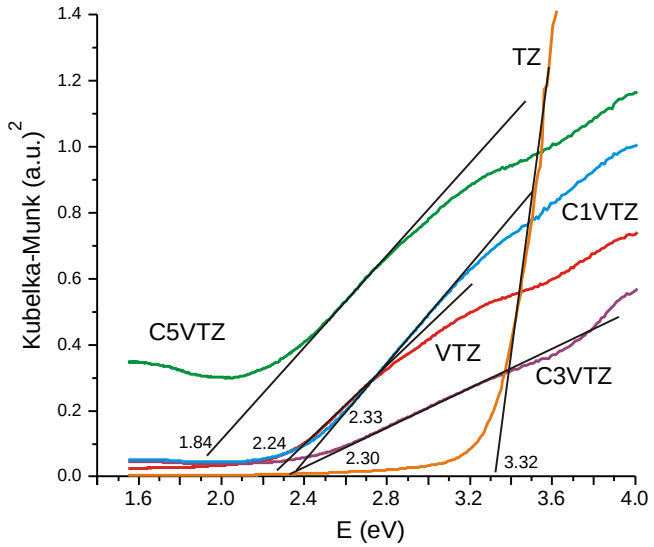


Fig. 4. Determinación de la banda prohibida *Eg* de TZ (línea anaranjada), VTZ (línea roja), C1VTZ (línea azul), C3TZ (línea morada) y C5TZ (línea verde), usando el método grafico de Tauc.

Otra información importante en relación con la caracterización de óxidos metálicos es la determinación de la energía del ancho de su banda prohibida (E_g), la cual se puede calcular de la posición del borde de absorción de las bandas LMCT, que en este estudio corresponden a los bordes de absorción de la banda en 321 nm para TZ y en 295 nm para VTZ, C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ (ver. Fig. 2). El borde de absorción se calculo por medio del método de Tauc [14] que consiste en graficar el cuadrado de la absorbancia Kubelka-Munk en función de la energía del fotón (en electrón voltios) y de este grafico extrapolar la región lineal del borde de absorción con el eje de energía E de los electrones, esta extrapolación da el valor de *Eg* de cada catalizador como se ilustra en la Fig. 4 [14]. Para la muestra de TZ, se encontró una E_g de 3.32 eV y de 2.24 eV para VTZ. Los valores de *Eg* para C1VTZ, C3VTZ y C5VTZ son 2.33, 2.30 y 1.84 eV respectivamente, observándose una disminución de la Eg con el incremento del contenido de Cu.

IV. Conclusiones

Se sintetizaron catalizadores de Vanadio soportados en TiO_2-ZrO_2 modificados con cobre por el método sol-gel. Los resultados de difracción de rayos-X (XRD) mostraron que los catalizadores de $CuOxVO/TiO_2$-ZrO_2 son amorfos cuando son calcinados a 400 °C. No se observaron líneas de difracción correspondientes a especies de cobre ni de vanadio, debido a que se encuentran altamente dispersos y fuertemente enlazado a la superficie del catalizador. Los resultados UV-Vis-DR proporcionaron más evidencia de la alta dispersión del Cobre y Vanadio tanto en la superficie como en el volumen.

Referencias

[1] A. L. Kustov, M. Yu. Kustova, R. Fehrmann, and P. Simonsen, "Vanadia on sulphated-ZrO_2, a promising catalyst for NO abatement with ammonia in alkali containing flue gases," *Appl. Catal. B: Environmental*, vol. 58, Iss. 1–2, pp. 97–104 99, June 2005.

[2] Rudra Pratap Singh, Miguel A. Bañares, and Goutam Deo, "Effect of phosphorous modifier on V_2O_5/TiO_2 catalyst: ODH of propane," *J. Catal.*, vol. 233, is. 2, pp. 388–398, July 2005.

[3] A. Mamorui, "The Oxidation Activity and Acid-base Properties of V_2O_5-based Binary Catalysts," *Bulletin of The Chemical Society of Japan*, vol. 50, no. 10, pp. 2579–2583, Oct. 1977.

[4] A. Erdohelyi, and F. Solymosi, "Oxidation of Ethane over Silica-Supported Alkali Metal Vanadate Catalysts," *Journal of Catalysis*, vol. 129, pp. 497–510, June 1991.

[5] L. L. Hench, and Jon K. West, "The sol-gel process," *Chem. Rev.*, vol. 90, pp. 33–72, January 1990.

[6] A. K. Bhattacharya, K. K Mallick, A Hartridge, and J. L Woodhead, "Sol gel preparation, structure and thermal stability of crystalline zirconium titanate microspheres," *J. Mater. Sci.*, vol. 31, is. 1, pp. 267–271, January 1996.

[7] E. L. Sham, M. A. G.Aranda, E. M. Farfan-Torres, J. C. Gttifredi, M. Martinez-Lara, and S. Bruque, "Zirconium Titanate from Sol–Gel Synthesis: Thermal Decomposition and Quantitative Phase Analysis," *J. Solid State Chem.*, vol. 139, is. 2, pp. 225–232, Sept. 1998.

[8] J. L. Lakshmi, N. J. Ihasz, and J. M. Miller, "Synthesis, characterization and ethanol partial oxidation studies of V_2O_5 catalysts supported on TiO_2–SiO_2 and TiO_2–ZrO_2 sol–gel mixed oxides," J. Molec. Catal. A: Chemical, vol. 165, is. 1–2, pp. 199–209, January 2001.

[9] B. M. Reddy, E. P. Reddy, and I. Ganesh, "Vapour phase synthesis of isobutyraldehyde from methanol and ethanol over mixed oxide supported vanadium oxide catalysts," Res. Chem. Intermed., vol. 23, is. 8, pp. 703–713, August 1997.

[10] F. Morales Anzures, F. Chávez Rivas, J. Hernández Ventura, P. Salinas Hernández, G. Berlier, and G. Zacahua-Tlacuatl.

"Spectroscopic characterization of CuOx/TiO_2-ZrO_2 catalysts prepared by a-step sol–gel method," Applied Catalysis A: General, vol. 489, pp. 218–225, January 2015.

[11] O. V. Komova, A. V. Simakov, V. A. Rogov, D. I. Kochubei, G. V. Odegova, V. V. Kriventsov, E. A. Paukshtis, V. A. Ushakov, N. N. Sazonova, and T. A. Nikoro, "Investigation of the state of copper in supported copper–titanium oxide catalysts," J. Mol. Catal. A: Chemical, vol. 161, is. 1–2, pp. 191–204. Nov. 2000.

[12] L. G. Devi, B. N. Murthy, and S. G. Kumar, "Photocatalytic activity of V^{5+}, Mo^{6+} and Th^{4+} doped polycrystalline TiO_2 for the degradation of chlorpyrifos under UV/solar light," Journal of Molecular Catalysis A: Chemical, vol. 308, is. 1– 2, pp. 174–181, August 2009.

[13] S. Miao, D. Ma, Q. Zhu, H. Zheng, G. Jia, S. Zhou, and X. Bao, "On the Role of Vanadia Species for VO_x/SiO_2 in the Selective Oxidation of Methane," Journal of Natural Gas Chemistry, vol. 14, pp.77–87, 2005.

[14] L. J. Burcham, G. Deo, X. Gao, and I. E. Wachs, "In situ IR, Raman, and UV-Vis DRS spectroscopy of supported vanadium oxide catalysts during methanol oxidation," Topics in Catalysis, vol. 11/12, no. 1–4, pp. 85–100, April 2000.

ISSN: 2594-1011

Cinemática y análisis de imágenes directas en diferentes longitudes de onda del par de galaxias en interacción Arp 82 (NGC2535/36)

Edgar Sandoval-Trejo, Isaura Fuentes-Carrera[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015
E-mail: esandovalt1100@alumno.ipn.mx, isaura@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se presentan observaciones de la emisión de Hα del par de galaxias en interacción Arp 82 (NGC 2535, NGC 3536), usando el telescopio de 2.1 del OAN-SPM con el interferómetro Fabry-Pérot de barrido PUMA. A partir de estas observaciones se calculó el mapa de velocidades del par, varios parámetros cinemáticos y la curva de rotación de ambas galaxias. El mapa de velocidades muestra evidentes perturbaciones en ambas galaxias. Además se realizó un análisis comparativo en diferentes longitudes de onda.**

Palabras Clave – **campo de velocidades, galaxias, interacción,**

Abstract — **We present observations of the Hα emission of the interacting galaxy pair Arp 82 using the 2.1m telescope of the OAN-SPM with the scanning Fabry-Perot interferometer PUMA. From these observations the velocity field, various kinematic parameters and the rotation curve were derived. The velocity field shows important perturbations on both galaxies. In addition a comparative analysis between different wavelengths was done.**

Keywords — **astrophysics, galaxies, interaction, kinematics**

I. Introducción

Las galaxias en interacción representan un segmento de la vida de las galaxias. Hasta hace 30 años se pensaba que las interacciones, colisiones y fusión de galaxias eran procesos interesantes pero raros, actualmente son considerados procesos muy importantes en la formación y evolución galáctica.

Entre 1840 y 1850 Lord Rosse inicia el estudio de objetos nebulosos dobles en los cuales observaba extensiones filamentosas y puentes de material entre ambos objetos. En 1920 Pease [1] realizó el primer catastro fotográfico de estos sistemas binarios y múltiples. Holmberg [2] [3] señala la importancia de las fuerzas de marea gravitacionales entre las galaxias, indicando que las galaxias a lo largo de su vida pueden sufrir roces, colisiones y fusiones entre ellas. Durante los encuentros, las galaxias interactuantes invierten parte de su energía orbital en deformarse; las órbitas pueden volverse más pequeñas hasta que las galaxias chocan y eventualmente se fusionan.

En 1956, Zwicky [4] realiza un catastro sistemático fotográfico y espectroscópico donde sugiere que los brazos de las galaxias espirales son debidos a filamentos creados durante la interacción y que una vez que la galaxia sigue girando los filamentos se enrollan formando los brazos. Tiempo después, Voronstov-Velyaminov en 1958 [5] observó que tanto los "brazos" como las "colas" muestran la misma composición que el resto de la galaxia, pero ligeramente azuladas. Por otro lado, en 1969 Arp [6] presentó la hipótesis que sugería que las galaxias compañeras eran el resultado de material expulsado desde la galaxia progenitora. Además, sugería que la expulsión de material era el mecanismo que formaba los brazos espirales.

A lo largo de la historia han surgido diferentes propuestas para clasificar la interacción de galaxias. En 1972 Karachentsev [7] da un criterio para determinar cuándo un par de galaxias se considera un sistema aislado, así como un criterio de selección según la morfología del par. Solomon y Sage [8] en 1988 establecen un criterio para clasificar la intensidad de la interacción del sistema y su cinemática en cinco tipos: galaxias acompañantes con velocidad relativa entre galaxias de al menos 10,000 km/s dentro de un diámetro de $10D_{25}$[1]; galaxias acompañantes con velocidad relativa menor a 10,000 km/s sin perturbaciones morfológicas dentro de $10D_{25}$; galaxias acompañantes dentro de $5D_{25}$ con velocidad relativa menor a 10,000 km/s que muestren perturbación morfológica que no sean puentes ni colas; galaxias con puentes o colas debidas a fuerzas de marea y galaxias en proceso de fusión. Amram [9] en 1991 clasifica las interacciones en fuertes y débiles, es decir, par de galaxias con interacción fuerte que terminan por fusionarse y par de galaxias con interacción débil que muestran secuelas del encuentro como deformaciones morfológicas, brotes de formación estelar, etc., pero que no termina por fusionarse.

Las imágenes en diferentes bandas del espectro electromagnético nos dan información sobre las diferentes componentes estructurales de la galaxia y en cada imagen se puede obtener información de cómo la interacción modifica cada estructura. Comparaciones de estas imágenes con el

Agradecimientos
E. S-T agradece beca de maestría CONACYT
I. F-C. agradece al proyecto SIP-IPN20181136

[1] Diámetro al cual se alcanza una magnitud de 25 mag

mapa de emisión monocromática (en este caso Hα) y el campo de velocidades a lo largo de la línea de visión ayudan a determinar la existencia de cambios drásticos en la morfología de las galaxias [10] [11], y en el caso de las galaxias en interacción este análisis permite realizar hipótesis sobre el encuentro.

Imágenes en la banda del óptico (350-900 nm) y el infrarrojo cercano (*NIR* por sus siglas en inglés, 806-3450 nm) de galaxias en interacción muestran que parte de la formación estelar es inducida [12] [13]. Las imágenes en infrarrojo permiten la detección de estructuras galácticas mejor definidas, ya que en esa región del espectro electromagnético la luz sufre de menor dispersión y absorción por parte del polvo. Además, imágenes en el infrarrojo permiten detectar para algunas galaxias estructuras tipo barra que parecieran atravesar el núcleo de la galaxia. Imágenes en ultravioleta y sus respectivos mapas son importantes para conocer los procesos de formación estelar joven (estrellas calientes tipo O y B), ya que en varios pares de galaxias que se encuentran interactuando o fusionándose se observan "nudos" de formación estelar y muchos de estos nudos son los progenitores de galaxias enanas de marea. Imágenes en radio de longitud de onda de 21 cm nos permiten identificar las regiones de nubes moleculares de hidrógeno que muy posiblemente se conviertan en regiones de formación estelar.

II. OBSERVACIONES Y REDUCCIÓN DE DATOS

A. Observaciones

Las observaciones de Arp 82 fueron realizadas la noche del 23 de enero del 2015 con el telescopio de 2.1m en el Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir en su modalidad de f/7.5, usando el interferómetro Fabrý-Pérot de barrido PUMA.

Se usó un detecto CCD Marconi2 de 2048x2048. Con la finalidad de mejorar la señal se aplicó un bin[2] de 4 en ambas dimensiones espaciales, resultando en una imagen con un formato de 512x512 pixeles con una resolución espacial de 1.27" /pixel. Con la finalidad de aislar la línea de emisión de Hα corrida al rojo, se usó un filtro de interferencia centrado en 6690Å con un ancho equivalente a altura media (FWHM por sus siglas en inglés) de 91Å. El interferómetro utilizado es un ET-50 fabricado por Queensgate Instruments, con un rango espectral libre de 20.38Å (908.2 km/s) para Hα, y una resolución espectral de 0.43Å (19.32 km/s) en cada uno de los 47 canales barridos. El tiempo de exposición total fue de 94 minutos (120 segundos por canal), obteniendo así un cubo de datos de la emisión de Hα del objeto, al que llamamos cubo objeto. Para obtener el cubo de calibración se usó una lámpara de neón cuya emisión está en 6598.95Å, y se realizaron exposiciones de 1 segundo por canal y un filtro centrado en 6607Å con un FWHM de 89Å.

B. Reducción de datos

La reducción de datos se realizó usando el software ADHOCw. Al cubo objeto se le realizaron las correcciones estándar: corrección de velocidad heliocéntrica, eliminación de rayos cósmicos y substracción de *bias*[3]. Las estrellas de campo sirvieron para alinear cada uno de los canales del cubo objeto. Una vez realizadas las correcciones se calibró el cubo objeto en longitud de onda usando el cubo de calibración; a este cubo se le llamó cubo lambda. Aplicando un suavizado espectral Gaussiano (σ = 38.6 km/s) al cubo lambda se obtuvo el cubo suavizado espectralmente.

A través de proceso de barrido, cada pixel tiene el valor del flujo de cada uno de los 47 canales. El perfil de este flujo contiene información de la emisión monocromática de Hα, y la emisión del continuo del objeto. Debido a que la emisión de la línea de Hα está asociada a procesos físicos térmicos, el perfil de emisión debe tener forma Gaussiana. El software UNIV nos permite obtener el mapa de velocidades, monocromático y del continuo, a partir de un cubo de datos, al realizar un ajuste Gaussiano a los perfiles de cada pixel y obtener los parámetros de cada perfil. Este procedimiento se realizó para el cubo lambda y el cubo suavizado, obteniendo sus respectivos mapas.

Utilizando los mapas de velocidades de ambos cubos y el software COMBI, se construyó un mapa de velocidades de resolución variable. En este software el usuario asigna el nivel de importancia de los diferentes mapas, y el software tomará la información de los pixeles del mapa de velocidades de mayor importancia y escribirá esta información en el mapa de resolución variable, después el software analiza la información de los pixeles del mapa de velocidades que sigue en importancia, si el pixel correspondiente en el mapa de velocidades de resolución variable ya tiene algún valor asignado, preserva ese valor, en caso contrario asigna el nuevo valor. Este proceso se repite para los siguientes mapas de velocidades de menor importancia. Para este trabajo el mapa de velocidades del cubo lambda es el de mayor importancia.

[2] La información contenida en pixeles contiguos del detector es almacenada en un solo pixel de la imagen. La cantidad de pixeles contiguos considerados depende del valor (bin) que asigna el usuario.

[3] El detector contribuye con una cantidad de cuentas en cada pixel debido a la corriente intrínseca.

Fig. 1 Imagen del par de galaxias Arp 82 compuesta de los filtros g', r' e i' del censo SDSS. NGC 2535 está ubicada al centro de la imagen, NGC está ubicada en la esquina inferior izquierda.

III. ARP 82: NGC 2535 Y NGC 2536

Arp 82 es un par de galaxias en interacción clasificada como tipo M51 por la base de datos NED [14] (ver Fig. 1). Observado y registrado por primera vez en 1887 por Stephan [15]. Posteriormente fue catalogado en 1959 por Vorontsov-Velyaminov [16] y en 1966 por Arp [17]. Algunos trabajos han incluido a este par con la finalidad de realizar catastros de galaxias en interacción. El primer análisis de este par lo realizó en 1969 Arp [18] utilizando rendija larga, con el fin de determinar el redshift en diferentes cúmulos de ambas galaxias. En este análisis señala que la galaxia compañera (NGC 2536) tiene un brillo superficial mayor a la galaxia principal (NGC 2535), además de no mostrar un gradiente de velocidades típico de movimientos rotacionales, lo que sugiere que existen movimientos no rotacionales importantes en la compañera. Además, observa la existencia de filamentos luminosos que conectan a la galaxia compañera con la galaxia principal, lo que soportaba su hipótesis en la cual las galaxias compañeras eran eyectadas de la galaxia progenitora. En la actualidad se sabe que estos filamentos son la consecuencia de la interacción entre las galaxias. En este trabajo Arp también determina un módulo de distancia del par de galaxias de m-M = 33.0 mag, lo cual ubica al sistema a 39.8 Mpc. El valor actual corregido tiene un valor de m-M = 33.96 mag, lo cual ubica al sistema a 61.9 Mpc.

Tabla 1. Parámetros de NGC 2535 y NGC 2536.

	NGC 2535	NGC 2536
Coordenadas (J2000)[a]	α = 8h 11m 13.48s δ = +25º 12' 24.4''	α = 8h 11m 15.92s δ = +25º 10' 45.73''
Morfología[b]	SA(r)c pec	SB(rs)c pec
Clase luminosa[a]	5.0	5.0
m_B (mag)[c]	13.30 ± 0.08	14.73 ± 0.03
D_{25} (arcmin)[c]	1.29 ± 0.03	0.87 ± 0.06
Distancia (Mpc)[a]	61.9	62.2
Velocidad heliocéntrica (km/s)	4110 ± 30[d] 4110 ± 10[e] 4115 ± 10[f]	4200 ± 30[d] 4085 ± 10[e] 4120 ± 10[f]
PA (º)	157 ± 5[e] 150 ± 2[f]	38 ± 5[e] 38 ± 2[f]
Inclinación (º)	43 ± 10[e] 55 ± 5[f]	49 ± 5[e] 50 ± 5[f]

[a] Base de datos NED
[b] de Vaucouleurs [19]
[c] Base de datos LEDA [33]
[d] Arp [18]
[e] Amram [20]
[f] Este trabajo

NGC 2535 es una galaxia tipo SA(r)c pec y clase de luminosidad 5.0 [19]. Arp [18] determina la velocidad heliocéntrica en 4110 km/s, y usando el valor del módulo de distancia calcula su luminosidad en M_B = -19.5 mag, y un diámetro de 50 kpc. Amram [20], utilizando la técnica de interferometría de barrido Fabry-Perot, determina el valor de la velocidad heliocéntrica de 4095 ± 10 km/s. Además estima una masa para esta galaxia de 3 x 10^{10} $M_\odot$; este valor lo obtiene interpolando el valor de la masa obtenida usando el método de Lequeux [21], y los valores de la relación masa-luminosidad obtenidos a partir de los valores de luminosidad medidos por Botinelli [22] y Peterson y Shostak [23]. NGC 2536 es una galaxia tipo SB(rs)c pec, y clase de luminosidad 5.0 [19]. Amram [20] determina una velocidad heliocéntrica de 4085 ± 10 km/s, y utilizando el método de Lequeux [21] y la relación masa-luminosidad con el valor calculado de luminosidad por Peterson y Shostak [23], estima una valor de la masa de 2.7 x 10^9 $M_\odot$. La tabla 1 lista los parámetros principales de cada galaxia.

IV. MAPA DE VELOCIDADES Y CURVA DE ROTACIÓN

A. Imagen monocromática

En Fig. 2 se muestra la imagen monocromática de Hα del par obtenida a partir de las observaciones de PUMA. Las regiones HII de NGC 2535 se observan principalmente en la parte central y a lo largo del brazo norte, y en forma de cúmulos. El brazo sur presenta mucha menor cantidad de estos cúmulos, y se encuentran ubicados más allá del disco central a diferencia del brazo norte donde los cúmulos son visibles desde el comiendo del brazo (ápice este). Ambos brazos no presentan gradiente en la intensidad, e incluso el brazo norte presenta una región HII muy brillante en lo que

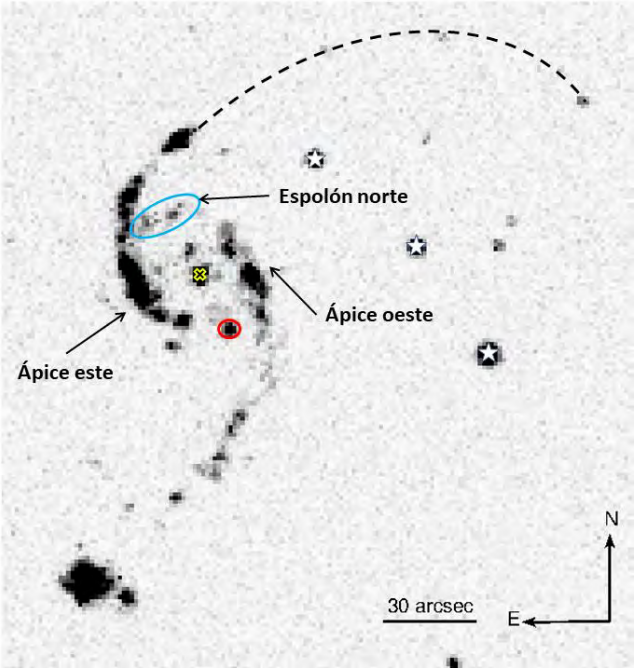


Fig. 2 Imagen monocromática de la emisión de Hα. La cruz amarilla ubica al centro fotométrico de esta imagen, es decir, el pixel más brillante. La línea punteada traza la longitud del brazo norte. Las estrellas de campo se indican con un símbolo de estrella blanca. El círculo rojo indica la ubicación de una estrella de campo dentro del oval de la galaxia, y que puede confundirse con un cúmulo de esta.

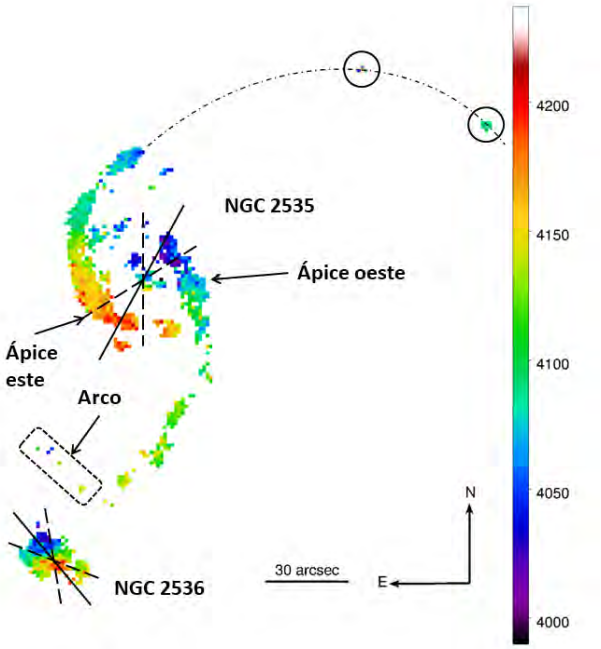


Fig. 3 Mapa de velocidades del par de galaxias. La línea continua en ambas galaxias indica la posición del eje dinámico mayor y las líneas punteadas el sector de los pixeles para calcular la curva de rotación. La línea curva punteada traza la longitud del brazo norte. Los círculos ubican regiones HII del brazo norte. La escala de colores representa las velocidades asociadas en km/s.

pareciera ser el final de este brazo, sin embargo, este brazo es aún de mucha mayor longitud, extendiéndose hasta casi 134" desde el centro de la galaxia (cruz amarilla) pero con una intensidad mucho menor. La línea punteada traza la extensión de este brazo. En las observaciones de Amram [18], él detecta mayor emisión de la extensión de este brazo, posiblemente debido a un mayor tiempo de exposición por canal (250 s) en sus observaciones. Esta extensión del brazo también es visible en ultravioleta (ver sección V). Se observa una estructura tipo espolón en la parte interna del brazo norte, mientras que en el brazo sur no se detecta señal de una estructura similar. En la región interna no es distinguible la forma ovalada que es observable en la imagen compuesta en el óptico (Fig. 1), ni en otras longitudes de onda (ver sección V). Tampoco se detecta la barra, que es observable en la Fig. 1 y en las imágenes en cercano y mediano infrarrojo (ver sección V). NGC 2536 se observa como una gran región de HII muy extendida, acompañada de un cúmulo HII en dirección oeste. No se distinguen los brazos "clásicos" esperados dada su morfología. Esta peculiaridad puede ser el resultado de la interacción, la cual haya deshecho las partes externas de los brazos, o sea efecto de la inclinación. Detectamos la mayoría de las regiones HII detectadas por Hancock [24]; en su trabajo realiza observaciones en infrarrojo con el fin de determinar la tasa de formación estelar del par, así como calcular la masa y edad de cada cúmulo.

B. Mapa de velocidades

En Fig. 3 se muestra el mapa de velocidades del par y las velocidades asociadas.

La región central de NGC 2535 muestra perturbaciones si se compara con un mapa de velocidades de una galaxia aislada. El eje dinámico mayor es bastante simétrico respecto a las partes que se acercan y se alejan (noroeste y sureste, respectivamente). El brazo norte muestra un gradiente de velocidades a partir del ápice este hacia las partes externas. En la parte más externa del brazo norte se observa emisión de Hα en dos regiones en las que Hancock [24] detecta cúmulos de formación estelar. Las velocidades en estas dos regiones presentan velocidades similares a las partes más internas de este mismo brazo. A lo largo del brazo sur, desde el ápice, no se observa un gradiente de velocidades y en realidad presenta una velocidad casi constante como lo menciona Amram [20]. Kaufman [25] realiza observaciones en radio (21 cm) en busca de hidrógeno molecular y atómico, en el reporta la existencia de una estructura que inicia en la parte externa del brazo sur y traza un arco que conecta a mitad del brazo norte. En el mapa de velocidades se observa señal de Hα de esta estructura en el extremo del brazo sur, lo que contradice la hipótesis de Kaufman [25] respecto que esta estructura está compuesta únicamente por gas. Hancock [24] también detecta este arco en imágenes en ultravioleta.

ISSN: 2594-1011

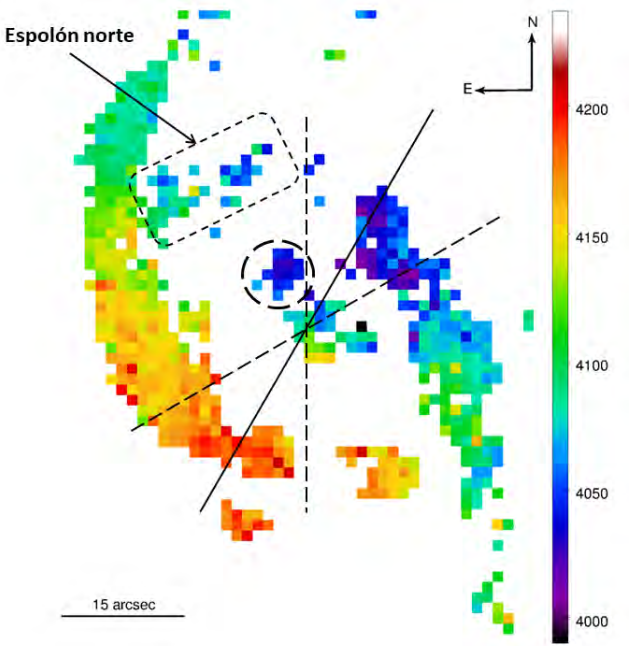


Fig. 4 Acercamiento al mapa de velocidades de NGC 2535. La línea continua indica la posición del eje dinámico mayor y las líneas punteadas el sector de los pixeles para calcular la curva de rotación. El círculo indica la ubicación de una región HII. La escala de colores representa las velocidades asociadas en km/s.

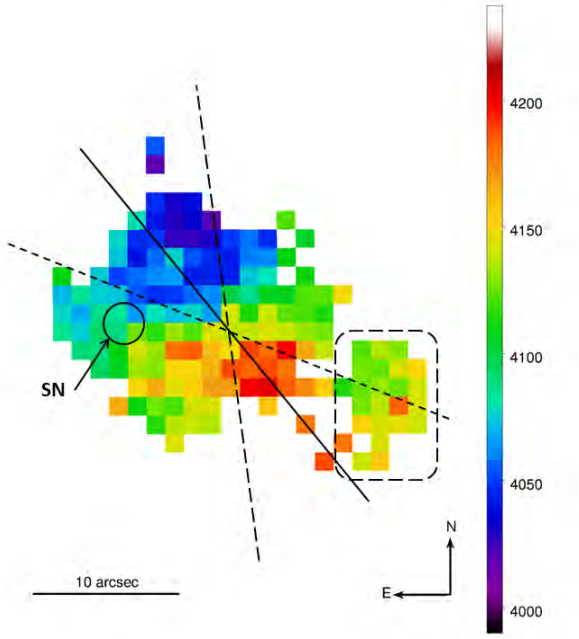


Fig. 5 Acercamiento al mapa de velocidades de NGC 2536. La línea continua indica la posición del eje dinámico mayor y las líneas punteadas el sector de los pixeles para calcular la curva de rotación. El círculo indica la posición de la Supernova detectada por Xu y Gao en 2014. El rectángulo punteado indica la ubicación de una región HII. La escala de colores representa las velocidades asociadas en km/s.

En un acercamiento a la parte interna de NGC 2535 (ver Fig. 4), se observan perturbaciones importantes en el campo de velocidades en el centro de esta galaxia. En esta región no parece existir un claro gradiente de velocidades que siga el clásico patrón en V [9]. Existe una región de HII en dirección noreste muy cerca al centro de la galaxia que presenta velocidades menores a lo esperado en un mapa de velocidades sin perturbaciones. La falta de un gradiente de velocidades en esta región pueda ser originado por la existencia de una estructura barrada, que es observable en Fig. 1 y en imágenes in infrarrojo (ver sección V). En Fig. 4 también es observable el espolón norte, el cual presenta un gradiente de velocidades mayor al observado en la misma región del brazo. Las velocidades de la porción más cercana al brazo presentan valores similares a las velocidades del brazo, mientras que la porción más alejada presenta valores de velocidad más similares a las velocidades en la parte central de la galaxia.

NGC 2536 (ver Fig. 5) muestra un campo de velocidades bastante perturbado comparado al de una galaxia aislada. El eje dinámico no se muestra simétrico respecto a la parte que se aleja y que se acerca (lado suroeste y noreste, respectivamente). La parte que se aleja se observa desplazada hacia el norte, mientras que la parte que se aleja permanece sobre el eje dinámico. Por simple observación uno pensaría que el eje dinámico está mal posicionado y que el eje debería ir de la región que se acerca a la que se aleja, pero si se posiciona el eje dinámico de esta forma la curva de rotación presenta bastante dispersión y sin simetría, de tal forma que la posición del eje dinámico que se presenta en la Fig. 5 es con la que trabajaremos. La región HII ubicada al suroeste del centro de la galaxia (rectángulo punteado en Fig. 5) presenta valores en las velocidades que no siguen el gradiente que uno esperaría para las partes externas de la galaxia, aunque sí presenta un ligero gradiente en la misma dirección que el eje dinámico. La parte sureste de la galaxia presenta velocidades casi constantes a lo largo de una línea paralela al eje dinámico. En esta región se detectó una supernova en el año 2014 por Xu y Gao [26], posteriormente en ese mismo año se confirmó la existencia de esta supernova en un análisis espectroscópico realizado por Zhang y Wang [26], en el cual calcularon vientos de Hα alrededor de 12600 km/s. Es claro que la presencia de este objeto puede modificar en cierto grado el mapa de velocidades, y un análisis de los perfiles de Hα en esta región está en proceso.

C. Curvas de rotación

Los procesos de interacción de galaxias perturban a cada una de las galaxias al introducir movimientos no circulares en los campos de velocidades, sin embargo en las etapas tempranas de la interacción, uno puede asumir que las partes internas de ambas galaxias no se encuentran fuertemente perturbadas hasta cierto radio.

La curva de rotación de cada galaxia se calculó a partir del mapa de velocidades, considerando pixeles dentro de

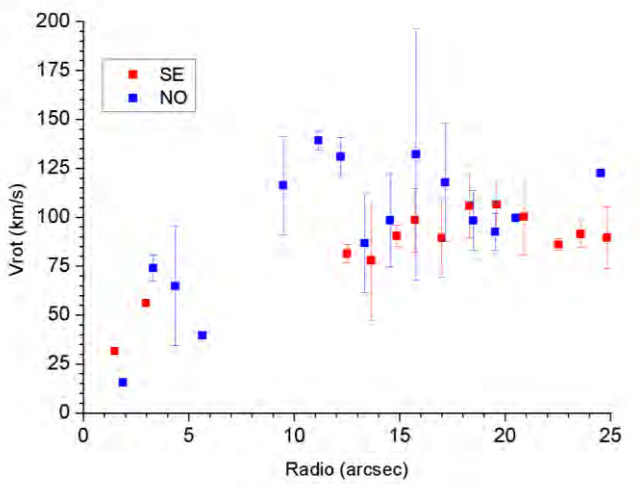


Fig. 6 Curva de rotación de la parte interna de NGC 2535. Los cuadros azules y rojos indican la parte noroeste y sureste, respectivamente. El valor de cada cuadro es el valor promedio de los pixeles a un radio dado; las barras de error representan la desviación estándar de estos promedios.

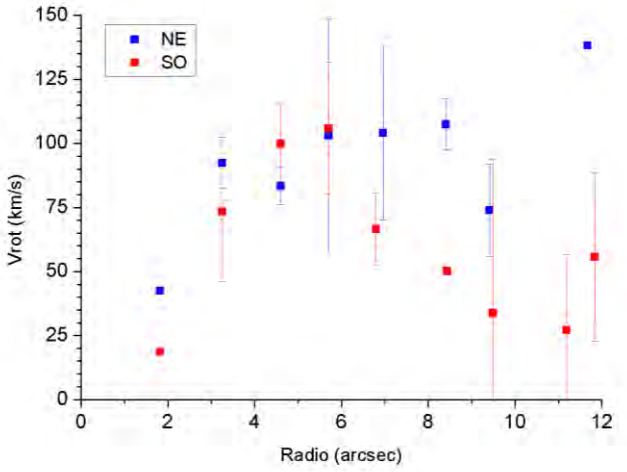


Fig. 7 Curva de rotación de la parte interna de NGC 2536. Los cuadros azules y rojos indican la parte noreste y suroeste, respectivamente. El valor de cada cuadro es el valor promedio de los pixeles a un radio dado; las barras de error representan la desviación estándar de estos promedios.

cierto sector angular a lo largo del eje mayor. Determinar la curva de rotación de una galaxia involucra parámetros cinemáticos como la velocidad heliocéntrica V_{sys}, la inclinación *i* del plano de la galaxia respecto del plano del cielo, las coordenadas del centro cinemático, y el PA. Estos valores se escogen de cierta forma que la curva de rotación sea simétrica y que no presente mucha dispersión en cada lado de la curva. En Fuentes-Carrera [27] se explicación detalladamente de la forma en que se obtiene la curva de rotación a partir del campo de velocidades.

a) NGC 2535

La curva de rotación de NGC 2535 fue calculada considerando pixeles del campo de velocidades dentro de un sector angular de 30º hacia ambos lados del eje dinámico. El centro fotométrico de esta galaxia es el pixel más brillante en la imagen del monocromático, con coordenadas físicas α_{J2000} = $8^h11^m13.53^s$ y δ_{J2000} = +25º12'25.97''. El centro cinemático se busca en los alrededores del centro fotométrico tal que la curva de rotación presente la menor dispersión. Para esta galaxia el centro cinemático coincide con el centro fotométrico. Los parámetros cinemáticos usados que producen una curva de rotación simétrica y con poca dispersión son V_{sys} = 4115 km/s, PA = 150º, *i* = 55º. La curva de rotación se muestra en Fig. 6 hasta un radio de 20", debido a que más allá de este punto inician los brazos, los cuales presentan claras perturbaciones como se comentó en la sección anterior. En las partes más internas tenemos poca información posiblemente a la presencia de polvo (ver sección V) que absorbe la luz de Hα. A pesar de tener poca información se observa un incremento en la velocidad de rotación, sin embargo, la parte noroeste sufre de una caída en los valores de velocidad. La curva de rotación del lado noroeste continua a partir de ~10" mientras que para el lado sureste continua a partir de ~12.5". El lado noreste alcanza un máximo en 139 km/s pero alcanzado este punto vuelve a sufrir una caída muy abrupta de velocidades hasta 87 km/s. pasando este mínimo local vuelve a subir de forma abrupta y alcanzando un valor de velocidad de rotación de 132 km/s, y de nuevo otra caída en las velocidades. Por otro lado el brazo sureste también presenta oscilaciones a partir de ~12.5". A pesar de las oscilaciones, la tendencia general de este lado es de incrementar la velocidad alcanzando un máximo de ~106 km/s. más allá de 22"se observa un leve decremento en los valores de la velocidad de rotación. En resumen, ambos brazos presentan oscilaciones al parecer de tipo sinusoidal, pero el lado noreste presenta una mayor oscilación que el lado sureste.

b) NGC 2536

La curva de rotación de NGC 2536 fue calculada considerando pixeles del campo de velocidades dentro de un sector angular de 30º hacia ambos lados del eje dinámico. El centro fotométrico de esta galaxia es el pixel más brillante en la imagen monocromática de Hα, con coordenadas físicas α_{J2000} = $8^h11^m16.20^s$ y δ_{J2000} = +25º10'50.36". El centro cinemático que minimiza la dispersión de velocidades de la curva de rotación se ubica 4.57" en dirección suroeste con coordenadas físicas α_{J2000} = $8^h11^m15.92^s$ y δ_{J2000} = +25º10'47.83''. Los parámetros cinemáticos usados que reproducen la curva de rotación con más simetría y con poca dispersión son V_{sys} = 4120 km/s, PA = 38º, *i* = 50º. La curva de rotación se muestra en Fig. 7 hasta un radio de 12", lo cual cubre toda la parte central de

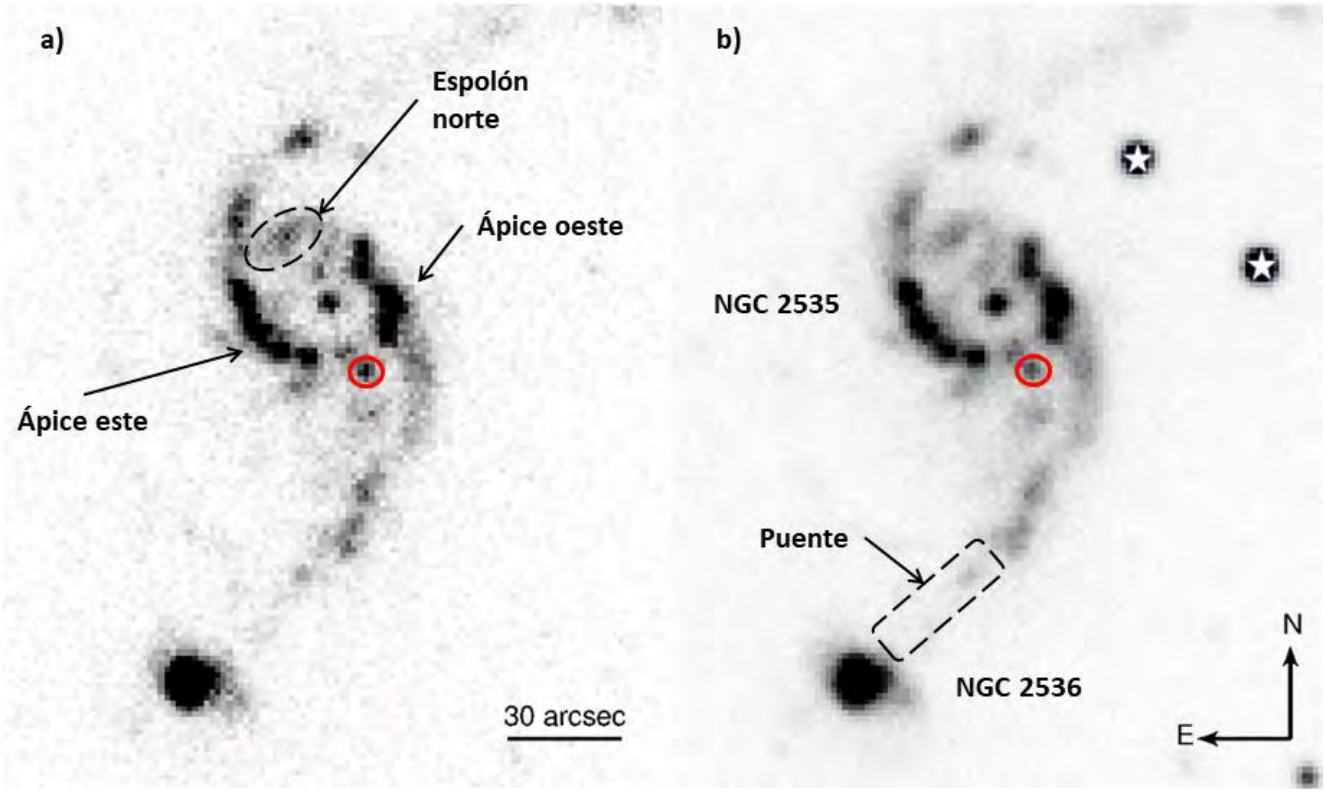


Fig. 8 Imágenes en ultravioletas tomadas por el telescopio GALEX. a) imagen en lejano ultravioleta (FUV, por sus siglas en inglés). Un ovalo con línea punteada indica la posición del espolón norte. b) imagen en cercano ultravioleta (NUV, por sus siglas en inglés). el rectángulo con línea punteada indica la posición del puente que conecta el brazo sur de NGC 2535 con la galaxia NGC 2536. Las estrellas de campo se indican con un símbolo de estrellas. En ambas imágenes el círculo rojo indica la ubicación de una estrella de campo que no debe confundirse con una región HII de la galaxia.

la galaxia y una pequeña porción de la región HII que se ubica al suroeste. Ambos lados de la galaxia alcanzan sus máximos de velocidad alrededor de 105 km/s a un radio de 5.5", aunque el lado noreste tiene una ligera caída en su velocidad. Más allá de ~6" el lado noreste se mantiene casi constante y después tiene una caída de velocidad llegando a un valor de 74 km/s, mientras que el lado suroeste a partir de los 6" tiene una caída en las velocidades llegando a34 km/s. Más allá de los 11", la información del lado sureste pertenece a la región HII. La tendencia a disminuir la velocidad de ambos lados a partir de los 5" también es detectada por Amram [20].

Un análisis más profundo que añade el perfil de los pixeles considerados para calcular la curva de rotación de ambas galaxias con el fin de obtener información acerca de movimientos no circulares está en proceso.

V. ANÁLISIS DE IMÁGENES EN DIFERENTES LONGITUDES DE ONDA

Las imágenes que se usaron en este trabajo son imágenes de acceso público disponibles en las páginas oficiales de los diferentes telescopios o censos. Las bandas de interés para este trabajo fueron en el ultravioleta, óptico, y cercano y mediano infrarrojo.

A. Ultravioleta

Las imágenes en la banda del lejano (1400 – 1700 Å) y cercano (1800-2750 Å) ultravioleta fueron tomadas por el telescopio GALEX [28] y descargadas desde la base de datos MAST [29]. En Fig. 8 se muestran las imágenes del lejano y cercano ultravioleta. En ambas imágenes se observan cúmulos muy brillantes en la región interna de NGC 2535, siendo las más brillantes los cúmulos ubicados en los ápices de la forma oval. Es importante señalar que la forma oval no se distingue de forma clara en ambas imágenes. Se observa un núcleo bastante pequeño y casi redondo con un brillo importante. El espolón norte es observable entre el brazo norte y la parte central pero no tan brillante como estas zonas. El brazo norte de NGC 2535 posee cúmulos brillantes mientras que los cúmulos del brazo sur son mucho menos brillantes. En el extremo del brazo sur de NGC 2535 se detecta señal con bajo brillo del puente que enlaza con NGC 2536. Este puente es poco brillante y se observa en proyección casi en línea recta, de forma similar a lo que comenta Amram [20] en el mapa de velocidades. NGC 2536 se observa muy brillante y redondeada. Presenta

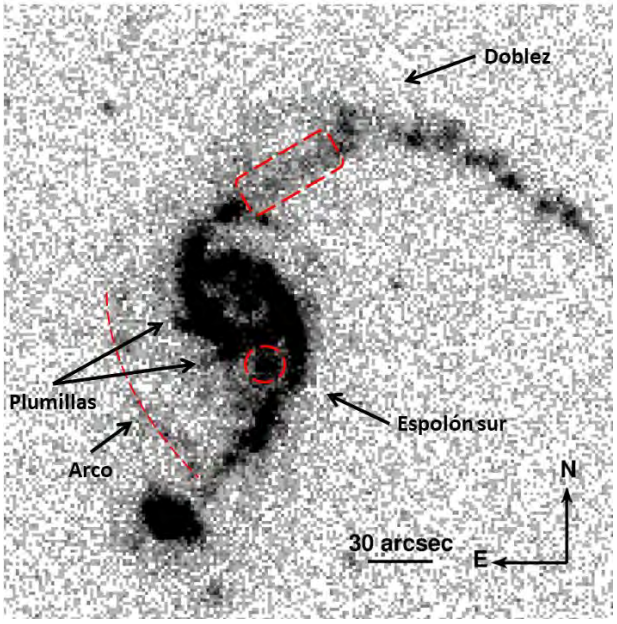


Fig. 9 Imagen con gran contraste del lejano ultravioleta. El arco punteado indica la traza de una estructura arqueada, que también detecta en radio 21-cm Kaufman. El círculo indica la ubicación del espolón sur de NGC 2535. El rectángulo punteado indica una porción del brazo norte de NGC 2535que se observa aparentemente recto.

un filamento corto y poco brillante en dirección suroeste. En una imagen con mayor contraste del lejano ultravioleta (ver Fig. 9), se observa el brazo norte de NGC 2536 bastante extendido. Yendo desde la parte interna de este brazo hacia el extremo, se observa una región aparentemente recta, y exactamente donde termina esta región se observa un doblez abrupto y donde aparentemente se recupera el patrón espiral del brazo. En la región interna de NGC 2535 se observan dos plumillas que emergen del disco interno. Entre el brazo sur y el disco interno de NGC 2535 se observa emisión de una región que semeja ser un espolón ubicado de forma casi semejante a su contraparte del norte. Partiendo del extremo del brazo sur de NGC 2535 hasta casi el este de la galaxia se detecta emisión a lo largo de un camino arqueado, donde Hancock [24] detecta emisión en ultravioleta y anteriormente lo hiciera Kaufman [25] en 21 cm. Kaufman observa que este arco se extiende más allá de lo que se percibe en nuestra imagen contrastada, conectando con el brazo norte poco antes del doblez. NGC 2536 ya no se observa tan redondeado, presentando dos elongaciones, la primera ubicada en el oeste de la galaxia y en dirección suroeste, la segunda ubicada en el este en dirección norte.

B. Óptico

Las imágenes en el óptico (ver Fig. 10) fueron obtenidas del archivo del censo de SDSS [30]. Este censo observa objetos en 5 diferentes bandas, cubriendo todo el rango óptico, dividido en 5 bandas: u', g', r', i', y z', centrados en 3551, 4686, 6166, 7480 y 8932 Å, respectivamente.

En las bandas u', g', r' e i' se observan cúmulos en la parte sur del disco interno y a lo largo del brazo norte de NGC 2535, observándose menos brillantes conforme nos acercamos a la banda i'. En la banda z' no se observa ningún cúmulo, pero sí un brillo casi constante que traza la silueta de la galaxia. El bulbo se observa poco brillante en la banda u' y se hace más brillante conforme nos acercamos a la imagen en la banda z'. Desde la banda u' hasta la banda i' se observan cúmulos más brillantes en el brazo norte respecto del brazo sur, en el cual se observa un decremento del brillo a lo largo del brazo y hacia las partes externas. Además, en las bandas g', r' e i' se observa una traza de polvo que inicia muy cerca del ápice oeste y se desplaza hacia la parte interna del brazo conforme avanzamos hacia las partes externas. El espolón norte también es observable desde la banda u' y se hace menos brillante conforme nos acercamos a la banda i'; en la banda z' ya no es observable esta estructura. En la banda g', con más contraste (ver Fig. 11), se observa la presencia del espolón sur, ubicado entre la línea de polvo y el disco interno, además de observarse emisión de todo el brazo norte hasta ~153" respecto del centro. En esta imagen también se observa la presencia de dos plumillas en la parte sur del disco interno y que apuntan hacia las partes externas. En la banda r' con mayor contraste (ver Fig. 10) se observa una estructura barrada en la parte interna del disco de NGC 2535, en dirección noreste-suroeste con un PA de 45º.

NGC 2536 se observa muy brillante en todas las bandas. En todas las bandas se observan un filamento en la parte oeste de la galaxia y que se prolonga en dirección suroeste hacia un cúmulo brillante que es claramente observable en la banda u'. Este cúmulo es muy brillante en la banda u' y se hace menos brillante conforme nos acercamos a la banda z' donde es casi imperceptible. El lado noreste de la galaxia presenta una elongación ancha y de menor brillo que se dirige en dirección noreste. En la banda g' con mayor contraste (ver Fig. 11) esta galaxia se observa como una elipse gruesa en dirección noreste-suroeste, y la parte suroeste de esta elipse presenta terminación muy puntiaguda. Debajo de esta punta, se observa una región muy extendida poco brillante pero lo suficiente para resaltar del fondo.

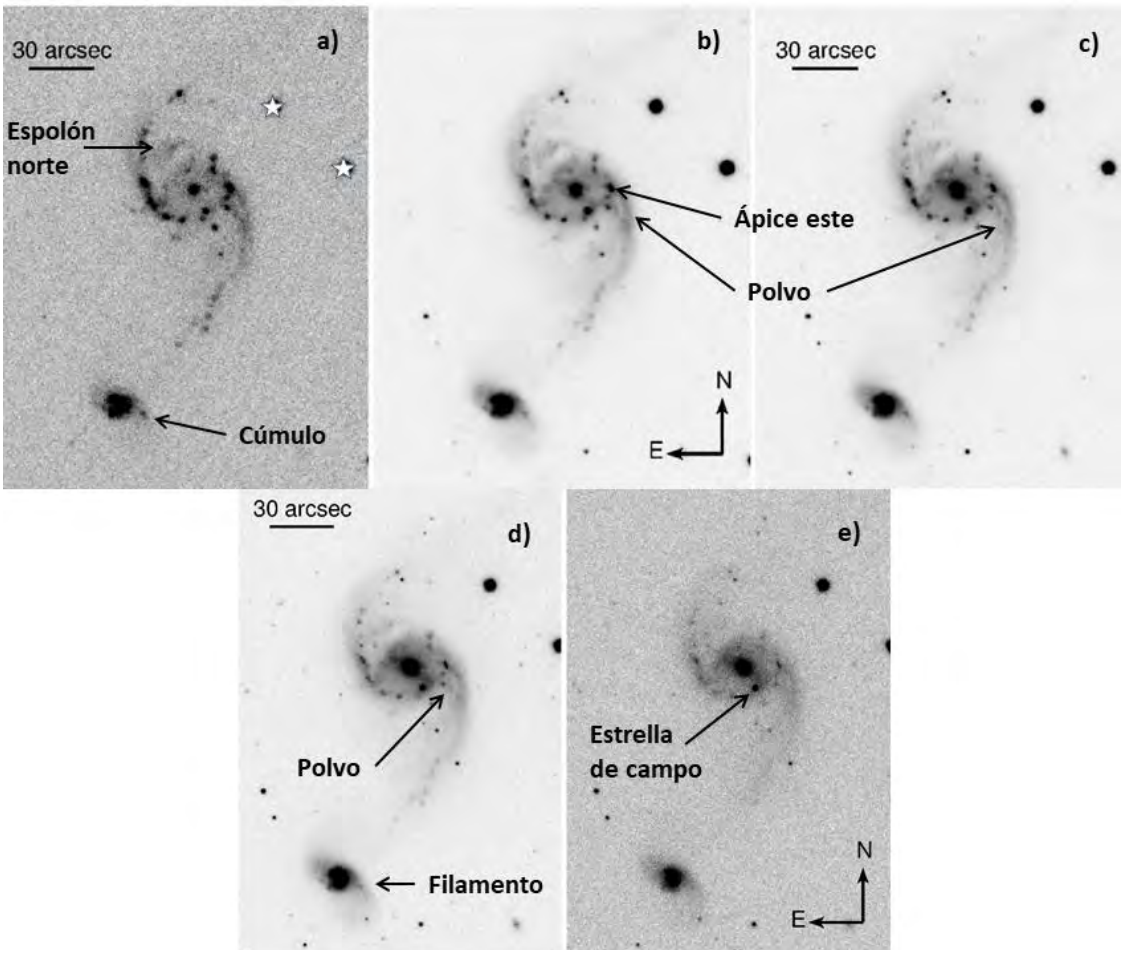


Fig. 10 Imágenes en el óptico tomadas de la base de datos del censo SDSS. a) Imagen en la banda u'. Las estrellas de campo se indican con el símbolo de una estrella. b) Imagen en la banda g'. El camino de polvo inicia justo en el ápice este y continúa a lo largo del brazo sur de NGC 2535. c) Imagen en la banda r'. d) Imagen en la banda i'. e) Imagen en la banda z'. La estrella de campo que se indica en esta imagen es observable en las demás bandas.

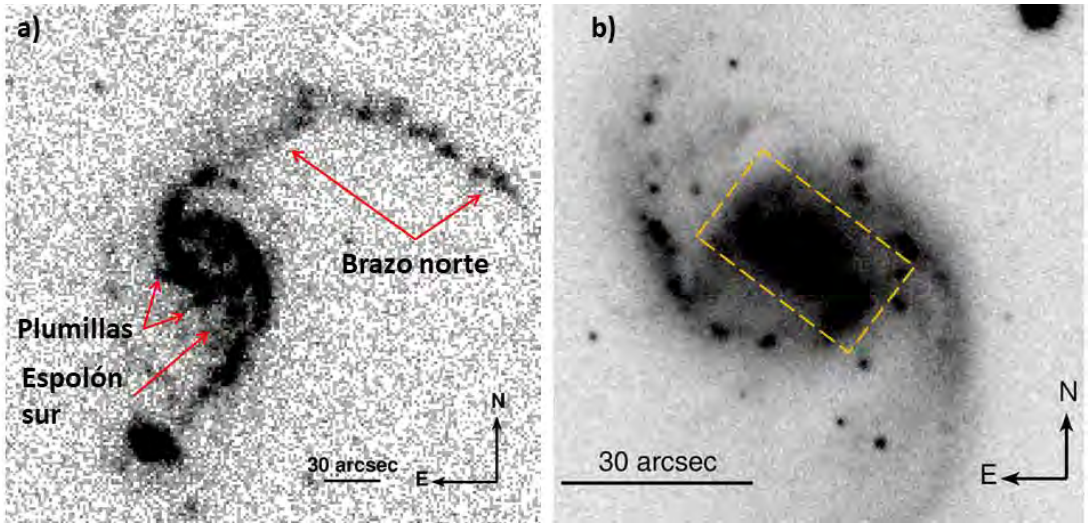


Fig. 11 Imágenes con alto contraste del censo SDSS. a) Imagen en la banda g'. b) Imagen en la banda r'.

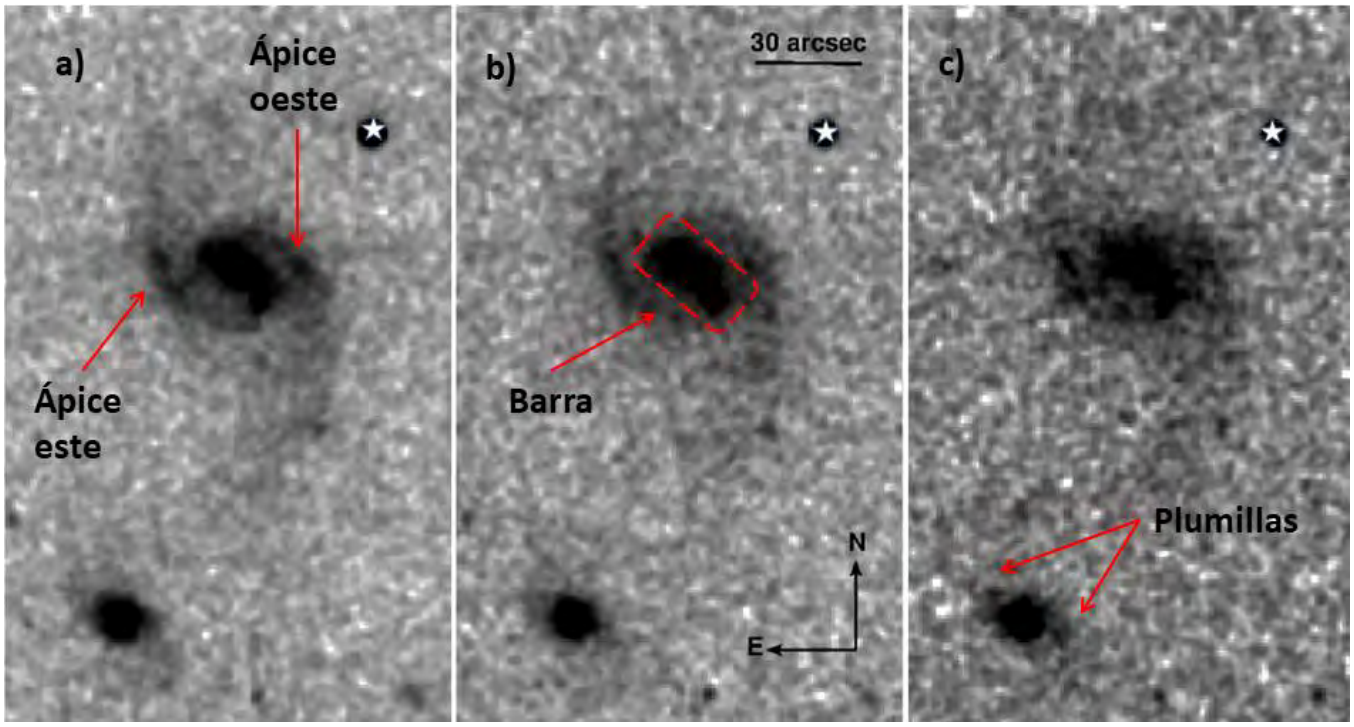


Fig. 12 Imágenes en el cercano infrarrojo (NIR, por sus siglas en inglés) del censo 2MASS. a) Imagen en la banda J. b) Imagen en la banda H. El rectángulo con borde punteado indica la orientación de la barra. c) Imagen en la banda K. En las tres imágenes el símbolo de estrella indica una estrella de campo.

C. Infrarrojo cercano

Las imágenes en el infrarrojo cercano (ver Fig. 12) se obtuvieron del proyecto 2MASS (Two Micron All-Sky Survey) [31]. Este proyecto escaneó el cielo en 3 diferentes bandas: J (1.25 μm), H (1.65 μm) y K (2.17 μm).

En las tres bandas la parte central de NGC 2535 muestra una estructura barrada con un PA ~45º. En la banda J los brazos se observan cortos, y menos brillantes que el centro de la galaxia. Dos cúmulos brillantes se observan en la banda J, localizados en los ápices. El brazo sur es más ancho y menos brillante que el brazo norte. Ambos brazos se hacen menos brillantes hacia la banda K. En la banda K se observa la forma ovalada a la cual se le ajustó una elipse con un PA de 105º.

NGC 2536 se observa bastante redondeada y se detectan dos filamentos bastante cortos en la banda K. El primer filamento en la parte oeste y en dirección suroeste. El segundo filamento en la parte este de la galaxia apuntando hacia el norte.

D. Infrarrojo medio

Las imágenes en infrarrojo medio (ver Fig. 13) se obtuvieron usando el telescopio espacial Spitzer. Estas imágenes se descargaron de la base SkyView [32], y pertenecen al proyecto de Hancock [24]. Se analizaron tres diferentes bandas: 3.6 μm, 8.0 μm y 24 μm.

En la imagen de 3.6 μm NGC 2535 muestra un centro muy brillante en el cual se percibe una estructura barrada menos brillante y un PA de ~77º. La forma ovalada se distingue y en el borde sur de este ovalo se observan cúmulos brillantes. La flecha sin leyenda señala la posición de una estrella de campo que no debe confundirse como cúmulo brillante de la galaxia. En el ápice oeste se observa un cúmulo muy brillante, mientras que en la zona cercana al ápice este se observan dos cúmulos brillantes. El brazo norte presenta cúmulos a lo largo del brazo, mientras que el brazo sur no se observan cúmulos tan brillantes. El brazo norte se observa más delgado respecto al brazo sur. Se distingue el espolón norte más parecido a un filamento corto casi paralelo al brazo norte. El extremo del brazo norte se observa un cúmulo muy brillante. NGC 2536 se observa muy brillante y redondeado, y un filamento muy fino se extiende desde la parte oeste de la galaxia en dirección suroeste.

En la imagen de 8.0 μm NGC presenta un bulbo muy brillante y redondo, el cual parece ser atravesado por un filamento en dirección este-oeste con una ligera inclinación, y el extremo oeste de este filamento presenta un doblez en la dirección sur. Al sur del centro marcado en Fig. 12 con una flecha sin leyenda se observa una zona casi redonda de un brillo similar al fondo del cielo, que confirma la existencia de una estrella de campo justo en el borde sur del oval. Se observan cúmulos muy brillantes a lo largo de todo el brazo norte. El espolón es detectado como un filamento casi paralelo al brazo norte. Al oeste del espolón norte se observa

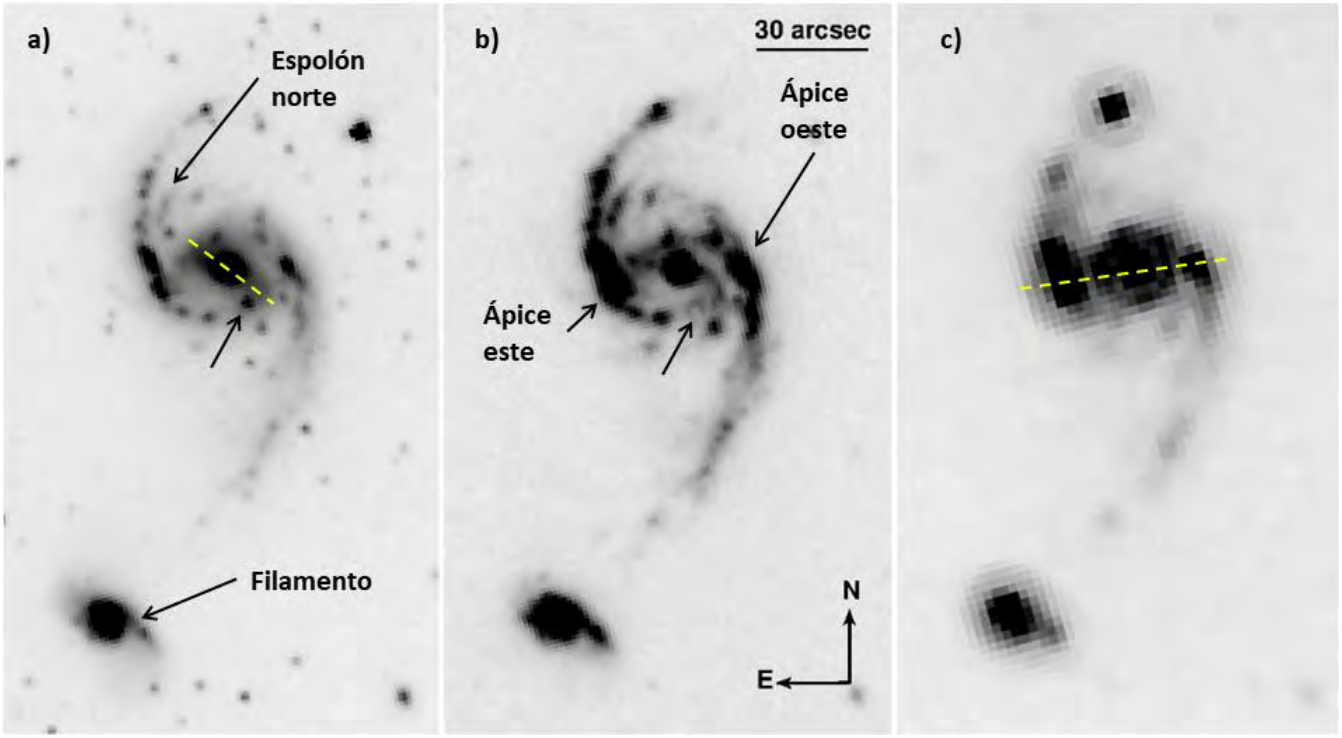


Fig. 13 Imágenes en infrarrojo medio (MIR, por sus siglas en inglés) del telescopio espacial Spitzer. a) Imagen del instrumento IRAC en 3.6μm. La línea amarilla punteada indica el PA de estructura barrada. b) Imagen del instrumento IRAC en 8.0 μm. La flecha sin leyenda indica la ubicación de una estrella de campo. Esta oculta la emisión de la galaxia y se observa como una sombra circular clara. c) Imagen del instrumento MIPS en 24μm. La línea amarilla punteada indica la orientación de la barra detectada por Kaufman en radio continuo.

un cúmulo brillante que parece ser la continuación del espolón. El brazo sur muestra cúmulos muy brillantes cerca del ápice oeste, además este brazo es mucho menos brillante que el brazo norte. Ambos brazos parecen tener la misma longitud. NGC 2536 es brillante con un contorno rectangular con bordes difusos. Se observa un filamento que parece conecta con un cúmulo brillante en dirección suroeste respecto del centro de esta galaxia.

La imagen en 24 μm muestra un centro muy brillante de NGC 2535, además se percibe un anillo brillante rodeando este centro. Se observa un cúmulo muy brillante en el ápice oeste y dos cúmulos muy brillantes en el ápice este, casi de tamaño comparable con el bulbo. Los brazos de NGC 2535 parecen iniciar justamente en los ápices. Se observa un cúmulo muy brillante en el extremo del brazo norte. Por otro lado el brazo sur muestra una disminución muy rápida de su brillo conforme nos alejamos hacia las partes externas, y más adelante, a una distancia similar al cúmulo del extremo de brazo norte respecto del centro, presenta un ligero aumento en su brillo. Si se traza una línea recta que una el ápice oeste con el ápice este, esta línea pasa por el centro de la galaxia con un PA de ~100º. Kaufman [25] detecta una barra en radio continuo justo en la misma posición y con un PA igual. NGC 2536 se observa muy brillante y presenta una elongación de su brillo en dirección sureste.

VI. Conclusiones

El campo de velocidades de NGC 2535 muestra perturbaciones importantes en los brazos debido a la interacción. El disco interno presenta bastante simetría respecto del eje dinámico, aunque el centro de la galaxia exhibe perturbaciones como resultado de la presencia de una estructura barrada. La forma oval no es distinguible. Se detecta poca emisión hasta ~135" respecto del centro fotométrico lo que confirma la gran longitud del brazo norte. Se detecta la presencia de una estructura arqueada que inicia en una región cercana al extremo del brazo sur y que apunta en dirección noreste. NGC 2536 muestra un campo de velocidades bastante perturbado y no simétrico respecto del eje dinámico. El centro fotométrico y dinámico de esta galaxia se encuentran desplazados ~4.57".

La curva de rotación de NGC 2535 presenta bastante dispersión, mientras que el lado noreste presenta velocidades ligeramente mayores al lado sureste. El lado noreste presenta oscilaciones similares de tipo sinusoidal para radios donde la velocidad parece ser constante. El lado sureste por otro lado presenta ligeras oscilaciones, pero de manera general presenta un incremento suave en las velocidades de rotación. La curva de NGC 2536 no presenta tanta dispersión como NGC 2535, aunque en las partes externas presentan una caída en las velocidades. El lado

sureste presenta una caída de velocidades mucho mayor y más importante que el lado noreste, debido posiblemente a la presencia de una región HII de tamaño considerable.

Un análisis de los perfiles de los pixeles del campo de velocidades está en proceso de elaboración con el fin de localizar movimientos circulares importantes y poder localizarlos en la curva de rotación.

El análisis reveló importantes características del sistema y evidentes perturbaciones en las regiones externas de NGC 2535. Se observa formación estelar inducida como consecuencia de la interacción, con mayor importancia en el brazo norte y el disco central. Los brazos de esta galaxia están conformados principalmente de estrellas jóvenes; el brazo norte con una longitud mucho mayor que el brazo sur. La componente estelar de estrellas frías se ubica principalmente en el disco interno a partir del cual emergen brazos bastante cortos y con poco brillo. Se detecta la presencia de espolones entre la parte interna de los brazos y el disco interno. El espolón norte es mucho más brillante que su contra parte sur. NGC 2536 se observa bastante redondeada con dos filamentos que parecen ser los brazos de la galaxia. El filamento oeste parece conectar con una región brillante en dirección suroeste.

REFERENCIAS

[1] Pease, F. G., 1920, "Photographs of nebulae with the 60-inch Reflector, 1917-1919", ApJ, 51: 276

[2] Holmberg, E., 1937, "A Study of Double and Multiple Galaxies", AnLun, 6: 1

[3] Holmberg, E., 1940, "On the Clustering Tendencies among the Nebulae", ApJ, 92: 200

[4] Zwicky, F., 1956, "Multiple Galaxies – Erg. D. exakt. Naturwiss", 29: 344

[5] Vorontsov-Velyaminov, B. A., 1958, "The Interaction of Galaxies and the Nature of Their Arms, Spanning Filaments and Tails. The Morphology of Galaxies", Soviet Astronomy, Vol. 2, pp. 805

[6] Arp, H., 1969, "Companion galaxies on the ends of spiral arms", A&A, 3:418

[7] Karachentsev, I. D., 1972, "Catalogue of Isolated Pairs of Galaxies in the Northern Hemisphere", Soobshch. Spets. Astrofiz. Obs., Vol. 7

[8] Solomon, P. M., Sage, L. J., 1988, "Star-Formation rates, Molecular Clouds, and the Origin of the Far-Infrared Luminosity of Isolated and Interacting Galaxies", AJ, Vol. 334, pp. 613

[9] Amram, P., 1991, "Tesis Doctoral", Université de Provence, Marsella

[10] Cárdenas-Martínez, N., 2014, "Tesis de Maestría", Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

[11] Benitez-Benitez, C. P., 2017, "Tesis de maestría", Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

[12] Larson, R. B., Tinsley, B. M., 1978, "Star Formation Rates in Normal and Peculiar Galaxies", AJ, Vol. 219, pp. 46-59

[13] Struck-Marcell, C., Tinsley, B. M., 1978, "Star Formation Rates and Infrared Radiation", AJ, Vol. 221, pp. 562-566

[14] Disponible: https://ned.ipac.caltech.edu/

[15] Stephan, M., 1877, "Nebulae (new) discovered and observed at the observatory of Marseilles", MNRAS, Vol. 37, pp. 334

[16] Vorontsov-Velyaminov, B. A., 1959, "Atlas and Catalog of Interacting Galaxies", Sternberg Institute, Moscow State University

[17] Arp, H., 1966, "Atlas of Peculiar Galaxies", ApJS, Vol. 14

[18] Arp, H., 1969, "Companion Galaxies on the End of Spiral Arms", A&A, Vol. 3, pp. 418

[19] de Vaucouleurs, G., de Vaucouleurs, A., Corwin jr., H. G., Buta, R. J., Paturel, G., Fouque, P., 1991, "Third reference catalogue of bright galaxies (New York: Springer-Verlag)

[20] Amram, P., Marcelin, M., Boulesteix, J., Le Coarer, E., 1989, "The detailed velocity field of the ionized gas in the interacting pair of galaxies NGC 2535-36", A&AS, Vol. 81, pp. 59

[21] Lequeux, J., 1983, "Rotation curves and mases of galaxies", A&A, Vol. 125, pp. 394

[22] Bottinelli, L., Gouguenheim, L., Paturel, G., 1982, "Study of spiral galaxies from 392 new measurements of 21-cm line data", A&A, Vol. 113, pp. 61

[23] Peterson, S. D., Shostak, G. S., 1974, "21-cm study of peculiar galaxies", AJ, Vol. 79, pp. 767

[24] Hancock, M., *et al.*, 2007, "Large-scale star formation triggering in the low-mass Arp 82 system: A nearby example of galaxy downzising based on UV/optical/mid-IR imaging", AJ, Vol. 133, pp. 676

[25] Kaufman, M, *et al,* 1997, "Observations of the ocular galaxy NGC 2535 and its starburst companion NGC 2536", AJ, Vol. 114, pp. 2323

[26] Xu, Z., Gao, X., Zhang, J., Wang, X., 2014, "Supernova 2014ds in NGC 2536 = PSN J08111645+2510474", Telegrama electrónio No. 4010, Central Bureau for Astronomical Telegrams. Disponible: http://ned.ipac.caltech.edu/cgi-bin/ex_refcode?refcode=2014CBET.4010A...1X

[27] Fuentes-Carrera, I., 2003, "Tesis Doctoral", Universidad Nacional Autónoma de México, México

[28] Disponible: http://www.galex.caltech.edu/index.html

[29] Disponible: http://archive.stsci.edu/index.html

[30] Disponible: http://www.sdss.org/

[31] Disponible: https://www.ipac.caltech.edu/2mass/

[32] Disponible: https://skyview.gsfc.nasa.gov/current/cgi/titlepage.pl

[33] Disponible: http://leda.univ-lyon1.fr/

ISSN: 2594-1011

Fundamentos de Muestreo Aleatorio, Cómputo de Permutaciones y Combinaciones

Alejandra Iveth García Pérez[1], Adrián Alcántar Torres[2]
[1]Departamento de Ciencias Básicas e Ingeniería, UAM Azcapotzalco, Ciudad de México, México
[2]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
E-mail: alegarciap358@hotmail.com, adrian.alcantar.torres@gmail.com

Resumen — **Este trabajo tiene como objetivo analizar y presentar los fundamentos matemáticos del Muestro Aleatorio Simple.**

Para lograr el objetivo señalado, se analizan los principales algoritmos para realizar el listado y generación aleatoria de permutaciones y combinaciones. Se explica la importancia computacional de la generación aleatoria de permutaciones y combinaciones. Además, se ilustra el uso de los algoritmos presentados así como sus principales aplicaciones.

Se introduce el Muestreo Aleatorio Simple como la principal aplicación de la generación aleatoria de las combinaciones y se realiza un muestreo aleatorio simulando el problema de la elección de 1, 400, 000 mexicanos que serán funcionarios de casilla en la jornada electoral del próximo 1 de julio de 2018, esta selección se hace del Padrón Electoral que al 2 de febrero de 2018 está constituido por 90, 005, 648 mexicanos.

Palabras Clave – **Algoritmo, Combinaciones, Muestreo Aleatorio, Permutaciones.**

Abstract — **This paper has as aim analyze and expose the mathematical foundations of Random Sampling.**

To achieve the notable aim the principal algorithms are analyzed to do the list and random generation of permutations and combinations. In addition, the use learns of the presented algorithms and s his principal applications.

Introduces the Random Sampling as the principal application of random generation of combinations and a random sampling is realized simulating the selection of 1, 400, 000 mexicans who will be box official next 1st July 2018, this selection is taken from Padrón Electoral which has 90, 005, 648 mexicans to 2nd February 2018.

Keywords — **Algorithm, Combinations, Random Sampling, Permutations,**

I. Introducción

La palabra algoritmo proviene del nombre de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 - 850), un sobresaliente matemático y astrónomo miembro de "La Casa de la Sabiduría" fundada en Bagdad por el califa Al-Mamun (809 - 833). Además de tablas astronómicas y tratados sobre astrolabios y relojes de sol, al-Khwarizmi escribió dos libros sobre aritmética y álgebra que jugaron papeles imprescindibles en la historia de las matemáticas.

De estos textos sólo sobrevive una única copia traducida al latín: "De numero indorum", pues se conoce que la versión árabe original está perdida. En este trabajo, al-Khwarizmi explica íntegra y exhaustivamente el sistema de numeración hindú. Al-Khwarizmi no pretendía establecer conexiones con este sistema pero cuando las traducciones al latín de su trabajo aparecieron en Europa, los lectores comenzaron a atribuirle tal notación.

Esta nueva notación se popularizó y llegó a ser conocida como "de al-Khwarizmi", por las deformaciones que sufrió esta palabra se llegó a los términos "algorims" o "algoritmo", palabra que claramente proviene de al-Khwarizmi y que actualmente se refiere a un procedimiento muy particular y bien organizado que resuelve algún problema en particular como el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor, o el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Informalmente un algoritmo es cualquier procedimiento computacional bien definido que toma algunos valores, o conjunto de valores, como entrada y produce algunos valores, o conjunto de valores, como salida. Entonces, un algoritmo es una secuencia finita de pasos computacionales que transforma la entrada en la salida. También un algoritmo puede verse como una herramienta para resolver un problema computacional bien específico. La declaración del problema especifica en términos generales la relación entrada/salida.

Para contar con una referencia sobre cuándo un algoritmo tendrá un tiempo de ejecución razonable, se ha optado por emplear la complejidad del tiempo de ejecución asintótico como la medida fundamental de la eficiencia de un algoritmo. El análisis asintótico permite determinar la complejidad del tiempo asintótico. La notación asintótica se emplea para describir la complejidad del tiempo en el peor caso.

II. Fundamentos matemáticos

A. Combinatoria

La combinatoria trata del estudio de problemas sobre cuántas agrupaciones (sometidas a diferentes combinaciones) pueden formarse con elementos dados. El estudio de la combinatoria comienza con dos principios básicos del conteo:

i) Regla de la suma. Suponga que de cierto conjunto A_1 puede ser elegido un elemento de m_1 maneras, mientras de un segundo conjunto A_2, puede ser elegido de m_2 maneras, . . ., y de cierto conjunto A_t puede ser elegido de m_t maneras, entonces, la elección de un sólo elemento de A_1ó A_2 ó . . . A_t, suponiendo que $A_1, A_2, \ldots,$ y A_t no tienen elementos en común, puede realizarse de $m_1 + m_2 + \ldots + m_t$ maneras.

ii) Regla del producto o Principio fundamental del conteo. Si cierto procedimiento puede dividirse en t etapas, y si existen m_1 resultados posibles en la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen m_2 resultados posibles para la segunda etapa,. . ., y m_t resultados en la última etapa, entonces el procedimiento total puede realizarse de $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t$ maneras.

B. Permutaciones y su crecimiento

Dada una colección de *n* elementos distintos, se llama permutación a cualquier arreglo sin repetición en el que figuran todos los elementos. El número de permutaciones de n elementos distintos se denota por P (n) y se refiere a todos los arreglos posibles que contienen los n elementos tomados cada uno exactamente una vez y que se diferencian entre sí sólo en el orden de los elementos.

Teorema. Dada una colección de n elementos distintos,

P (n)= n!.

Demostración. Una permutación de *n* elementos se construye en *n* etapas sucesivas. En la primera etapa puede elegirse cualquiera de los *n* elementos disponibles. En la segunda etapa, el segundo elemento puede elegirse de *n − 1* maneras. Analógamente, en la tercera etapa, el tercer elemento puede elegirse de *n − 2* maneras, . . ., en la r − ésima etapa, el r − ésimo elemento puede elegirse de *n − (r − 1)* maneras, . . ., en la penúltima etapa puede elegirse entre 2 elementos restantes y finalmente en la última etapa sólo puede elegirse un único elemento. Luego, como resultado de la Regla del producto, el número total de arreglos posibles que contienen los n elementos es:

P (n) = n (n − 1) (n − 2) · · · (n − (r − 1)) · · · 2 · 1.

Es posible aproximar el valor de los factoriales sin realizar las multiplicaciones que implican la definición. Cuando, por ejemplo, se desee conocer qué tan grande es 1000! , puede recurrirse a una aproximación de n! presentada por el matemático escocés James Stirling (1692-1770) en 1730;

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

La aproximación de Stirling es también útil para calcular la aproximación al logaritmo de un factorial. El logaritmo de n! Es:

$$\ln n! = n(\ln n - 1) + ln\left(\sqrt{2\pi n}\right),$$

aunque normalmente para valores de n suficientemente grandes, suele despreciarse el último término.

C. Combinaciones y su crecimiento

Existen situaciones donde no siempre interesa el orden en que se distribuyen los elementos. Por ejemplo, si se debe elegir 3 personas de un grupo de 5, donde se supone que las personas se encuentran etiquetadas con un número del 1 al 5. Entonces, en este caso, cualquiera de las siguientes permutaciones 235, 253, 325, 352, 523 o 532 conduce a la misma elección de tres personas. En los casos en que no interesa el orden de los elementos en los arreglos, sino solamente su composición, se dice que se trata de una combinación.

De este modo, las combinaciones se diferencian entre sí por la composición de los elementos, pero no por su orden.

Teorema. El número de combinaciones de tamaño r de una colección de tamaño n, denotada por C (n, r), es:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \quad (1)$$

Demostración. En general, si se parte de n elementos distintos, cada combinación, de r de esos objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a r! permutaciones de tamaño r de los n elementos. Así, el número de combinaciones de tamaño r de una colección de tamaño n, satisface (r!) · C (n, r) = P (n, r) y

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad 0 \le r \le n.$$

Teorema. La expresión $\binom{n}{r}$ para $0 \le r \le n$ y una n fija, toma su máximo valor cuando $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Demostración. Dada cierta n se tiene,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n-r+1}{r}\,\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}.$$

Luego $\binom{n}{r}$ como función de r, se incrementa si y sólo si $\frac{n-r+1}{r} \ge 1$, lo cual sucede cuando $n+1 \ge 2r$, o bien $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Por otro lado, $\binom{n}{r}$ como función de r se decrementa si y sólo si $\frac{n-r+1}{r} \le 1$, o bien $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

De esta manera, $\binom{n}{r}$ vista como función de r y para una n fija, alcanza su valor máximo cuando r toma uno de estos valores.

III. CÓMPUTO DE PERMUTACIONES

Se ha visto que el número de permutaciones de un conjunto crece en un orden ω(2 n) y o(n n), por lo que la tarea de listar todas las permutaciones esta limitada a valores pequeños de n.

Algoritmo L:
L1. [Visitar.] Visitar la permutación $a_1 a_2 \dots a_n$.
L2. [Encontrar j.] Sea $j \leftarrow n-1$. Si $a_j \geq a_{j+1}$, decrementar j en uno repetidamente hasta que $a_j < a_{j+1}$. Terminar el algoritmo si $j = 0$.
L3. [Incrementar a_j.] Sea $l \leftarrow n$. Si $a_j \geq a_l$, decrementar l en uno repetidamente hasta que $a_j < a_l$. Luego intercambiar $a_j \leftrightarrow a_l$.
L4. [Invertir $a_{j+1} \dots a_n$.] Sea $k \leftarrow j+1$ y $l \leftarrow n$. Mientras $k < l$, intercambiar $a_k \leftrightarrow a_l$ y hacer $k \leftarrow k+1, l \leftarrow l-1$. Volver a L1.

A continuación se presenta un algoritmo no recursivo que lista todas las permutaciones de un conjunto en orden lexicográfico. Fue introducido por el matemático hindú Narayana Pandita (ca. 1340 - 1400), quien escribió 3 importantes libros sobre aritmética y álgebra que incluían leyes de los signos, el uso del cero en las operaciones matemáticas, métodos de aproximación de la raíces de algún número y una detallada investigación sobre permutaciones y combinaciones. El algoritmo de Pandita comienza con una secuencia de elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$, inicialmente ordenados de tal manera que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, este algoritmo genera todas las permutaciones enlistándolas en orden lexicográfico.

Para explicar cómo es que el algoritmo L funciona, note que en el paso L2 se tiene que j es el subíndice más pequeño para el que ya se han listado todas las permutaciones que comienzan con $a_1 \dots a_j$. De forma que la siguiente permutación con base en el orden lexicográfico hará a_j más grande.

Luego, dado que en el paso L3 $a_j \geq \dots \geq a_n$, se tiene que a_l es el elemento más pequeño que es mayor a a_j y que legítimamente puede seguir a $a_1 a_2 \dots a_{j-1}$ en una permutación. Antes del intercambio se tiene:
$a_{j+1} \geq \dots \geq a_{l-1} \geq a_l > a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$;
y después del intercambio se tiene:
$a_{j+1} \geq \dots \geq a_{l-1} \geq a_j > a_l \geq a_{l+1} \geq \dots \geq a_n$.

A. Generación aleatoria

Considere el problema de generar una permutación aleatoria de t objetos que bien podría ser estudiado como el problema de barajar ciertas cartas para generar una nueva permutación. Es difícil imaginar que después de muchas partidas, el croupier podría mezclar las cartas tan bien que podrá obtener cada una de las 52! permutaciones con igual probabilidad. ``Para los curiosos, este número es 806 58175 17094 38785 71660 63685 64037 66975 28950 54408 83277 82400 00000 00000" [11].

Algoritmo P:
P1. [Inicializar.] Sean $j = t$, tal que t es el número de elementos a ser permutados.
P2. [Generar U.] Se genera un número aleatorio U uniformemente distribuido entre 0 y 1.
P3. [Intercambiar.] Sea $k = \lfloor jU \rfloor + 1$. Ahora j es un entero aleatorio entre 1 y j. Intercambiar $X_k \leftrightarrow X_j$.
P4. [Decrementar j] Decrementar j en 1. Si $j > 1$, ir al paso 2.

Dada una secuencia $(X_1, X_2, \dots, X_t)$ de elementos (observe que no necesariamente deben ser números) a ser barajados, el siguiente algoritmo produce una permutación de la secuencia.

Se ilustra el funcionamiento de algoritmo P mediante el siguiente ejemplo. A partir de la secuencia $(1, 2, \dots, 8)$, se desea construir una nueva permutación.

j	k	Intercambio	Permutación
j=8	$k = \lfloor 8(0.9) \rfloor + 1 = 8$	$X_8 \leftrightarrow X_8$	12345678
j=7	$k = \lfloor 7(0.4) \rfloor + 1 = 3$	$X_3 \leftrightarrow X_7$	12745638
j=6	$k = \lfloor 6(0.8) \rfloor + 1 = 5$	$X_5 \leftrightarrow X_6$	12746538
j=5	$k = \lfloor 5(0.5) \rfloor + 1 = 3$	$X_3 \leftrightarrow X_5$	12647538
j=4	$k = \lfloor 4(0.2) \rfloor + 1 = 1$	$X_1 \leftrightarrow X_4$	42617538
j=3	$k = \lfloor 3(0.1) \rfloor + 1 = 1$	$X_1 \leftrightarrow X_3$	62417538
j=2	$k = \lfloor 2(0.2) \rfloor + 1 = 1$	$X_1 \leftrightarrow X_2$	26417538

IV. GENERACIÓN ALEATORIA DE COMBINACIONES

El problema de generar una combinación aleatoria es equivalente a seleccionar aleatoriamente n elementos de un conjunto de N donde $0 \leq n \leq N$. En la práctica, se desea seleccionar n elementos de un archivo que contiene N elementos. Usualmente N es un número muy grande, por lo que no es posible almacenar todos los datos en memoria. Por lo tanto se requiere de un procedimiento que seleccione exactamente n elementos decidiendo si acepta o rechaza cada elemento tal como este vaya siendo evaluado, escribiendo los elementos aceptados en un archivo de salida.

Para realizar esta tarea pueden idearse distintos métodos, el más obvio es considerar a cada elemento como una variable independiente de Bernoulli y seleccionar cada elemento con probabilidad de éxito n/N, lo cual en promedio nos dará una muestra de $N\left(\frac{n}{N}\right) = n$ elementos. La desviación estándar de este proceso es $\sqrt{n(1-n/N)}$, y en consecuencia la muestra podrá resultar más grande o bien más pequeña por lo que este método de selección no es factible ya que no produce los resultados deseados.

Existe una modificación a este método, la cual sugiere que cada elemento sea evaluado uno por uno de manera que el elemento t+1 sea seleccionado con probabilidad (n-m)/(N-t) si ya han sido seleccionados m elementos dentro de los primeros t. Esto es, el elemento (t+1) es seleccionado con probabilidad: $\frac{n-m}{N-t}$.

Para explicar la probabilidad anterior, es importante tener en cuenta a las variables m,t y que para cada uno de los N elementos, se colocará una ✓ si el elemento es aceptado, o bien un ×; cuando sea rechazado.

Luego, durante los primeros t elementos se han asignado m palomitas. Por lo que en particular, a partir del elemento t+1 resta asignar n-m palomitas de los N-t elementos disponibles. De modo que existen $\binom{N-t}{n-m}$ formas de asignar las n-m palomitas en los elementos restantes (casos totales). Si se destina colocar específicamente una palomita para el elemento t+1, entonces para los N-t-1 elementos que no han sido evaluados se deben asignar n-m-1 palomitas. De modo que existen $\binom{N-t-1}{n-m-1}$ formas de seleccionar n-m-1 elementos de los N-t-1 restantes dado que el elemento *t+1* ha sido seleccionado. La siguiente figura, presenta las ideas explicadas en este párrafo:

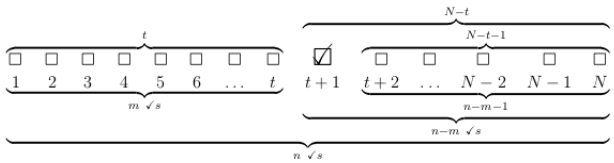


Fig. 1. Selección del elemento t+1.[1]

El algoritmo para generar una combinación aleatoria de tamaño *n* de un conjunto de *N* elementos que se encuentran almacenados en un archivo de entrada que no es posible almacenar en memoria funciona de la siguiente manera:

Algoritmo S:
S1. [Inicializar.] Se inicializan $t = 0$ y $m = 0$, donde m representa el número de elementos seleccionados hasta el momento y t representa el total de elementos que han sido evaluados hasta el momento.
S2. [Generar U.] Se genera un número aleatorio U uniformemente distribuido entre 0 y 1.
S3. [Evaluar.] Si $(N - t)U \geq n - m$, ir al paso S5.
S4. [Seleccionar.] Seleccionar el elemento en cuestión, las variables m y t aumentan en 1. Si $m < n$, ir al paso $S2$, en caso contrario la muestra está completa y el algoritmo termina.
S5. [Saltar.] Saltar al siguiente dato ya que el elemento en cuestión no es incluido en la muestra, $t = t + 1$ e ir al paso $S2$.

V. Una aplicación del muestreo aleatorio

La jornada electoral es el día en el que los ciudadanos mexicanos votamos para elegir a nuestros representantes. El próximo 1 de julio de 2018 se llevarán a cabo las elecciones federales de nuestro país. El Instituto Nacional Electoral (INE) es el encargado de organizar las actividades del Proceso Electoral Federal 2017-2018, la misión del INE es organizar los procesos electorales libres, equitativos y confiables, para garantizar el ejercicio de los derechos político-electorales de la ciudadanía y contribuir al desarrollo de la vida democrática en México. Para lograr su misión, el INE realiza un sorteo aleatorio para elegir a los integrantes de las 155 mil mesas directivas de casilla para la jornada electoral de este año. Cada mesa directiva está constituida por 7 funcionarios de casilla: un presidente, un secretario, un primer escrutador, un segundo escrutador, y tres suplentes generales. Para conformar estas mesas directivas es necesario seleccionar a 1,400,000 mexicanos del Padrón Electoral que es la base de datos que contiene la totalidad de ciudadanos mexicanos que se inscribieron para solicitar su Credencial para Votar y así ejercer su derecho al voto. El corte al 02 de febrero de 2018, indica que el número de mexicanos en el Padrón Electoral es 90,005,648.

¿De cuántas formas es posible elegir 1,400,000 de 90,005,648? Para responder esta pregunta, estamos obligados a conocer:

$$\binom{90,005,648}{1,400,000} = \frac{90,005,648!}{1,400,000!(90,005,648 - 1,400,000)!}.$$

Es posible aproximar el valor de los logaritmos de los factoriales:

$$\ln(90,005,648!) \approx 90,005,648(\ln(90,005,648) - 1)$$
$$\ln(90,005,648!) \approx 1558,482,266.$$

Luego,

$$90,005,648! \approx e^{\ln 90,005,648!} \approx e^{1558,482,266}.$$

Análogamente,

$$\ln(1,400,000!) \approx 18,421,776.$$
$$\ln(88,605,648!) \approx 1532,851,675.$$

Así:

$$\binom{90,005,648}{1,400,000} \approx \frac{e^{1558,482,266}}{e^{18,421,776}e^{1532,851,675}}$$
$$\approx e^{7,217,815}.$$

El cual, es un número con aproximadamente $10^{7,217,815/\ln 10} = 10^{3,134,657}$ posiciones en base 10.

Considerando que el sorteo de los mexicanos que se desempeñarán como funcionarios de casilla este 1 de julio de 2018 es un problema que puede resolverse realizando un Muestreo Aleatorio Simple, se realizará un muestreo de esta magnitud empleando el algoritmo S. Cabe aclarar que a pesar de que en la realidad el procedimiento debe realizarse por estratos, este es un ejemplo que satisface los requerimientos del algoritmo S, pues debido a la magnitud del Padrón Electoral, se trata de un archivo que no puede contenerse en memoria.

Debido a la confidencialidad del Padrón Electoral es necesario crear nuestro propio Padrón Electoral. Para crearlo, se seleccionarán aleatoriamente un nombre y un apellido de una lista con los 100 nombres y los 100 apellidos máas populares de nuestro país, después se generará aleatoriamente una fecha de nacimiento con el formato mmddaaaa y la restricción de que todas las fechas representen la de una persona mayor de edad. Además a cada persona se le asignará aleatoriamente una de las 32 entidades de nuestro país para indicar su ubicación. Con todo esto, un programa se encargará de construir nuestro Padrón Electoral constituido por 90,005,648 mexicanos.

Cabe destacar que la generación del Padrón Electoral tomó 153 minutos y el archivo en formato csv donde se

guardaron los datos tuvo una capacidad de 4GB. Esta tarea se realizó en una computadora con sistema operativo Linux Mint 18.1 Serena con un procesador Intel i5, hd-sata 1TB, 6 GB de memoria ram. El tiempo que tomó la realización de la muestra fue de 139.79 segundos y se almacenó en un archivo de 63.4MB.

VI. Conclusiones

El orden de crecimiento de permutaciones y combinaciones es al menos exponencial, lo que en la práctica vuelve imposible realizar el cómputo de permutaciones y combinaciones para valores de n y r suficientemente grandes. A pesar de eso, se logró efectuar el cómputo de permutaciones y combinaciones en el orden lexicográfico mediante la implementación de algoritmos que nos permiten lograr la realización de esta tarea. En casos generales donde n y r son números grandes, los algoritmos se centran en la tarea de generar rápida y eficientemente sólo una permutación o combinación de forma aleatoria. Esto abre la posibilidad de obtener muchas permutaciones o combinaciones aleatorias. La generación aleatoria de una combinación tiene como una principal aplicación la selección de n elementos de un conjunto de N , al algoritmo que genera una combinación aleatoria lo llamamos algoritmo S, este algoritmo es capaz de seleccionar exactamente n elementos de un archivo de entrada que contiene N datos. El algoritmo S lo hace de una forma eficiente y no presenta las limitaciones de otras técnicas de muestreo, pues en la práctica el tamaño del archivo de entrada puede ser lo suficientemente grande para no poder estar contenido en memoria ram de la computadora; incluso el archivo de salida también puede ser lo suficientemente grande para no poder estar contenido en la memoria.

Finalmente, el algoritmo S es la mejor técnica para realizar una combinación aleatoria. En la aplicación que tuvo en este trabajo se realizó la selección de 1, 400, 000 mexicanos de los 90, 005, 648 de mexicanos inscritos en el Padrón Electoral el cual está almacenado en un archivo de 4GB y que no puede ser contenido en memoria. La muestra con 1, 400, 000 datos se almacenó en un archivo de 63.4MB y tomó 139.79 segundos en ser realizada.

Referencias

[1] García Pérez A. & Alcántar Torres A. "*Fundamentos de Muestreo Aleatorio, Cómputo de Permutaciones y Combinaciones"* (Tesis de licenciatura) ESFM-IPN, Ciudad de México, México.

[2] Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

[3] Cochran, W. G. (1997). Sampling techniques. John Wiley & Sons.

[4] Cormen, T. H. (2009). Introduction to algorithms. MIT press.

[5] Hungerford, T. W. (1980). Algebra, volume 73 of graduate texts in mathematics.

[6] Grimaldi, R. P. (1998). Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones. Pearson.

[7] Instituto Nacional Electoral [INE], Elecciones 2018. Recuperado el 1 de febrero de 2018, de http://www.ine.mx/voto-y-elecciones/elecciones-2018/.

[8] Instituto Nacional Electoral [INE], Estadísticas: Lista Nominal y Padrón Electoral. Recuperado el 5 de febrero de 2018, de http://portalanterior.ine.mx/archivos3/portal/historico/contenido/Estadisticas Lista Nominal y Padron Electoral/.

[9] Instituto Nacional Electoral. Manual del Funcionario de Casilla.

[10] Jones, T. G. (1962). A note on sampling a tape-file. Communications of the ACM, 5(6), 343.

[11] Knuth, D. E. (1997). The art of computer programming, 3rd edn. Seminumerical algorithms, vol. 2.

[12] Knuth, D. E. (2011). The art of computer programming, 1st edn. Combinatorial algorithms, vol. 4a.

[13] Knuth, D. E. (1976). Big omicron and big omega and big theta. ACM Sigact News,

[14] Maistrov, L.E. (1974). Probability Theory. A Historical Sketch. Academic Press. New York.

[15] Morales, A. (1 de agosto de 2017). Planea INE instalar 155 mil casillas para elecciones en 2018. El Universal. Recuperado de http://www.eluniversal.com.mx/articulo/nacion/politica/2017/08/1/planeaine-instalar-155-mil-casillas-para-elecciones-en-2018

[16] Ochoa, C. G. (2013). Sobre los sistemas de numeración. Boletín de Monumentos Históricos, (27), 7-14.

[17] Pólya, G., Tarjan, R. E., & Woods, D. R. (1983). Notes on introductory combinatorics. Springer Science & Business Media. (Handbook style) *Signal Processing Toolbox (4.0) User´s Guide,* The Math Works, Natick, MA, 1998, pp. 6-267–6-270.

[18] Vilenkin, N. (1992). ¿De cuántas formas?, MIR.

[19] Von Mises, R. (1957). Probability, statistics, and truth. Courier Corporation.

[20] Von Mises, R. (1957). Probability, statistics, and truth. Courier Corporation.

[21] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

ISSN: 2594-1011

Frecuencias cuasinormales del potencial gaussiano

Jonathan Jaimes-Nájera[1,a)], A. López-Ortega[1,b)]
[1]Departamento de Física. Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Adolfo López Mateos. Edificio 9
Ciudad de México, México, C. P. 07738
E-mail: [a)]jnajera333@gmail.com
E-mail: [b)]alfreloport@gmail.com

Resumen —**Tomando como base el método WKB, en el presente trabajo calculamos las frecuencias cuasinormales del potencial Gaussiano. Debido a que las gráficas del potencial Gaussiano y del potencial de Pöschl-Teller son similares, hacemos una comparación de las frecuencias cuasinormales de ambos potenciales puesto que para el de Pöschl-Teller es bien conocido que sus frecuencias cuasinormales pueden calcularse analíticamente. Finalmente hacemos algunos comentarios sobre los resultados obtenidos.**

Palabras Clave – **Método WKB, Potenciales de Pöschl-Teller y Gaussiano, Potencial gaussiano, Frecuencias cuasinormales.**

Abstract —**Based on the WKB method, in the present work we compute the quasinormal frequencies of the Gaussian potential. Due to the similarity between the curves of the Gaussian and the Pöschl-Teller potentials, we compare the quasinormal frequencies of both, since it is well known that the quasinormal frequencies for the Pöschl-Teller potential can be analytically calculated. At the end we briefly discuss the results.**

Keywords — **WKB Method**, **Pöschl-Teller and Gaussian Potentials, Quasinormal Frequencies.**

I. Introducción

Los agujeros negros son sistemas disipativos por naturaleza, la razón es la existencia del horizonte de eventos ("la frontera" del agujero negro). Existen sistemas cerrados que son de naturaleza oscilatoria, pueden tener frecuencias normales de oscilación (frecuencia a la cual la estructura deformable oscilará al ser perturbada); en el caso de agujeros negros que son sistemas disipativos, existen modos de oscilación también y las oscilaciones de éstos decaen. Las frecuencias de estos modos están determinadas completamente por los parámetros del agujero negro como son la masa, la carga y el momento angular. Por esto las frecuencias cuasinormales son una herramienta útil para determinar los parámetros del agujero negro.

Usualmente es posible simplificar el problema del movimiento de un campo clásico alrededor de un agujero negro a resolver una ecuación tipo Schrödinger con un potencial de dispersión. Por esta razón es conveniente estudiar las frecuencias cuasinormales de potenciales tipo barrera. Así, puesto que la forma de un potencial tipo barrera en la ecuación de Schrödinger unidimensional puede aproximar la forma del potencial asociado a un agujero negro En nuestro caso debido a que existe una similitud entre la forma de las gráficas de los potenciales de Pöschl-Teller y gaussiano, la cual puede hacerse más evidente ajustando el valor de sus constantes como por ejemplo la altura o el ancho, más adelante calculamos las frecuencias cuasinormales de oscilación para ambos potenciales y las comparamos; este ejercicio lo hacemos para distintas alturas y contrastamos los resultados.

II. Metodología

A. Potencial de Pöschl-Teller

Como mencionamos previamente, existe una similitud entre las ecuaciones de movimiento de la teoría de perturbaciones de agujeros negros y la ecuación unidimensional de Schrödinger para un potencial tipo barrera: en ambos casos la ecuación principal tiene la misma forma. Iniciamos calculando analíticamente los modos cuasinormales –QNM por sus siglas en inglés– del potencial de Pöschl-Teller el cual servirá como modelo para varios espaciotiempos. Considérese la ecuación radial [1,2]

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_*^2}+\left[\omega^2-\frac{V_0}{cosh^2\alpha(r_*-\overline{r_*})}\right]\Psi=0, \qquad (1)$$

donde $\overline{r_*}$ es el punto r_* en el cual el potencial tiene un máximo y V_0 es el valor del potencial de Pöschl-Teller en ese punto, es decir $V_0=V(\overline{r_*})$; α está relacionada con la segunda derivada del potencial en $r_*=\overline{r_*}$,

$$\alpha^2\equiv-(2V_0)^{-1}d^2V/dr_*^2(\overline{r_*}). \qquad (2)$$

Los modos cuasinormales del potencial de Pöschl-Teller son las soluciones de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones de frontera de ser únicamente ondas salientes cuando $r_*\to-\infty$ y cuando $r_*\to+\infty$. Para encontrar estas soluciones, se define una nueva variable independiente $\xi=[1+e^{-2\alpha(r_*-\overline{r_*})}]^{-1}$ y se reescribe la ecuación (1) como sigue [3]:

$$\xi^2(1-\xi)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\xi(1-\xi)(2\xi-1)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+[\frac{\omega^2}{4\alpha^2}-\frac{V_0}{\alpha^2}\xi(1-\xi)]\Psi=0. \quad (3)$$

Cuando $r_* \to \infty$, $1-\xi \sim e^{-2\alpha(r_*-\bar{r}_*)}$; cuando $r_* \to -\infty$, $\xi \sim e^{2\alpha(r_*-\bar{r}_*)}$. Definiendo $a = \left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega\right]/(2\alpha)$, $b = \left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega\right]/(2\alpha)]$, $c = 1 - i\omega/\alpha$ y establecer $\Psi = (\xi(1-\xi))^{-i\omega/(2\alpha)}y$, se obtiene una ecuación hipergeométrica con parámetros a, b, c; esto es, para y:

$$\xi(1-\xi)\partial_\xi^2 y + [c-(a+b+1)\xi]\partial_\xi y - aby = 0 \quad (4)$$

de donde

$$\Psi = A\xi^{\frac{i\omega}{2\alpha}}(1-\xi)^{-\frac{i\omega}{2\alpha}}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \xi) + B\left(\xi(1-\xi)\right)^{-\frac{i\omega}{2\alpha}}F(a,b,c,\xi). \quad (5)$$

Con $F(a,b,c)$ denotando a la función hipergeométrica y A, B son constantes. Considerando que $F(a_1,a_2,a_3,0) = 1$ y que $\xi^{1\omega/(2\alpha)} \sim e^{i\omega r_*}$ cuando $r_* \to -\infty$, se nota que el primer término representa, de acuerdo a las convenciones aquí usadas, una onda saliente en el horizonte, mientras que el segundo término representa una onda entrante. Las condiciones de frontera de QNM requieren que $A = 0$. Ahora, se usará la ley de transformación $z \to 1-z$ para la función hipergeométrica para analizar el comportamiento al infinito:

$$F(a,b,c,z) = (1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,-c+a+b+1,1-z). \quad (6)$$

De forma similar, podemos ver que para $r_* \to +\infty$, el primer término es una onda entrante, mientras que el segundo es saliente. La condición de frontera al infinito implica $\frac{1}{\Gamma(a)} = 0$ o $\frac{1}{\Gamma(b)} = 0$, las cuales se satisfacen cuando [1]

$$\omega = \pm\sqrt{V_0 - \alpha^2/4} - \frac{i\alpha(2n+1)}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (7)$$

donde n es el índice del modo.

B. Método WKB

Existe una técnica alternativa para determinar los QNM de forma semianalítica, y basada en la aproximación WKB. Es bien sabido que la aproximación WKB es más precisa de lo que se espera y que el método puede llevarse a órdenes superiores para mejorar la precisión o para estimar los errores explícitamente.

Las ecuaciones de movimiento de la teoría de perturbaciones de agujeros negros se simplifican a una ecuación unidimensional de Schrödinger con un potencial de barrera que tiene la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0. \quad (8)$$

En el caso de los agujeros negros, ψ representa la parte radial de la variable de perturbación, la cual se asume que tiene dependencia temporal $e^{-i\omega t}$, y una dependencia angular apropiada a la perturbación particular y al agujero negro bajo estudio. La coordenada x está relacionada linealmente con la "coordenada tortuga radial" r_*, la cual tiene valores desde $-\infty$ en el horizonte de eventos hasta $+\infty$ al infinito. Usualmente $Q(x) = \omega^2 - V(x)$, donde V es independiente de la frecuencia. La Fig. 1 muestra el "potencial" $V - \omega^2$, [4,5]

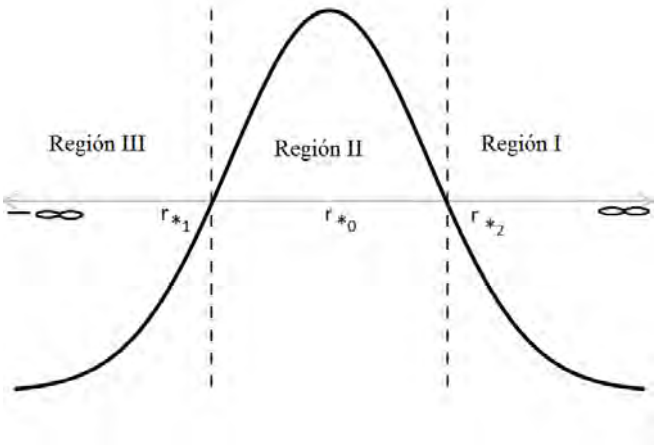


Fig. 1. La función $V(r_*) - \omega^2$.

La función Q depende de la naturaleza del campo que perturba, de la masa y el momento angular del agujero negro, de los eigenvalores de los armónicos angulares y la frecuencia. Por ejemplo, para las perturbaciones del agujero negro de Schwarzschild, la ecuación central se expresa en la forma de Regge-Wheeler:

$$\frac{d^2\psi}{r_*^2} + \left\{\omega^2 - \left[1 - \left(\frac{2M}{r}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{r^2} + \left(\frac{2\beta M}{r^3}\right)\right]\right\}\psi(r_*) = 0, \quad (9)$$

donde $\lambda = l(l+1)$, siendo l el eigenvalor angular; $\beta = 1,0,-3$ para perturbaciones escalares, electromagnéticas y gravitatorias, respectivamente, M es la masa del agujero negro. Además notamos que la coordenada r y la coordenada tortuga r_* están relacionadas de la siguiente forma

$$\frac{dr}{dr_*} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (10)$$

Para encontrar las frecuencias cuasinormales, el campo ψ en las regiones I y III de la Fig. 1 se aproxima con combinaciones lineales de ondas WKB entrantes y salientes con frecuencias llevadas a tercer orden en la expansión WKB. Estas funciones se conectan a través de la región II. Es importante mencionar que los primeros modos normales o resonancias se espera que ocurran para valores de la frecuencia tales que los "puntos de retorno clásicos" r_{*1} y r_{*2} estén cerca, cerca del máximo del potencial. En este caso, el procedimiento usual WKB que involucra conectar la solución

en la región III a través de r_{*1} con una solución WKB en el interior de la región II y una conexión similar en r_{*2} ya no es válida; los dos puntos de retorno están muy cerca uno del otro como para admitir una aproximación WKB válida a la solución interior. El método utilizado en [4] evita esta dificultad conectando las dos soluciones WKB exteriores a través de los dos puntos de retorno simultáneamente. En la región II se expande la función $V(r_*)$ alrededor de su máximo en $r_* = r_{*0}$ en serie de Taylor hasta sexto orden, incluyendo los términos $(r_* - r_{*0})^6$. La cantidad r_{*0} dependerá explícitamente de la frecuencia. Se obtiene una aproximación asintótica a la solución interior general y se usa para conectar las dos soluciones WKB.

Se obtienen dos fórmulas de conexión que relacionan las amplitudes de las ondas entrantes y salientes en cada lado de la barrera. Para los QNM la condición de frontera es que sólo haya ondas salientes, esto lleva a una restricción [5] en los valores de los coeficientes en la expansión de Taylor de $V(r_*)$ alrededor de r_{*0}, y genera que las frecuencias cuasinormales estén dadas por

$$\omega^2 = \left[V_0 + (-2V_0'')^{1/2}\Lambda\right] - i(n+\tfrac{1}{2})(-2V_0'')^{\frac{1}{2}}(1+\Omega), \tag{11}$$

$$n = \begin{cases} 0,1,2,\ldots, Re\omega > 0, \\ -1,-2,\ldots, Re\omega < 0, \end{cases}$$

donde

$$\Lambda(n) = \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}}\left[\frac{1}{8}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right]\left[\frac{1}{4}+\sigma^2\right] - \frac{1}{288}\left[\frac{V_0'''}{V_0''}\right]^2(7+60\sigma^2)\right], \tag{12a}$$

$$\Omega(n) = \frac{1}{(-2V_0'')}\left[\frac{5}{6912}\left[\frac{V_0'''}{V_0''}\right]^4(77+188\sigma^2) - \frac{1}{384}\left[\frac{V_0'''^2V_0^{(4)}}{V_0''^3}\right](51+100\sigma^2) + \frac{1}{2304}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right]^2(67+68\sigma^2) + \frac{1}{288}\left[\frac{V_0'''V_0^{(5)}}{V_0''^2}\right](19+28\sigma^2) - \frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(6)}}{V}\right](5+4\sigma^2)\right]. \tag{12b}$$

Las primas y el superíndice (n) denotan el orden de derivación respecto a r_* evaluado en r_{*0}, $(V_0'' \neq 0)$ y se define $\sigma \equiv n + \frac{1}{2}$.

En este trabajo analizamos las frecuencias cuasinormales de los potenciales $V(r_*)$ de Pöschl-Teller dado por (1) y gaussiano dado por

$$V(r_*) = V_0 e^{-r_*^2}, \tag{13}$$

el cual se expandió alrededor de $r_{*0} = 0$ puesto que en este punto está localizado el máximo del potencial gaussiano y por lo tanto es el punto apropiado para hacer la expansión del método WKB. Se observan estos potenciales en la Fig. 2 con $V_0 = 1$, donde podemos observar que sus formas son parecidas y por lo tanto es razonable hacer una comparación de sus frecuencias cuasinormales.

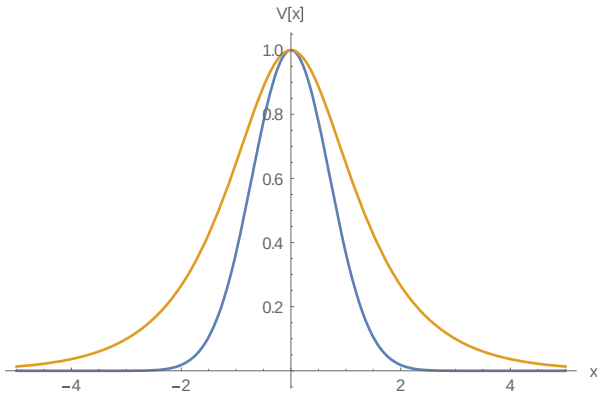


Fig. 2. Potencial de Pöschl-Teller (naranja) y potencial gaussiano (azul).

III. Resultados

Con base en la similitud entre estos dos potenciales, se comparan en la Tabla I las primeras 10 frecuencias cuasinormales que se calcularon a partir de (7) para Pöschl-Teller y las primeras 10 que se aproximaron para el potencial gaussiano a partir de (11) y (12) con $V_0 = 1$ y después con $V_0 = 2$. Se graficaron las partes imaginarias contra las partes reales de las frecuencias (Fig. 3).

TABLA I.
PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA $V_0 = 1$

	Pöschl-Teller		Gaussiano	
n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
0	0.866	−0.5	0.953	−0.532
1	0.866	−1.5	1.146	−1.479
2	0.866	−2.5	1.405	−2.418
3	0.866	−3.5	1.759	−3.387
4	0.866	−4.5	2.215	−4.391
5	0.866	−5.5	2.767	−5.434
6	0.866	−6.5	3.411	−6.520
7	0.866	−7.5	4.141	−7.650
8	0.866	−8.5	4.951	−8.825
9	0.866	−9.5	5.836	−10.046
10	0.866	−10.5	6.791	−11.313

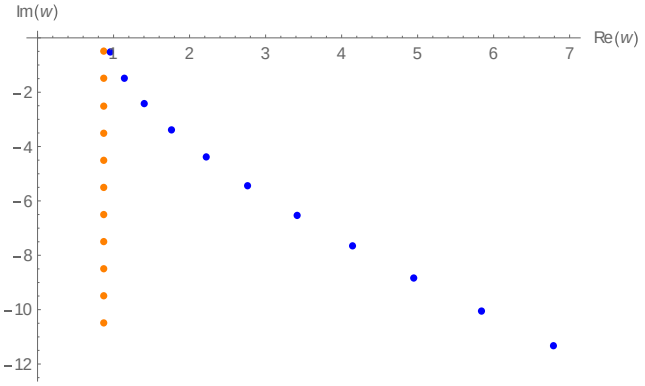


Fig. 3. Primeras 10 frecuencias cuasinormales para el potencial de Pöschl-Teller (naranja) y el potencial gaussiano (azul), para $V_0 = 1$.

Para $V_0 = 2$, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla II:

TABLA II.

PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA $V_0 = 2$

	Pöschl-Teller		Gaussiano	
n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
0	1.322	$-0.5i$	1.375	-0.517
1	1.322	$-1.5i$	1.524	-1.482
2	1.322	$-2.5i$	1.724	-2.418
3	1.322	$-3.5i$	1.987	-3.365
4	1.322	$-4.5i$	2.322	-4.332
5	1.322	$-5.5i$	2.728	-5.321
6	1.322	$-6.5i$	3.207	-6.337
7	1.322	$-7.5i$	3.753	-7.380
8	1.322	$-8.5i$	4.366	-8.452
9	1.322	$-9.5i$	5.042	-9.554
10	1.322	$-10.5i$	5.777	-10.688

La representación gráfica de los resultados de la Tabla II se muestran en la Fig. 4,

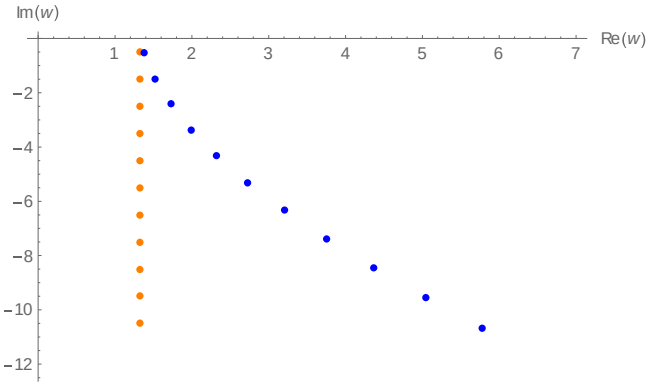


Fig. 4. Primeras 10 frecuencias cuasinormales para potencial de Pöschl-Teller (naranja) y potencial gaussiano (azul), para $V_0 = 2$.

Hasta donde conocemos, en las Tablas I y II se reportan por primera vez las frecuencias cuasinormales del potencial Gaussiano.

IV. DISCUSIÓN

Se observa que la parte real de las frecuencias obtenidas para el potencial gaussiano va creciendo de forma no lineal conforme aumenta el modo n mientras que para el de Pöschl-Teller se mantienen constantes. Para $V_0 = 1$, las partes imaginarias de las primeras diez frecuencias del potencial gaussiano difieren de las del potencial de Pöschl-Teller en un 3.41% en promedio, y se nota que para $n = 9$ difieren en un 5.74% y para $n = 10$ en un 7.74%. Las partes imaginarias son cada vez más diferentes conforme el modo n crece. En la Fig. 3 se aprecia esta separación. Para $V_0 = 2$ esta diferencia es notablemente menor; puede verse de la Tabla II y la Fig. 4 que las partes real e imaginaria son más similares. Notemos que cuando la altura de ambos potenciales aumentó las frecuencias cuasinormales se acercaron más. Es probable que conforme la altura de ambos potenciales crezca las frecuencias cuasinormales de oscilación de ambos potenciales sean cada vez más cercanas.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo del Proyecto SIP-20181408.

REFERENCIAS

[1] Ferrari V and Mashhoon B, Phys. Rev. **D 30** 295 (1894).
[2] Pöschl G and Teller E, Z. Phys. **83** 143 (1933).
[3] Abramowitz M, Stegun I A, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover) (1972).
[4] S Iyer, C M Will, Phys. Rev. **D 35**, 3621 (1986).
[5] S Iyer, Phys. Rev. **D 35**, 3632 (1986).

ISSN: 2594-1011

Caracterización espectroscópica infrarroja a transformada de Fourier de Mordenita natural intercambiada con Hierro

F. Chávez-Rivas[1], I. Rodríguez-Iznaga[2], G. Zacahua-Tlacuatl[3]
[1]Departamento de Física, ESFM del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[2]Instituto de Ciencia y Tecnología de Materiales (IMRE) - Universidad de La Habana. Zapata y G, s/n. C.P. 10400, La Habana. Cuba
[3]Laboratorio de Posgrado, ESIQIE del Instituto Politécnico Nacional. C. P. 07738, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: j.autor@esfm.ipn.mx

Resumen — **Zeolita natural Mordenita del depósito de Palmarito de Cauto (ZP), Cuba, se sometió a un proceso de intercambio iónico hidrotermal en un medio ácido con cationes Fe^{2+} y Fe^{3+} para obtener sus formas enriquecidas en hierro (Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP). El conjunto de muestras se caracterizó por Espectroscopia de energía dispersada (EDS por sus siglas en ingles) y espectroscopia infrarroja (FTIR) acoplada a NO como molécula sonda. El proceso de intercambio causó un aumento en la carga de hierro de las muestras y una redistribución, ya que las partículas relativamente grandes de óxido de hierro presentes en los materiales originales se eliminaron, con la inserción de Fe^{2+} y Fe^{3+} más dispersos. Los espectros infrarrojos de NO adsorbido dieron como resultado bandas complejas con intensidades relativas que dependen de la muestra y las condiciones de activación (oxidación frente a reducción). Más en detalle, Fe^{2+}ZP mostró la mayor intensidad de bandas de nitrosilo, asignadas a aductos de NO en sitios extra-red Fe^{2+}/Fe^{3+} aislados/altamente dispersos. Por el contrario, la muestra Fe^{3+}ZP mostró una mayor intensidad de especies de nitrosonio (NO^+). Esta característica espectral no mostró una correlación con la capacidad de adsorción de NO y podría atribuirse tentativamente a la reactividad de los sitios de Fe^{3+} en la superficie de pequeños cúmulos de Fe_xO_y.**

Palabras Clave – **Zeolitas naturales, Mordenita, espectroscopia FTIR, Fe-zeolitas.**

Abstract — **Natural purified mordenite from Palmarito de Cauto (ZP) deposit, Cuba, was subjected to a hydrothermal ion exchange process in an acid medium with Fe^{2+} and Fe^{3+} cations to obtain its iron enriched forms (Fe^{2+}ZP and Fe^{3+}ZP). The set of samples were characterized by EDS, infrared spectroscopy (FTIR) coupled to NO as a probe molecule. The exchange process caused an increase in the iron loading of the samples, in that the relatively large iron oxide particles present on the parent materials were removed, with the insertion of more dispersed Fe^{2+} and Fe^{3+}. Infrared spectra of adsorbed NO resulted in complex bands with relative intensity depending on the sample and activation conditions (oxidation vs reduction). More in detail, Fe^{2+}ZP showed the highest intensity of nitrosyl bands, assigned to NO adducts on isolated/highly dispersed Fe^{2+}/Fe^{3+} extra framework sites. On the contrary, sample Fe^{3+}ZP showed a higher intensity of nitrosonium (NO^+) species. This spectral feature did not show a correlation with NO sorption capacity, and could be tentatively ascribed to the reactivity of Fe^{3+} sites on the surface of small Fe_xO_y clusters.**

Este trabajo ha sido patrocinado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20180083 y por COFAA-IPN.

Keywords — **Natural zeolites, mordenite, FTIR spectroscopy, Fe-zeolites.**

I. Introducción

La actividad catalítica de Fe-zeolitas en la reducción catalítica selectiva (SCR) de NO_x con hidrocarburos (HC-SCR) como C_3H_6 [1], iso y n-C_8H_{18} [2], C_3H_8 [3], iso-C_4H_{10} [4] y C_2H_5OH [5] ha sido estudiada. Las zeolitas naturales como la mordenita también han llamado la atención debido a sus propiedades de intercambio iónico, estabilidad térmica, disponibilidad y bajo precio. Por lo tanto, se podrían desarrollar catalizadores eficientes y de bajo costo a partir de mordenita natural modificada con hierro.

Se han propuesto varios tipos de especies de hierro tales como iones aislados o binucleares, y grupos de óxido de hierro estabilizados en poros de zeolita como sitios activos en NO_x HC-SCR. Rutkowska et. Alabama. [6] han estudiado la descomposición catalítica y la reducción de N_2O sobre materiales micro-mesoporosos que contienen zeolita beta modificada con hierro a través del intercambio iónico seguido de calcinación. También se determinó la influencia de varios gases (O_2, NO, vapor de agua) en la eficiencia de la reducción de N_2O por CO. Los autores propusieron que los cationes monoméricos Fe^{3+} y los oligómeros Fe_xO_y pequeños son más activos que los agregados de óxido de hierro más grandes. Kim et al. [7] han estudiado la descomposición catalítica de N_2O sobre zeolita de hierro modificada de forma diferente. Entre los diferentes tratamientos (tratamiento con vapor hidrotermal, intercambio de iones con soluciones de potasio o ácido), la reducción con hidrógeno confirió al catalizador la mayor actividad. Esto se relacionó con la formación de pequeños grupos de óxido de hierro enriquecido con Fe^{2+} en los poros de zeolita. Se informó que grupos oligonucleares Fe_xO_y, acoplados a iones Fe^{3+} aislados, estaban activos en AlPO-5 que contenía Fe, donde el N_2O SCR se llevó a cabo con CH_4 en presencia de vapor de agua y oxígeno a baja temperatura (por debajo de 500 °C) [8] Los autores también señalaron que las partículas más grandes de Fe_2O_3 son capaces de activar tanto la combustión SCR como la de metano solo a una temperatura más alta. La literatura mencionada anteriormente informa sobre la actividad catalítica de las zeolitas con Fe en la reacción de NO_x, dando información

sobre la complejidad de las especies de hierro que pueden formarse dentro de los poros de zeolita. La superficie interna (y externa) de zeolita es intrínsecamente rica en sitios (átomos de oxígeno marco cargados negativamente, silanoles defectuosos y nidos de silanol) capaces de estabilizar los iones de Fe con una variedad de estados de coordinación, nucleación y oxidación, afectando fuertemente su actividad catalítica y selectividad [9].

Recientemente, hemos reportado la caracterización de zeolita Mordenita natural purificada del depósito Palmarito de Cauto (Cuba), intercambiada iónicamente por tratamientos hidrotermales con Fe^{2+} y Fe^{3+}. Las tres muestras (zeolita de referncia ZP, Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP, ver sección Experimental para más detalles) se caracterizaron por espectroscopias de Reflectancia UV-Vis y Mössbauer [10]. Estas técnicas mostraron la presencia de una gran variedad de especies de hierro en el material de referencia ZP no intercambiado: iones Fe muy dispersados en posiciones cationicas, iones Fe octaédricos en los cúmulos oligoméricos de tipo Fe_xO_y dentro de los canales y cumulos más grandes de óxido de hierro/hidróxido y partículas de Fe_2O_3 localizadas en la superficie externa de los cristales de zeolita. Después del intercambio hidrotermal, se encontró que la muestra Fe^{3+}ZP tiene una mayor cantidad de aglomerados de óxido de hierro y una cantidad menor de especies catiónicas dispersas que Fe^{2+}ZP. Junto con una plétora de clústeres / agregados de oxihidróxidos, se propuso que el Fe^{2+} estuviera presente en posiciones extraestructurales como cationes compensadores de carga. La formación de sitios Brønsted, probablemente formada por la inserción de iones Fe^{3+} en posiciones del marco durante el tratamiento hidrotérmico, se evaluó además mediante espectroscopía infrarroja en Fe^{3+}ZP.

En este trabajo, el conjunto de muestras que comprende ZP, Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP se caracterizaron por EDS y espectroscopía infrarroja acoplada a NO como molécula sonda, para obtener información sobre las propiedades de superficie y la reactividad del hierro en las muestras. Finalmente, su actividad catalítica se probó en el SCR CO/C_3H_6 de NO.

II. Metodología

A. Materiales

Se obtuvo un material de zeolita purificada de la roca zeolítica del depósito Palmarito de Cauto (Cuba), a través de purificaciones magnéticas y gravimétricas [11]. Esta zeolita es una mezcla de ~ 70% de mordenita con otras fases (clinoptilolita-heulandita, montmorillonita, cuarzo, feldespato y óxidos de hierro). La composición química de la muestra en forma de óxido, con el resto en forma de agua, es; 61.93 % de SiO_2; 13.42 % de Al_2O_3; 4.95% de CaO; 2.53% Fe_2O_3; 1.14% de MgO; 1.52% de K_2O; 2.33% de Na_2O y 1.22% de FeO. Esta zeolita purificada se denominara en este trabajo como la mordenita natural (ZP).

Para obtener la formas modificadas naturales de mordenita con hierro, se intercambiaron muestras ZP (con una clase de tamaño de partícula de +38 -74 μm) a un pH = 2 con soluciones de $FeSO_4$ y $Fe(NO_3)_3$ 0.05 N. Los intercambios se llevaron a cabo con una relación sólido/líquido de 1g/20ml a 80 °C, mientras se agitaban durante 24 horas y se reemplazaron las soluciones de intercambio después de 12 h. Las muestras resultantes se lavaron (en primer lugar con agua destilada acidificada y luego con agua destilada) hasta que los aniones de nitrato y sulfato se eliminaron totalmente y el pH fue neutro. Luego se secaron en estufa a 100 °C y se almacenaron en un desecador para asegurar un contenido constante de agua. Las formas de ZP modificadas con Fe^{2+} y Fe^{3+} se designaron como Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP, respectivamente.

B. Caracterización

Las composiciones elementales de las muestras se analizaron mediante espectroscopia de rayos X de energía dispersiva (EDS) usando un microscopio JEOL 3010-UHR con potencial de aceleración de 100 kV, colocando las muestras en polvo sobre una rejilla de cobre cubierta con una película de carbono.

Los espectros infrarrojos se registraron en un espectrómetro BRUKER FTIR-66 con una resolución de 2 cm^{-1}, usando un detector MCT. Las mediciones se llevaron a cabo utilizando una celda de cuarzo que permite el tratamiento térmico in situ, la dosificación del gas y la medición a temperatura ambiente. Se prepararon pastillas extra delgadas para mediciones de transmisión (alrededor de 10 mg/cm^2) con una prensa hidráulica. Los tratamientos de oxidación se llevaron a cabo dosificando 60 Torr de O_2 a 550 °C durante 1 hora después de una rampa de calentamiento en vacío. De forma similar, la activación de reducción se llevó a cabo a 400 °C durante 1 hora con 60 Torr de H_2. En ambos casos, las muestras fueron evacuadas antes de enfriarse a temperatura ambiente. El NO, cuidadosamente destilado, se dosificó en las muestras a temperatura ambiente después de medir los espectros de referencia activados por zeolita. Los espectros se midieron siguiendo una reducción paso a paso de la presión (P_{NO}).

IV. Resultados y Discusión

A. Análisis elemental

El contenido de hierro del material de partida ZP y sus formas intercambiadas Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP son 1.55, 3.06 y 2.68 %, respectivamente. Como se analiza con más detalle en nuestro artículo reciente [10], el hierro ya está presente en la muestra de zeolita natural. Sin embargo, después de los tratamientos de intercambio hidrotérmico, aumenta la cantidad de hierro, como resultado del intercambio iónico de Fe^{2+} y Fe^{3+} con cationes presentes en la mordenita natural, principalmente Ca^{2+} y Na^{+}.

El microanálisis de EDS llevado a cabo a diferentes aumentos indica una gran heterogeneidad en la distribución de hierro en todas las muestras. Sin embargo, los espectros EDS (ver Fig. 1) de una manera cualitativa reflejan el efecto del intercambio de hierro porque los espectros EDS de los catalizadores ZP y Fe^{3+}ZP muestran la presencia de Mg, Na, K, Ca y Fe, mientras que la muestra Fe^{2+}ZP solo muestra la presencia de Ca y Fe. Estas observaciones consolidan los datos mencionados anteriormente sobre el intercambio de estos cationes como se constato en la Ref. [10] por medio de las espectroscopias UV-Vis.

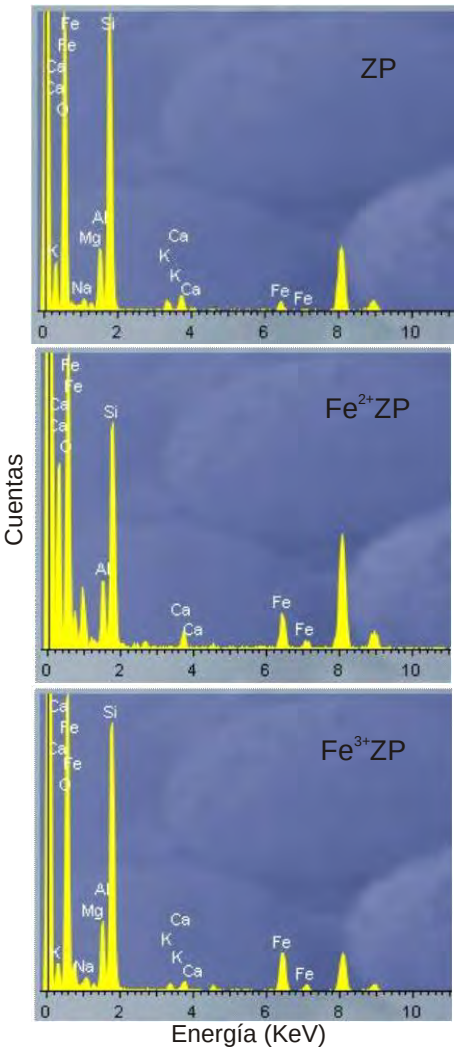


Fig. 1. Espectros EDS de ZP, Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP. Los picos a 8.1 y 9 KeV son las señales de Cu que surge del porta muestra.

B. *Estudio de la adsorción de NO por FTIR*

El análisis por espectroscopia infrarroja de la adsorción de NO o NO_2 en zeolitas acidas o zeolitas intercambiadas con iones metálicos, es un método bien conocido en la caracterización de iones expuestos, a través de la formación de complejos adsorbidos con huellas vibratorias característicos. Además, se pueden inferir indicaciones indirectas sobre la reactividad de sitios Brønsted o iones metálicos observando la formación de los productos de la reacción de NO/NO_2 adsorbidos, como iones de nitrosonio NO^+, nitratos NO^{3-}, nitritos NO^{2-} o agua [12][13].

Los experimentos de adsorción de NO se llevaron a cabo a temperatura ambiente en las muestras ZP, Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP, después de tratamientos de oxidación y reducción. Después de la dosificación de NO, se observaron modificaciones en las regiones espectrales de estiramiento OH (νOH, de 3800 a 3000 cm^{-1}), en las regiones espectrales de nitrosonio y nitrosilo (de 2300 a 1700 cm^{-1}) y en las regiones espectrales de los modos de flexión del agua δ (H_2O) y en las regiones de nitrato (de 1750 a 1300 cm^{-1}). La discusión de estos espectros se centrará principalmente en la región de nitrosonio/nitrosilo, mostrando las bandas más intensas e informativas.

C. *Muestra ZP*

En la Figura 2 se muestran los experimentos de adsorción de NO en la región NO^+/NO de la muestra de ZP oxidada y reducida. espectros superior e inferior, respectivamente. Como se mencionó anteriormente por medio del análisis EDS y de la Tabla 1 de Ref. [10], esta muestra contiene iones Ca^{2+}, K^+ y Na^+, que probablemente estén presentes como contra iones mono o divalentes y además contienen una pequeña cantidad de partículas de óxidos de hierro, que no pudieron eliminarse por extracción magnética.

En la muestra de ZP oxidada (parte superior de la figura 2) hay tres grupos de bandas: una centrada en 2265 cm^{-1}, un segundo grupo entre 2200 y 1920 cm^{-1} y un tercero entre 1920 y 1700 cm^{-1}. Algunos de estos grupos también están presentes en la muestra reducida (parte inferior), aunque con menor intensidad. El primer grupo está formado por una banda intensa en 2265 cm^{-1}, con hombros en 2282 y 2251 cm^{-1}, que pueden asignarse a N_2O adsorbido [14]. Más en detalle, las bandas a 2282 y 2248 cm^{-1} fueron asignadas por Rivallan et al. a N_2O adsorbido en dos sitios distintos Fe^{x+} en canales o poros en Fe-ZSM-5 [15]. Por lo tanto, podemos inferir que las bandas observadas están relacionadas con N_2O adsorbido en diferentes sitios superficiales de Fe^{x+} (x = 2, 3) en pequeñas partículas de óxido de hierro, formadas tras la reacción con NO. Esta asignación se basa en el hecho de que su intensidad disminuye en la muestra reducida, por lo que deben estar relacionados con sitios con capacidad redox, excluyendo la participación de iones Na^+, K^+ o Ca^{2+}.

Al llegar al segundo grupo de bandas, este se compone de una amplia absorción con un máximo de 2139 cm^{-1} y un hombro a 2070 cm^{-1}, con una banda muy ancha centrada en 1975 cm^{-1}, que no están presentes en la muestra reducida. Bandas similares han sido asignadas por diferentes autores a NO^+ [16], formado por la reacción de NO con átomos de oxígeno adsorbidos, con la formación de NO_2 que luego reacciona con protones para dar NO^+ y agua [17]. Del

mismo modo, Rivallan et al. propuso que el NO_2 se transforma en HNO_3 fisi-absorbido, el cual controla la formación de iones NO^+ intercambiados por los protones de la zeolita [15]. Los mismos autores propusieron que la banda ancha en 1975 cm^{-1} no se debe a los modos vibracionales de las nuevas especies adsorbidas, sino a la ligera modificación de los modos de la red de la zeolita perturbados por la presencia de fuertes adsorbatos [15]. Esta interpretación se ajusta bien a los datos reportados en este trabajo, ya que las bandas en el intervalo de 2200 y 1920 cm^{-1} desaparecen en la muestra reducida, donde es probable que no esté presente oxígeno adsorbido.

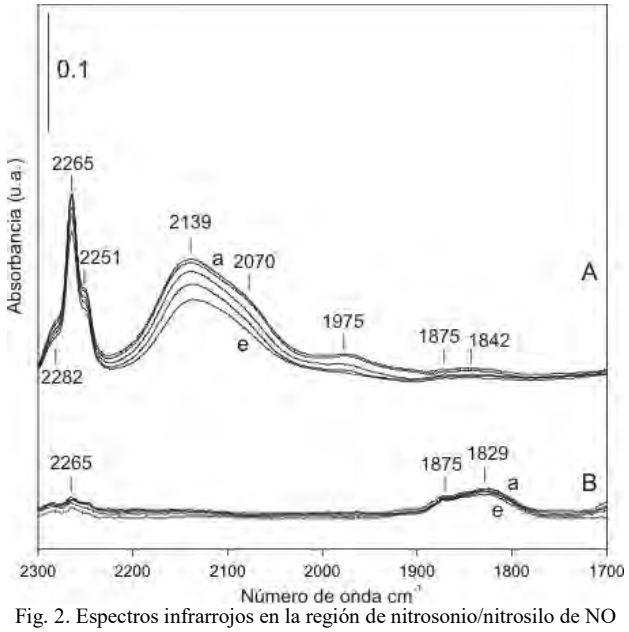


Fig. 2. Espectros infrarrojos en la región de nitrosonio/nitrosilo de NO adsorbido a temperatura ambiente en muestras ZP oxidada (A) y reducida (B), P_{NO} de equilibrio = 0,4 mBar (a) y posterior evacuación por etapas hasta vacío dinámico (e).

Finalmente, el tercer grupo de bandas en la región de 1950-1700 cm^{-1} se asigna fácilmente a los aductos nitrosílicos en los sitios extra red Fe^{2+}/Fe^{3+} [15]. Estas bandas son muy débiles en muestras de ZP tanto en las muestras oxidadas como reducidas y se describirán con más detalle a continuación. las bandas de esta tercera región son típicas de sitios extra red de hierro altamente dispersos, su baja intensidad indica que la mayoría de hierro en esta muestra está presente como partículas de óxidos de hierro.

D. Muestras Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP

Los espectros infrarrojos medidos con la adsorción de NO en las muestras Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP en la región NO^+/NO (de 2300 a 1700 cm^{-1}) se reportan en las Figuras 3 y 4, respectivamente. En ambas muestras, el conjunto de bandas asignadas a N_2O adsorbido en sitios Fe^{x+} (x = 2, 3) es más débil con respecto a lo observado en la muestra de ZP oxidada, de acuerdo con su asignación a sitios superficiales presentes en pequeños grupos de óxido de hierro. En cuanto a las bandas asignadas a los iones NO^+, estas tienen diferente posición e intensidad dependiendo de la muestra (Fe^{2+}ZP o Fe^{3+}ZP) y el tratamiento de activación (oxidado o reducido, superior e inferior, respectivamente). Más en detalle, la muestra de Fe^{2+}ZP oxidada muestra un componente principal centrado en 2141 cm^{-1} (hombro a 2065 cm^{-1}), que es similar a lo observado en ZP (2139 con hombro en 2070 cm^{-1}). Como se observó en la muestra ZP, esta banda casi desaparece después del tratamiento de reducción (curvas inferiores de la Figura 3). Por el contrario, se observa una banda muy intensa en el espectro Fe^{3+}ZP oxidado en 2155 cm^{-1}, que disminuye pero aún muestra una intensidad considerable después de la reducción (curvas superior e inferior en la Figura 4). Esto sugiere la reactividad del NO con el oxígeno adsorbido, dando NO_2 que luego forma NO^+ y otros productos (HNO_2, HNO_3, H_2O, etc.), depende fuertemente de la naturaleza de la especie de hierro insertada. A saber, esta reacción tiene lugar principalmente en Fe^{3+}ZP, mientras que en ZP oxidado y Fe^{2+}ZP oxidada ambos tienen una actividad similar y más baja. La posición diferente de la banda NO^+ sugiere diferentes entornos locales, lo que podría deberse a los sitios vecinos de hierro y Brønsted. Esto está de acuerdo con nuestros resultados previos, que muestran la presencia de sitios de Fe(OH)Si Brønsted, probablemente formados por la inserción de hierro durante el intercambio en condiciones hidrotermales, que fueron particularmente importantes en Fe^{3+}ZP [10].

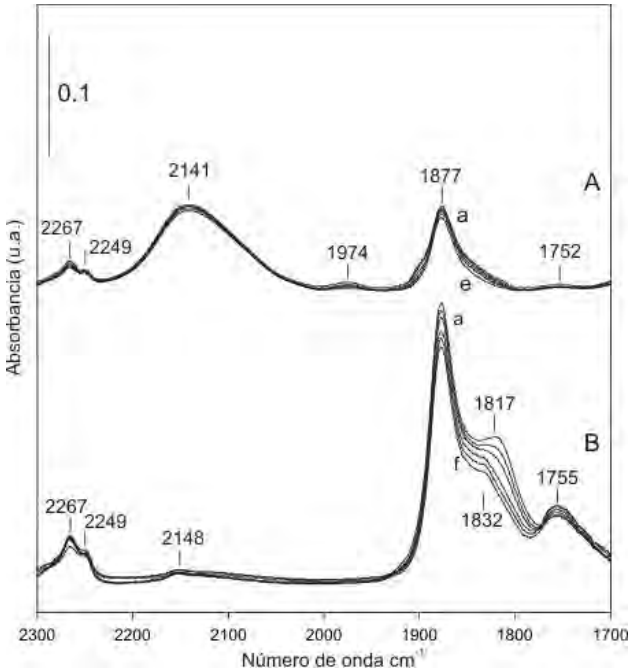


Fig. 3. Espectros infrarrojos en la región de nitrosonio/nitrosilo de NO adsorbido a temperatura ambiente en muestra Fe^{2+}ZP oxidada (A) y

reducida (B), P_{NO} de equilibrio = 0,4 mBar (a) y posterior evacuación por etapas hasta vacío dinámico (f).

En relación con la región de nitrosilo, la muestra de Fe^{2+}ZP oxidada muestra un pico relativamente intenso a 1878 cm^{-1} con hombros a 1902 cm^{-1} y 1817 cm^{-1} y una banda muy débil a 1752 cm^{-1} (Figura 3, curvas superiores) . Se observa una intensidad mucho mayor después de la reducción (panel inferior). Se observa una tendencia similar en la muestra Fe^{3+}ZP (Figura 4), aun cuando las bandas son menos intensas. Las bandas en esta región espectral se han observado a menudo en la adsorción de NO en zeolitas sintéticas intercambiadas con hierro, y generalmente se atribuyen a sitios Fe^{2+} altamente dispersos, con una contribución menor de aductos de NO en iones Fe^{3+}, ya que esta interacción es menos favorable y/o las bandas correspondientes se caracterizan por un menor coeficiente de extinción [9,15,18]. Más detalladamente, los iones Fe^{2+} casi aislados mostraron la capacidad de agregar hasta tres ligandos de NO en su esfera de coordinación, en relación con su alto nivel de accesibilidad y su no-saturación coordinada [9,18]. Esto da como resultado una evolución espectral compleja con la variación de la presión de equilibrio del NO. La posición de las bandas correspondientes a los complejos $Fe^{2+}(NO)$, $Fe^{2+}(NO)_2$ y $Fe^{2+}(NO)_3$ resultó ser sensible al entorno local de Fe, incluido el contenido/agregación de hierro [18] y la presencia de Al en la red [19]. Con base en estas consideraciones, una asignación precisa de las bandas observadas en la región de 1950-1700 cm^{-1} no es directa. De hecho, un pico agudo en el rango de 1900-1876 cm^{-1} ha sido asignado a los aductos de $Fe^{3+}(NO)$ formados en la superficie de pequeños grupos de Fe_xO_y [15,18].
Las bandas en 1813 y 1755 cm^{-1} en cambio se asemejan a las observadas alrededor de 1817 y 1765-1769 cm^{-1} en zeolitas Fe sintéticas, asignadas a los modos de estiramiento más intensos (asimétricos) de $Fe^{2+}(NO)_3$ y $Fe^{2+}(NO)_2$ complejos, respectivamente. La no precisa coincidencia de las posiciones de las bandas podría explicarse por el entorno local diferente de los sitios de Fe, como se informa en la Ref. 9, donde se revisó la posición de las bandas de estos complejos en diferentes compuestos.

V. Conclusiones

Las formas intercambiadas de hierro en mordenita (Fe^{2+}ZP y Fe^{3+}ZP) se obtuvieron a partir de mordenita purificada naturalmente del depósito de Palmarito de Cauto (ZP), Cuba, mediante procesos de intercambio iónico hidrotermal en un medio ácido con cationes Fe^{2+} y Fe^{3+}. Las muestras se caracterizaron por espectroscopia de EDS y FTIR acoplada a moléculas de sondeo de NO (FTIR-NO). Los estudios de FTIR-NO mostraron una mayor intensidad de las bandas de nitrosilo formadas por la adsorción de NO en la muestra Fe^{2+}ZP. Estas bandas (presentes tanto en muestras oxidadas como reducidas) están relacionadas con iones Fe^{2+}/Fe^{3+} aislados/altamente dispersos en posiciones extra red, y son más abundantes en Fe^{2+}ZP. Por el contrario, la intensidad de los iones de nitrosonio NO^+, formados tras la reacción de NO con oxígeno y probablemente con protones son más abundantes en la muestra de Fe^{3+}ZP, en comparación con la muestra Fe^{2+}ZP.

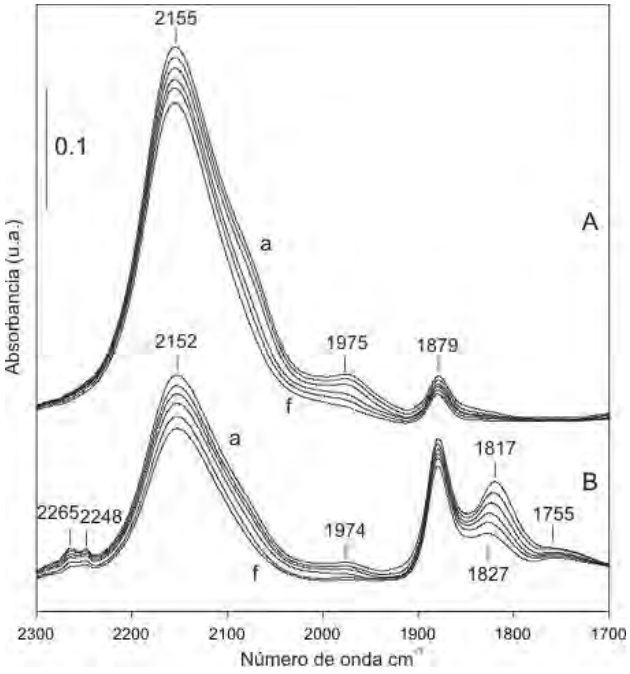


Fig. 4. Espectros infrarrojos en la región de nitrosonio/nitrosilo de NO adsorbido a temperatura ambiente en muestra Fe^{3+}ZP oxidada (A) y reducida (B), P_{NO} de equilibrio = 0,4 mBar (a) y posterior evacuación por etapas hasta vacío dinámico (f).

Agradecimientos

El autor F. Chávez Rivas agradece a la Dra. G. Berlier del departamento de Chímica de la Universidad de Turín, Italia, por su apoyo técnico.

Referencias

[1] A. Kucherov, C. Montreuil, T. Kucherova, and M. Shelef, "In situ high-temperature ESR characterization of FeZSM-5 and FeSAPO-34 catalysts in flowing mixtures of NO, C_3H_6, and O_2," Catal. Lett., vol. 56, pp. 173–181, Dec. 1998.

[2] R. Brosius, and J.A. Martens, "Reaction Mechanisms of Lean-Burn Hydrocarbon SCR over Zeolite Catalysts," Topics Catal., vol. 28, pp. 119–130, April 2004.

[3] Z. Sobalík, A. Vondrová, Z. Tvarůžková, and B. Wichterlova, "Analysis of the structural parameters controlling the temperature window of the process of SCR-NO_x by low paraffins over metal-exchanged zeolites," Catal. Today, vol. 75, pp. 347–351, July 2002.

[4] H.Y. Chen, X. Wang, and W.M.H. Sachtler, "Reduction of NO_x over zeolite MFI supported iron catalysts: Nature of active sites," Phys. Chem. Chem. Phys., vol. 2, pp. 3083–3090, March 2000.

[5] J. Janas, J. Gurgul, R.P. Socha, T. Shishido, M. Che, and S. Dzwigaj, "Selective catalytic reduction of NO by ethanol: Speciation of iron and "structure–properties," relationship in

FeSiBEA zeolite," Appl. Catal. B: Environmental, vol. 91, pp. 113–122, Sep. 2009.

[6] M. Rutkowskaa, L. Chmielarz, D. Macina, Z. Piwowarska, B. Dudek, A. Adamski, S. Witkowski, Z. Sojka, L. Obalová, C.J. Van Oers, and P. Cool, "Catalytic decomposition and reduction of N_2O over micro-mesoporous materials containing Beta zeolite nanoparticles," Appl. Catal. B: Environmental, vol. 146, pp. 112–122, March 2014.

[7] M.-Y. Kim, K.W. Lee, J.-H. Park, C.-H. Shin, J. Lee, and G. Seo, "Catalytic decomposition of nitrous oxide over Fe-BEA zeolites: Essential components of iron active sites," Korean J. Chem. Eng., vol. 27, pp. 76–82, January 2010.

[8] D.-G. Cheng, F. Chen, and X. Zhan, "Characterization of iron-containing AlPO-5 zeolite as a stable catalyst for selective catalytic reduction of N_2O with CH_4 in the presence of steam," Appl. Catal. A., vol. 435- 436, pp. 27–31, Sept. 2012.

[9] A. Zecchina, M. Rivallan, G. Berlier, C. Lamberti, and G. Ricchiardi, "Structure and nuclearity of active sites in Fe-zeolites: comparison with iron sites in enzymes and homogeneous catalysts," Phys. Chem. Chem. Phys., vol. 21, pp. 3483–3499, January 2007.

[10] D. Tito-Ferro, I. Rodríguez-Iznaga, B. Concepción-Rosabal, G. Berlier, F. Chávez-Rivas, A. Penton-Madrigal, F. Castillón-Barraza, and V. Petranovskii, "Iron exchanged natural mordenite: UV–Vis diffuse reflectance and Mössbauer spectroscopy characterization," Int. J. Nanotechnology, vol. 13, nos. 1/2/3, pp. 112–125, January 2016.

[11] D. Tito-Ferro, I. Rodríguez-Iznaga, B. Concepción-Rosabal, F. Chávez-Rivas, V. Córdova Rodríguez, and R. Rizo Beyra, "El hierro en la roca zeolitizada del yacimiento de Palmarito de Cauto: separación y caracterización de fases magnéticas," Revista Minería y Geología, vol. 27, no.1, pp. 22–37, Enero-marzo 2011.

[12] S.A. Skarlis, D. Berthout, A. Nicolle, C. Dujardin, and P. Granger, "Combined IR spectroscopy and kinetic modeling of NOx storage and NO oxidation on Fe-BEA SCR catalysts," Appl. Catal. B, vols. 148–149 pp. 446–465, April 2014.

[13] G. Berlier, M. Pourny, S. Bordiga, G. Spoto, A. Zecchina, and C. Lamberti, "Coordination and oxidation changes undergone by iron species in Fe-MCM-22 upon template removal, activation and red–ox treatments: an in situ IR, EXAFS and XANES study," J. Catal., vol. 229, no. 1, pp. 45–54, January 2005.

[14] . K. Hadjiivanov, B. Tsyntsarski, and T. Nikolova, "Stability and reactivity of the nitrogen-oxo species formed after NO adsorption and coadsorption on Co-ZSM-5: An FTIR $NO+O_2$ spectroscopic study," Phys. Chem. Chem. Phys., vol. 1, pp. 4521-4528, 1999.

[15] M. Rivallan, G. Ricchiardi, S. Bordiga, and A. Zecchina, "Adsorption and reactivity of nitrogen oxides (NO2, NO, N2O) on Fe–zeolites," J. Catal., vol. 264, no. 2, pp. 104–116, June 2009

[16] K. Hadjiivanov, A. Penkova, M. Daturi, J. Saussey, and J.-C. Lavalley, "FTIR spectroscopic study of low-temperature co-adsorption of NO and O_2 on H-ZSM-5: evidence of formation of $[ONNO]^+$ species," Chem. Phys. Lett., vol. 377, no. 3–5, pp. 642–646. August 2003.

[17] C. Henriques, O. Marie, F. Thibault-Starzyk, and J.-C. Lavalley, "NO^+ ions as IR probes for the location of OH groups and Na^+ ions in main channels and side pockets of mordenite," Microporous Mesoporous Mater., vol. 50, nos. 2–3, pp. 167–171, December 2001

[18] G. Berlier G. Spoto, S. Bordiga, G. Richiardi, P. Fisicaro, A. Zecchina, I. Rossetti, E. Selli, L. Forni, E.Giamello, and C. Lamberti, "Evolution of Extraframework Iron Species in Fe Silicalite. Effect of Fe Content, Activation Temperature, and Interaction with Redox Agents" J. Catal., vol. 208, no. 1, pp. 64-82. May 2002.

[19] G. Berlier, A. Zecchina, G. Spoto, G. Ricchiardi, S. Bordiga, and C. Lamberti, "The role of Al in the structure and reactivity of iron centers in Fe-ZSM-5-based catalysts: a statistically based infrared study," J. Catal., vol. 215, no. 2, pp. 264–270, April 2003.

ISSN: 2594-1011

Microestructura y propiedades mecánicas obtenidas al añadir NPs de SiO_2 y Al_2O_3 al cordón de soldadura formado por SAS.

A. Jiménez-Jiménez [1], A. M. Paniagua-Mercado [1], A. García-Bórquez [1], V. M. López-Hirata [2], A. S. De Ita-De la Torre [3], E. Miguel-Díaz [4], M. L. Saucedo-Muñoz [2].

[1] Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 07738, CDMX, México.

[2] Depto. Ingeniería en Metalurgía y Materiales, Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional, 07738, CDMX, México.

[3] Depto. Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, 02200, CDMX, México.

[4] Div. Ingeniería Industrial y Forestal, Instituto Tecnológico Superior de la Sierra Norte de Puebla, 73310, Zacatlán, México.

Teléfono (55) 20666707 E-mail: abel237jimenez@gmail.com

Resumen — **Se estudió la microestructura y propiedades mecánicas del cordón de soldadura (CS) adicionado con nanopartículas (NPs) durante el proceso de Soldadura por Arco Sumergido (SAS). Las NPs (de SiO_2 o Al_2O_3) se mezclaron con alcohol etílico y antes de la formación del CS se aplicaron sobre el bisel formado entre dos placas de acero AISI 1025. Los cambios microestructurales y de fase se analizaron en la Zona Afectada por el Calor (ZAC) y la Zona de Soldadura (ZS) mediante metalografías. Las propiedades mecánicas de los CS se determinaron por ensayos de tensión, impacto Charpy y dureza Vickers. De las metalografías de los CS con NPs de SiO_2 o Al_2O_3, la fase ferrita acicular (FA) se presenta en mayor porcentaje respecto a un CS obtenido sin la adición de NPs. La longitud de las agujas de FA aumentó en 113 % para NPs de SiO_2 y 183% y para NPs Al_2O_3. De los ensayos mecánicos se registran incrementos en la ductilidad y la tenacidad, así como disminución en la fragilidad y resistencia a la tracción en los CS con NPs, en comparación a un CS sin adición de NPs.**

Palabras Clave – ***Ferrita Acicular, NPs de SiO_2- y Al_2O_3-, Soldadura por Arco Sumergido*.**

Abstract — **The microstructure and mechanical properties of the weld bead (WB) added with nanoparticles (NPs) during the process of Submerged Arc Welding (SAW) were studied. The NPs (of SiO_2 or Al_2O_3) were mixed with ethyl alcohol and before the WB formation were applied on the bevel formed between two AISI 1025 steel plates. The microstructural and phase changes were analyzed in the Heat Affected Zone (HAZ) and the Welding Zone (WZ) through metallographies. The mechanical properties of the WB were determined by Tensile, Charpy Impact and Vickers Hardness tests. By the metallographies of the WB with SiO_2 or Al_2O_3 NPs, the Acicular Ferrite (AF) phase occurs in greater percentage with respect to a WB obtained without NPs addition. The length of AF needles had an increase by 113% for SiO_2-NPs and 183% for Al_2O_3-NPs. From the mechanical tests, increases in the ductility and toughness are recorded, as well as a decrease in the fragility and tensile strength in the WB with NPs, in comparison to a WB without NPs addition.**

Keywords — ***Acicular Ferrite, SiO_2- and Al_2O_3-NPs, Submerged Arc Welding.***

I. Introducción

Numerosos estudios de investigación concuerdan que la ferrita acicular (FA) mejora la resistencia a la tensión y la tenacidad del CS [1-2]. La nucleación de esta fase depende de características de las inclusiones, tales como: tipo y tamaño [3], coherencia cristalográfica con el metal circundante [4], composición química y contenido de oxígeno [5].

En particular, es conocido que la adición de ciertos óxidos nanométricos sobre el metal fundido, favorece el comportamiento de las inclusiones como sitios potenciales de nucleación heterogénea, para fases cristalinas, como la FA con tamaños de grano pequeños [6-7].

Sin embargo, el uso de NPs en los procesos de soldadura presenta inconvenientes por los costos elevados y los problemas en las técnicas para su incorporación. Actualmente existen dos tendencias de investigación para soslayar estas desventajas [8-9].

Uno de ellos consiste en combinar las NPs de determinados óxidos con el fundente a utilizar, y la otra en aplicar las NPs directamente sobre la superficie del bisel antes de la formación del CS [10-12]. Ambos reportan un efecto benéfico en las propiedades mecánicas del CS, con una diminución relativa en los costos de producción. Con todo ello, aún existen problemáticas que resolver, como especificar el tipo de reacción electroquímica y/o termoquímica que se produce durante la formación del plasma, lo que a su vez condicionará la transferencia de elementos aleantes desde el fundente hasta el baño de soldadura o viceversa. También es importante resolver los defectos que se forman en el CS, como poros.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es analizar el efecto sobre la microestructura y propiedades mecánicas obtenidas al añadir NPs de óxidos de silicio y aluminio al CS entre placas de acero al bajo carbono. Así, la la metodología seguida para ello consistió en: 1. Soldar placas de acero AISI 1025 con y sin NPs mediante el proceso SAS; 2. caracterizar los cambios microestructurales en las diferentes zonas del CS; 3. determinar las propiedades mecánicas del CS y 4. correlacionar los puntos 2 y 3.

II. METODOLOGÍA

Los materiales empleados fueron un electrodo M12K, fundente fundido comercial (FFC) y dos placas de acero AISI 1025. Estas últimas fueron biseladas a 45° de manera que al juntarlas se forma un bisel simple en V. En la Tabla 1 se presenta la composición química de cada uno de estos materiales.

TABLA I. COMPOSICIÓN QUÍMICA DE METAL BASE, ELECTRODO Y FUNDENTE.

Línea del elemento	Metal Base[1] Wt. %	Electrodo[2] Wt. %	FFC[3] Wt. %
C	0.22-0.28	0.05-0.15	-
Na	-	-	5.04
Mg	-	-	0.46
Al	-	-	2.01
Si	≤ 0.04	0.10-0.35	21.87
S	≤ 0.05	≤ 0.03	-
P	≤ 0.04	≤ 0.03	
Ca	-	-	5.9
Ti	-	-	16.48
Mn	0.3-0.6	0.85-1.25	47.67
Fe	99.03-99.48	≥ 95	-
Cu	-	0.35	-
Zr	-	-	0.57

1. ASTM A36 / A36M – 14; 2. ANSI/WS A5.17/A5.17M-97; 3. Microanalisis elemental por EDS.

Las NPs de óxidos se aplicaron en solución directamente a la superficie del bisel. Se mezclaron 8.19 g de de SiO_2 y 5.91 g de Al_2O_3 en 12 y 10 ml de alcohol etílico, respectivamente. El tamaño promedio de las NPs de SiO_2 fue de 20 nm y el de las NPs de Al_2O_3 fue de 13 nm.

Para formar los CS, se utilizó una soldadora automática NA-3S con control digital a 600 A y 30 V. Debido a que la adición de los óxidos en tamaño nanométrico cambio la fluidez del metal de fundido, fue necesario cambiar las velocidades de soldado para evitar la aparición de defectos en los CS. Estas velocidades se presentan en la Tabla II.

TABLA II. MEZCLA Y VELOCIDAD DE SOLDADO USADA PARA FORMAR CADA CS.

CS	Mezcla	Velocidad de soldado [in/min]
CS-Control*	-	16 (1°-4° pasada)
CS-SiO_2	SiO_2+alcohol etílico	16 (1° pasada); 13 (2°-4° pasada)
Cs-Al_2O_3	Al_2O_3+alcohol etílico	

* Para analizar la influencia de añadir NPs al CS fue necesario comparar la microestructura y las propiedades mecánicas obtenidas de un CS obtenido sin adición de NPs.

La punta del electrodo se colocó en el centro del bisel en V, a una distancia de aproximadamente 1 cm. Durante el proceso, electrodo y bisel permanecieron completamente cubiertos por el FFC.

Terminado el proceso, los CS se cortaron transversalmente con una cortadora abrasiva Buehler Abrasimet 9". Estos cortes transversales prepararon metalográficamente con papel de lija de hasta 2500, seguido de un pulido en paño con alúmina de hasta 0.03 μm, y micro ataque con Nital al 2% durante 12 s para revelar tres zonas de interés: MB, ZAC y ZS. Las imágenes se obtuvieron con una cámara Moticam 2300 acoplada a un microscopio metalúrgico invertido Olympus PMG3.

Las pruebas de tensión se realizaron sobre muestras rectangulares tamaño subsize, utilizando una máquina universal Shimadzu Autograph y siguiendo el procedimiento descrito en la norma ASTM E8 / E8M. Por otro lado, la microdureza Vickers se determinó en las regiones de MB, ZAC y ZS. El microdurómetro utilizado fue Future Tech FM, siguiendo la norma ASTM E92. Finalmente, la tenacidad de los CS se evaluó mediante la prueba de impacto Charpy V-notch con una máquina de impacto Tinius Olsen modelo MP1 / 1, según la norma ASTM E23.

Se analizaron las fases cristalinas y composición de la escoria y el fundente quemado resultantes durante la formación de cada CS, con el fin evaluar los cambios de composición que puedan afectar la microestructura final del CS.

Las fases cristalinas en las escorias y los fundentes quemados se caracterizaron por difracción de rayos X (DRX). Los patrones de difracción (PD) se midieron con un difractómetro Bruker D8 Focus y radiación de Cu-Kα. El difractómetro se operó a 30 kV, 25 mA y una velocidad de 4 ° / min. Para el análisis se empleó el software HighScore Plus 3.0.5 y la base de datos ICSD 2013-1.

Los microanálisis elementales se obtuvieron con un Espectrómetro de Dispersión de Energía de rayos X (EDXS) Thermo Fisher Scientific, acoplado a un SEM un JEOL JSM-6300. Las mediciones se obtuvieron a 20 kV y a un ángulo de captación de 30°. Los datos se analizaron usando el software NORAN System SIX.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20170181 y SIP-2018695.

II. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

A. Análisis Microestructural de la ZAC y ZS.

El MB de todos los CS presenta una microestructura tipo hipoeutectoide compuesta por granos de ferrita alfa (α-Fe) y perlita (P) (Fig. 1.a). Los tamaños de grano de la fase α-Fe se encuentran en el rango de 9.8-10.4 μm. Estos valores se obtuvieron mediante el método de interceptos, el cual se reporta en la norma ASTM E112-96. Además se observa que existe bandeado en la microestructura de esta región debido a efectos de micro segregación de elementos aleantes en el acero, tal como el Mn.

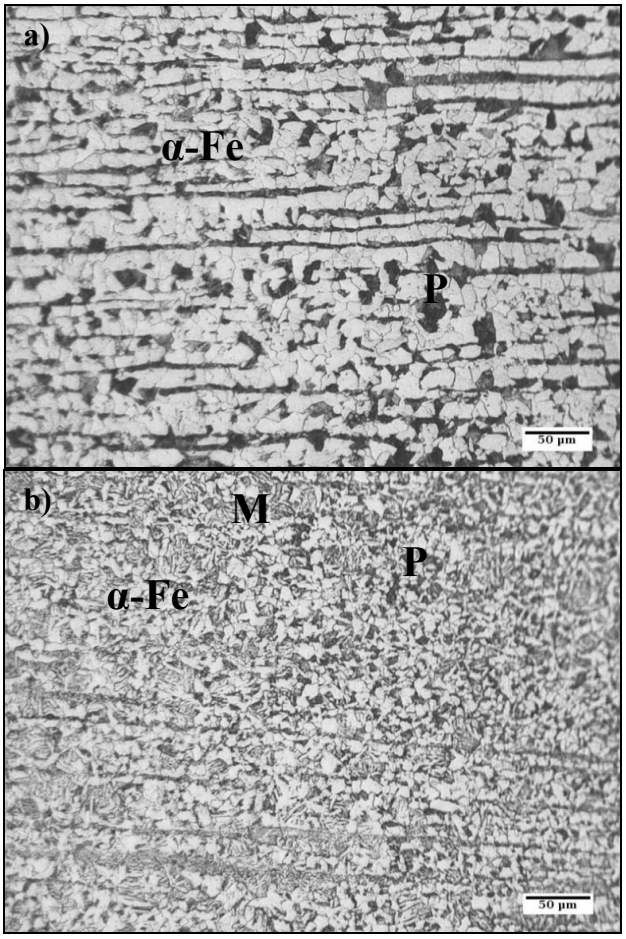


Fig. 1. Microstructura observada en las regiones a) del MB y la ZAC mas alejada a la línea de fusión. Ambas microestructuras son similares para todos los CS obtenidos.

A medida que se analiza la microestructura en regiones próximas a la entrada de calor, pudo observarse un refinamiento de grano en la interface MB-ZAC (Fig. 1.b). La microestructura en este caso se compone de granos de α-Fe, perlita (P) y el crecimiento de pequeñas colonias de martensita (M). La alineación de granos se presenta en menor grado comparada con el MB. En este caso los granos de α-Fe tienen un tamaño promedio entre 6.3-8.8 µm.

Ya en la ZAC, debido a la cercanía con la entrada de calor se dieron las condiciones para el proceso de recristalización y crecimiento de grano. En particular, en la interface de ZAC-ZS mostrada en la Fig. 2, se presenta una microestructura compuesta por granos de M, austenita (γ-Fe), P y ferrita alotromórfica (FAL). La alineación de granos de las zonas anteriores desaparece completamente. Ya que la estructura de la fase γ-Fe tiene una mayor solubilidad para el carbono y demás elementos aleantes, disminuye el bandeado observado anteriormente.

En la ZS cercana a la línea de fusión se presenta una microestructura columnar típica del proceso de solidificación. En las zonas de crecimiento columnar o dendrítico se aprecia el crecimiento de algunas colonias de ferrita acicular (FA).

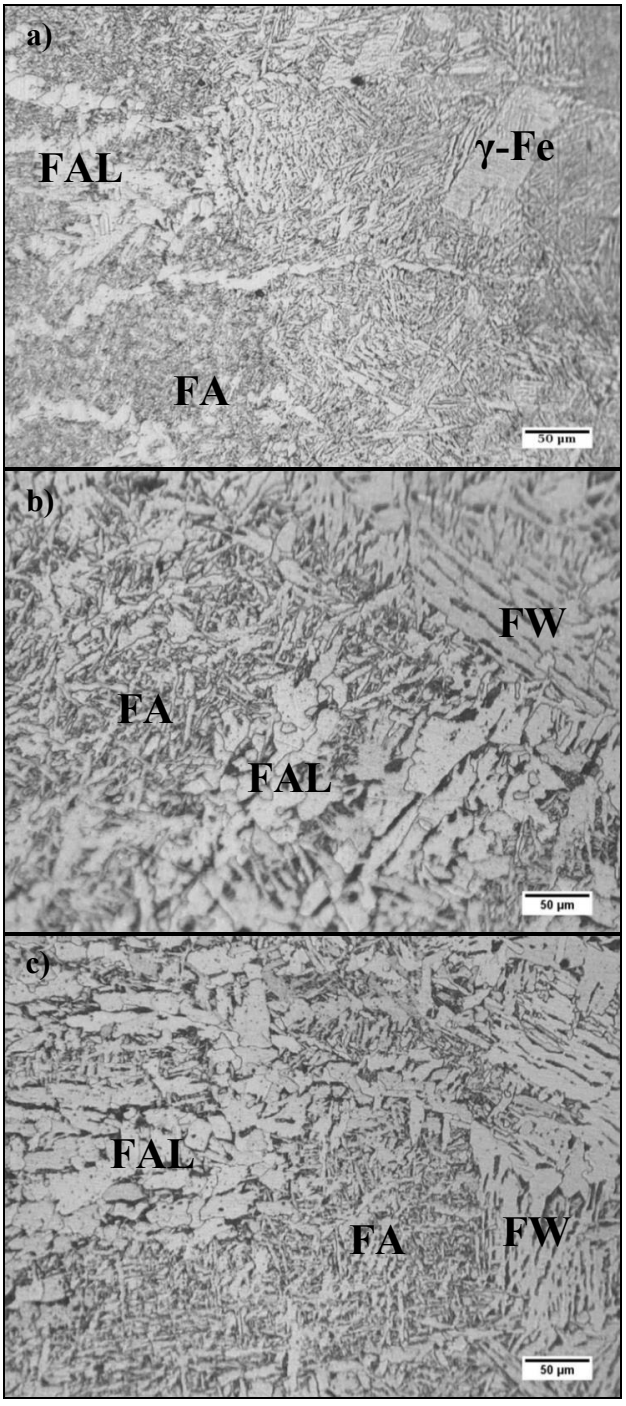


Fig. 2. Microstructura observada de la interface ZAC-ZS correspondiente a los a) CS-Control, b) CS-SiO_2 y c) CS-Al_2O_3.

La microestructura de la ZS está compuesta de FAL, ferrita Wiedmasttaten (FW) y FA. Se pudo observar que las dimensiones de las agujas de FA son más gruesas en los CS con adición de NPs de óxido comparadas con las correspondientes al CS-Control. Los valores de largo y

ancho de estas agujas de FA fueron de 10.5 y 2.3 µm para el CS-Control, 23.8 y 3.7 µm para el CS con NPs de SiO_2, y 28.2 y 4.1 µm para el CS con NPs de Al_2O_3. Por esta razón, se concluyó que existe una relación entre el tipo de óxido añadido y las dimensiones de la fase de FA.

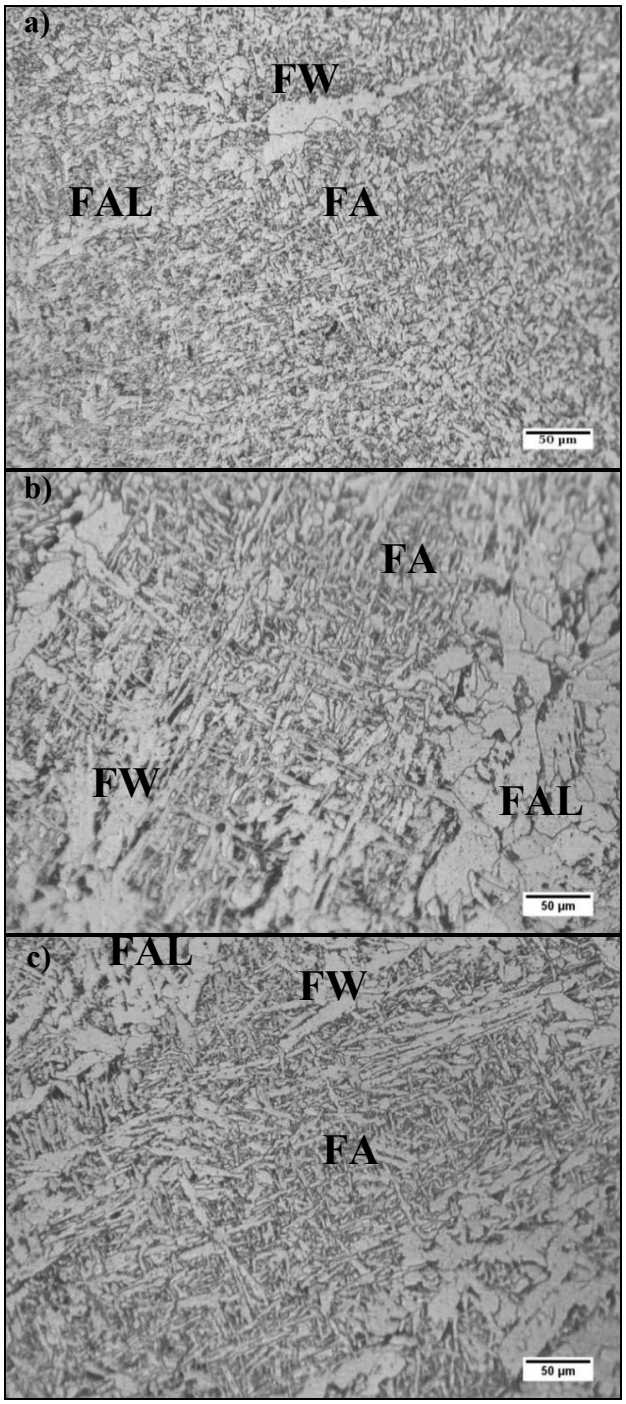


Fig. 3. Microstructura observada de ZS correspondiente a los a) CS-Control, b) CS-SiO_2 y c) CS-Al_2O_3.

B. Ensayo de tensión.

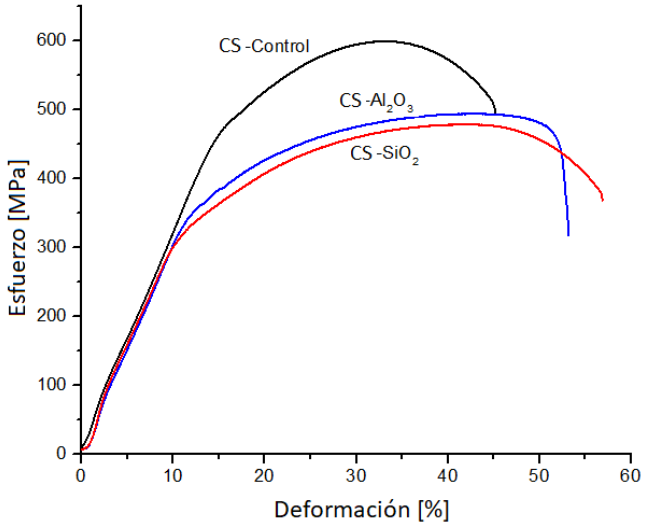


Fig. 4. Curvas de esfuerzo-deformación obtenidas en ensayo de tensión.

El CS-Control presenta el mayor valor de resistencia a la tracción y límite de cedencia, seguido del CS-Al_2O_3 y el CS-SiO_2 (Fig. 4). De acuerdo a los resultados de la Tabla III se calculó que el usó de NPs de Al_2O_3 y SiO_2 disminuyen los valores antes mencionados en 17.7 y 25.4 %, y en 20.3 y 32.9 %, respectivamente.

TABLA III. PARÁMETROS CALCULADOS DEL ENSAYO DE TENSIÓN DE LOS CORDONES DE SOLDADURA.

Muestra	Resistencia a la tracción [MPa]	Esfuerzo límite de cedencia [MPa]	Reducción de área [%]	Elongación [%]
CS-Control	600	456	48	26
CS-SiO_2	478	306	61	38
CS-Al_2O_3	494	340	44	39

Sin embargo, se observa que el porcentaje de elongación y reducción de área son siempre mayores en los CS con NPs. Se tiene que el CS-Al_2O_3 presenta un mayor porcentaje de elongación comparado con el CS-SiO_2. Esto indica que el uso de NPs incrementa la ductilidad de los CS.

C. Ensayo de dureza Vickers.

La Fig. 5 muestra los valores de microdureza Vickers (HV) en MB, ZAC y ZS de los CS. Cabe señalar que el número de mediciones realizadas fue diferente para cada región de todos los CS analizados, ya que cada uno presento dimensiones completamente diferentes debido a las variaciones en los parámetros de entrada durante el proceso de soldadura. En cada una de las regiones, se buscó tener la mayor cantidad de mediciones para reducir los errores estadísticos.

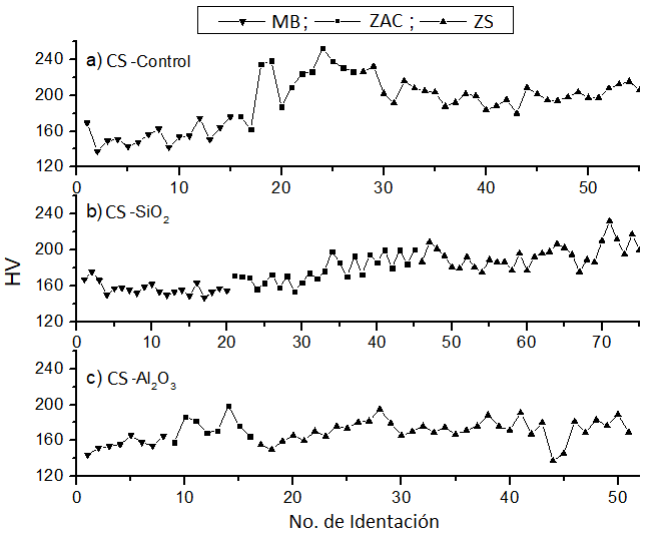


Fig. 5. Comparación de los valores de microdureza obtenidos en MB, ZAC y ZS para el a) CS-Control, b) CS-SiO_2 y c) CS-Al_2O_3.

Las gráficas muestran que la ZAC y ZS presentan valores de microdureza más altos que el MB. Comparando ZS y ZAC de CS con NPs añadidas con el CS-Control se observa que la microdureza de las primeras disminuye. Para el caso de los CS-SiO2 y -Al2O3, este último presenta valores de microdureza ligeramente menores (Tabla IV).

TABLA IV. VALORES DE MICRODUREZA EN HV PROMEDIO EN MB, ZAC Y ZS DE LOS CS.

Muestra	MB	ZAC	ZS
CS-Control	155.5	217.2	201.7
CS-SiO_2	156.8	177.4	194.0
CS-Al_2O_3	155.9	175.8	171.6

Tal como se indicó anteriormente, el valor de microdureza en la ZAC se ve afectado por la entrada de calor y, con ello, la velocidad de enfriamiento. En el CS-Control la velocidad de soldado es más alta en comparación con los otros CS, por lo que la velocidad de enfriamiento es incrementa y a su vez produce refinamiento de grano.

Por el contrario, en los CS-SiO_2 y –Al_2O_3 tuvo que disminuirse la velocidad de soldado, lo que resulto en una menor velocidad de enfriamiento del metal fundido e incremento del tamaño de grano, lo cual se traduce como menores valores de microdureza en esa región. En el caso de CS-SiO_2 y CS-Al_2O_3, los valores de HV en ZAC tuvieron una disminución de 18.3 y 19.1 %, comparadas respectivamente con el CS-Control.

De los resultados anteriores, se determinó que la adición de NPs de óxidos al CS disminuye los valores de microdureza de la ZS respecto al CS-Control. Específicamente, los valores de microdureza en la ZS del CS-SiO_2 y el CS-Al_2O_3 disminuyen alrededor de 3.8 y 14.9 %, respectivamente. De esta manera, puede concluirse una dependencia entre las NPs de óxido agregadas y la microdureza en la ZS. Esto puede correlacionarse con lo obtenido en las metalografías, pues se obtiene que las agujas de FA en la ZS son más delgadas para el CS-SiO_2 respecto a las presentes en el CS-Al_2O_3.

D. Ensayo de Impacto Charpy.

En la Tabla V se muestran los resultados de las energías absorbidas durante la prueba de impacto Charpy para CS sin y con NPs.

TABLA V. ENERGÍAS ABSORBIDAS EN [J] DE PRUEBA DE IMPACTO CHARPY.

CS	1	2	3	4	Prom.
CS-Control	78.6	73.2	89.5	81.3	79.9
CS-SiO_2	157.3	141.0	146.4	147.8	147.1
CS-Al_2O_3	115.2	119.3	122.0	151.9	120.7

De acuerdo a la norma mexicana NMX-H-077-CANACERO-2017, se especifica que para la evaluación de resultados debe descartarse el valor más alto y el más bajo de la prueba para todas las designaciones que requieren prueba de impacto. Los valores restantes no deben diferir en mas de 27 J, lo cual se cumple en las medidas de la Tabla V.

Se observa que la energía absorbida durante el impacto para los CS a los que se agregaron NPs de óxidos aumenta respecto al CS-Control. La energía absorbida durante el impacto aumentó en 83.91 y 50.86 % debido a la adición de NPs de SiO_2 y Al_2O_3, respectivamente. Este aumento en la energía absorbida se interpreta como un comportamiento más dúctil de la fractura en CS con NPs en comparación con el CS-Control.

E. Análisis de fases cristalinas y microanálisis elemental de escorias y fundentes quemados.

La Fig. 6 muestran los PDs correspondientes a la escoria y el fundente quemado formado en el CS-SiO_2. En los PDs de la escoria y el fundente quemado se identificaron las fases cristalinas de pirofanita ($MnTiO_3$), silicato de di-manganeso (Mn_2SiO_4) y fayalita ($FeMnSiO_4$). El elemento predominante en estas fases es Mn, seguido de Si y Ti.

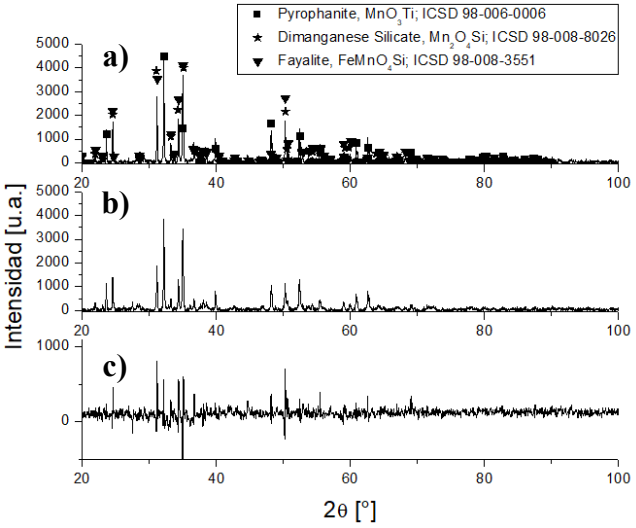


Fig. 6. PD de a) escoria y b) fundente quemado formado en el CS-SiO_2. c) Diferencia en las intensidades del PD de la escoria menos el del fundente quemado.

Al analizar la diferencia de las intensidades medidas en los PD de la escoria y el fundente quemado, se puede determinar que las fases de silicato de di-manganeso y fayalita tienen una presencia relativamente mayor en la escoria en comparación con el fundente quemado. De acuerdo con el análisis semicuantitativo, las fases de ambos PD están en los siguientes porcentajes: 35, 41 y 24% en la escoria, mientras que 37, 36 y 27% en el fundente quemado.

TABLA VI. COMPOSICIÓN QUÍMICA DE ESCORIA Y FUNDENTE QUEMADO FORMADOS EN EL CS-SiO_2.

Línea del Elemento	Escoria		Fundente quemado	
	Wt. %	Atom. %	Wt. %	Atom. %
Na K	3.03	5.79	3.18	6.03
Mg K	0.13	0.24	0.38	0.68
Al K	1.46	2.37	1.37	2.22
Si K	15.5	24.26	15.93	24.77
Ca K	5.21	5.72	5.4	5.89
Ti K	17.21	15.79	16.68	15.21
Mn K	51.66	41.32	54.37	43.22
Fe K	5.6	4.41	2.29	1.79
Zr L	0.19	0.09	0.4	0.19
Total	100	100	100	100

En cuanto a la composición química en la Tabla VI, se resumen los valores obtenidos para la escoria y el fundente quemado formados en el cordón de soldadura CS-SiO_2. La gran similaridad de los valores nos indica que existen transferencias significativas de Si, y si se compara con el FFC en la Tabla I, tampoco se registran pérdidas de las NPs de SiO_2 agregadas durante SAS. Los elementos mayoritarios Mn, Si y Ti concuerdan con las fases identificadas con DRX.

Los PDs de la escoria y el fundente quemado formados en el CS-Al_2O_3, se muestran en las Fig. 7. Ambas presentan coincidencias con las fases de pirofanita y silicato de di-manganeso. La diferencia de intensidades de los picos de difracción muestra una mayor presencia de la fase de Mn_2SiO_4 en la escoria (Fig. 7.c).

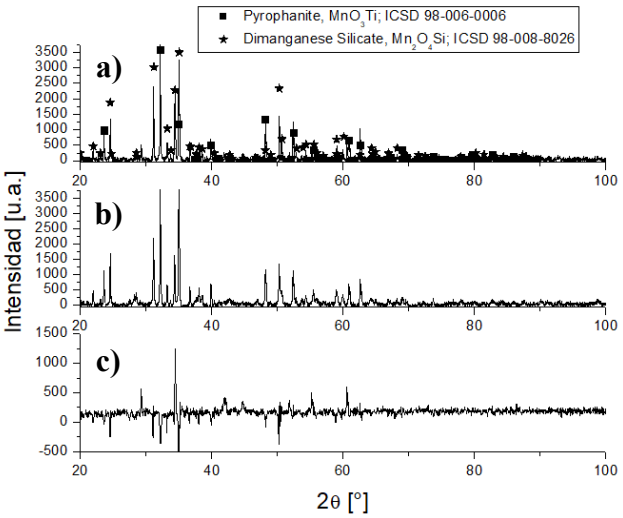


Fig. 7. PD de a) escoria y b) fundente quemado formado en el CS-Al_2O_3. c) Diferencia en las intensidades del PD de la escoria menos el del fundente quemado.

En este caso, el análisis semicuantitativo determinó que las fases cristalinas pirofanita y silicato de di-manganeso se encuentran en porcentajes de 39 y 61% en la escoria, y 40-60% en el fundente quemado, respectivamente.

TABLA VII. COMPOSICIÓN QUÍMICA DE ESCORIA Y FUNDENTE QUEMADO FORMADOS EN EL CS-Al_2O_3.

Línea del elemento	Escoria		Fundente quemado	
	Wt. %	Atom. %	Wt. %	Atom. %
Na K	3.07	5.85	3.29	6.25
Mg K	0.38	0.68	0.3	0.53
Al K	1.66	2.69	1.48	2.39
Si K	15.3	23.88	15.76	24.48
Ca K	5.19	5.68	5.29	5.76
Ti K	16.9	15.46	16.73	15.24
Mn K	49.47	39.48	55	43.68
Fe K	7.93	6.23	2.09	1.64
Zr L	0.11	0.05	0.06	0.03
Total	100	100	100	100

De los valores de concentración en peso y atómicos reportados para el Al (Tabla VII), y al compararlos con su respectiva concentración en el FFC, puede verse que no hay una pérdida significativa de NPs-Al_2O_3 añadidas durante el proceso de SAS.

Tanto de los resultados anteriores, así como del hecho en que durante la formación del CS se cubrió por completo a las NPs agregadas durante el proceso de SAS, se puede esperar que el Si y Al influyan en la microestructura final del CS.

IV. CONCLUSIONES

1. Se observó que agregar NPs de SiO_2 y Al_2O_3 al CS incrementa la longitud de las agujas FA en 137 y 168% respecto al largo de estas agujas en el CS-Control. De acuerdo a estos resultados, puede concluirse que existe una

relación entre el tipo de óxido añadido y las dimensiones de las agujas FA.

2. La adición de NPs durante el proceso de SAS incrementa la ductilidad del CS a costa de disminuir la resistencia a la tracción y el límite de cedencia.

3. La microdureza promedio en la ZAC y la ZS son ligeramente más altas que la obtenida en el MB para todos los CS estudiados. La adición de NPs de SiO_2 o Al_2O_3 disminuye la dureza de la ZS en 3.8 o 14.9% respecto al CS-Control.

4. La energía absorbida durante el impacto aumentó 83.91 y 50.86% al agregar NPs de SiO_2 o Al_2O_3, respectivamente.

5. Al obtenerse tanto en escorias y fundentes quemados valores similares de concentración de Si y Ti añadidos durante SAS comparados con los presentes en el FFC, significa que las pérdidas de estos elementos es mínima.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de la Dra. Elvia Díaz Valdés, Dra. Concepción Mejía Garrido, Dr. Angel Guillén y el Tec. Justo Arias Paniagua. Asimismo, se agradece el apoyo y facilidades brindadas por los Laboratorios de la ESFM-IPN, ESIQIE-IPN, UAM-Azcapotzalco, Cinvestav-Zacatenco y el ITSSNP.

REFERENCIAS

[1] S. S. Babu, “The mechanism of acicular ferrite in weld deposits,” *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, vol. 8, no. 3–4. pp. 267–278, 2004.

[2] Z. Xiong, S. Liu, X. Wang, C. Shang, X. Li, and R. D. K. Misra, “The contribution of intragranular acicular ferrite microstructural constituent on impact toughness and impeding crack initiation and propagation in the heat-affected zone (HAZ) of low-carbon steels,” *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 636, pp. 117–123, 2015.

[3] J. Jang and J. E. Indacochea, “Inclusion effects on submerged-arc weld microstructure,” *J. Mater. Sci.*, vol. 22, no. 2, pp. 689–700, 1987.

[4] Z. M. Cui, L. G. Zhu, Y. L. Li, Q. J. Zhang, C. L. Yan, and W. L. Mo, “Relationship between Crystal Structure of Inclusions and Formation of Acicular Ferrites,” *J. Iron Steel Res. Int.*, vol. 23, no. 6, pp. 586–592, 2016.

[5] V- Ekstrom and K. Olson, “The inlfuence of ferrite and oxygen contens on weld metals mechanical properties of submerged arc weld stainless Steel.”, *Weld pool chemistry and metallurgy conference*, pp. 323-332, 1985.

[6] S. Hossein Nedjad and A. Farzaneh, “Formation of fine intragranular ferrite in cast plain carbon steel inoculated by titanium oxide nanopowder,” *Scr. Mater.*, vol. 57, no. 10, pp. 937–940, 2007.

[7] C. Chen, H. Xue, H. Peng, L. Yan, L. Zhi, and S. Wang, “Inclusions and microstructure of steel weld deposits with nanosize titanium oxide addition,” *J. Nanomater.*, vol. 2014, 2014.

[8] M. Aghakhani, M. R. Ghaderi, A. Karami and A. Derakhshan, “Combined effect of TiO_2 nanoparticles and input welding parameters on the weld bead penetration in submerged arc welding process using fuzzy logic”, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol.70, no. 1-4, pp. 63-72, 2014.

[9] M. Aghakhani and P. Naderian, “Effect of combining Cr_2O_3 nano-particles and welding input parameters on the heat affected zone width in submerged arc welding process”, *4th Int. Conf. on Ultrafine Grained and Nano-Structured Materials*, 2013.

[10] A. M. Paniagua-Mercado, V. M. López-Hirata and M. Saucedo-Muñoz, “Influence of the chemical composition of flux on the microestructure and tensile properties of submerged-arc welds”, *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 169, pp. 346-351, 2005.

[11] A. M. Paniagua-Mercado, P. Estrada-Díaz and V. M. López-Hirata, “Chemical and structural characterization of the crystalline phases in agglomered fluxes for submerged-arc welding”, *J. Mater. Process. Technol.,* vol.141, pp. 93-100, 2003.

[12] A. M. Paniagua-Mercado, V. M. Lopez-Hirata, H. J. Dorantes-Rosales, P. Estrada Diaz, and E. Diaz Valdez, “Effect of TiO_2-containing fluxes on the mechanical properties and microstructure in submerged-arc weld steels,” *Mater. Charact.*, vol. 60, no. 1, pp. 36–39, 2009.

ISSN: 2594-1011

Sistema de monitoreo para campos eléctricos en el suelo y ondas de radio de baja frecuencia en el medio ambiente

José Antonio Peralta[1], Porfirio Reyes López[1] y Israel Reyes Ramírez[2]
Escuela Superior de Física y Matemáticas[1] y Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas[2], IPN,
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55007 Fax (55) 5729-55015 E-mail: peraltar@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presenta en este trabajo un sistema de registro y análisis de las variaciones del campo eléctrico del suelo, así como de las ondas de radio ambientales de muy baja frecuencia (0-10 000 Hz) con el objeto de detectar posibles precursores sísmicos. El programa utilizado registra las señales de radio de 3 bobinas orientadas en 3 direcciones perpendiculares a una frecuencia de muestreo de 20 000 muestras/s, realiza un análisis de Fourier y divide el intervalo de frecuencias en 5 bandas guardando el área bajo la curva para cada banda cada segundo. También registra los voltajes de 4 electrodos enterados de acuerdo al método VAN. Tanto el registro como el análisis han sido realizado con un programa desarrollado en lenguaje G de LabVIEW.**

Palabras Clave – **Campo eléctrico del suelo, ondas de radio ambientales, precursores sísmicos.**

Abstract − **This work presents a system of recording and analysis of the variations of the electric field of the soil, as well as the environmental radio waves of very low frequency (0-10 000 Hz) in order to detect possible seismic precursors. The program used records the radio signals of 3 coils oriented in 3 directions perpendicular to a sampling frequency of 20,000 samples / s, performs a Fourier analysis and divides the frequency range into 5 bands keeping the area under the curve for each band every second. It also records the voltages of 4 electrodes buried according to the VAN method. Both the registration and the analysis have been done with a program developed in LabVIEW G language.**

Keywords — **Electric field of the soil, environmental radio waves, Fourier spectrums**

I. Introducción

El análisis de las perturbaciones en el campo eléctrico del suelo con el objeto de establecer si éstas podían fungir el papel de posibles precursores sísmicos, de acuerdo a lo propuesto por los investigadores griegos Varotsos, Alexopulos y Nomicos [1,2], comenzó en la ESFM del IPN desde el año 1994 por un grupo de investigadores coordinados por el Doctor Fernando Angulo Brown y el Doctor Enrique Yépez Mulia. En ese tiempo el proyecto fue financiado por el entonces DDF; el proyecto finalizó cuando el DDF pasó a ser el Gobierno de la Ciudad de México. Los resultados de este proyecto han sido reportados en diversas publicaciones [3, 4, 5]. El proyecto vuelve a ser reemprendido en los años recientes, pero ahora basado en el desarrollo tan importante que la computación, la microelectrónica y las comunicaciones por internet han tenido desde la última década del siglo pasado hasta el presente. A este sistema de registro y análisis de las señales eléctricas del suelo, que se hicieron originalmente, se han agregado, siguiendo la propuesta de algunos investigadores japoneses [6] el análisis de las ondas de radio en bandas bajas en las que la influencia artificial es mínima.

La emisión de señales eléctricas y de ondas electromagnéticas durante la acumulación de energía elástica y la ruptura de las rocas de las placas tectónicas, ha sido verificada experimentalmente por diferentes grupos de investigadores tanto japoneses, rusos como norteamericanos [7, 8]. En nuestro laboratorio también hemos registrado las ondas de radio, así como los sonidos que se producen al fracturar cristales de cuarzo [9]. Después de una breve interrupción de algunos meses, este año el proyecto de registro de señales anómalas prosigue y en las páginas siguientes mostramos la metodología experimental propuesta para el registro y el análisis de las señales.

II. Experimental

Registro de las señales eléctricas

El suelo es un espacio en el que pueden confluir diferentes tipos de señales eléctricas. El voltaje de la línea que alimenta de energía a casas, escuelas, fábricas y demás en general tiene una conexión directa a la tierra física que hacen que varíe el campo eléctrico; las tormentas que producen relámpagos significan grandes inyecciones de carga en el suelo; otros factores para producir perturbaciones del campo eléctrico de la tierra pueden ser las debidas a la presencia de diferentes calidades de suelo, así como de pequeños flujos de corriente provocados por el metabolismo de la vegetación, que implica desplazamientos de iones, todo ello contribuye a que la tierra sea un espacio rico en señales eléctricas cambiantes. En función de lo anterior queda la pregunta de cómo distinguir de entre el amasijo de posibles señales eléctricas las que nos interesan. Si los focos sísmicos contribuyen a esta riqueza de señales, dada su lejanía del orden de decenas de kilómetros deben generar en el suelo campos eléctricos constantes E en distancias de unos cientos de metros, por ello es válido suponer, en caso de que existan estas señales de origen telúrico, que las diferencias de voltaje V entre 2 puntos de la tierra sean proporcionales a su distancia d de acuerdo a la fórmula V = E.d. Por tanto, un criterio para discriminar los campos eléctricos provenientes de fuentes lejanas es seleccionar los cambios de voltaje que sean proporcionales a la distancia entre electrodos y además que se presenten simultáneamente. Para lograr este objetivo los electrodos enterrados tendrán un electrodo de referencia y alineados en

forma perpendicular se enterrarán 2 por cada línea tal como se observa en la figura 1.

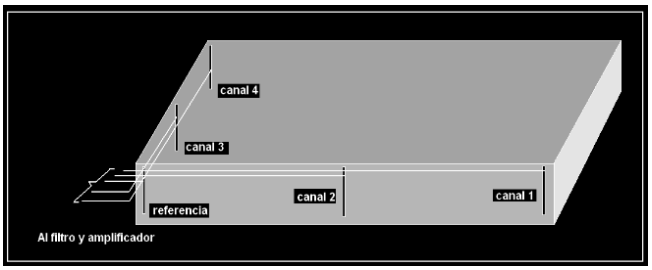


Figura 1. Esquema de la distribución de las barras de acero para detectar cambios en el campo eléctrico

Por otra parte, dado que es probable que las señales que prevalezcan en la tierra sean las de 60 Hz, porque esta es la frecuencia del voltaje que alimenta en general a todos los usuarios, las señales capturadas en los 4 pares de electrodos serán amplificadas y filtradas con una frecuencia de corte de 30 Hz. Para ello se utilizarán filtros pasa-bajas tales como los de la figura 2.

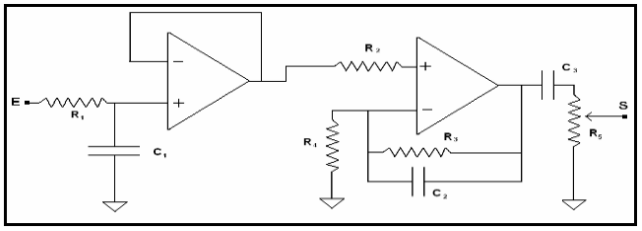


Figura 2. Filtro pasabajas configurado para una frecuencia de corte de 30 Hz

La salida de los 4 filtros-amplificadores se conecta a una tarjeta de captura con una frecuencia de muestreo de 1 muestra/s para crear archivos de 24 horas de muestreo que luego serán analizados.

Registro de señales de radio

Las longitudes de onda para diferentes frecuencias son las mostradas en la tabla 1. Dado que las señales de baja frecuencia del orden de los KHz son las menos usadas como medio comercial de trasmisión, registraremos señales con una frecuencia menor a los 10 KHz. Para ello se utilizará como antenas no resonantes 3 bobinas con una longitud de 11 cm, un radio de 8 cm y 700 vueltas de alambre magneto. La frecuencia de muestreo será de 20 000 muestras/s para que se pueda registrar el máximo de frecuencia propuesta.
Para probar el sistema de las 3 bobinas 2 han sido colocadas en la azotea del edificio Z en la Unidad Profesional Zacatenco, de la forma como se muestra en la figura 3, y la tercera se ha mantenido en el laboratorio para usarla en pruebas experimentales para verificar su funcionamiento.

Tabla 1. Diferentes rangos de frecuencia de las ondas de radio

Banda	*Frecuencia*	*Longitud de onda*
MBF	3 KHz – 30 KHz	100 Km – 10 Km
BF	30 KHZ – 300 KHz	10 Km – 1 Km
FM	300 KHz – 3 MHz	1 Km – 100 m
AF	3 MHz – 30 MHz	100 m – 10 m
MAF	30 MHz – 300 MHz	10 m – 1 m
UAF	300 MHz – 3 GHz	1 m – 10 cm
SAF	3 GHz – 30 GHz	10 cm – 1 cm
EAF	30 GHz – ...	1 cm - ...

Figura 3. Colocación de las bobinas en la azotea del edificio Z.

Como en el caso de la detección de campos eléctricos en el suelo, en el aire predominarán las frecuencias de 60 Hz ya que como hemos dicho es la frecuencia de la línea con la que se alimentan los aparatos de uso doméstico, así como motores de talleres, etc. Para registrar con claridad las señales de radio detectadas por las bobinas será necesario amplificarlas, pero con el objeto de que la amplificación de las señales electromagnéticas no sature los amplificadores con la señal de 60 Hz, o alguna componente DC, será necesario usar un filtro pasa-banda antes de que las señales sean amplificadas. El circuito seleccionado es el que se muestra en la figura 4, y la forma como las frecuencias son filtradas se muestra en la figura 5.

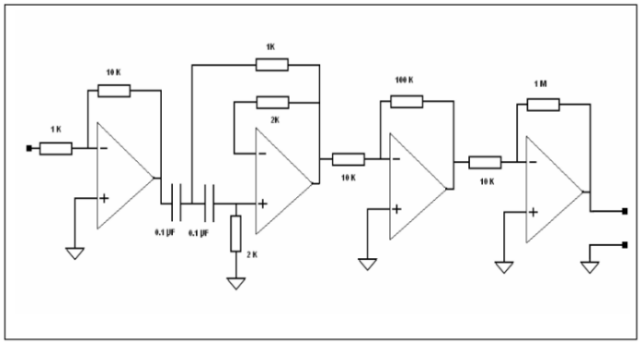


Figura 4. Circuito pasabanda y amplificador

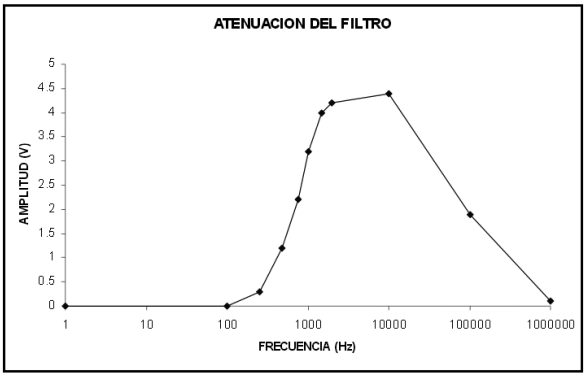


Figura 5. Curva de atenuación de la señal

Puesto que la frecuencia de muestreo de las señales de radiofrecuencia es muy alta (20 000 muestras/s) como para que toda una jornada de muestreo de 24 hrs sea guardada en memoria, se hacen muestreos con una duración de 50 ms; en este tiempo se registrarán 1000 muestras, a estas muestras se les hace un análisis de Fourier y luego se mide el área bajo la curva para las 5 bandas:

0-2000 Hz
2000-4000 Hz
4000-6000 Hz
6000-8000 Hz
8000-10000 Hz

Este proceso se repite 20 veces en un segundo, luego se suma el valor del área para cada banda y el resultado total se guarda en memoria; así, hay un registro del área bajo la curva para las 5 bandas seleccionadas y para las 3 bobinas, cada segundo, con lo cual se hace un registro muy detallado para cada banda sin ocupar mucha memoria. En la figura 6 se muestran las señales registradas por las 2 bobinas colocadas en la azotea, el área para cada banda para un tiempo dado de captura, así como la evolución temporal para cada banda en la figura 7.

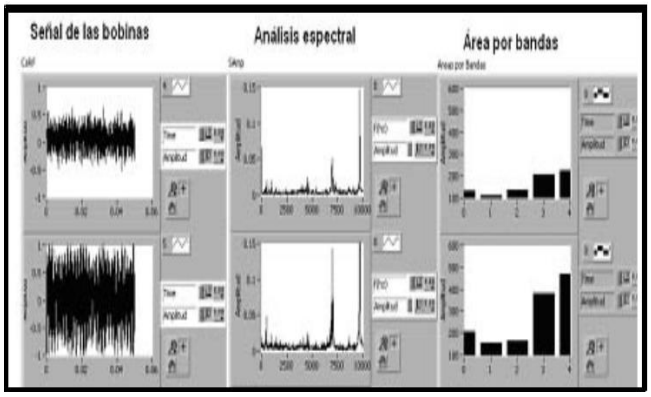


Figura 6. Registro de las señales de radio para cada bobina, análisis de Fourier para una banda de 0-10 000 Hz, y área bajo la curva para cada una de las 5 bandas.

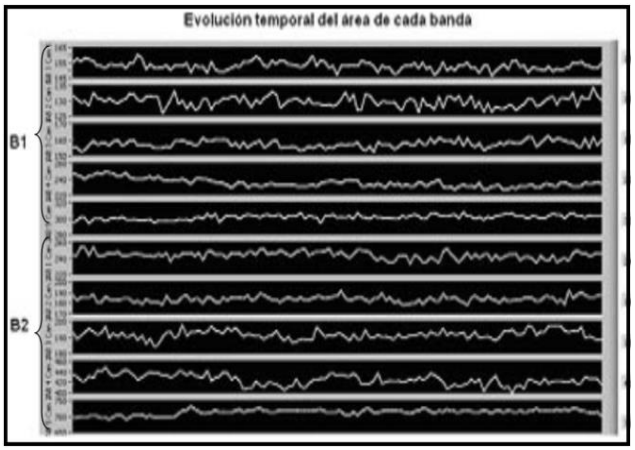


Figura 7. Evolución temporal para el área bajo la curva para cada banda de las 3 bobinas.

III. Programa de análisis de las señales eléctricas y las ondas de radio

El programa desarrollado en lenguaje gráfico de LabVIEW tiene varias opciones que permiten hacer un análisis muy detallado de las señales eléctricas del suelo. Dado que se analizan 4 señales y es muy importante comparar lo que ocurre simultáneamente en todos ellos, se tiene la opción de seleccionar un lapso de tiempo para un solo canal, al que se llama Canal Maestro, el cual indica en función de qué canal se analizan los 3 restantes, por ejemplo, si en el canal 0 se encuentra una perturbación en determinado intervalo de tiempo, es posible analizar lo que ocurre en el mismo intervalo para todos los demás canales en forma automática con solo activar la instrucción ESCALAR. Sin embargo, el programa presenta también la opción de análisis de los canales en forma independiente.

En la figura 8 mostramos una gráfica en donde se muestra un intervalo de tiempo en donde aparece una posible perturbación; la zona seleccionada se destaca de la línea base elevándola y aplicándole diferentes filtros, que es también una opción del programa, para distinguir mejor su perfil.

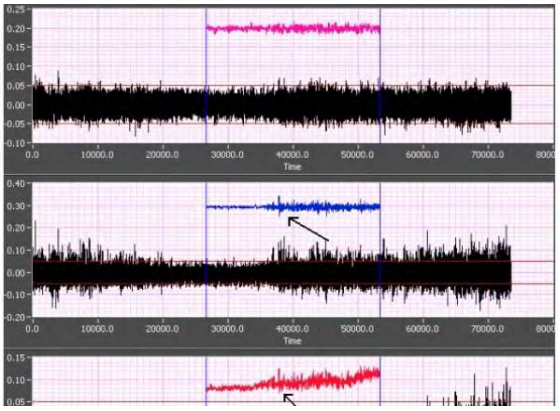


Figura 8. Selección y análisis del mismo intervalo

En cuanto a las ondas de radio el programa muestra al final de una jornada de monitoreo las bandas en diferentes colores; lo que se observa es que no todas las bandas están igualmente libre de ruido, así es que para su análisis se escoge de preferencia la banda menos ruidosa que permita observar mejor las pertubaciones. En la figura 9 se observan en diferentes colores todas las bandas resultantes de una jornada de 24 horas de monitoreo; y en la figura 10 se muestra una jornada de monitoreo que incluya el monitoreo nocturno en los horario en que no se trabaja. En este horario de descanso convencional el ruido ambiental baja, y es este horario el que permite observar mejor las posibles perturbaciones confirmando los resultados obtenidos por otros investigadores [6].

1) 0-2000 Hz	Blanco
2) 2000-4000 Hz	Rojo
3) 4000 – 6000 Hz	Verde
4) 6000 – 8000 Hz	Azul
5) 8000- 10 000 Hz	Amarillo

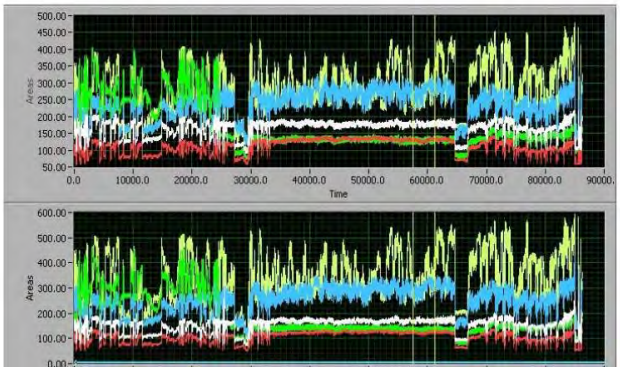


Figura 9. Exhibición de las 5 bandas. Se observa que las bandas amarillas y azules, correspondientes a las bandas de 6 a 8 mil Hz y de 8 a 10 mil Hz, son las más ruidosas.

Figura 10. En estas gráficas se muestra claramente que son durante las horas de descanso nocturno que las flutuaciones se las ondas de radio se atenúan y que, por tanto, son los horario en que más habría que poner la atención para detectar posibles perturbaciones anómalas.

IV. Conclusiones

Hemos presentado una técnica para el registro y análisis de señales eléctricas del suelo y ondas de radio ambientales. Esta técnica se ha ensayado en nuestro laboratorio para realizar las modificaciones adecuadas en función de los resultados de campo. Ahora solo queda instalar el sistema en un lugar adecuado de las costas del estado de Guerrero.

V. Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo dado por la COFAA para la realización de este proyecto.

Referencias

[1] Debate on \VAN", Geophysical Research Letters,» vol. 23, pp. 1291-1452, 1996.
[2] P. Varotsos and Alexopoulus, Tectonophysics **110** (1984) 73.
[3] E. Yépez, F. Angulo-Brown, J. A. Peralta, G. G. Pavía y C. G. González-Santos, «Electric Field Patterns as Seismic Precursors,» *Geophysical Research Letters,* vol. 22, nº 22, pp. 3087-3090, 1995.
[4] . Hernández-Pérez, L. Guzmán-Vargas, A. Ramírez-Rojas y F. Angulo-Brown, «Pattern synchrony in electrical signals related to earthquake activity,» *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* vol. 389, nº 6, pp. 1239-1252, 2010.
[5] L. Guzmán-Vargas, R. Hernández-Pérez, F. Angulo-Brown y A. Ramírez-Rojas, «Some Complexity Studies of Electroseismic Signals from Mexican Subduction Zone,» de *Earthquake Research and Analysis - Seismology, Seismotectonic and Earthquake Geology*, Mexico, InTech, 2012, pp. 272-288.
[6] K. Oike y T. Owawa, *J. Geolectric*. **38** (1986) 1031.
[7] M.B. Gohhberg and V.A. Morgounov, *J. Geophys. Ress*. **87** (1982) 7824.
[8] J.W.Warwick, C. Stoker, and T.R. Meyer, J. *J. Geophys. Ress.* **87** (1982) 2851.
[9] J.A. Salazar Cano, *Registro de Sonidos del suelo como posibles precursores sísmicos*, Tesis para obtener el grado de licenciatura presentado en la E.S.F.M., Mayo 2017.

ISSN: 2594-1011

Comparación entre la radiación térmica de fotones y neutrinos

Víctor Granados García.[1*], Carlos G. Pavía Miller.[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3*]

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **La radiación térmica de fotones es muy conocida, sobre todo en relación a su existencia como radiación de fondo en el universo. Pero la posibilidad propuesta por Weinberg de la existencia de radiación térmica de neutrinos en el universo como consecuencia del Big Bang, similar a la radiación térmica de fotones es poco conocida. Pero los fotones tienen masa cero y los diversos neutrinos masa muy pequeña y spin ½, aunque su potencial químico no se conoce si este es nulo como lo es con los fotones. En este artículo se asume que los neutrinos tienen potencial químico nulo y que su energía es $e = cp$ e igualmente a la de los fotones de masa cero. Se tratan las termodinámicas de las radiaciones térmicas de fotones y neutrinos en el espacio de momentos, se comparan y contrastan.**

Palabras Clave – **Fotones, Neutrinos, Radiación Térmica.**

Abstract — **The thermal radiation of photons is well known, especially in relation to its existence as background radiation in the universe. But the possibility proposed by Weinberg of the existence of thermal radiation of neutrinos in the universe as a consequence of the Big Bang, similar to the thermal radiation of photons is little known. But the photons have zero mass and the various neutrinos very small mass and spin ½, although its chemical potential is not known if it is null as it is with photons. In this article it is assumed that neutrinos have null chemical potential and that their energy is $e = cp$ and also that of zero-mass photons. The thermodynamics of the thermal radiation of photons and neutrinos in the space of moments are treated, compared and contrasted.**

Keywords — **Photons, Neutrinos, Thermal Radiation.**

INTRODUCCION

La densidad espectral de la radiación térmica de cuerpo negro, así como su termodinámica estadística fue establecida por Planck [1, 2, 3]. Pero fueron Gamow y col quienes asumieron la existencia de la radiación térmica de cuerpo negro de fondo en el universo como consecuencia del Big Bang la cual se ha detectado por diferentes medios [4, 5].

Weinberg por su parte consideró la posibilidad de la existencia de una radiación térmica de neutrinos en el universo, como consecuencia de Big Bang [6]. Aunque existen diferentes tipos de neutrinos [7, 8] con masa muy pequeña y spin ½, no se conoce si en termodinámica estadística su potencial químico sea nulo, como el de los fotones de Planck. Además los fotones satisfacen la estadística de Bose-Einstein y los neutrinos la de Fermi-Dirac. En este artículo para facilitar los cálculos se asume que la masa y el potencial químico de los neutrinos es cero como sucede con los fotones. Por lo tanto en ambos casos la energía de los fotones y neutrinos será $e = cp$, donde c es la velocidad de la luz y p la magnitud del vector de momento lineal. Como el potencial químico se anula el gran potencial se reduce a la energía de Helmholtz y asi se puede tratar de manera general la termodinámica estadística de Bose-Einstein y Fermi-Dirac para fotones y neutrinos [2, 3, 9], en el espacio de momentos se determinan las respectivas densidades espectrales de energía y el número de partículas. Se determinan las correspondientes integrales bosónicas y fermionicas para la energía de Helmholtz y el número de partículas. Se comparan y contrastan las variables termodinámicas de las radiaciones térmicas de fotones y neutrinos. Se concluye que las de neutrinos toman valores menores que las de fotones.

ENERGÍA DE HELMHOLTZ, DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA Y NÚMERO DE FOTONES Y NEUTRINOS

Para determinar las funciones termodinámicas de los gases de fotones, es necesario recordar que si el potencial químico se anula $\mu = 0$ entonces el gran potencial Ω y la energía de Helmholtz son iguales ya que $\Omega = F - \mu N$. Como la energía de fotones y neutrinos se considera $e = cp$ y que ambos tienen dos estados de polarización $g = 2$ [10] la energía de Helmholtz [2, 3, 9] se expresa como

$$F = \mp kT \int_0^\infty \frac{Vp^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} \ln\left(1 \pm e^{-cp\beta}\right), \qquad (1)$$

en la cual V es el volumen. Ya que los fotones y neutrinos no interaccionan, la integral se hace en el espacio de momentos en coordenadas esféricas y $2\pi\hbar = h$ es la constante de Planck. Los signos inferiores en la Ec. (1) corresponden a la distribución de Bose-Einstein para fotones y $\beta = 1/kT$ y los superiores a la distribución de Fermi-Dirac para neutrinos. Integrando por partes la Ec. (1) se llega al siguiente resultado.

$$F = -\frac{Vc}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\beta cp} \pm 1}, \qquad (2)$$

en que se observa que el signo que precede la integral es solo el negativo. Con el cambio de variable $x = cp\beta = cp/kT$, la Ec. (2) se transforma en la siguiente

$$F = -\frac{V(kT)^4}{3\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x\pm1}. \quad (3)$$

El número de partículas, neutrinos o fotones está dado por la expresión

$$N = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{p^2dp}{e^{\beta cp}\pm1}, \quad (4)$$

y con el mismo cambio de variable de la Ec. (3), se expresa como

$$N = \frac{V(kT)^3}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x\pm1}. \quad (5)$$

La distribución diferencial de energía esta dada [9] por

$$dU = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\frac{cp^2dp}{e^{\beta cp}\pm1} = cpdN, \quad (6)$$

y la densidad espectral de energía $du = dU/V$ es

$$du = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\frac{cp^3dp}{e^{\beta cp}\pm1}. \quad (7)$$

Si como sugiere Weinberg que existe una radiación térmica de neutrinos que cumpla las condiciones que se han impuesto $e = cp$, $\mu = 0$, entonces su densidad espectral de energía está dado por la Ec. (7) con el signo superior y para fotones con el signo inferior con el cambio de variable $cp = \hbar\omega$ en el espacio de frecuencias.

Para evaluar las integrales de la energía de Helmholtz de la Ec. (3) y la del número de neutrinos de la Ec. (5) se usan las integrales de Fermi-Dirac [9] siguientes

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}dx}{e^x+1} = (1-2^{1-z})\Gamma(z)\zeta(z), \quad z>0, \quad (8)$$

donde $\Gamma(z)$ es función gama y $\zeta(z)$es la función zeta de Riemann, en particular la integral de la Ec. (3) para Fermi-Dirac toma el valor

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x+1} = \frac{7\pi^4}{120} = \frac{\pi^4}{17.143}, \quad (9)$$

en la que se usa que $\Gamma(4)\zeta(4) = \pi^4/15$, y para la integral de la Ec. (5) se tiene

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x+1} = \frac{3\zeta(3)}{2}. \quad (10)$$

Por otra parte las integrales de Bose-Einstein para el gas de fotones de las Ecs. (3) y (5) se obtienen de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}dx}{e^x-1} = \Gamma(z)\zeta(z), \quad z>1, \quad (11)$$

así que

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}, \quad (12)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x-1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2\zeta(3). \quad (13)$$

TERMODINAMICA ESTADISTICA DEL GAS DE FOTONES

Para determinar la energía de Helmholtz de un gas de fotones se usan las Ecs. (3) y (12) que dan el resultado

$$F = \frac{V(kT)^4}{3\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = -\frac{V\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3}, \quad (14)$$

de la que se obtiene la entropía

$$S = \left(\partial F/\partial T\right)_V = \frac{4V\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3}. \quad (15)$$

La energía interna se deduce de la relación termodinámica $U = F + TS$, así que de las Ecs. (14) y (15) se sigue

$$U = F + TS = \frac{V\pi^2(kT)^4}{15(\hbar c)^3} = -3F. \quad (16)$$

La presión y la capacidad calorífica C_V son las siguientes

$$P = \left(\partial F/\partial V\right)_T = \frac{\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3} = \frac{U}{3V}, \quad (17)$$

$$C_V = \left(\partial U/\partial T\right)_V = \frac{4V\pi^2k^4T^3}{15(\hbar c)^3}. \quad (18)$$

De las Ecs. (15) y (16) de la entropía y la energía interna respectivamente se obtiene la relación entre ellas

$$TS = 4U/3. \quad (19)$$

Para determinar el número de fotones se usa la Ec. (5) utilizando usa la integral de la Ec. (13) que lleva al resultado

$$N = \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3), \quad (20)$$

que como variable extensiva depende del volumen. Es importante observar que el signo − en la Ec. (3) para la energía de Helmholtz de neutrinos y fotones, tiene como consecuencia que las funciones o variables termodinámicas tomen valores positivos.

Cuando el número de fotones es diferente de cero, es decir cuando V y T no se anulen se satisface la relación

$$N\mu = 0 = U - TS + PV = U - 4U/3 + U/3, \quad (21)$$

de acuerdo a las Ecs. (17) y (19) que implica que $\mu = 0$ como se consideró inicialmente.

TERMODINAMICA ESTADISTICA DEL GAS DE NEUTRINOS

La energía libre de Helmholtz de la radiación térmica de los neutrinos se usan las Ecs. (3) y (9) que llevan al siguiente resultado

$$F = \frac{V(kT)^4}{3\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x+1} = -\frac{V\pi^2(kT)^4}{51.426(\hbar c)^3}, \quad (22)$$

de la cual se obtiene la entropía

$$S = \left(\partial F/\partial T\right)_V = \frac{4V\pi^2k^4T^3}{51.426(\hbar c)^3}. \quad (23)$$

De la relación termodinámica $U = F + TS$ y las Ecs. (22) y (23) se obtiene así

$$U = \frac{3V\pi^2(kT)^4}{51.426(\hbar c)^3} = \frac{V\pi^2(kT)^4}{17.143(\hbar c)^3} = -3F, \quad (24)$$

$$C_V = \left(\partial U/\partial T\right)_V = \frac{4V\pi^2k^4T^3}{17.143}, \quad (25)$$

$$P = \left(\partial F/\partial V\right)_T = \frac{\pi^2(kT)^4}{51.426(\hbar c)^3} = \frac{U}{3V}. \quad (26)$$

Para calcular el número de neutrinos en la radiación térmica se utilizan las Ecs. (5) y (13) y se obtiene

$$N = \frac{3V}{2\pi^2}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \zeta(3), \quad (27)$$

que depende de V como variable extensiva y solo se anula si $V = 0$ o $T = 0$. De las Ecs. (23) de la entropía y la (24) de la energía interna, se obtiene la relación entre ellas siguiente

$$TS = 4U/3. \quad (28)$$

Si el número de neutrinos es diferente de cero, se satisface la relación de acuerdo a las Ecs. (26) y (27)

$$N\mu = 0 = U - TS + PV = U - 4U/3 + U/3, \quad (29)$$

de la que se sigue que $\mu = 0$, que es consistente con la suposición inicial.

CONCLUSIONES

Mediante el método de Landau y Lifshitz y con la hipótesis de que el potencial químico de la radiación térmica de neutrinos es cero y de que su masa es nula, evaluamos y comparamos las expresiones para la energía libre de Helmholtz, el número de partículas y su distribución espectral como función de su momento. Después se evaluaron a partir de la energía libre de Helmholtz se obtuvieron las variables termodinámicas S, U, P, C_V, que sorprendentemente tienen la misma dependencia en las variables V y T para ambas radiaciones teremicas de fotones y neutrinos. Pero los factores numéricos del tipo de Boltzmann son menores numéricamente para la radiación térmica de neutrinos en comparación de la radiación térmica de fotones. Sorprendentemente las relaciones entre las variables termodinámicas F, U, P, S son las mismas para ambas radiaciones térmicas. Es claro que de existir la radiación térmica de neutrinos será muy complicado detectarla.

REFERENCIAS

1. Planck M. *The Theory of Heat Radiation*. Dover. New York. 1959.
2. Huang K. *Statistical Mechanics*. John Wiley New York.1987.
3. Pathria K. *Statistical Mechanics*, Pergamon Press., Oxford. 1972.
4. Alpher R. A., Herman R. y G. A. Gamow G. A. Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe. *Phys. Rev*. 74 (1948) 1198.
5. Gamow G. A. *La Creación del Universo*. Orbis. Barcelona. 1993.
6. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity*. John Wiley. New York. 1972.
7. Cheng T. P. y Li L. F. Guage Theory of Elementary Particles. Physics Oxford University Press. Oxford New York. 2000.
8. Thomas J. A. y Vahle P. L. *Neutrino Oscillations: Present Status and Future Plans*. World Scientific. Singapure. 2008.
9. Landau L. y Lifshitz M. *Física estadística*. Reverté. Barcelona. 1969.
10. Schweber S. S.. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Harper y Row. 1961.

ISSN: 2594-1011

Usos versátiles de un simple circuito RC

José Antonio Peralta, Josué Hernández Torres y Víctor Alberto Ruiz Rodríguez.
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono 5729-6000 Ext. 55007 E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

Resumen — **Un circuito muy simple es el circuito RC;usualmente en un curso de electrónica a nivel de teoría o de laboratorio se le analiza y se hacen mediciones solo para corroborar que su comportamiento coincide con el previsto por la teoría, por ejemplo, que la curva de descarga sigue un comportamiento exponencial, esto es sin salirse del campo de la electrónica convencional. Se muestra en este trabajo que este circuito tan simple a través de su curva exponencial de decaimiento puede encontrar campos útiles de aplicación tales como: medidas de Capacidad o Resistencia desconocidas, resistencia de muestras de suelo, y grados de salinidad de diferentes muestras de agua consideradas potables.**

Palabras Clave – **Capacitancia, resistencia, grado de salinidad**.

Abstract - **A very simple circuit is the RC circuit. Usually in a course of electronics at the level of theory or laboratory is analyzed and made measurements only to corroborate that its behavior coincides with the predicted by the theory, for example, that the discharge curve follows an exponential behavior, that is without get out of the field of conventional electronics. We show in this work that this simple circuit through its exponential decay curve can find useful fields of application such as: unknown capacity or resistance measurements, resistance of soil samples, and salinity degrees of different water samples.**

Keywords — **Capacity, resistance, salinity degree.**

I. Introducción

El uso de conceptos precisos y ciertos acerca del comportamiento de la realidad, aún en sus niveles sencillos, puede convertirse en una herramienta de conocimiento de grandes potencialidades para aplicarse a la investigación de diferentes fenómenos de la naturaleza o a la aplicación en múltiples usos. Tal ocurre con la expresión matemática del funcionamiento de un condensador o capacitor de placas paralelas [1], en efecto, matemáticamente su funcionamiento está definido por una fórmula sencilla:

$$q = CV, \quad (1)$$

donde **q** es la carga igual y de signo contrario de cada placa, **C** es la capacidad y **V** la diferencia de potencial entre ambas placas. Razonamientos simples llevan a la definición explícita de la capacitancia C:

$$C = €A/d, \quad (2)$$

con épsilon la permitividad del medio que separa las placas, **A** el área de las placas, y **d** la separación entre ellas. Recurriendo a las fórmulas 1 y 2

$$V = q(d/€A), \quad (3)$$

es decir que dada una carga q constante V cambia con la distancia d, con el área A, o con las propiedades del dieléctrico entre las placas, esto es, que un simple arreglo de placas paralelas cargadas puede servir como ***sensor de desplazamiento*** mediante el alejamiento de las placas, o por su desplazamiento relativo, así también como sensor del paso de objetos mediante la introducción de un dieléctrico entre las placas; en todas estas operaciones el voltaje cambiará. Además de estas aplicaciones como sensor, con la curva de descarga de un condensador en un circuito RC se ilustra experimentalmente cómo puede ser utilizada para el cálculo de diferentes parámetros de interés físico.

II. Teoría

Si se carga el condensador con una fuente, y luego se separa de ella dejando que su carga fluya por la resistencia R la curva de voltaje del capacitor será la descrita por la ecuación [2],

$$V(t) = V_O e^{-t/RC}. \quad (3)$$

Esta fórmula indica que cuando t = RC el valor de V será igual a $V_O/e = V_O(0.37)$. Como sabemos a este tiempo se le denomina **τ,** "constante de tiempo" [2], y el hecho es que su valor, medido experimentalmente, permite medir el valor de C cuando el valor de R es conocido o bien R cuando C es conocido:

$$R = \tau/C, \quad (4)$$

$$C = \tau/R, \quad (5)$$

Se utiliza en la presente investigación este comportamiento de un circuito RC para realizar diferentes tipos de mediciones experimentales tales como: a) medida del valor desconocido de una capacitancia C, b) medida de la resistencia del suelo, c) medidas de salinidad de diferentes muestras de agua potable, y, finalmente, d) variación de la resistencia en función de la temperatura para una determinada concentración así como para una solución saturada de cloruro de sodio en agua.

III. APLICACIONES

Cálculo de la capacitancia

Método experimental

A menudo no se dispone en los laboratorios de un medidor de capacitancia, por ello el primer experimento será el cálculo de la capacitancia a partir de la constante de tiempo del circuito RC. Para ello se ha seleccionado una resistencia R con un valor bien definido, incrustada en un circuito RC conectado a una fuente de 5 V en donde el valor de C será desconocido. Se ha medido la constante de tiempo y de ahí, a partir de la fórmula 4 ha calculado el valor de C, el cual luego ha sido confrontado con su valor comercial.

Para el registro de la curva de decaimiento se ha utilizado un programa diseñado en lenguaje G de LabVIEW para este fin específico, el cual tiene, además de sus diferentes utilerías convencionales, tales como acercamientos verticales u horizontales, ensanchamientos de las líneas de los gráficos, cambios de color, etc., cursores para definir valores de voltaje y tiempo,

Se probaron 4 condensadores, para cada uno se seleccionó una resistencia que nos proporcionó un tiempo de decaimiento del orden de los segundos. En la tabla 1 se muestran los valores de las resistencias así como los valores de C encontrados comparados con los que indican los valores comerciales.

Tabla 1. Medida de capacidades con el valor de τ

Resistencia (k ohms)	τ (s)	Valor Commercial (μF)	Valor experimental μF)
5.56	6.831	1000	1022
100	2.642	470	475
100	10.09	100	100.89
100	0.051	0.47	0.51

Resistencia de suelos

Método experimental

Usualmente la tierra que conforma el suelo no se presenta como una masa compacta sino como una aglomeración de pequeñas partículas que si bien no son un fluido tampoco se comportan como un sólido rígido; por estas características de la tierra es difícil medir su resistencia con las formas convencionales ya que un pequeño cable metálico en contacto con la tierra presentaría un área de contacto muy incierta, de hecho de naturaleza fractal ya que la magnitud de su área depende de la escala de medición [3]. Para resolver este problema, o para atenuarlo, se ha aumentado el área de contacto usando placas de cobre situadas en los extremos de un contenedor en forma de paralelepípedo, tal como se muestra en la figura 1. De hecho se ha tratado de medir directamente la resistencia de una muestra de tierra con un multímetro marca Fluke, que se caracteriza por su precisión, y el medidor indicó una resistencia infinita como si fuera un circuito abierto.

El contenedor de plástico fue de 5 cm de altura, 7 cm de ancho y 15 cm de largo el cual se llenó de una muestra de tierra. La fuente que se usó fue de 5 volts, y el registro de la señal se hizo utilizando el programa mencionado anteriormente de LabVIEW. La frecuencia de muestreo fue de 100 muestras/s, y el número de muestras fue el suficiente como para ver una curva completa de decaimiento. El voltaje se aplicó a las placas de cobre situadas en los extremos del contenedor (ver figura 1). En primer lugar fue necesario comprobar la fiabilidad del método propuesto repitiendo la medición de la constante de tiempo varias veces. En este experimento se midió la curva de decaimiento por 5 veces utilizando un capacitor de 0.47 μF, se midió la constante de tiempo utilizando los cursores del programa; los valores obtenidos se muestran en la tabla 2. En la figura 2 se presenta una gráfica de la curva de decaimiento o de descarga del voltaje.

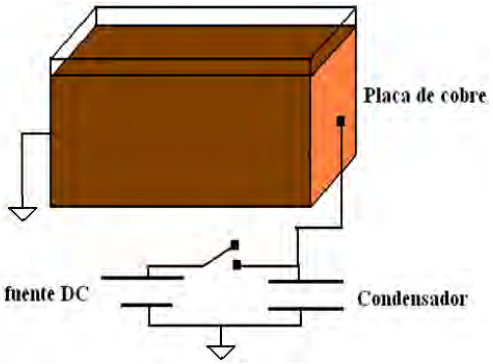


Figura 1. Arreglo experimental para medir la constante de tiempo del circuito condensador – tierra

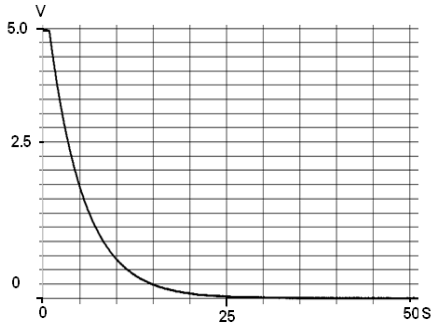


Figura 2. Curva de descarga a través de la tierra

Tabla 2. Resistencia de suelo con el uso de τ

Medida	Constante de tiempo (s)	Resistencia (MΩ)
1	4.834	12.08
2	4.818	10.25
3	4.872	10.37
4	4.845	10.48
5	4.854	10.37

Salinidad de aguas potables

Uno de los objetivos de este experimento es cuantificar o tener una referencia de la concentración de sales de las aguas que usualmente bebemos. Para tener esta referencia y poder hacer comparaciones en primer lugar se medirá la constante de tiempo de diferentes concentraciones de cloruro de sodio en agua bidestilada.

Método experimental

Se tomó un vaso de precipitado de 200 ml y se llenó hasta un volumen de 150 ml. Los electrodos que se usaron siempre se mantuvieron en el mismo sitio y sumergidos a una profundidad constante (ver figura 3). Se usó un condensador de 1000 µF, y los archivos de voltaje en función del tiempo fueron obtenidos a una frecuencia de muestreo de 100 muestras/s con el programa de LabVIEW ya mencionado. Se fueron agregando en 150 ml de agua diferentes cantidades de sal para variar su concentración. La gráfica de concentración contra constantes de tiempo se muestra en la figura 4 y las constantes de tiempo se muestran en la tabla 3.

Las aguas de las cuales se ha medido concentración equivalente de sal fueron diferentes muestras del agua de la llave, el agua Ciel, el agua Bonafont, y el agua E-pura. Los tiempos promedio que se obtuvieron se muestran en la tabla 4.

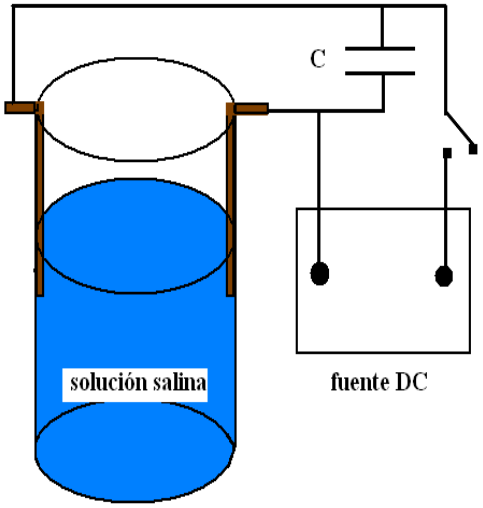


Figura 3. Circuito RC con el agua como resistor

Tabla 3. Constantes de tiempo en función de la concentración

Concentración g/l	T (segundos)
0.2	4.49
0.26	2.5
0 .46	1.59
0.6	1.27
0.7	1.03

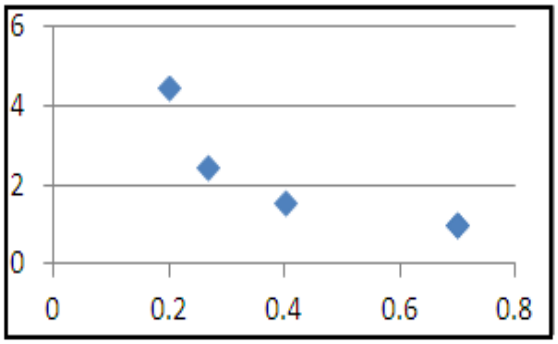


Figura 4. Curva de constantes de tiempo en función de la concentración para diferentes tipos de agua. En el eje vertical segundos, en el horizontal g/l

Tabla 4. Constantes de tiempo para diferentes tipos de Agua.

Tipo de agua	Constante de tiempo (s)
Agua bidestilada	85.33
Agua de la llave 1	1.43
Agua de la llave 2	1.71
Agua de la llave 3	1.48
Ciel	5.28
Bonafont	5.76
EPura	88.63

Dependencia de la temperatura

Método experimental

Se sabe que la resistividad de los sólidos varía con la temperatura de una forma exponencial [1], con la técnica aquí propuesta de descarga de un capacitor se ha analizado también la forma como la constante de tiempo, y por tanto la resistencia en el circuito RC, varía en función de la temperatura. Para ello primero se ha mantenido constante una concentración no saturada y se ha calentado la solución. Se ha medido la constante de tiempo mientras la temperatura va descendiendo, luego se ha hecho lo mismo pero con una concentración saturada. Esto es posible hacerlo dado que la constante de tiempo es del orden de las fracciones de segundo, y en ese tiempo la temperatura cambia muy poco. Hay que hacer notar que la saturación se ha obtenido agregando sal hasta que ésta ya no se ha disuelto quedando el excedente en el fondo de la solución. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5. En la gráfica de la figura 5 se muestra este comportamiento así como la función ajustada que lo describe. La concentración seleccionada fue de 0.73 g/l.

Tabla 5. Constantes de tiempo y resistencia para diferentes temperaturas. Concentración de 0.73 g/l

Temperatura ^{0}C	Constante de tiempo (s)	Resistencia (ohms)
35	1.28	1280
50	0.95	950
60	0.74	740
70	0.65	650
80	0.54	540

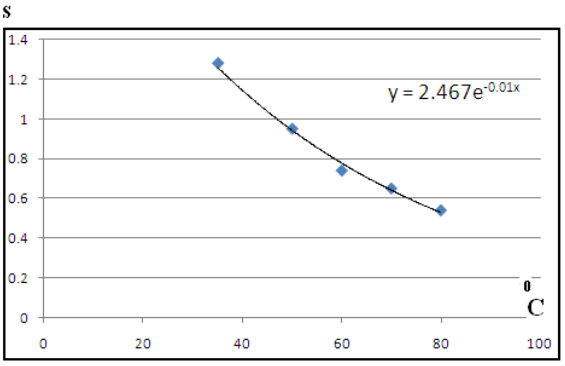


Figura 5. Curva ajustada para la variación de la constante de tiempo para diferentes temperaturas. Solución de 0.73 g/l

Para la solución saturada los resultados se muestran en la tabla 6 así como en la figura 6.

Tabla 6. Constantes de tiempo y resistencia para diferentes temperaturas, Solución saturada

Temperatura ^{0}C	Constante de tiempo (s)	Resistencia (ohms)
55	0.036	36
60	0.033	33
65	0.0305	30.5
70	0.028	28
75	0.027	27
80	0.026	27

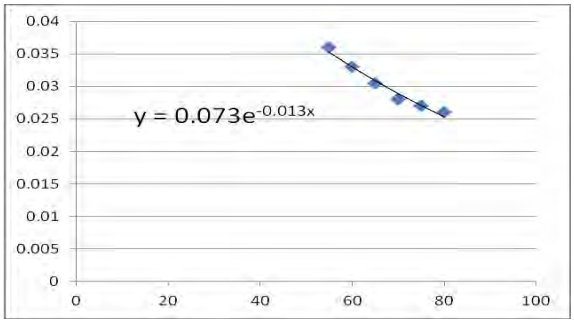


Figura 6. Curva ajustada para la variación de la constante de tiempo en función de la temperatura para una solución saturada

IV. Discusión de Resultados

Los resultados obtenidos muestran que un condensador conectado en un circuito RC puede ser un dispositivo sumamente útil en muchas aplicaciones. La curva de decaimiento del voltaje sirve para medir una capacitancia desconocida; esta misma curva permite medir resistencias como las del suelo que de otra manera serían muy difíciles de medir. También esta curva permite medir concentraciones relativas de sales para aguas consideradas como potables. En particular se ha comprobado que el agua de las llaves de uso doméstico si bien tiene sales que están por debajo de una concentración de 0.46 g/l, tiene muy altas concentraciones de sales en comparación a las aguas comerciales. Un resultado sorprendente es que una de estas aguas comerciales tiene menos contenido de sales que la misma agua bi-destilada. Esto conduce a la pregunta compleja de saber cuál es el papel de los contenidos de sales en el organismo a nivel celular y qué puede ocurrir si bebemos aguas comerciales con muy baja concentración de sales. Una ocurrencia ingenua podría ser que el agua pura sin ningún contenido de sal es la más saludable; pero en realidad esto no es así ya que una célula cuyo interior de manera natural tiene importantes concentraciones de sales de sodio, cloro o potasio, al estar rodeada de un medio acuoso libre de sales tendería a perder rápidamente las sales de su interior, lo cual desembocaría en su destrucción. Así, se puede hacer la pregunta: ¿es bueno que una de las marcas de agua tenga menos sales conductoras que el agua bidestilada?

Otro resultado interesante es cómo la resistencia de las soluciones utilizadas baja con el incremento de la temperatura de forma muy diferente en función de la concentración utilizada. Para la solución no saturada el cambio con la temperatura es muy drástico mientras que para la saturada es muy pequeño. Esto sugiere que 2 mecanismos pueden explicar este cambio: para la primera el cambio se debe solo al aumento de la energía cinética de los iones con la temperatura, mientras que para la segunda no solo aumenta la energía cinética de los iones sino que es posible que más iones se incorporen dado que, como es sabido, el grado de saturación aumenta con la temperatura.

V. Conclusiones

Los experimentos que se han presentado en este trabajo son fáciles de realizar en un laboratorio correspondiente a los primeros semestres de la licenciatura en Física. Con las aplicaciones aquí mostradas el condensador enriquece el campo de sus posibles aplicaciones, y se le deja de ver como elemento para ser utilizado solamente en circuitos de filtrado, integradores, temporizadores, etc., e incita a los alumnos a desarrollar sus propias indagaciones, por ejemplo, investigar un problema no investigado aquí como es la forma como cambia la constante de tiempo en función no solo de la temperatura para una sola concentración, sino variando gradualmente la concentración hasta llegar a la saturación.

VI. Agradecimientos

Los autores agradecen a la COFAA el apoyo dado para la realización de este proyecto.

Referencias

[1] D. Halliday y R. Resnick, ***Fundamentos de Física***, CECSA, 1978
[2] https://es.scribd.com/document/319805959/Aplicaciones-de-Los-Capacitores.
[3] M. I. Binimelis Basa, "La geometría fractal: Una nueva manera de ver el mundo", National Geographic, 2016.

ISSN: 2594-1011

Osciladores armónicos en un baño térmico

H. Betanzos, J. Avendaño
Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55254 E-mail: javel@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presenta un análisis termodinámico del oscilador armónico. Tomado en cuenta la invariancia de la acción bajo un cambio adiabático de la frecuencia del oscilador, se obtienen relaciones termodinámicas, de las cuales se deriva una ley de Wien para estos osciladores materiales. Al considerar el límite T→0, esta ley permite la posibilidad de que los osciladores, a temperatura T=0, tengan una energía proporcional a su frecuencia de oscilación.**

Palabras Clave – **Oscilador armónico, ley de Wien, energía de punto cero**

Abstract — **A thermodynamic analysis of the harmonic oscillator is presented. Taking into account the invariance of the action under an adiabatic change of the frequency of the oscillator, thermodynamic relations are obtained, from which a law of Wien is derived for these material oscillators. When we consider the limit T → 0, this law allows the possibility that the oscillators, at temperature T = 0, have an energy proportional to their oscillation frequency.**

Keywords — **harmonic oscillator, Wien´s law, zero point energy**

I. Introducción

Las propiedades electromagnéticas y termodinámicas de la llamada radiación de cuerpo negro o simplemente radiación negra [1,2] convulsionaron los cimientos del edificio de la física clásica durante los últimos años del siglo XIX. Los estudios efectuados para comprenderla evidenciaron que la densidad espectral de esta radiación, que determina la forma en la que la energía por unidad de volumen se encuentra distribuida en función de la frecuencia a una temperatura dada, no puede ser encontrada a partir de los principios de las leyes física conocidas en la época (física clásica); y por lo tanto era necesario modificarlas y encontrar las nuevas leyes. La búsqueda de estas nuevas leyes físicas eventualmente desembocó en la idea del quantum de Planck [3] como elemento esencial del intercambio de energía entre la radiación y la materia. Einstein [4] fue más allá reconociendo en el quantum una estructura propia del campo mismo. De esta manera la idea de discontinuidad, tanto en los procesos de intercambio de energía campo-materia como en la misma estructura del campo se instaló, al principio con timidez y cada vez con más fuerza en el seno de la nueva física (física cuántica) [1]. En estos estudios ha resultado fundamental reconocer que el campo de radiación es un gas de osciladores amónicos [5]. Aquí se estudia un sistema de osciladores armónicos materiales independientes en equilibrio térmico. La termodinámica nos guía directamente, para estos osciladores de materia, a una ley completamente semejante a la ley de Wien para el campo electromagnético deducida a través del corrimiento Doppler de las ondas electromagnéticas reflejadas en un pistón móvil de una cavidad [6-7].

II. Oscilador armónico en variables de ángulo acción

El Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional se puede expresar [8]

$$\mathrm{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad . \tag{1}$$

Donde m es la masa del oscilador, ω es la frecuencia, p es el momento conjugado y q la coordenada generalizada. Sustituyendo la ecuación de transformación $p = \frac{\partial W}{\partial q}$, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo puede ser escrita como

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \mathrm{W}(q,J)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E(J) \quad , \tag{2}$$

Resolviendo para el momento se obtiene

$$p = \frac{\partial W(q,J)}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)} \quad . \tag{3}$$

Integrando tenemos

$$W(q,J) = \pm\int_{q_0}^{q}\sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}\,dq \quad . \tag{4}$$

La variable de acción es formada evaluando esta integral en un periodo completo $2\pi J = \oint p dq$, entonces

$$2\pi J(E) = 4\int_0^{q_{max}} \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}\, dq \quad , \qquad (5)$$

Donde $q_{max} = \sqrt{\frac{2mE}{\omega^2}}$. La integral (5) se puede resolver por sustitución trigonométrica y obtener

$$2\pi J = 2\pi \frac{E}{\omega} \quad \rightarrow \quad J = \frac{E}{\omega} \qquad , \qquad (6)$$

Aquí la variable de acción J es una constante. Si realizamos un cambio lento en la constante del resorte, el sistema responde a un cambio en la frecuencia ω, es decir

$$dJ = -\frac{E}{\omega^2} d\omega + \frac{1}{\omega} dE = 0 \quad \rightarrow \quad dE = \frac{E}{\omega} d\omega \ . \qquad (7)$$

III. Relaciones termodinámicas del oscilador

Consideremos ahora un sistema de osciladores armónicos materiales independientes, unidimensionales, de frecuencia ω en equilibrio con un baño térmico a temperatura T (gas de osciladores) [9,10]. El cociente entre la energía media U y su frecuencia ω es un invariante adiabático (7), el trabajo adiabático hecho por el sistema sobre el agente externo cambiando la frecuencia es entonces

$$dW = -\frac{U}{\omega} d\omega \quad . \qquad (8)$$

Usando la primera ley de la termodinámica tenemos

$$dQ = TdS(\omega, T) = dU(\omega, T) - \frac{U}{\omega} d\omega \quad , \qquad (9)$$

Donde $S(\omega, T)$ es la entropía del sistema, (9) puede reescribirse como

$$T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\omega dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)_T d\omega\right] = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\omega dT + \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_T d\omega - \frac{U}{\omega} d\omega \ . \qquad (10)$$

Puesto que las variables ω y T son independientes, se tiene

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\omega = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\omega \qquad , \qquad (11)$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_T - \frac{U}{\omega} \qquad . \qquad (12)$$

Si derivamos (11) respecto a ω y (12) con respecto a T obtenemos

$$T\frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial \omega \partial T} \qquad , \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)_T + T\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial \omega} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial \omega} - \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\omega \ . \qquad (14)$$

Restando (13) y (14) se tiene

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)_T = -\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\omega \quad . \qquad (15)$$

Usando (11) y (15) obtenemos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)_T = -\frac{T}{\omega}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\omega \quad . \qquad (16)$$

La cual tiene una solución general $S(\omega, T) = g\left(\frac{\omega}{T}\right)$, ahora bien usando (12) y (15) llegamos a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_T - \frac{U}{\omega} = -\frac{T}{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\omega \qquad , \qquad (17)$$

Cuya solución general es de la forma

$$U(\omega, T) = \omega f\left(\frac{\omega}{T}\right) \qquad . \qquad (18)$$

La función f(ω/T) es una función en general arbitraria del argumento ω/T. Esta expresión se le conoce como ley de Wien. Esta ley, tradicionalmente ha sido establecida para la radiación electromagnética en equilibrio térmico, sin embargo vemos que ésta se mantiene también para osciladores materiales en equilibrio térmico. Tomando el límite cuando T→0 en (18) (en [11] se prueba la validez de este límite), tenemos

$$U(\omega, 0) = \omega f(\infty) \qquad . \qquad (19)$$

Normalmente se hace $f(\infty) = 0$ un tanto arbitrariamente. Sin embargo podría ser que $f(\infty) \neq 0$, el caso más simple sería $f(\infty) = \beta = cte \neq 0$, y entonces se tendría

$$U(\omega, 0) = \omega\beta \quad , \qquad (20)$$

i.e., los osciladores tendrían una energía promedio distinta de cero (a temperatura T=0) proporcional a su frecuencia de oscilación.

IV. Discusión y Conclusiones

Al permitir que $f(\infty) \neq 0$, ha resultado que los osciladores puedan poseer una energía promedio distinta de cero y proporcional a su frecuencia a temperatura T=0. Como el campo electromagnético está construido de osciladores armónicos independientes de todas las frecuencias, los mismos argumentos nos llevan a concluir que estos osciladores del campo poseerán a temperatura T=0 energías promedio distintas de cero y proporcionales a sus frecuencias de oscilación, dando origen al campo de punto cero (ZPF, por sus siglas en Inglés) y a su correspondiente energía de punto cero. A partir de este punto es posible obtener la ley de distribución de Planck sin necesidad de hipótesis cuánticas.

AGRADECIMIENTOS

J. Avendaño agradece el apoyo proporcionado por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN, y por la COFAA IPN, México.

REFERENCIAS

[1] Thomas Khun, *"La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica,1894-1912"*, Alianza Editorial S.A., 1980, c1.
[2] J. M. Sanchez-Ron *"Historia de la mecánica Cuántica I: El período fundaciona (1866-1926l"*, Crítica 2001, España.
[3] M. Planck, *"*Zur Thorie des Gesetzes der Energieverteilung in Normalspektrum", Verhandlungen der Deutschen Phys. **2**, 237-245 (1900).
[4] Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichpunkt", Ann. Der Physik, **17**, 132-148 (1905).
[5] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, *"Teoría Clásica de los Campos, 2da. Ed."*, Reverté 1992, España.
[6] L. García-Colín, *"Introducción a la Termodinámica Clásica 3ra Ed."*, Trillas 2012.
[7] W. Win, "Temperatur und Entropie der Strahlung", Ann. der Physik **22**, 132-165 (1884).
[8] H. Goldstein, *"Classical Mechanics, second ed."*, Addison-Wesley 1980, USA.
[9] T. Boyer, "Classical statistical thermodynamics and electromagnetic zero-point radiation", Phys. Rev. **186**, 1374 (1969).
[10] T. Boyer, "Thermodynamics of the harmonic oscillator: Win's displacement law and the Planck spectrum", Am. J. Phys. **71**, 866 (2003).
[11] D.C. Cole, "Derivation of the classical electromagnetic zero-point radiation spectrum via a classical thermodynamic operation involving van der Waals forces", Phys. Rev. A **42**, 847 (1990).

ISSN: 2594-1011

Grafito con nanopartículas de plata

Rubí Anyra Rosales Ozuna, Gabriela L. Rueda Morales,
Gerardo Ortega Cervantez y Jaime Ortiz López
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas-Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: garuedamo@gmail.com

Resumen — **En este trabajo se presenta un método de síntesis de nanopartículas de plata cuya producción es a bajo costo, fácil de llevar a cabo y el periodo de tiempo empleado es corto. Se presentan diferentes condiciones de síntesis de nanopartículas vía microondas usando un horno doméstico, para ello, se preparan muestras utilizando ámpulas de cuarzo abiertas con mezclas de polvo de grafito y acetato de plata que se exponen a la irradiación durante diferentes intervalos de tiempo. Las muestras se caracterizan por Microscopia Electrónica de Barrido, Espectroscopia Raman y Difracción de Rayos X, como resultado se obtiene un compuesto de grafito con nanopartículas de plata de diferentes tamaños dependiendo de las condiciones de síntesis.**

Palabras Clave – **nanopartículas, plata, grafito**

Abstract — **In this work we present a low-cost method of silver nanoparticles synthesis whose production is easy to carry out in a short period of time. Different synthesis conditions are assayed using a domestic microwave oven. Samples are prepared using open quartz ampoules filled with mixtures of graphite and silver acetate powders exposed to microwave irradiation during different time intervals. The samples are characterized by Scanning Electron Microscopy, Raman Spectroscopy and X-Ray Diffraction. As a result, a graphite compound with silver nanoparticles of different sizes is obtained depending on the synthesis conditions.**

Keywords — **nanoparticles, silver, graphite**

I. Introducción

En la actualidad el desarrollo de compuestos utilizando nanopartículas ha venido en aumento debido a que agregando porcentajes en peso menores al 10% se logra mejorar las propiedades de la matriz. Los compuestos que usan nanopartículas de plata (AgNps) son de los más comercializados debido a su actividad antimicrobiana, se aplican principalmente en medicina, productos para higiene y en la fabricación de objetos personales, en la mayoría de los casos se sintetizan por separado las AgNps .

Existen varios métodos de síntesis de nanopartículas de plata, en la tabla I se enlistan los principales, indicando sus ventajas y desventajas. En este trabajo se presenta un método de síntesis de nanopartículas de plata con grafito simple, rápido y de bajo costo.

TABLA I.

Métodos de Síntesis de Nanopartículas de Plata

	Método de síntesis	Ventajas	Desventajas	Tiempo
Físico	Ablación Laser [1]	Es un proceso aislado que permite obtener resultados sin residuos externos y es un método muy poco contaminante	El costo del equipo es muy alto. Este proceso requiere altas energías. No se controla fácilmente la tasa de crecimiento de las NPs	Entre 10 y 20 minutos de tiempo de ablación
Químico	Sol-Gel [2-4]	Este método es muy utilizado en los últimos años debido al control que se puede tener en la pureza, la forma y tamaño de los materiales nanoestructurados. Además el proceso es realizado a bajas temperaturas	El costo de los precursores es alto. El periodo de tiempo empleado en el proceso de síntesis es largo	Un aproximado de 7 horas más el tiempo de envejecimiento que puede tardar semanas
	Química verde [5-6]	Es un método amigable con el medio ambiente ya que usa extractos de plantas en lugar de reactivos químicos. Cuando es asistido con reactor de microondas el tiempo de proceso es corto	Se presentan algunos agregados de partículas en los dos métodos. Cuando el proceso es por envejecimiento se emplea mucho tiempo en la síntesis.	Por envejecimiento 24 horas. Y asistido por microondas 4 minutos
Biológico	Bioreducción [7]	Es una técnica ecológica, en la que se emplean hongos, bacterias o extractos de plantas	El periodo de tiempo empleado para la bioreducción es muy largo y su producción es muy baja	Aproximadamente 120 horas para el cultivo de los hongos + 72 horas de incubación del hongo en solución de nitrato de plata

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20181017

II. Metodología

Las muestras se preparan mezclando polvo de grafito y acetato de plata ($C_2H_3AgO_2$) a una proporción en peso del 90 y 10% respectivamente, para un total de 100mg. La mezcla se muele mecánicamente en un mortero de ágata durante 3 min para homogenizarla y se deposita en un ámpula de cuarzo abierta (Fig. 1) fabricada de un tubo de con 1 cm de diámetro interno. Las muestras se exponen a la irradiación de microondas en un horno doméstico por 4, 8 y 12 minutos de tiempo efectivo, este proceso se lleva a cabo en intervalos de 30 segundos de exposición por 30 segundos de reposo.

III. Resultados

A. Espectroscopía Raman (ERaman)

En la parte central de la Fig. 4 se presentan los espectros raman de las muestras con 4, 8 y 12 min y para comparar en la parte superior e inferior los correspondientes a la materia prima: grafito y acetato de plata respectivamente. El efecto que causan las microondas en el grafito es calentarlo y este a su vez descompone al acetato plata de donde se forman las partículas y nanopartículas de plata.

El grafito presenta tres bandas principales alrededor de las posiciones 1346 cm^{-1} (D), 1582 cm^{-1} (G) y 2726 cm^{-1} (2D) las cuales se atribuyen a: defectos estructurales, a la grafitización y a los segundos modos normales de la banda D, respectivamente. En todas las muestras se observan estas tres bandas, los defectos disminuyen debido al calentamiento por irradiación (decremento en el tamaño de la banda D con respeto a la banda G) y la asimetría de la banda 2D indica la posible exfoliación del grafito (4 y 8 min) formando polvos de menor tamaño [8]. El espectro raman del acetato de plata tiene bandas afiladas relativas a ciertos modos vibracionales estudiados por Irene Martina et al. [9] ninguna de las muestras presenta estas bandas, por lo que se induce que el acetato de plata se descompone a partir de 4 min de exposición a las microondas a una concentración del 10% en peso.

Fig. 1. Ámpula de cuarzo

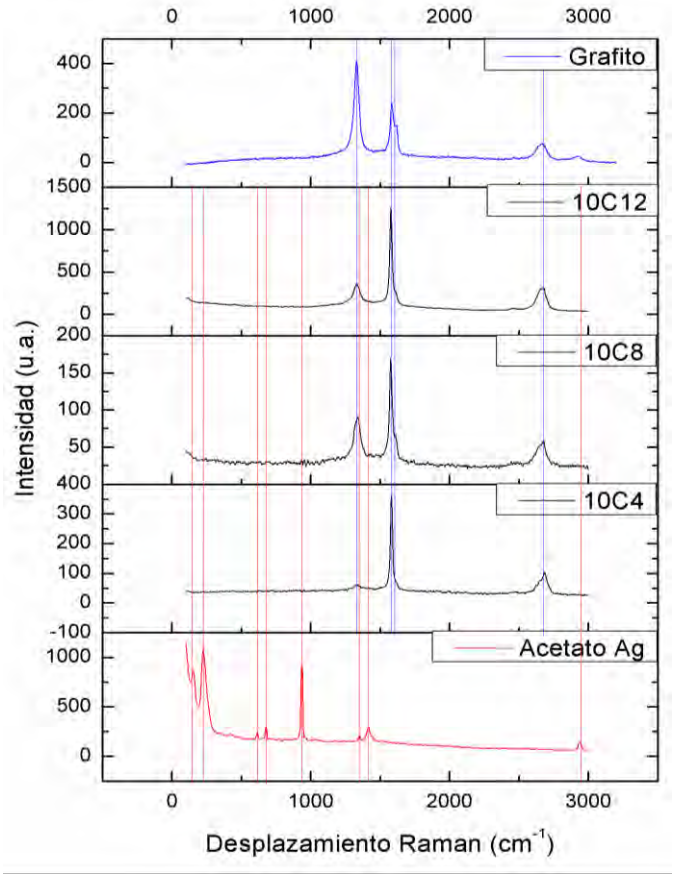


Fig. 2. Espectros Raman correspondientes a grafito, muestras a 12, 8 y 4 min de irradiación, y acetato de plata respectivamente de arriba hacia abajo.

B. Difracción de Rayos X

Las tres muestras tienen un patrón de difracción similar por lo que solo se muestra el correspondiente a la muestra irradiada por 8 min. Los picos de difracción en las pociones 2Θ de 37.9 y 44.14 corresponden a los planos (1,1,1) y (2,0,0) de la plata metálica con estructura cristalina cúbica simple (código de referencia 00-012-0212) y los que aparecen en las posiciones 26.42, 44.46 y 54.51 corresponden a los planos (0,0,2), (1,0,1) y (0,0,4) del grafito con estructura hexagonal compacta (código de referencia 00-001-1164). Lo que indica que hay presencia de plata en todas las muestras

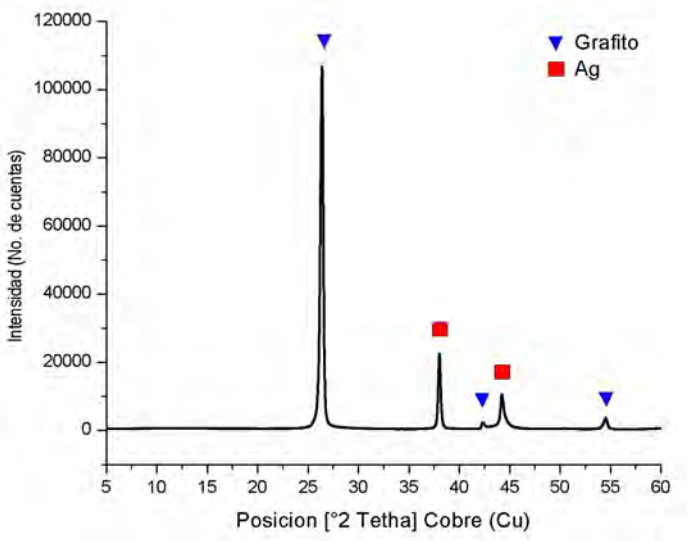


Fig. 3. Difractograma de la muestra con 8 min de irradiación a las microondas.

C. *Microscopía Electrónica de Barrido (MEB)*

Al revisar diferentes zonas de las muestras, se observa que están presentes partículas y nanopartículas de plata sobre grafito (base obscura). El porcentaje de partículas con tamaños mayores a 100 nm, es de 10, 3 y 57% para las muestras de 4, 8 y 12 min respectivamente. En cada muestra se presentan AgNps de varios tamaños, en el histograma de la fig. 4 se agrupan en intervalos para evidenciar el más frecuente. En la Fig. 5 a) b) y c) se presentan imágenes de MEB de las muestras con los tiempos de 4, 8 y 12 minutos respectivamente.

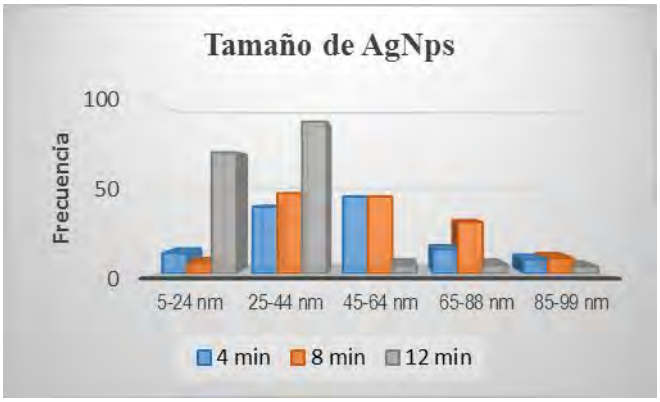


Fig. 4. Histograma del tamaño de AgN

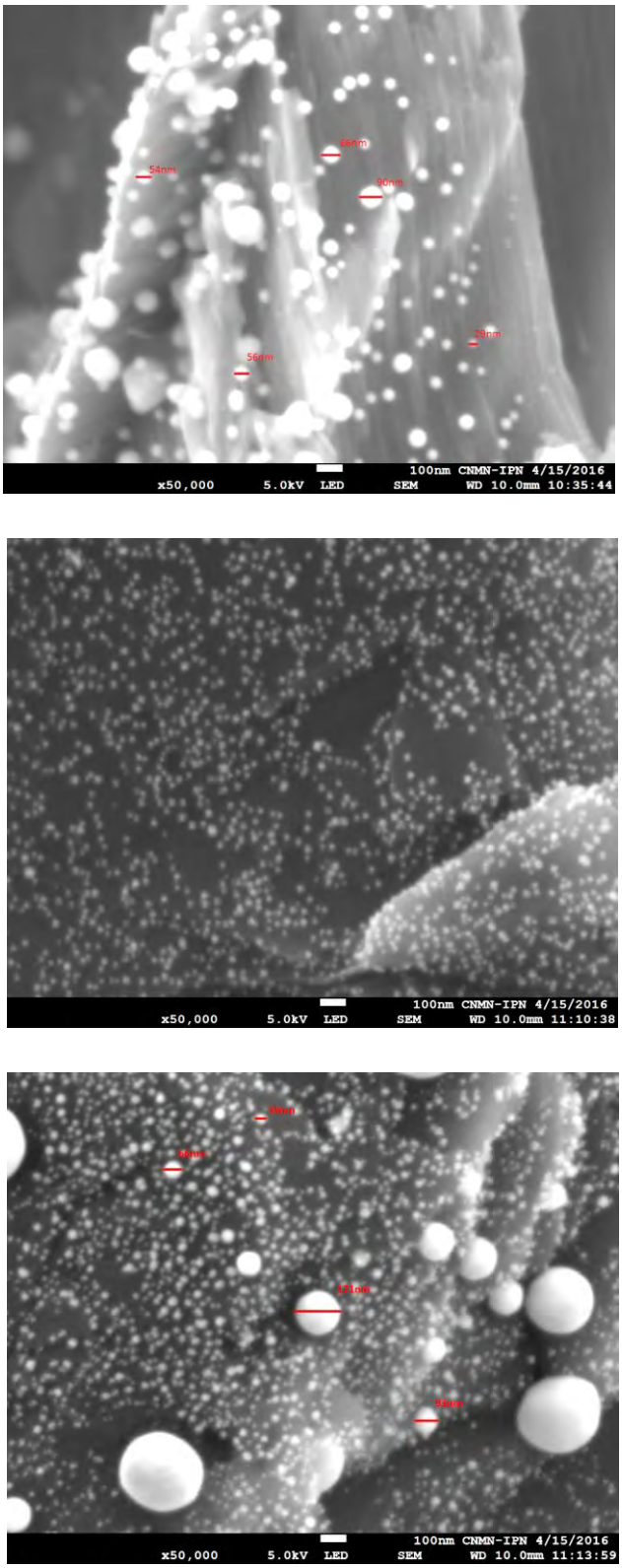


Fig. 5. Imágenes de MEB donde a), b) y c) corresponden a 4, 8 y 12 min respectivament

IV. Discusión y Conclusiones

Se obtienen compuestos de grafito con partículas y nanopartículas de plata de una manera sencilla y económica usando un horno de microondas doméstico.

Por Espectroscopía Raman se observa que 4 min de irradiación son suficientes para descomponer el acetato de plata, ya que no se detecta su señal, solo se observa la presencia de grafito. Este resultados se corroboran con Difracción de Rayos X donde aparece la señal de la plata metálica y del grafito y no aparece la señal del acetato de plata.

Por lo tanto el grafito se calienta por las microondas con 4 min de irradiación o más (alrededor de 1200 C) y descompone al acetato de plata (240 C) y por MEB se observa que se forman partículas y nanopartículas de plata en todas las muestras.

Conforme aumenta el tiempo de irradiación se forma mayor porcentaje de partículas de plata, de esto se puede inferir que con el aumento del tiempo de irradiación se tienden a aglomerar las nanopartículas para formar partículas de plata. Pero según el histograma el intervalo de tamaño de las nanopartículas disminuye con el tiempo de irradiación, por lo que este trabajo nos indica que se debe tener más evidencia del tamaño de las partículas y nanopartículas de plata para hacer una mejor estadística, cabe mencionar que con DRX se analiza toda la muestra, con ERaman zonas del tamaño del spot, (algunos milímetros) y con MEB imágenes de áreas del orden de micras.

Perspectivas

Una continuación a este trabajo sería aplicar métodos para separar las AgNPs del polvo de grafito.

La principal aplicación que pudiera tener el composito de grafito con AgNPs es en filtros de agua y aires acondicionados que en algunos casos usan carbón activado. La mejora consiste en agregar al carbón activado un porcentaje de este compuesto que permita obtener agua y aire limpios no solo de contaminantes, químicos, ciertos tipos de metales y olores desagradables, sino que agregaríamos las propiedades bactericidas y antimicrobianas de las AgNPs y así se evitarían enfermedades ocasionadas por este tipo de microorganismos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a COFAA-IPN/SIBE, EDI-IPN, SIP-IPN y al CNMN por los servicios de Microscopía Electrónica de Barrido y Difracción de Rayos X.

Referencias

[1] María G. Díaz Ovando, Obtención de nanopartículas de plata por ablación laser soportadas en hilo de sutura de seda, tesis de ingeniería, facultad de química, Universidad Autónoma del estado de México, Toluca México (2013).

[2] Rodolfo Zanella, metodologías para la síntesis de nanopartículas: controlando forma y tamaño, Mundo Nano, vol 3 (2012).

[3] David S. García Zaleta, Desarrollo de cerámicos nanoestructurados de TiO2 dopados con Pd y Pt por Sol Gel y su evaluación fotocatalítica en la degradación de 4-Clorofenol, tesis de maestria, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, Altamira Tamaulipas (2009)

[4] Samira Bagheri et al, Generation of hematite nanoparticles via sol-gel method, Research Journal of Chemical Sciences, vol. 3(2013).

[5] Is Fatimah, Green synthesis of silver nanoparticles using extract of parkia speciose has skpods assisted by microwave irradiation, Journal of Advanced Research (2016)

[6] Iago Neira García, Síntesis verde de nanopartículas para la eliminación de colorantes en medios acuosos. Universidad de la Coruña (2015).

[7] Miguel A. Aguilar Mendez, Síntesis y caracterización de nanopartículas de plata: Efecto sobre Colletotrichumglo esporioides, tesis de doctorado, Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada-IPN, Mexico D.F. (2009).

[8] Jorio A, Pimenta Mam Souza AG, Saito R, Dresselhaus G. Dresselhaus MS, *New J. Phys*, 2003, 5 ,139.1- 139.17.

[9] Irene Martina, Rita Wiesinger, Dubravka Jembrih-Simbürger, Manfred Schreiner, Micro-Raman Spectroscopy of Silver Corrosion Products, e-PS, 2012, 9, 1-8.

ISSN: 2594-1011

Entropía de muestreo aplicada al análisis de series de tiempo RR en condiciones de estrés

Alejandro Muñoz-Diosdado [1], Gonzalo Gálvez-Coyt [1]and Eric E. Solís-Montúfar [2]

[1]Departamento de Ciencias Básicas, UPIBI, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México; México.
[2]Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México; México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 56493 ggalvezcoyt@gamil.com,: amunozdiosdado@gmail.com eric.montufar@gmail.com

Resumen — **La variabilidad cardíaca es un indicativo del estado de salud de una persona, su disminución está directamente relacionada con la enfermedad. La serie temporal de intervalos RR o tacograma se obtiene del electrocardiograma correspondiente. La serie RR refleja en buena medida la variabilidad cardíaca y puede verse como una serie de tiempo altamente no lineal y compleja, por lo que debe ser analizada con técnicas no lineales. En este trabajo, la entropía de muestreo (SampEn) se utiliza como técnica de análisis. Las series RR se obtuvieron de una prueba de esfuerzo que consistía en un período de descanso seguido de un período de actividad física moderada. Los datos se agruparon en tres clases: jóvenes sedentarios (20 años), adultos sedentarios de mediana edad (50 años) y jóvenes activos (20 años). La aplicación de SampEn a cada grupo muestra que, para los primeros dos grupos, la entropía comienza desde un alto valor de reposo y disminuye apreciablemente en el caso de la actividad física, sin embargo, la disminución es mayor para los adultos de mediana edad. Estos resultados son altamente reproducibles. Para el tercer grupo, se observa un aumento en la entropía asociado a la actividad física.**

Palabras Clave – **complejidad, entropía de muestreo, prueba de estrés, tacograma variabilidad del ritmo cardíaco.**

Abstract — **Cardiac variability is an indication of a person's state of health, its decrease is directly related to the disease. The time series of RR intervals or tacogram is obtained from the corresponding electrocardiogram. The RR series largely reflects cardiac variability and can be seen as a highly non-linear and complex time series, so it should be analyzed with non-linear techniques. In this work, the sampling entropy (SampEn) is used as the analysis technique. The RR series were obtained from an exercise test consisting of a rest period followed by a period of moderate physical activity. The data were grouped into three classes: sedentary young people (20 years old), middle-aged sedentary adults (50 years old) and active young people (20 years old). The application of SampEn to each group shows that, for the first two groups, entropy starts from a high resting value and decreases appreciably in the case of physical activity, however, the decrease is greater for middle-aged adults. These results are highly reproducible. For the third group, an increase in entropy associated with physical activity is observed.**

Keywords — **complexity, heart rate variability, sample entropy, stress test, tacogram.**

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP- 20182121

I. Introducción

Cuando la variabilidad de la frecuencia cardíaca (HRV por sus siglas en inglés) se reduce, asociamos esta reducción con un riesgo elevado de enfermedad cardiovascular [1-2], y también se ha informado un aumento de la mortalidad en pacientes con enfermedades del sistema circulatorio [3-4]. La HRV se puede extraer del electrocardiograma (ECG), localizamos los puntos R y obtenemos la serie temporal de -intervalos RR o tacogramas. La HRV suele medirse en condiciones bien controladas durante cortos períodos de tiempo de pocos minutos

La medición a largo plazo se realiza mediante un aparato Holter el cual puede grabar el electrocardiograma mientras son realizadas actividades como ejercicio físico. Los cambios en la HRV inducida por la actividad física baja o intensa han sido ampliamente reportados [5-10]. Los tacogramas son series temporales no lineales, altamente no homogéneas y no estacionarias [11], por lo tanto, los métodos no lineales pueden captar mejor los cambios en la HRV que no pueden captarse mediante métodos lineales. Para analizar estas series de tiempo se ha utilizado el análisis de fluctuación sin tendencia [12-13], dimensión fractal [14-15], espectros multifractal [16] y una gran cantidad de otras metodologías no lineales, y entre ellas se han utilizado varias medidas de entropía para el mismo objetivo Uno de los más importantes es la muestra de entropía (SampEn) [17-18] que mide la complejidad de la serie temporal. Los valores más altos de SampEn indican una señal más compleja y un valor más bajo de SampEn implica menos complejidad de la señal.

El ejercicio puede provocar alteraciones cardiovasculares que no están presentes en reposo y, por lo tanto, pueden utilizarse como un medio para evaluar la función cardíaca. La prueba de estrés (PE) es un procedimiento diagnóstico que evalúa la respuesta del corazón a un ejercicio físico progresivo. La PE es una de las pruebas no invasivas más comunes en cardiología para establecer o confirmar el diagnóstico y el pronóstico de la enfermedad cardíaca y para evaluar el efecto de su tratamiento. La presencia de anormalidades cardiovasculares puede manifestarse por alteraciones de los parámetros que se determinan durante la prueba. Por lo tanto, al someterse a un trabajo adicional para el corazón, mientras observa al paciente y a sus monitores de electrocardiograma, es posible descubrir problemas cardíacos que no son evidentes en el sujeto en reposo. Se ha demostrado que la frecuencia

cardíaca aumenta durante el ejercicio dinámico debido tanto a la retirada parasimpática como a la actividad simpática aumentada. El papel relativo de estas dos unidades depende de la intensidad del ejercicio [6]. Se ha informado en modelos animales que obtener acondicionamiento físico, antes de una patología inducida, puede reducir los problemas causados por la enfermedad [19].

En este trabajo, el algoritmo SampEn se aplicó al análisis de tacogramas obtenidos de adultos sanos tanto en reposo como durante pruebas de estrés. La prueba de esfuerzo consistió en caminar en una cinta rodante durante treinta minutos. Trabajamos con tres grupos de personas: un grupo de jóvenes sedentarios de alrededor de veinte años de edad, otro grupo de adultos de alrededor de 50 años también de hábitos sedentarios y otro grupo de personas que sin ser atletas realizan actividad física diariamente de forma regular. Se encontraron diferencias significativas entre los valores SampEn de las series restantes y los valores SampEn durante la prueba de estrés para los tres grupos. En los grupos sedentarios (adultos jóvenes y de mediana edad) hay una disminución en SampEn. Pero en el caso de las personas que regularmente hacen ejercicio, hay una tendencia diferente. los resultados muestran una tendencia que hace suponer una relación entre el cambio la de la entropía del reposo y actividad física con la condición física de la persona.

II. Metodología

A. *Método de la entropía de muestreo (SampEn)*

A partir de una serie de tiempo con N puntos dados por la expresión {x (i), 1≤i≤N}, se construye un conjunto de vectores de longitud m, donde cada uno de los vectores tiene la forma:

$$\vec{x}_i = (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m-1}) \quad (1)$$

De esta forma, se pueden construir N-m+1 vectores de longitud m.
La distancia entre los vectores $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_j$ se define como la diferencia máxima en el valor absoluto de los componentes de los vectores, es decir,

$$d_{i,j} = max(|x_{i+k} - x_{j+k}|, 0 \le k \le m-1). \quad (2)$$

Por lo tanto, en este contexto, dos vectores $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_j$ son similares si cumplen ese $d_{i,j} < r$, donde r es un valor umbral que depende de las condiciones establecidas.
Para una longitud m y un umbral r, el número de vectores de longitud m similar a $\vec{x}_i$se calcula mediante:

$$n_i^m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-m} \delta(\mathrm{i,j,m,r}) \quad (3)$$

Donde

$$\delta(\mathrm{i,j,m,r}) = \begin{cases} 1 & si \quad d_{i,j} < r \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \quad (4)$$

Es notable que i ≠ j, significa que la autocomparación de un vector consigo mismo no se considera en la suma.
La similitud B_i^mdel conjunto de vectores $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_j$para una longitud m se calcula mediante,

$$A_i^m = \frac{1}{N-m} n_i^m, \quad i = 1, 2, \cdots, N-m \quad (5)$$

Ahora la similitud promedio se puede obtener mediante la expresión

$$A^m = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} A_i^m \quad (6)$$

Usando la misma serie de tiempo y tolerancia *r*, la similitud promedio se calcula para un vector de longitud m + 1, es decir, se calcula A^{m+1}
La denominada entropía de muestreo se obtiene mediante la fórmula:

$$SampEn(m,r) = -\ln \frac{A^{m+1}}{A^m} \quad (7)$$

Hay varios métodos para calcular la entropía [20], preferimos el uso de SampEn porque este método no presenta grandes alteraciones cuando la longitud de la serie es lo suficientemente grande. En investigaciones previas se ha mostrado que el método proporciona excelentes resultados para series de tiempo sintéticas y fisiológicas [21], sobre la base de esa experiencia previa, elegimos utilizar los valores de *r* = 0.2 y m = 3 para los cálculos actuales.

B. *Prueba de estrés*

Se analizaron tacogramas de siete jóvenes sedentarios en reposo y en una prueba de esfuerzo cardíaco. Los sujetos fueron 3 hombres y 4 mujeres con una edad promedio de veinte años. Para cada tema, se recopiló la información personal, incluida la edad y el sexo. Los pacientes con cualquier enfermedad que pudiera afectar el sistema cardiovascular no se incluyeron en el estudio. Los sujetos no deberían tomar medicamentos antes y durante las pruebas de estrés. Se les pidió que durmieran lo suficiente

durante la noche anterior. Todas las pruebas se realizaron en la mañana (~ 10 a.m.) en una habitación tranquila con una temperatura entre 20 y 21 grados centígrados. Para cada grabación, hubo dos medidas, un registro de descanso de 60 minutos y una prueba de esfuerzo cardíaco de 30 minutos. Para esta experimentación, el estudio se diseñó llevando a los pacientes a un estado de reposo completo, mientras que el registro de ECG se obtuvo con un monitor modelo Fukuda Denshi Holter FM-150 con frecuencia de muestreo de 125Hz, una vez finalizado el período de descanso de 30 minutos, los sujetos fueron llevado a una cinta de correr eléctrica comercial a 4, 6 km por hora (mph) para un segundo registro de 30 minutos. La señal de latido a latido o tacograma se obtuvo para cada ECG digitalizado y luego se procesó con el algoritmo SampEn. Una de las series de tiempo medidas se muestra en la Figura 1, en los tacogramas es fácilmente reconocible cuando los sujetos están en reposo y cuando están haciendo la prueba de caminar. Por lo tanto, fue fácil obtener los tacogramas en reposo y los tacogramas en la prueba de esfuerzo. Para garantizar la reproducibilidad de los resultados, se le pidió a un paciente que repitiera la prueba durante siete días diferentes, tratamos de mantener todas las condiciones iguales al primer día.

Las medidas se repitieron para seis sujetos de mediana edad con una edad promedio de cincuenta años, dos mujeres y cuatro hombres. Las condiciones fueron las mismas que para el primer grupo, pero disminuimos la velocidad de la prueba de esfuerzo a 3.5 millas por hora. Cinco de los sujetos eran sedentarios y un hombre tiene una buena condición física porque regularmente hace ejercicio todos los días.

La fig. 1 muestra la gráfica de una serie de tiempo RR o tacograma donde se observa claramente dos partes, la primera corresponde al reposo y la segunda la actividad física moderada.

III. Resultados

Se observa un comportamiento general para todas las personas sedentarias, en reposo tienen un valor de entropía mayor que cuando se ejercitan. Este comportamiento se muestra en la Figura 2 para un joven sedentario, el primer punto corresponde al valor de SampEn en reposo, el segundo punto al valor obtenido cuando caminó en la cinta a una velocidad de 3.5 mph, luego se le pidió que Descansar durante una hora y caminar otros treinta minutos a una velocidad de 4 mph, el tercer punto corresponde al valor de SampEn para la velocidad de 4 mph. SampEn disminuye a medida que aumenta la velocidad.

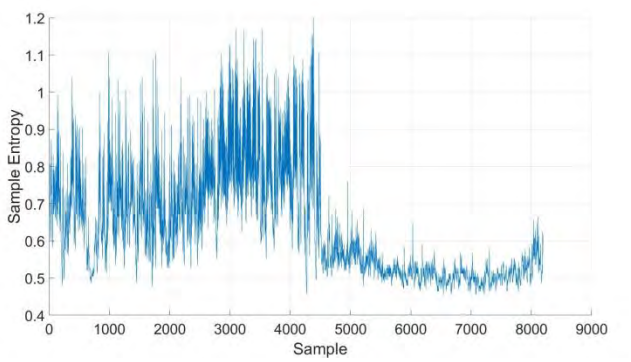


Fig. 1. El tacograma para un sujeto joven sano, la primera parte corresponde al período de descanso y la segunda mitad de la serie temporal pertenece a la prueba de esfuerzo cardíaco.

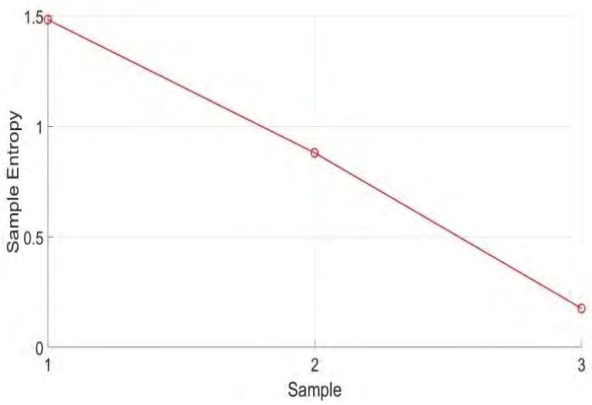


Fig. 2. SampEn para un sujeto donde el primer registro pertenece al período de descanso, el segundo registro a una condición de estrés cardíaco a 3.5 mph y la tercera medida a una condición de estrés cardíaco a 4 mph.

Con base en los resultados observados en la Fig. 2, podemos hacer la hipótesis de que SampEn disminuye al estresar el corazón de los sujetos. Para probar que el resultado obtenido no era aleatorio y pensar si los resultados son reproducibles, el sujeto fue probado siete veces para confirmar que el patrón observado del gráfico era replicable. En la Figura 3 podemos observar la comparación entre siete experimentos diferentes con el mismo sujeto. Como podemos observar, en todas las medidas se puede observar el patrón. Hay variaciones, como se espera en estos sistemas complejos, pero en general el patrón se repite.

Como se observó en la Fig. 3 anterior, la pérdida de entropía al estresar el corazón de los sujetos es notoria. Mostramos en la Fig. 4a, los resultados obtenidos para los seis jóvenes sedentarios, y con el objetivo de comparar, mostramos en la Fig. 4b, los resultados obtenidos para los seis adultos de mediana edad. Si observamos el cambio en la pendiente, observamos que los cambios más importantes se observan en los gráficos de los adultos de mediana edad, es decir, la entropía disminuye menos en los jóvenes que en los adultos. El cambio promedio en SampEn para jóvenes es x = -0.2646 ± 0.1567 y para adultos x= -0.9550 ± 0.5134.

Probablemente si las velocidades de las pruebas de estrés fueran iguales, las disminuciones serían mayores. Es importante señalar que los cálculos de los promedios de las entropías se calcularon en ambos gráficos con solo 5 personas. Esto se hizo porque en la Fig. 4a, el gráfico marcado corresponde a la persona que, en función de la información previa recopilada entre los participantes, tiene la peor condición física.

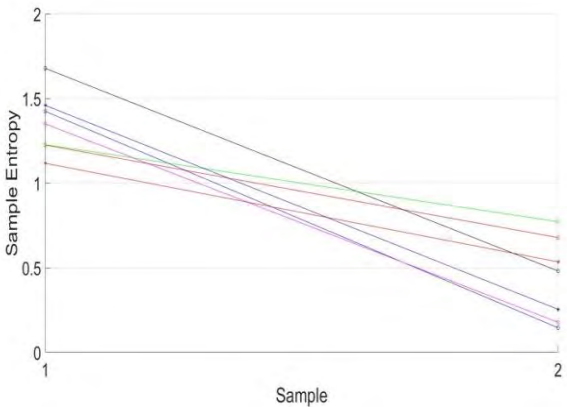


Fig. 3. Valores de SampEn para el descanso y las pruebas de estrés cardíaco de un sujeto en siete medidas. La media de Sampen en reposo es 1.3541 ± 0.187 y en el estrés cardíaco la media de SampEn es 0.4344 ± 0. 2475.

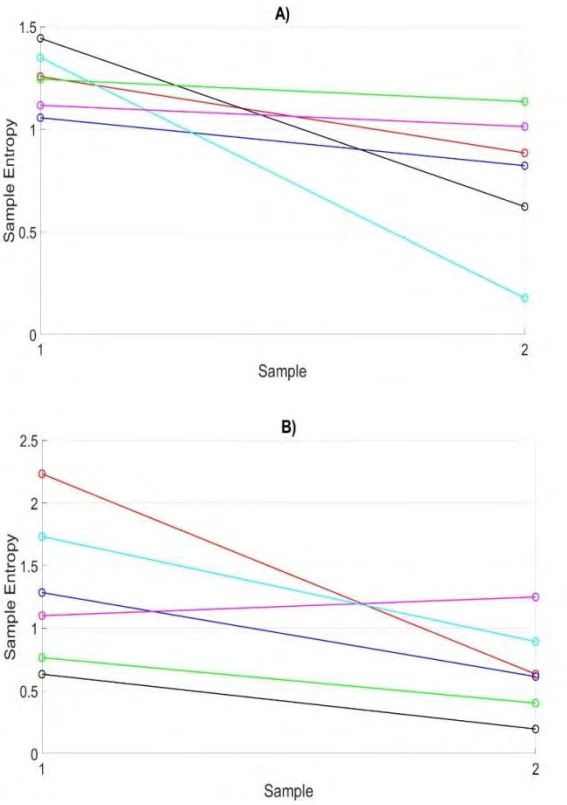


Fig. 4. Valores de entropía de muestra para el descanso y pruebas de estrés cardíaco para A) seis sujetos jóvenes y B) seis adultos de mediana edad. Las velocidades para las pruebas de estrés fueron de 4 mph y 3.5 mph respectivamente.

La Fig. 4b muestra un comportamiento "anómalo" en la curva marcada, esto corresponde al único adulto de edad promedio que hace ejercicio regularmente todos los días, y cuya entropía creció en lugar de disminuir, este comportamiento probablemente se aclarará con los resultados que se presentan a continuación.

El otro grupo de 3 sujetos jóvenes que regularmente hacen ejercicio fue analizado con la misma metodología. Estas tres personas evaluadas tienen una diferencia particular con respecto a los otros sujetos jóvenes, probablemente debido a la actividad física. En comparación con los resultados observados en la Fig. 4a, estas medidas tienen una pendiente positiva, es decir, la entropía de las series temporales tiende a aumentar al realizar los episodios de estrés cardíaco (Fig. 5). Este comportamiento coincide con el caso que se resaltó en la Fig. 4b para el único adulto de mediana edad que tiene buena condición física.

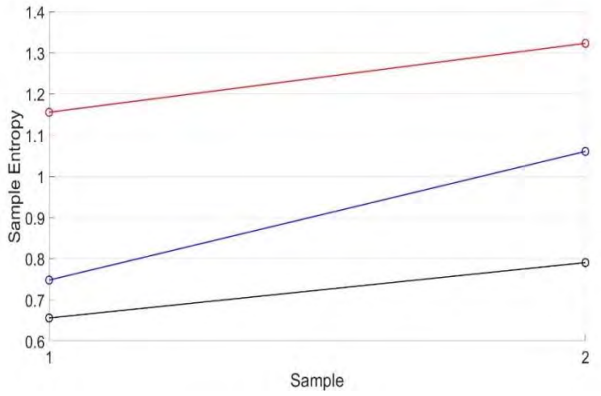


Fig. 5. Muestra los valores de entropía para el descanso y las pruebas de estrés cardíaco para tres sujetos jóvenes que realizan actividad física regular.

IV. Discusión

El presente trabajo muestra que existe una variación en los valores de SampEn para las series de tiempo de latido a latido de sujetos en diferentes condiciones. Se ha informado que los tacogramas de personas sanas tienden a tener valores de entropía más altos que los tacogramas de la población diagnosticada con insuficiencia cardíaca congestiva, esta falta de entropía implica una pérdida de complejidad de la señal. Esto es similar a lo que observamos en el presente trabajo, cuando las personas sedentarias están en reposo, sus tacogramas tienen valores de SampEn que disminuyen cuando se someten a pruebas de estrés, por lo tanto, las series de tiempo de latido y latido son menos complejas cuando hacen ejercicio.

Para asegurar que los resultados fueran confiables y el patrón observado donde la disminución de entropía en situaciones de estrés cardíaco era replicable, las medidas se desarrollaron en diferentes días para un solo paciente que reproducía las condiciones de la prueba. El análisis de este experimento nos permitió afirmar que los resultados son reproducibles (Fig. 3). Como es sabido, el sistema cardíaco tiene una dinámica compleja y hay muchos factores que afectan el ritmo cardíaco, de acuerdo con esto, las medidas observadas no son idénticas. Además, al realizar una prueba física muchas veces, el corazón comienza a acostumbrarse a este esfuerzo y cambia la dinámica del latido del corazón.

Al comparar los sujetos, se observó una diferencia entre los que desarrollan actividad física regular y los que no. En contraste con la tendencia común mostrada por la mayoría de los sujetos evaluados, se observó un aumento de los valores de entropía en sujetos con ejercicio regular en su día a día. En contraste con los sujetos que viven más sedentariamente, la medida de entropía de la serie de tiempo de la prueba de esfuerzo cardíaco tuvo un aumento en comparación con el resto de las series de tiempo.

V. Conclusiones

El análisis SampEn de las series de latido a latido de las grabaciones continuas de ECG durante la realización de pruebas de estrés cardíaco demostró un gran enfoque para identificar una aproximación de la condición física. Solo aquellos sujetos con actividad física regular mostraron un aumento en la entropía de la muestra en el estrés cardíaco y los valores más bajos pertenecen a sujetos con un estilo de vida sedentario. Este trabajo sugiere que la entropía de la muestra es una buena medida de la variabilidad cardiovascular que puede relacionarse con la forma física. Las medidas de ventana para las pruebas de una hora nos llevan a creer que la medida del estrés cardíaco mediante el uso de SampEn posiblemente no sea solo para series temporales con gran contraste en la variabilidad del corazon como las pruebas de estrés cardíaco en reposo, también puede funcionar para medidas continuas en las que hay una variabilidad suave en el tiempo.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de las becas COFAA, EDI y CONACYT.

Referencias

[1] Tsuji, H.; Venditti, F.J., Jr.; Manders, E.S.; Evans, J.C.; Larson, M.G.; Feldman, C.L.; Levy, D. Reduced heart rate variability and mortality risk in an elderly cohort. The framingham heart study. *Circulation* **1994**, *90*, 878–883.

[2] Felber Dietrich, D.; Schindler, C.; Schwartz, J.; Barthelemy, J.C.; Tschopp, J.M.; Roche, F; et al. Heart rate variability in an ageing population and its association with lifestyle and cardiovascular risk factors: Results of the sapaldia study. *Europace* **2006**, *8*, 521–529.

[3] Ziegler, D.; Zentai, C.P.; Perz, S.; Rathmann,W.; Haastert, B.; Döring, A.; Meisinger, C.; Group, K.S. Prediction of mortality using measures of cardiac autonomic dysfunction in the diabetic and nondiabetic population: The monica/kora augsburg cohort study. *Diabetes Care* **2008**, *31*, 556–561.

[4] Drawz, P.; Babineau, D.; Brecklin, C.; He, J.; Kallem, R.; et al. Heart rate variability is a predictor of mortality in chronic kidney disease: A report from the cric study. *Am. J. Nephrol*. **2013**, *38*, 517–528

[5] Tulppo, M.; Makikallio, T.; Takala, T.; Seppanen, T.; Huikuri, H. Quantitative beat-to-beat analysis of heart rate dynamics during exercise. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol*. **1996**, *271,* H244–H252.

[6] Aubert, A. E., Seps, B., Beckers, F. Heart rate variability in athletes. *Sports and Medicine* **2003**, *33*, 889–919.

[7] Leicht, A.S.; Sinclair, W.H.; Spinks, W.L. Effect of exercise mode on heart rate variability during steady state exercise. *Eur. J. Appl. Physiol*. **2008**, *102*, 195–204.

[8] Goya-Esteban, R.; Barquero-Perez, O.; Sarabia-Cachadina, E.; de la Cruz-Torres, B.; Naranjo-Orellana, J.; Rojo-Alvarez, J.; Murray, A. Heart rate variability non linear dynamics in intense exercise. *Comput. Cardiol*. **2012**, *39*, 177–180.

[9] Weippert, M.; Behrens, M.; Rieger, A.; Behrens, K. Sample entropy and traditional measures of heart rate dynamics reveal different modes of cardiovascular control during low intensity exercise. *Entropy* **2014**, *16*, 5698–5711.

[10] Taylor, K.A.; Wiles, J.D.; Coleman, D.D.; Sharma, R.; O'Driscoll, J.M. Continuous cardiac autonomic and haemodynamic responses to isometric exercise. *Med. Sci. Sports Exerc*. **2017**, 49, 1511-1519.

[11] Sugihara, G.; Allan,W.; Sobel, D.; Allan, K.D. Nonlinear control of heart rate variability in human infants. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **1996**, *93*, 2608–2613.

[12] Peng, C.-K.; Havlin, S.; Stanley, H. E.; Goldberger, A. L. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos* **1995**, *5*, 82-87.

[13] Hu, K.; Ivanov, P.C.; Chen, Z.; Carpena, P.; Stanley, H.E. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E* **2001**, *64*, 011114/1-011114/19.

[14] Higuchi, T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **1988**, *31*, 277-283.

[15] Eke, A.; Herman, P.; Kocsis, L.; Kozak, L.R. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals (Review)**.** *Physiological Measurement* 2002**,** *23*, R1-R38.

[16] Goldberger, A.L.; Amaral, L.A.N.; Hausdorff, J.M.; Ivanov, P.Ch.; Peng, C.-K.; Stanley, H.E. Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **2002**, *99*, 2466-24.

[17] Richman, J.S.; Moorman, J.R. Physiological time–series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* **2000**, *278*, H2039–H2049

[18] Leicht Lake, D. E.; Moorman, J. R. (2011). Accurate estimation of entropy in very short physiological time series: the problem of atrial fibrillation detection in implanted ventricular devices. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, **2001**, *300*, H319–H325.

[19] Amaral, L.S.d.B.; Silva, F.A.; Correia, V.B.; Andrade, C.E.F.; Dutra, B.A.; et al. Beneficial effects of previous exercise training on renal changes in streptozotocin-induced diabetic female rats. *Exp. Biol. Med*. **2016**, *241*, 437–445.

[20] Shi, B.; Zhang, Y.; Yuan, C.; Wang, S.; Li, P. Entropy Analysis of Short-Term Heartbeat Interval Time Series during Regular Walking. *Entropy* **2017**, *19*, 568; doi:10.3390/e19100568.

[21] Muñoz-Diosdado, A.; Gálvez-Coyt, G.; Solís Montúfar, E. Sample entropy applied to the analysis of synthetic time series and tachograms. *Journal of Physics: Conf. Series* **2017**, *792* 012062/1-012062/6. doi:10.1088/1742-6596/792/1/012062

ISSN: 2594-1011

La ecuación de Dirac interactuando con defectos topológicos

Manuel Salazar Ramírez[1] Didier Ojeda Guillén[1], Roberto Daniel Mota Esteves[2] y Víctor David Granados García[3]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM – IPN, México, D.F., México.
[2]Departamento de Ciencias Básicas, ESIME Culhuacán – IPN, México, D.F., México.
[3]Departamento de Física, ESFM – IPN, México, D.F., México.
Teléfono (55) 57296000 Ext. 52052 y 55311 E-mail: dogphysics@gmail.com

Resumen — **En este trabajo estudiamos y resolvemos el problema del oscilador Dirac con tres diferentes defectos topológicos, el espacio-tiempo de la cuerda cósmica ($\Lambda_{\mp}$), el espacio-tiempo de la cuerda cósmica magnética ($\Theta_{\mp}$) y el espacio-tiempo de dislocación cósmica ($\Pi_{\mp}$). Se obtienen las funciones de onda y su respectivo espectro de energía utilizando factorización de Schrödinger.**

Palabras Clave – **álgebras de Lie, ecuación de Dirac, estados coherentes, osciladores acoplados**

Abstract —**In this work we study and exactly solve the Dirac oscillator with three different topological defects, namely the cosmic string spacetime($\Lambda_{\mp}$), the magnetic cosmic string spacetime($\Theta_{\mp}$) and the cosmic dislocation spacetime ($\Pi_{\mp}$). From this, we obtain the wave functions and their respective energy spectrum by means of the Schrödinger factorization.**

Keywords — **Lie algebras, Dirac equation, coherent states, coupled oscillators**

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20180245, COFAA, EDD, EDI.

I. INTRODUCCIÓN

Los defectos topológicos son de gran importancia en muchas áreas de la física como la materia condensada, partículas y cosmología. En materia condensada los defectos topológicos nos sirven para describir sistemas como superfluidos y superconductores, en modelos de la física de partículas para catalizar muchos efectos inusuales, y son de gran importancia en cosmología ya que transportan energía que conduce a una fuerza gravitatoria extra atractiva y como semillas en la estructura cósmica [1]

El oscilador de Dirac interactuando con defectos topológicos ha sido ampliamente estudiado desde los diferentes puntos de vista [2]. La influencia del efecto Aharonov-Casher en el oscilador de Dirac es estudiado en tres escenarios diferentes de relatividad general: el espacio-tiempo de Minkowski, el espacio-tiempo cósmico y el espacio-tiempo de la dislocación cósmica. En [3] se estudia la influencia de los efectos no inerciales sobre el oscilador de Dirac en el espacio-tiempo de fondo de la cuerda cósmica. En este trabajo los autores discuten el comportamiento de la frecuencia del oscilador en un sistema no lineal que nos permite obtener soluciones relativistas de estados vinculados.

El oscilador Dirac se ha estudiado bajo la influencia de efectos no lineales de un marco giratorio en el espacio-tiempo de la cuerda cósmica. En este trabajo los autores mostraron que tanto los efectos no inerciales como la topología del espacio-tiempo cósmico restringen la región física del espacio-tiempo donde se puede colocar la partícula cuántica, y discuten además dos casos diferentes de estados ligados de la ecuación de Dirac analizando el comportamiento de la frecuencia del oscilador de Dirac [4]

.J.Carvalho, C. Furtado y F. Moraes [5] resuelven la ecuación de Dirac para el oscilador de Dirac en el espacio-tiempo de fondo de una cuerda cósmica, de una cuerda cósmica magnética, y de una dislocación cósmica. En uno de nuestros trabajos estudiamos una partícula cuántica relativista en el espacio tiempo de cuerdas cósmicas en presencia de un campo magnético y un potencial escalar de tipo de Coulomb [6].

El método de factorización en la mecánica cuántica ha sido un método alternativo y, a veces, menos complicado que los métodos analíticos. Infeld y Hull [7,8] introdujeron el método de factorización en el que se dió un método sistemático para factorizar y clasificar una gran clase de potenciales, se pudo resolver un gran número de sistemas cuánticos utilizando estos métodos [9,10]. La importancia de estos métodos de factorización reside en el hecho de que si la ecuación de Schrödinger es factorizable, el espectro de energía y las funciones propias se obtienen de forma algebraica. Además, los operadores construidos a partir de estos métodos están relacionados con álgebras de Lie compactas y no compactas.

En el presente trabajo estudiamos el oscilador Dirac con tres defectos topológicos diferentes, el espacio-tiempo de la cuerda cósmica, el espacio tiempo de las cuerdas cósmicas magnéticas y el espacio-tiempo de la dislocación cósmica. Trabajamos con la parte radial de este problema. En la Sección 2 obtenemos las ecuaciones diferenciales matriciales de segundo orden desacopladas, satisfechas por los componentes radiales. Aplicamos el método de factorización Schrödinger a una de las ecuaciones desacopladas, en la sección 3 obtenemos el espectro de energía y las funciones propias de nuestro problema.

II. Oscilador de Dirac en el espacio-tiempo de la cuerda cósmica

El tensor métrico para el espacio-tiempo cósmico en coordenadas cilíndricas está definido por el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2\rho^2 d\phi^2 + dz^2, \tag{1}$$

donde la ecuación de Dirac para este problema se puede escribir como

$$[i\gamma^\mu(x) - i\gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x) - m]\Psi(t,x) = 0. \tag{2}$$

Las matrices se pueden escribir en términos de las matrices Dirac estándar $\gamma^\mu(x)$ en el espacio-tiempo de Minkowski como

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x)\gamma(a), \tag{3}$$

donde la base de la tétrada $e_a^\mu(x)$ satisface la relación

$$e_\mu^a(x)e_\nu^{(b)}(x)\eta_{ab} = 2g_{\mu\nu} \ . \tag{4}$$

La tétrada inversa $e_\mu^a(x)$ en el espacio-tiempo de la cadena cósmica se escribe como [6]

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & \frac{\cos\phi}{\alpha\rho} & \frac{\sin\phi}{\alpha\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Por lo tanto, para esta representación las matrices de Dirac $\gamma^\mu(x)$ obedecen las relaciones

$$\gamma^0 = \gamma^1, \quad \gamma^3 = \gamma^z, \quad \gamma^\rho = cos\phi\gamma^1 + sin\phi\gamma^2,$$
$$\gamma^2 = \frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho}, \quad \gamma^\phi = -sin\phi\gamma^1 + cos\phi\gamma^2. \tag{6}$$

El término introducido en la ecuación (2) se puede calcular utilizando

$$e^0 = dt\,, \quad e^3 = dz, e^1 = cos\phi\, d\rho - \alpha\rho sin\phi\, d\phi,$$
$$e^2 = sin\phi\, d\rho + \alpha\rho cos\phi\, d\phi. \tag{7}$$

Puesto que $\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{2}\omega_{\{\mu\}}ab\frac{\Sigma^{\{ab\}}}{2}$ con $\Sigma^{\{ab\}} = \frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b]$ y usando las ecuaciones (6) obtenemos que la corrección de la curvatura está dada por la expresión

$$\gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x) = \frac{1-\alpha}{2\alpha\rho}\gamma^\rho. \tag{8}$$

El problema del oscilador de Dirac del espacio-tiempo de fondo de la cuerda cosmica se puede escribir como

$$\left[-i\gamma^t\,\partial_t + i\gamma^\rho\left(\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\alpha\rho} + \frac{i\gamma^\phi\partial_\phi}{\alpha\rho} + m\omega\beta\rho\right) + \frac{i\gamma^\phi\partial_\phi}{\alpha\rho} + i\gamma^z\partial_z - m\right]\Psi = 0 \tag{9}$$

Si asumimos la independencia temporal y la simetría rotacional del defecto alrededor del eje z, podemos proponer la función de onda Dirac como

$$\Psi = e^{\{-iEt+i\left(l+\frac{1}{2}-\frac{\Sigma^3}{2}\right)\phi+ikz\}}\begin{pmatrix}\chi(\rho)\\ \phi(\rho)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Así, podemos calcular las ecuaciones acopladas de las componentes del espinor χ y ϕ

$$\begin{aligned}&(E^2 - m^2\ )\chi - [i(cos\phi\sigma^1 + sin\phi\sigma^2)(\partial_\rho + \tfrac{1}{2}\,\rho - m\omega\beta\rho) - \\ &\frac{\lambda}{\rho}(-sin\phi\sigma^1 + cos\phi\sigma^2) - \\ &k\sigma^3]\,[i \vdash (cos\phi\sigma^1 + sin\phi\sigma^2\ ) \vdash (\partial_\rho + \\ &\tfrac{1}{2}\,\rho + m\omega\beta\rho) - \tfrac{\lambda}{\rho}\ (-sin\phi\sigma^1 + \\ &cos\phi\sigma^2\ ) - k\sigma^3\ ]\chi = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned}&(E^2 - m^2)\phi - \Big[i(cos\phi\sigma^1 + \\ &sin\phi\sigma^2)\left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} - m\omega\beta\rho\right) - \\ &\frac{\lambda}{\rho}(-sin\phi\sigma^1 + cos\phi\sigma^2) - \\ &k\sigma^3\Big]\Big[i(cos\phi\sigma^1 + sin\phi\sigma^2)\left(\partial_\rho + \tfrac{1}{2\rho} - \right. \\ &\left. -m\omega\beta\rho\right) - \tfrac{\lambda}{\rho}(-sin\phi\backslash sigma^1 + \\ &cos\phi\sigma^2) - k\sigma^3\Big]\phi = 0\,,\end{aligned} \tag{12}$$

III. Solución Algebraica usando métodos de factorización

En esta sección, obtendremos la solución exacta del oscilador de Dirac en el espacio-tiempo de la cuerda cómica por medio de

$$[i\lambda\sigma^1\sigma^2 + ik(\rho cos\phi\sigma^1\sigma^3 + \rho sin\phi\sigma^2\sigma^3)] = -2\vec{S}\cdot\vec{L}\,. \tag{13}$$

Después de una serie de sustituciones, obtenemos que

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \frac{\Lambda_{\mp}^2,\Theta_{\mp}^2,\Pi_{\mp}^2}{\rho^2} - m^2\omega^2\rho^2 + \gamma_{\pm}\right]\Psi = 0 \tag{14}$$

donde

$$\Lambda_{\mp} = \frac{l+\frac{1}{2}}{\alpha} \mp \frac{1}{2},$$

$$\Theta_{\mp} := \frac{l+\frac{1}{2}+\frac{e\Phi_B}{2\pi}}{\alpha} \mp \frac{1}{2},$$

$$\Pi_{\mp} := \frac{l+\frac{1}{2}+\frac{e\Phi_B}{2\pi} - kJ^z}{\alpha} \mp \frac{1}{2},$$

$$\gamma_{-}\pm = E^2 - m^2 + 2m\omega(\Lambda_{\pm},\Theta_{\pm},\Pi_{\pm}) - k^2. \tag{15}$$

Para desaparecer la primera derivada hacemos un cambio de variable, con lo cual obtenemos que

$$\left(-\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2} + m^2\omega^2\rho^4 - \gamma_{\pm}\rho^2\right)\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4} - \left[\Lambda_{\mp}^2,\Theta_{\mp}^2,\Pi_{\mp}^2\right]\right)\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Utilizados métodos de factorización de la mecánica cuántica se tienen que

$$\left(\rho\frac{d}{d\rho} + \mu\rho^2 + \delta\right)\left(-\rho\frac{d}{d\rho} + \varepsilon\rho^2 + \lambda\right)F = \sigma F. \tag{17}$$

Expandiendo esta expresión y comparándola con la ecuación (16) obtenemos para las constantes

$$\mu = \varepsilon = \pm\{m\omega\},\ \lambda = \delta + 1 = -\frac{\gamma_+}{2m\omega} - \frac{1}{2},$$
$$\sigma = \left(\frac{\gamma_+}{2m\omega} + 1\right)^2 - [\Lambda_-^2,\Theta_-^2,\Pi_-^2], \tag{20}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial para F puede ser factorizada como

$$[\mathrm{B}_{\mp} \mp 1]\mathrm{B}_{\pm} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\gamma_+}{2m\omega} \pm 1\right)^2 - (\Lambda_-^2,\Theta_-^2,\Pi_-^2)\right], \tag{21}$$

con

$$B_{\pm} = \frac{1}{2}\left[\mp\rho\frac{d}{d\rho} + m\omega\rho^2 - \frac{1}{2m\omega}(E^2 - m^2 - k^2) + [\Lambda_+,\Theta_+,\Pi_+] \mp \frac{1}{2}\right]. \tag{22}$$

Introduciendo un nuevo par de operadores

$$D_{\pm} = \frac{1}{2}[\mp\rho\frac{d}{d\rho} + m\omega\rho^2 \mp \frac{1}{2}] - D_3\,, \tag{23}$$

donde el tercer operador es definido como

$$D_3F = \frac{1}{4m\omega}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{(\Lambda_-^2,\Theta_-^2,\Pi_-^2)-\frac{1}{4}}{\rho^2} + m^2\omega^2\rho^2\right]F = \frac{1}{4m\omega}\left[(E^2 - m^2 - k^2) + \frac{1}{2}[\Lambda_+,\Theta_+,\Pi_+]\right]F. \tag{24}$$

Se puede demostrar fácilmente que el problema posee simetría su(1,1)

$$[D_3, D_{\pm}] = \pm D_{\pm}, \qquad [D_-, D_+] = D_3. \tag{25}$$

Con el operador de Casimir expresado como

$$C^2F = [(\Lambda_-^2,\Theta_-^2,\Pi_-^2) - 1]F = k(k-1)F\,. \tag{26}$$

También el otro número de grupo, n, se puede identificar con el número cuántico radial. Por comparación de las ecuaciones (24) obtenemos

$$k = \frac{1}{2}|\Lambda_-,\Theta_-,\Pi_-| + \frac{1}{2}, \tag{27}$$
$$n + k = n_r + \frac{1}{4}|\Lambda_-,\Theta_-,\Pi_-| + \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Resolviendo el problema de forma analítica, a partir de la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\frac{1}{4}-(\Lambda_{\mp}^2,\Theta_{\mp}^2,\Pi_{\mp}^2)}{r^2} - r^2 + \frac{\gamma_{\pm}}{m\omega}\right)\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix} = 0. \tag{29}$$

Por lo tanto, las funciones radiales $F\,(r)$ y $G\,(r)$ se pueden obtener a partir de la ecuación diferencial general [11]

$$z'' + [4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}]z = 0, \tag{30}$$

que tiene la solución particular

$$z = N_n e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} L_n^{\alpha}(x^2). \quad (31)$$

La base Sturmiana para la representación unitaria irreductible del álgebra de Lie su (1;1) en términos de los números de grupo, para el oscilador de Dirac que interactúa con un defecto topológico es

$$\begin{bmatrix} F(\rho) \\ G(\rho) \end{bmatrix} = \frac{2\Gamma(n_r+1)}{\Gamma(n_r+|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+1)} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} m\omega \frac{\left(|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+\frac{1}{2}\right)}{2} \times \rho^{|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+\frac{1}{2}} + L_{n_r}^{|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|} (mw\rho^2), \quad (32)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \chi(\rho,\xi) \\ \phi(\rho,\xi) \end{bmatrix} = \frac{(2(1-|\xi|^2)^{|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+\frac{1}{2}} m\omega^{|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+\frac{1}{2}})}{\Gamma(|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+1\}(1-\xi)^{2|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|+2})} \times \rho^{|\Lambda_{\mp},\Theta_{\mp},\Pi_{\mp}|} e^{\frac{m\omega\rho^2\{\xi+1\}}{2\{\xi-1\}}}. \quad (33)$$

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo estudiamos el Oscilador Dirac interactuando con un defecto topológico a partir de un enfoque algebraico. Para resolver nuestro problema consideramos una de las dos ecuaciones radiales de segundo orden desacopladas. Mostramos que la parte radial para este problema posee una simetría SU (1;1) y a partir de esta simetría y mediante el uso de factorización Schrödinger pudimos construir dos conjuntos de generadores de álgebra su (1;1). Obtuvimos el espectro de energía y las funciones propias utilizando la teoría de representaciones unitarias para esta álgebra.

REFERENCIAS

[1] Davis, A. C., and Brandenberger, R. (Eds.). (2012). Formation and Interactions of Topological Defects: Proceedings of a NATO Advanced Study Institute on Formation and Interactions of Topological Defects, held August 22-September 2, 1994, in Cambridge, England (Vol. **349**). Springer Science and Business Media.

[2] Bakke, K., and C. Furtado. Annals of Physics **336** (2013): 489-504.

[3] Bakke, Knut. The European Physical Journal Plus **127**.7 (2012): 82.

[4] Bakke, K. General Relativity and Gravitation **45.10** (2013): 1847-1859.

[5] J.Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, Dirac oscillator interacting with a topological defect,Physical, Review A, **84**, 032109(2011)

[6] M. Salazar-Ramírez, D. Ojeda-Guillén, and R. D. Mota. Annals of Physics **372** (2016): 283-296.

[7] L. Infeld, Phys. Rev. 59 (1941) 737-747.

[8] L. Infeld, T.E. Hull, Rev. Modern Phys. **23** (1951) 21-68

[9] Andrianov, Alexander A., N. V. Borisov, and M. V. Ioffe, Physics Letters A **105**, 19(1984)

[10] Spiridonov, Vyacheslav, Luc Vinet, and Alexei Zhedanov, letters in mathematical physics **29** 63(1993)

[11] N.N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Dover Publications, New York, 1972.

ISSN: 2594-1011

Tiempo que emplearon alumnos de ingeniería para completar una cadena de cinco asignaturas de Cálculo en tronco general durante 2017

Georgina Pulido Rodríguez[1], Ricardo López Bautista[2], Josué Figueroa González[3]
[1]Departamento Ciencias Básicas, UAM-A, México D.F., México
[2]Coordinador de Grupo Temático Álgebra y Geometría, UAM-A, México D. F., México
[3]Departamento de Sistemas, UAM-A, México, D.F., México.
Teléfono (55) 5318-9000 Ext. 9017 Fax (55) 5318-9045 E-mail: gpr@azc.uam.mx

Resumen — **Las diez licenciaturas en ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (UAM-A) tienen un conjunto común de asignaturas que conforman un tronco general (TGA). En este Tronco hay matemáticas, física, química, además de otras materias propias del inicio de una carrera. En particular, hay una secuencia de asignaturas de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con cinco nodos, la cual se espera que un alumno curse en cuatro o cinco trimestres. En la práctica, el tiempo que un alumno toma para concluirla es superior a lo señalado en los planes de estudios. En este trabajo se hace una estimación del tiempo que un alumno emplea en cursar y aprobar todas esas materias, utilizando datos de Sistemas Escolares de la UAM, generados durante el año 2017.**

Palabras Clave – **cálculo diferencial, matemáticas preuniversitarias, matemáticas para ingeniería.**

Abstract — **The ten bachelor's degrees in engineering from the Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (UAM-A) have a common set of subjects that make up a general trunk (TGA). In this Trunk there are mathematics, physics, chemistry, as well as other subjects proper to the beginning of a career. In particular, there is a sequence of calculus subjects and ordinary differential equations with five nodes, which a student is expected to study in four or five quarters. In practice, the time a student takes to complete it, is higher than what is indicated in the curriculum. This paper estimates the time a student uses to complete and pass all those subjects, using data from the School Systems of the UAM, generated during the year 2017.**

Keywords — **differential calculus, pre-university math, math for engineering.**

I. Introducción

La Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco imparte diez licenciaturas en ingeniería. Los planes de estudios tienen un Tronco General de Asignaturas que incluye matemáticas, física, química, inducción a la vida universitaria, programación, métodos numéricos y probabilidad y estadística [1].

Cada alumno de nuevo ingreso presenta un examen de matemáticas preuniversitarias, cuyo resultado otorga una calificación a la asignatura "Taller de Matemáticas" si el alumno logra obtener o superar un número establecido de aciertos o bien, lo inscribe en ese curso. Quienes ya obtienen los créditos del Taller, son inscritos a la asignatura "Introducción al Cálculo" y a otra de matemáticas llamada "Complementos de Matemáticas", cuyo contenido brinda una preparación básica en temas de álgebra lineal.

La cadena de asignaturas de interés para este estudio aparece en la Fig. 1.

Debido a que el Taller de Matemáticas puede acreditarse por medio del examen que se aplica antes del primer trimestre, se puede establecer que las cuatro asignaturas restantes pueden ser acreditadas en cuatro trimestres. El Reglamento de Estudios Superiores de la UAM (RES) [2] establece que un alumno no puede estar inscrito en un trimestre en dos asignaturas que estén seriadas.

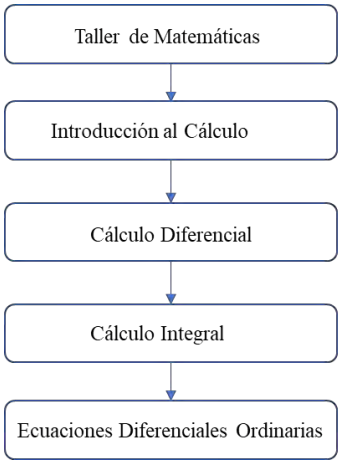


Fig. 1. Cadena de asignaturas de Cálculo en el Tronco General de las carreras de ingeniería en la UAM-A

En otras palabras, sería de esperar que un alumno tome un año y un tercio para concluir esta cadena de asignaturas.

Se menciona en el rubro 3.2.4. del Estudio de egresados 2012 [3] titulado "Tiempo para concluir sus estudios" que el 98.6 % de los encuestados concluyó sus estudios después del tiempo curricular de doce trimestres y que solamente el 1.4% terminó sus estudios de licenciatura en doce trimestres, el tiempo curricular establecido. En el mismo estudio, se muestra una Fig. con las duraciones de los estudios de los encuestados, algunos de los cuales tomaron más de 26 trimestres para concluir.

Las modificaciones en los planes y programas de estudios que tienen incidencia en este estudio fueron puestas en marcha durante el tercer trimestre de 2008, cuando se

impartió por primera vez el Taller de Matemáticas y se llevó a cabo un proceso de homologación de estudios para los alumnos que estuviesen cursando asignaturas equivalentes a las de la secuencia señalada en la Fig. 1, que eran Cálculo Diferencial I, Cálculo Diferencial II y Ecuaciones Diferenciales, tres asignaturas. En ese trimestre, los alumnos que estuvieran en riesgo de salir de la universidad debido a que habían gastado cuatro oportunidades de acreditar alguna materia de este segmento del plan de estudios, experimentaron una situación de alivio al ser borrado el historial de calificaciones no aprobatorias de Cálculo o Ecuaciones Diferenciales para cursar las nuevas materias que se muestran en la Fig. 1.

II. Metodología

Se empleó el archivo de calificaciones de Sistemas Escolares de la UAM proporcionado por la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-A (DCBI-A) a solicitud de los autores, con los registros de las actas de calificaciones del año 2017, con todos los alumnos activos en licenciaturas en ingeniería que hayan cursado al menos una materia durante ese año. El archivo contiene las calificaciones de 15,092 alumnos, con el registro de 60,329 calificaciones asentadas a estos alumnos durante 2017.

Es pertinente señalar que la DCBI-A tiene a su cargo las Coordinaciones de todas las ingenierías que se imparten en la UAM-A.

El número de matrícula de cada alumno indica el trimestre en el cual inicia sus estudios en la universidad. Se determina entonces, con certeza, cuál fue su trimestre de ingreso a la UAM. Solamente hay dos trimestres con nuevo ingreso: el de primavera (P, que inicia en abril) y el de otoño (O, que inicia en septiembre). Durante el trimestre de invierno (I, en enero) solamente hay reinscripción. Todas las asignaturas de este trabajo se abren en cada trimestre, haya alumnos de nuevo ingreso o no.

III. Resultados

Al operar con el archivo citado en la sección anterior, se contaron 3,177 alumnos que cursaron al menos una de las cinco asignaturas de la cadena de materias de este estudio. Es posible saber si un alumno aprobó o no cada una de las asignaturas en las que se registró y la forma en la que lo hizo, ya sea en curso trimestral o en examen de Recuperación, sin hacer distinción entre el examen estándar y el Especial. De este modo, se contó con los registros de 591 alumnos que terminaron la secuencia de UEA durante 2017, esto es, que acreditaron la asignatura "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias" (EDO).

Con base en esta condición, se hizo una operación para determinar el número de trimestres transcurridos desde que el alumno fue admitido en la Universidad hasta el trimestre en el que acredita EDO.

Se muestran los resultados en la Fig. 2.

Del archivo de calificaciones, se pudo constatar que un alumno de nuevo ingreso en el trimestre 17-P terminó las cinco asignaturas en dos períodos lectivos. Esto fue posible debido a que es posible que un alumno realice un examen de Recuperación sin haberse inscrito antes a un curso y, de ese modo, aprobar la materia, de acuerdo con el RES [2].

Con esa opción, un alumno que apruebe Taller de Matemáticas estará habilitado para ser inscrito en Introducción al Cálculo; posteriormente, durante el período intertrimestral, podría registrarse para el Examen Especial (así se llama el examen de Recuperación para el caso en el que el alumno no ha cursado una materia, que en otras instituciones se conoce como "abierto") y aprobar Cálculo Diferencial. Luego, en el trimestre siguiente, podría cursar Cálculo Integral y acreditar Ecuaciones Diferenciales ordinarias en Examen Especial. Esto tomaría solamente dos trimestres. De acuerdo con los datos del archivo de datos utilizado, así ocurrió con el alumno de la estadística en la Fig. 1, que acreditó los cinco cursos en dos trimestres.

En la Fig. 1, también se puede ver que hubo 64 alumnos que terminaron las cuatro asignaturas en el plazo esperado de cuatro trimestres; también se observa que 79 alumnos concluyeron en cinco trimestres, un plazo esperado dentro de los planes de estudio. Se lee que 81 alumnos tomaron seis trimestres (dos años) para concluir esta cadena de asignaturas. Se puede decir que el plazo fue razonable.

A los alumnos que tomaron de siete a doce trimestres para acreditar las cinco asignaturas, les tomó más de dos años y hasta cuatro para la acreditación de las cinco asignaturas.

El hecho de que una cadena de cinco asignaturas del inicio de la carrera tome más de seis años obliga a reflexionar acerca de las razones que existen para alguien haya tomado este tiempo. Sin embargo, hay que considerar que la universidad otorga un plazo de diez años a cada alumno para que termine sus estudios de licenciatura, de acuerdo con el RES [2].

Los alumnos que han tomado hasta ocho años para terminar estas materias tienen un reto para concluir sus estudios en el tiempo citado de diez años, pero están en posibilidades de hacerlo.

Los alumnos que aparecen en los últimos renglones de la Fig. 1 están en una condición difícil para asegurar que terminarán sus estudios de licenciatura. Para los casos en los que un alumno alcanza diez años en la universidad y no ha terminado, le queda la opción de recurrir a una prórroga, contemplada en el artículo 46 del RES [2].

¿Cómo es posible que un alumno tome hasta 36 trimestres para concluir la cadena de asignaturas de Cálculo? Cabe la posibilidad de que un alumno se haya retirado de la universidad por más de dos años y que haya solicitado al Consejo Divisional de Ciencias Básicas e Ingeniería que le permitiese continuar sus estudios. Así pues, hay un caso de alumno que ha requerido 36 trimestres para acreditar la secuencia de cinco asignaturas de este estudio. Doce años.

La estadística con el número de trimestres que los alumnos activos en 2017 tomaron para concluir la cadena de UEA de Cálculo puede verse en la Fig. 2.

La moda corresponde a seis trimestres, con 81 alumnos que tomaron dos años para acreditar las cinco asignaturas de este estudio.

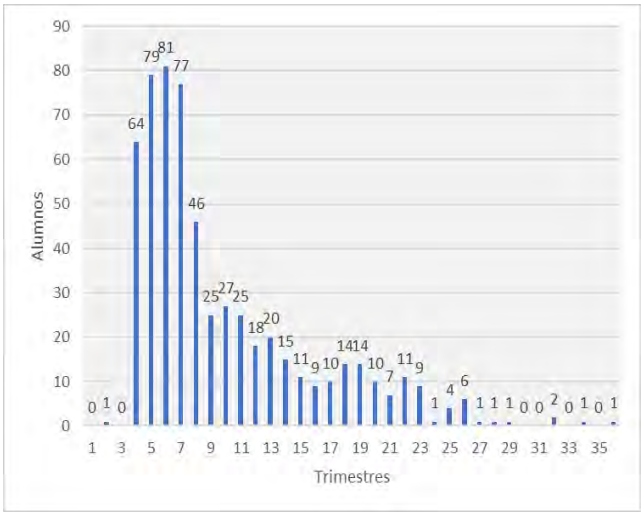


Fig. 2. Número de trimestres empleados por alumnos de ingeniería para concluir en 2017 la serie de asignaturas Taller de Matemáticas, Introducción al Cálculo, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Al aplicar el filtro "inscrito a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias" y obtener el número de registros, tanto si aprobó como si no lo hizo, se obtienen 999 alumnos. Si a este conjunto de registros se aplica el filtro "aprobó EDO", se obtiene el número 591. Esto significa que hay 999 – 591 = 408 alumnos que podrían haber terminado su ciclo de asignaturas de Cálculo en 2017, pero no lo lograron.

En la Fig. 3 se muestra la distribución de casos de alumnos que se inscribieron a la asignatura EDO y no la aprobaron, para ver cuántos trimestres han dedicado a la cadena de materias de Cálculo sin éxito para concluir.

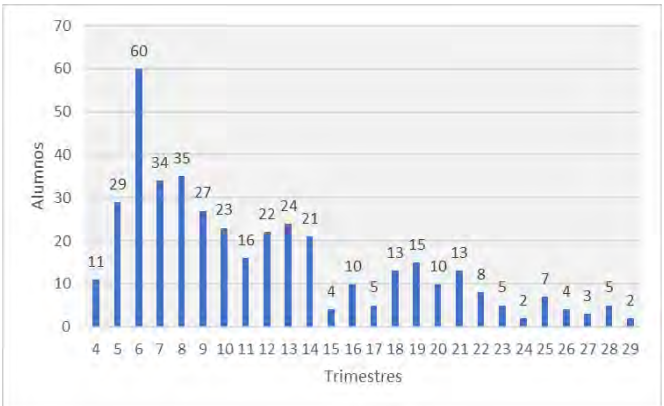


Fig. 3. Número de trimestres que han invertido alumnos que se inscribieron en 2017 a EDO sin concluir la cadena de cinco asignaturas de Cálculo

De acuerdo con la Fig. 4, hay alumnos que han permanecido en la Universidad por más de dos años sin lograr acreditar una secuencia de cinco asignaturas de Cálculo; hay casos que tienen más de 27 trimestres (9 años) en el intento.

Aunque hay información acerca de alumnos que abandonan temporalmente sus estudios, no hay forma de identificar el problema específico para cada caso. En algunas licenciaturas, el coordinador o coordinadora dedica tiempo para buscar a sus alumnos y sugerirles que regresen. Algunos responden al llamado y se reincorporan, otros solamente atienden cortésmente a la llamada y se mantienen alejados. No hay registro del porcentaje de alumnos contactados de esta forma.

En el ánimo de investigar en qué parte de la cadena de asignaturas ocurre la extensión del plazo esperado para terminarla, se llevó a cabo la tarea de separar los registros de cada asignatura de las cinco de este estudio, considerar a los alumnos que se inscribieron y aprobaron o no la materia. Se consideró la última calificación, si es que se registraron en más de una ocasión.

En la Fig. 4 aparece el mismo conjunto de datos de la Fig. 2, pero agrupados por años dedicados a terminar la secuencia de asignaturas de este trabajo.

A. Taller de Matemáticas.

Se contaron los registros correspondientes a los alumnos que cursaron el Taller o bien, presentaron examen de Recuperación de Taller en 2017: son 1216 alumnos. De éstos, no lo acreditaron 252 alumnos; hay 125 que llevan un trimestre intentándolo, 87 que llevan dos y 13 con tres trimestres. Lo que es importante comentar es que hay varios casos intentando acreditar el Taller desde hace años, el más extremo, un alumno que tiene 25 trimestres intentando, algo así como ocho años. Hay esperanza para que termine sus otras asignaturas de Cálculo dentro del plazo que otorga la universidad para terminar sus estudios de licenciatura; ojalá él y los demás alumnos que no han acreditado el Taller en su oportunidad se gradúen, aunque el pronóstico no les resulta favorable.

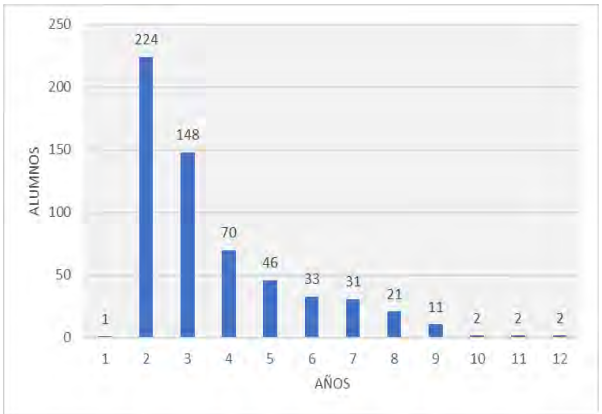


Fig. 4. Número de años que los alumnos de ingeniería requirieron para terminar la secuencia de materias de Cálculo en 2017.

B. *Taller de Matemáticas.*

Se contaron los registros correspondientes a los alumnos que cursaron el Taller o bien, presentaron examen de Recuperación de Taller en 2017: son 1216 alumnos. De éstos, no lo acreditaron 252 alumnos; hay 125 que llevan un trimestre intentándolo, 87 que llevan dos y 13 con tres trimestres. Lo que es importante comentar es que hay varios casos intentando acreditar el Taller desde hace años, el más extremo, un alumno que tiene 25 trimestres intentando, algo así como ocho años. Hay esperanza para que termine sus otras asignaturas de Cálculo dentro del plazo que otorga la universidad para terminar sus estudios de licenciatura; ojalá él y los demás alumnos que no han acreditado el Taller en su oportunidad se gradúen, aunque el pronóstico no les resulta favorable.

Los restantes 964 alumnos de los 1,216 que se inscribieron a Taller durante 2017, acreditaron la asignatura. En la Fig. 5 se puede apreciar que 825 lo lograron en un trimestre, la mayoría; los demás, hasta en 19 trimestres, en un caso. Significa que hay alumnos activos que lo intentaron durante más de dos años.

La Fig. 6 muestra los trimestres que han dedicado los alumnos que cursaron Taller durante 2017 para acreditarlo sin éxito.

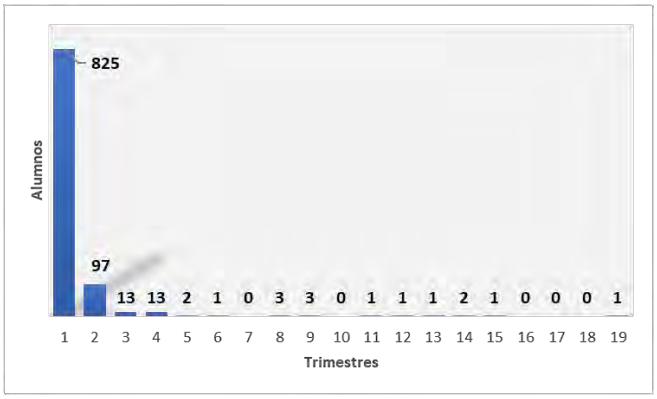


Fig. 5. Número de trimestres en el que los alumnos que se inscribieron a Taller de Matemáticas durante 2017 lo acreditaron.

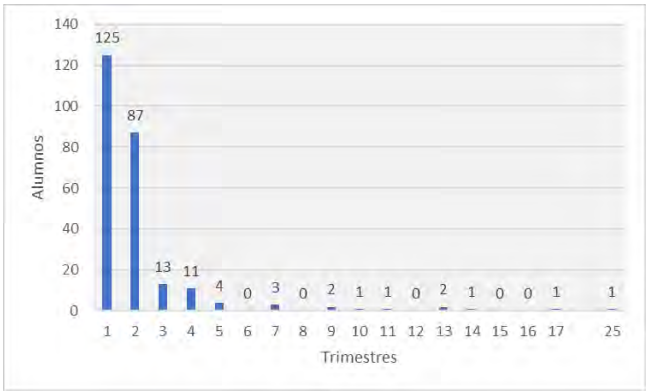


Fig. 6. Tiempo que han dedicado para acreditar el Taller de Matemáticas sin lograrlo, los alumnos que se inscribieron a este curso durante 2017.

C. *Introducción al Cálculo*

En la Fig. 7 se muestra el número de trimestres que los alumnos que se inscribieron a Introducción al cálculo en 2017 terminaron la cadena de dos asignaturas.

La Fig. 8 muestra el número de trimestres que los alumnos que se inscribieron a Introducción al cálculo en 2017 han dedicado al ciclo de dos asignaturas sin concluirlo.

A. *Cálculo Diferencial*

De acuerdo con la Fig. 9, 169 alumnos han dedicado cuatro trimestres para acreditar Cálculo Diferencial sin lograrlo, aunque hay 292 que llevan más tiempo en el intento, habiendo alumnos que llevan años en este esfuerzo.

Con base en la Fig. 10, solamente dos alumnos aprobaron las asignaturas de Introducción al Cálculo y Cálculo Diferencial en un trimestre con un examen especial, 118 lo hicieron en dos trimestres y 112 lo hicieron en tres trimestres, todos estos alumnos en tiempo esperado dentro del plan de estudios.

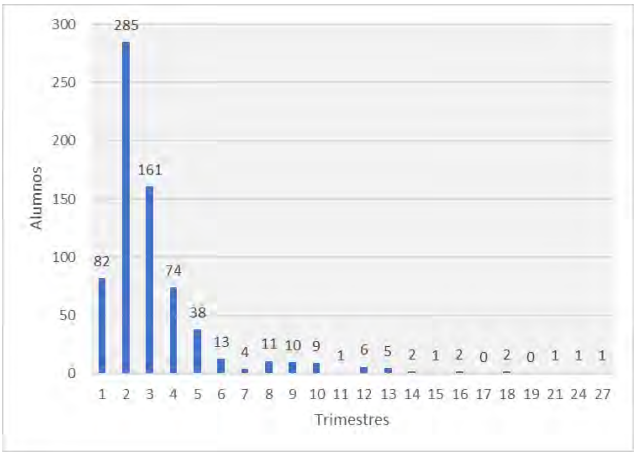


Fig. 7. Número de trimestres que les tomó a los alumnos inscritos durante 2017 a la materia Introducción al Cálculo terminar la cadena de dos asignaturas.

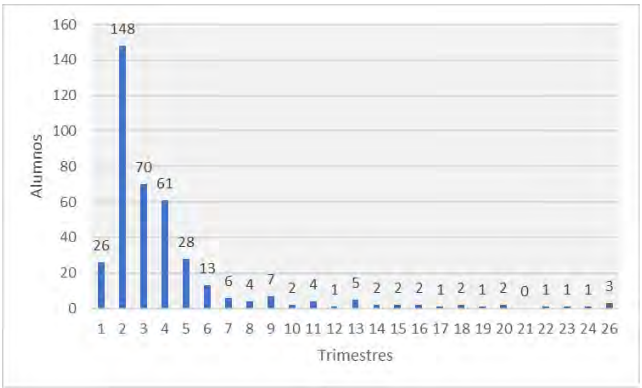


Fig. 8. Número de trimestres que les tomó a los alumnos inscritos durante 2017 a Introducción al Cálculo terminar la cadena de dos asignaturas.

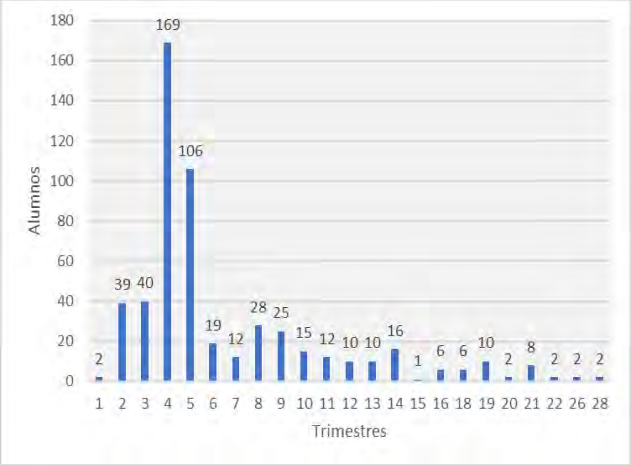


Fig. 9. Número de trimestres que les tomó a los alumnos inscritos durante 2017 a Cálculo Diferencial terminar la cadena de tres asignaturas.

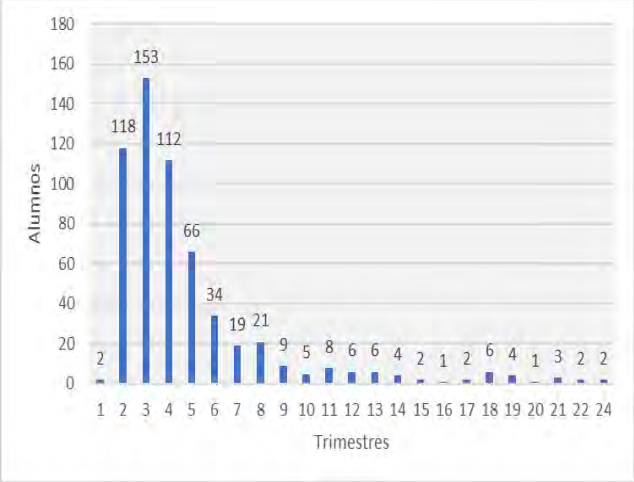


Fig. 10. Número de trimestres que han invertido los alumnos que se inscribieron en 2017 a Cálculo Diferencial y que no han concluido con la cadena de tres asignaturas.

B. Cálculo Integral

En la Fig. 11 se muestran los plazos empleados por los alumnos para terminar la cadena de cuatro asignaturas con Cálculo Integral como nodo terminal.

La Fig. 12 exhibe el número de trimestres invertidos por alumnos que se inscribieron a Cálculo Integral durante 2017 y que no lograron concluir la cadena de cuatro asignaturas.

La moda para cada asignatura aparece en la Tabla 1.

De acuerdo con la Tabla 1, las dos primeras asignaturas requirieron el número esperado de trimestres para ser acreditadas por los alumnos inscritos en 2017. También se observa que los alumnos que se inscribieron a esas asignaturas y no acreditaron, en la mayoría de los casos les ha tomado uno y dos trimestres respectivamente sin concluir la secuencia de materias.

En la Tabla 1 se aprecia que, si bien la mayoría de los alumnos inscritos durante 2017 aprobaron Cálculo Diferencial en tres trimestres, número esperado en el plan de estudios, los que no acreditaron este Cálculo llevan cuatro trimestres sin lograr concluir la cadena de tres asignaturas en la mayoría de los casos, un trimestre más de lo esperado en el plan de estudios. Es ésta la materia donde se aprecia un mayor rezago para concluir la secuencia de tres asignaturas de Cálculo.

En la Tabla 1 se aprecia que la mayoría de los alumnos que se inscribieron en 2017 a Cálculo Integral y aprobaron, terminaron la cadena de asignaturas en cuatro trimestres, el número esperado en el plan de estudios. Sin embargo, los alumnos que se inscribieron durante 2017 a Cálculo Integral y reprobaron, han dedicado cinco trimestres sin concluir la cadena de cuatro asignaturas.

IV. Discusión

En una publicación previa de los autores [4], se muestra un estudio de la eficiencia terminal de asignaturas obligatorias en el TGA, que es del 38% para EDO con los datos obtenidos hasta el tercer trimestre de 2016. Esta eficiencia terminal se refleja en el tiempo invertido por los alumnos para concluir la serie de cinco asignaturas.

Actualmente, se tienen preguntas acerca de los cambios realizados en 2008. Por un lado, en esa época se expresó la motivación de distribuir los contenidos de las asignaturas de Cálculo para que se cursaran en cuatro trimestres, en vez de tres, para que los alumnos obtuviesen mejores resultados de aprovechamiento.

En una de las investigaciones que se ha llevado a cabo dentro de la UAM-A por González-Beltrán et al. [5], como profesores del Departamento de Sistemas (que no imparte asignaturas de Cálculo) cuestiona la validez del curso de nivelación Taller de Matemáticas, por lo que llevó a cabo un trabajo de minería de datos con la información generada desde 2008 y llega a la conclusión de que habría que "analizar el contenido del Taller para comprender por qué no está ayudando en futuros cursos, en especial en Introducción al Cálculo" [5].

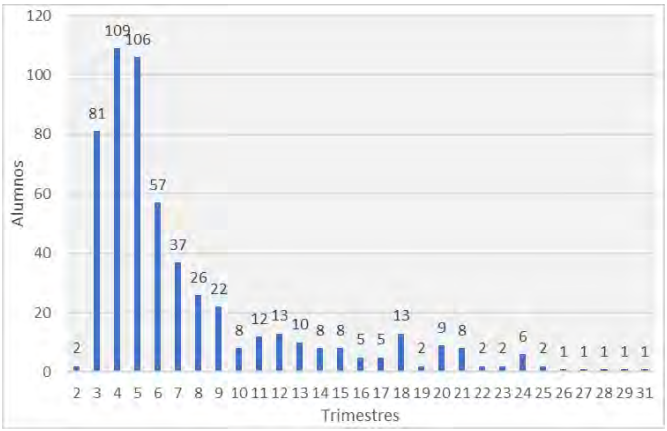


Fig. 11. Número de trimestres que dedicaron los alumnos que se inscribieron a Cálculo Integral en 2017 para terminar la secuencia de cuatro asignaturas.

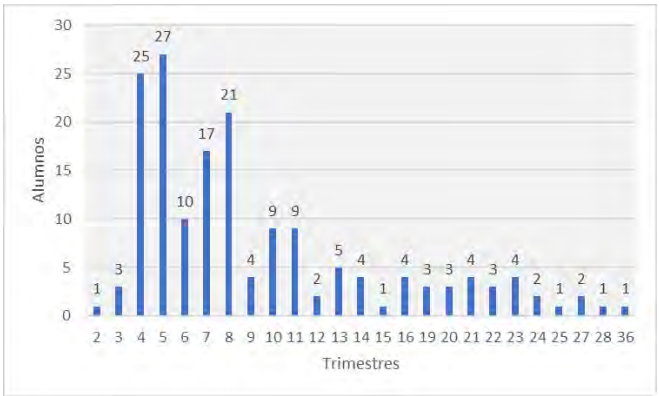


Fig. 12. Número de trimestres que han invertido los alumnos que se inscribieron en 2017 a Cálculo Integral y que no han concluido con la cadena de cuatro asignaturas.

Asignatura terminal	**Trimestres empleados para terminar la cadena de asignaturas hasta el nodo correspondiente**	**Trimestres dedicados a la cadena de asignaturas sin concluir hasta el nodo correspondiente**
Taller de Matemáticas	825 alumnos con un trimestre	125 alumnos con un trimestre
Introducción al Cálculo	285 alumnos con dos trimestres	148 alumnos con dos trimestres
Cálculo Diferencial	153 alumnos con tres trimestres	169 alumnos con cuatro trimestres
Cálculo Integral	109 alumnos con cuatro trimestres	27 alumnos con cinco trimestres
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	81 alumnos con seis trimestres	60 alumnos con seis trimestres

Tabla 1. Moda de número de trimestres por asignatura para aprobar la cadena de asignaturas o bien, sin concluir para alumnos inscritos durante 2017.

V. Conclusiones

El tiempo que los alumnos de ingeniería activos de la UAM-A durante el año 2017 invirtieron para concluir la cadena de cinco asignaturas de la línea de Cálculo Diferencial excedió por mucho el número de trimestres que se considera adecuado dentro de los planes de estudio. Por otra parte, el tiempo invertido en concluir esa línea sin éxito, se extiende hasta poner en riesgo el plazo que tienen los alumnos para terminar los estudios de licenciatura.

Es importante que quienes laboramos en la universidad colaboremos para que la duración de los estudios de los alumnos sea la menor posible, dentro de parámetros de calidad. Hay un esfuerzo permanente por reducir ese tiempo. Actualmente, se está trabajando en diversos ámbitos de profesores para obtener un conjunto de indicadores y metas con fines de autoevaluación.

Agradecimientos

Agradecemos al Ing. Manuel Herrera por su trabajo al generar la información de Sistemas Escolares y del Archivo General de Alumnos, que se usa de manera sustancial en estas investigaciones.

Referencias

[1] http://cbi.azc.uam.mx/work/models/CBI/Documentos/TroncoGeneral/TNA_y_TG_Boligrama.pdf página consultada el día 3 de abril de 2018.

[2] Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, consultado el 15 de abril de 2018 en http://www.uam.mx/legislacion/res/index.html.

[3] Seguimiento de Egresados Generación 2012, UAM Azcapotzalco, SIEEE. Consultado el 20 de abril de 2018 en http://www.uam.mx/egresados/estudios/egre2012/AZC_CBI.pdf

[4] Pulido, G., López, R. Contrastes en eficiencias terminales para el tronco general de planes de estudios de ingeniería en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco. Memorias de la RNAFM 2017. Pp 365-369.

[5] González-Beltrán B., González-Brambila S., Sánchez-Guerrero, L., Ardón-Pulido I., Figueroa-González J. Estudio del impacto de un curso de nivelación en el desempeño de alumnos de ingeniería utilizando Minería de Datos Educacional. Por aparecer en "Research in Computing Science", Memorias del 10mo Congreso Mexicano de Inteligencia Artificial COMIA 2018 a realizarse del 5 al 8 de junio en Mérida, Yucatán.

ISSN: 2594-1011

El Resultante y el Discriminante

Arturo Cueto Hernández [1] , Raúl Amezcua Gómez [2]
[1,2]Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, México D.F., México

Resumen — **En este trabajo presentamos una breve introducción a la teoría del resultante y discriminante, atendiendo brevemente la parte histórica de la introducción de estos conceptos. En la parte técnica de los resultados se presentan en una forma simplificada evitando los desarrollos explícitos de los cálculos, para tener un panorama mas didáctico.**

Palabras Claves — **Resultante, Discriminante.**

Abstract — **In this paper we present a brief introduction to the theory of the resultant and discriminant, attending briefly the historical part of the introduction of these concepts. In the technical part of the results are presented in a simplified form avoiding the explicit developments of the calculations, to have a more didactic panorama.**

Keywords — **Resultant, Discriminant.**

I. Introducción

Los resultantes y subresultantes de dos polinomios de una variable se remontan a G.W. Leibniz, L. Euler, E. Bézout y C.G.J. Jacobi. La presentación moderna se debe a J.J. Sylvester en 1853 [4]. El resultante es un concepto que aparece en forma esencial en varias ramas de la matemática y es un ingrediente muy natural en muchas demostraciones, además de tener una importancia algorítmica muy reconocida actualmente. Es un elemento clave de la teoría de la eliminación, que estuvo de moda hasta los años 50 en cuanto era útil para producir ejemplos y enunciados en el período pre-"haces y esquemas" de la Geometría Algebraica, y renació a partir del desarrollo intenso de la computación a fines de los años 60, cuando se pudo empezar a calcular cosas inimaginables previamente. Un concepto relacionado fuertemente con el resultante es el de subresultante, en este trabajo no abordaremos estos. Sin embargo, señalaremos en esta introducción el papel que jugaron afines de los 60 para dar un algoritmo eficiente y paralelizable para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios [2], [3], y más recientemente son también utilizados en computación simbólica-numérica.

Las hoy llamadas sumas de Sylvester fueron introducidas por Sylvester en 1853, al establecer la conexión que existe entre ellas y los subresultantes, siendo las sumas de Sylvester una descripción en raíces de los subresultantes, así como la fórmula de Poisson es una descripción en raíces del resultante.

Otro concepto asociado a un polinomio de una variable es el de discriminante. El discriminante es un objeto fundamental en la matemática, en particular en la teoría de números y en geometría algebraica, que indica cuando un polinomio tiene raíces múltiples.

En el desarrollo del trabajo se mostrará la relación entre resultante y discriminante, presentaremos la teoría básica junto con varios ejemplos.

II. Resultante

Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dos polinomios de grados n y m, respectivamente, con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$.

Definición 1. Se define el resultante de $f(x)$ y $g(x)$, denotado por $R(f,g) = R_{n,m}(f,g)$, como el elemento de $\mathbb{F}$ dado por el determinante de la matriz de Sylvester de orden $(m+n)\times(m+n)$ $Syl(f,g) = Syl_{n,m}(f,g)$ de $f(x)$ y $g(x)$ dada por

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde las m primeras filas contienen los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ de f desplazando $0,1,\ldots,m-1$ lugares y rellenando con ceros, y las n últimas filas contienen los coeficientes $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ de g desplazando $0,1,\ldots,n-1$ lugares y rellenando con ceros. En otras palabras, la entrada en (i,j) es igual a a_{n+i-j} si $1 \le i \le m$ y b_{i-j} si $m+1 \le i \le m+n$, con $a_i = 0$ si $i > n$ 0 $i < 0$ y $b_i = 0$ si $i > m$ 0 $i < 0$.

Ejemplo 1. Si $n = 3$ y $m = 2$,

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

En el álgebra exterior sobre $\mathbb{F}[x]$, tenemos

$$\left(x^{m-1}f(x)\right)\wedge\left(x^{m-2}f(x)\right)\wedge\cdots\wedge f(x)\wedge\left(x^{n-1}g(x)\right)$$
$$\wedge\left(x^{n-1}g(x)\right)\wedge\cdots\wedge g(x)$$
$$= R(f,g)x^{n+m-1}\wedge x^{n+m-2}\wedge\cdots\wedge 1 \qquad (2)$$

lo cual puede usarse como una forma alternativa de la definición 1.

Observación 1. Típicamente, se asume en la definición 1. que $n = \deg(f)$ y $m = \deg(g)$, es decir, que $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$; esto implica que $R(f,g)$ está completamente determinado por los polinomios f y g y excluye los casos $f = 0$ o $g = 0$. Sin embargo, es conveniente utilizar la versión un poco más general, que también permite que n y m se consideren como dados y que $R(f,g)$ se defina para todos los polinomios f y g tales que $\deg(f) \leq n$ y $\deg(g) \leq m$. En este caso, es conveniente usar la notación $R_{n,m}(f,g)$ para evitar ambigüedades, pero generalmente se escribe $R(f,g)$.

Observación 2. A veces es conveniente considerar que a_i y b_j son indeterminados, por lo que se consideran a f y g como polinomios con coeficientes en el campo $\mathbb{F}(a_n,\dots,a_0,b_m,\dots,b_0)$. Cualquier fórmula o argumento que requiera que $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ puede usarse; si esto resulta, por ejemplo, en una identidad polinómica que involucre a $R_{n,m}(f,g)$, entonces esta fórmula también se cumple si sustituimos cualquier valor en $\mathbb{F}$ por $a_n,\dots,b_0$.

El resultante es obviamente un polinomio homogéneo de grado $n+m$ con coeficientes enteros en los coeficientes a_i, b_j. Más precisamente, tenemos lo siguiente. Continuaremos usando las notaciones a_i y b_j para los coeficientes de f y g, respectivamente, como en la Definición 1.

Teorema 1. $R_{n,m}(f,g)$ es un polinomio homogéneo con coeficientes enteros en los coeficientes a_i, b_j.
(i) $R_{n,m}(f,g)$ es homogéneo de grado m en $a_n,\dots,a_0$ y de grado n en $b_m,\dots,b_0$.
(ii) Si a_i y b_i se consideran que tienen grado i, entonces $R_{n,m}(f,g)$ es homogéneo de grado nm.

Demostración. Es obvio que $R_{n,m}(f,g)$ es un polinomio homogéneo con coeficientes enteros en los coeficientes a_i, b_j, de grado total $m+n$. Además, reemplazando a_i por ta_i y b_j por ub_j en la matriz de Sylvester significa que hemos multiplicado cada una de las primeras m filas por t y cada una de las últimas n por u, y por lo tanto, el determinante $R_{n,m}(f,g)$ por $t^m u^n$, que demuestra (i). En esta parte puede ser muy conveniente tratar a a_i, b_j, t y u como diferentes indeterminadas, y hacer los cálculos en $\mathbb{F}(a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_m,t,u)$.
Similarmente, (ii) sigue porque para reemplazar cada a_i por $t^i a_i$ y cada b_j por $t^j b_j$ en $Syl_{n,m}(f,g)$ produce el mismo resultado que multiplicar la i-ésima fila por t^{n+i} para $i = 1,\dots,m$ y por t^i para $i = m+1,\dots,m+n$, y la j-ésima columna por t^{-j}; esto multiplica el determinante $R_{n,m}(f,g)$ por $t^{nm+\sum_1^{n+m} i-\sum_1^{n+m} j} = t^{nm}$. ■

Observación 3. Si se escribe $R_{n,m}(f,g)$ como un polinomio con coeficientes enteros para cualquier campo con característica 0, como $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$, entonces la fórmula es válida (con los mismos coeficientes) para cada campo $\mathbb{F}$. Porque los coeficientes se obtienen al desarrollar el determinante de $Syl_{n,m}(f,g)$ y por lo tanto se tiene una interpretación combinatoria independiente de $\mathbb{F}$. Por supuesto, para un campo de característica $p \neq 0$, los coeficientes se pueden reducir módulo p, por lo que no son únicos en ese caso.

La importancia principal del resultante radica en la siguiente fórmula, que a menudo se toma como la definición.

Teorema 2. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dos polinomios de grados n y m, respectivamente, con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Supongamos que, en alguna extensión de $\mathbb{F}$, f tiene n raíces $\xi_1,\dots,\xi_n$ y g tiene m raíces $\eta_1,\dots,\eta_m$, (no necesariamente distintas. Entonces

$$R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i - \eta_j\right) \qquad (3)$$

Demostración. Esta demostración también es aplicable para el Teorema 4. Procedemos por inducción en $n+m$. Supongamos que $\deg(f) = n$ y $\deg(g) = m$. Entonces, al menos en alguna extensión, $f(x) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)$ y $g(x) = b_m\prod_{j=1}^{m}\left(x-\eta_j\right)$ y (3) es equivalente a ambos (4) y (5). Supongamos por inducción que estas fórmulas se tienen para todos los valores menores que $n+m$ y todos los polinomios de estos grados.
Caso 1. Primero, supongamos que $0 < n = \deg(f) \leq m = \deg(g)$. Dividamos g entre f para obtener polinomios q y r tales que $g = qf + r$ y $\deg(r) < \deg(f) = n$. Observemos que

$$\deg(q) = \deg(qf) - \deg(f) = \deg(g-r) - n = m - n.$$

Por el Teorema 7,

$$R_{n,m}(f,g) = R_{n,m}(f,g-qf) = R_{n,m}(f,r). \qquad (T1)$$

Caso 1a. Supongamos que $r \neq 0$ y sea $k := \deg(r) \geq 0$. Por el Teorema 6 y la hipótesis inductiva en la fórmula (4),

$$R_{n,m}(f,r) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f,r)$$

$$= a_n^{m-k} a_n^k \prod_{i=1}^{n} r(\xi_i)$$

$$= a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i),$$

ya que $g(\xi_i) = q(\xi_i)f(\xi_i) + r(\xi_i) = r(\xi_i)$, lo cual verifica (4) y por lo tanto (3).

Caso 1b. Supongamos ahora que $r = 0$, entonces $g = qf$, pero $n > 0$. Entonces $Syl_{n,m}(f, r) = Syl_{n,m}(f, 0)$ tiene las últimas n filas idénticamente 0, entonces $R_{n,m}(f, r) = 0$, y $R_{n,m}(f, g) = 0$ por (T1). Además, $g(\xi_1) = q(\xi_1)f(\xi_1) = 0$ concluimos que ξ_1 es también raíz de g, y el lado derecho de (3) se anula. Por lo tanto, (3) se tiene.

Caso 2. Supongamos que $n = 0$. Como veremos más adelante $R_{0,m}(f, g) = a_0^m$, lo cual concuerda con (3). Esto incluye el caso $n = m = 0$ con lo que se inicia la inducción.
Caso 3. Supongamos que $m = \deg(g) < n = \deg(f)$. Este se reduce al caso 1 o 2 por (6). Esto completa la inducción y la demostración del Teorema 2. Estos argumentos se verifican también para la demostración del Teorema 4, aun en los casos $\deg(g) < m$ y $\deg(f) < n$. Esto se sigue por el Teorema 6, como en la demostración del Caso 1a anterior, o por la Observación 2. ■

El Teorema 2 se conoce como la fórmula de Poisson para el resultante. La fórmula de Poisson tiene una consecuencia inmediata con respecto al algoritmo de división, a saber, sea $g = qf + r \quad \text{con} \quad k = \deg(r) < n = \deg(f)$, entonces $R(g, f) = (-1)^{nm} a_n^{m-k} R(f, r)$, ya que $g(\xi_i) = r(\xi_i)$, $1 \leq i \leq n$, implica

$$R(g, f) = (-1)^{nm} R(f, g) = (-1)^{nm} a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$$

$$= (-1)^{nm} a_n^{m-k} a_n^k \prod_{j=1}^{n} r(\xi_i) = (-1)^{nm} a_n^{m-k} R(f, r).$$

Las raíces de un polinomio se enumeran tomando en cuenta la multiplicidad de las mismas. Por lo tanto, cada polinomio de grado n tiene n raíces en alguna extensión; por ejemplo, en una extensión algebraicamente cerrada. Combinando el Teorema 2 y la Definición 1, se ve que el producto del Teorema 2 se encuentra en el campo de coeficientes $\mathbb{F}$, y que no depende de la elección de la extensión.

El Teorema 2 implica el resultado quizás más importante sobre resultantes. Da una condición necesaria y suficiente para que dos polinomios, f y g, compartan una raíz en una cerradura algebraica de $\mathbb{F}$, o lo que es lo mismo, cuando su máximo común divisor tiene grado mayor o igual que 1.

Corolario 1. Sean f y g dos polinomios distintos de cero con coeficientes en un campo $\mathbb{F}$. Entonces f y g tienen una raíz común en alguna extensión de $\mathbb{F}$ si y solo si $R(f, g) = 0$.
Aquí está implícito que $R = R_{n,m}$ con $n = \deg(f)$ y $m = \deg(g)$. Dado que f y g tienen una raíz común en alguna extensión de $\mathbb{F}$ si y solo si tienen un factor común no trivial, es decir, no constante en $\mathbb{F}$, el Corolario 1 también se puede establecer de la siguiente manera.

Corolario 2. Sean f y g dos polinomios distintos de cero con coeficientes en un campo. Entonces f y g tienen un factor no trivial común si y solo si $R(f, g) = 0$. Equivalentemente, f y g son coprimos si y solo si $R(f, g) \neq 0$.

Demostración. Esta demostración es conjunta de los Corolarios 1 y 2. Estos son inmediatos de (3), usando el hecho sobre los factores comunes indicados antes del Corolario 2. ■

Podemos resumir el Teorema 2 junto con sus corolarios de la siguiente forma

$$R(f, g) = 0 \iff \deg\big(mcd(f, g)\big) \geq 1$$

$$\iff \exists\, \alpha \in \overline{\mathbb{F}}\ tal\ que\ f(\alpha) = g(\alpha) = 0.$$

Damos a continuación una demostración alternativa del Corolario 1.

Demostración. Consideremos la trasformación lineal Φ entre los $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de polinomios

$$\mathbb{F}[x]_{<m} \times \mathbb{F}[x]_{<n} \coloneqq \{(s, t) \mid s, t \in \mathbb{F}[x], s = 0\ o$$

$$\deg(s) < m\ y\ t = 0\ o\ \deg(t) < n\}$$

y

$$\mathbb{F}[x]_{<m+n} \coloneqq \{h \in \mathbb{F}[x] \mid h = 0\ o\ \deg(h) < m + n\},$$

dada por

$$\Phi\colon \mathbb{F}[x]_{<m} \times \mathbb{F}[x]_{<n} \longrightarrow \mathbb{F}[x]_{<m+n}$$

$$(s, t) \qquad \longmapsto \qquad sf + tg,$$

Que está bien definida dado que $\deg(sf), \deg(tg) < m + n$ cuando $\deg(s) < m$ y $\deg(t) < n$, ésta es la razón por la cual las dimensiones van "cruzadas".
Estos dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión $m + n$, y Φ es un isomorfismo si y solo si su matriz en cualquier par de bases es invertible. Considerando las bases canónicas ordenadas de $\mathbb{F}[x]_{<m} \times \mathbb{F}[x]_{<n}$ y $\mathbb{F}[x]_{<m+n}$ respectivamente,

$$\mathfrak{B} \coloneqq \{(x^{m-1},0),\dots,(1,0),(0,x^{n-1}),\dots,(0,1)\}$$

y

$$\mathfrak{B}' \coloneqq \{x^{m+n-1},\dots,1\},$$

la matriz $[\Phi]_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ de Φ en las bases $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{F}[x]_{<m} \times \mathbb{F}[x]_{<n}$ y $\mathfrak{B}'$ de $\mathbb{F}[x]_{<m+n}$ resulta ser la traspuesta de la matriz de Sylvester de f y g. Por lo tanto se tiene

$$\Phi\ isomorfismo \iff R(f,g) = \det(Syl(f,g)) \neq 0,$$

o lo que es lo mismo, Φ no es un isomorfismo si y solo si $R(f,g) = 0$. Esto es equivalente a decir que Φ no es un epimorfismo, o también que Φ no es un monomorfismo.
$R(f,g) = 0$ implica que Φ no es monomorfismo, es decir existen $s \in \mathbb{F}[x]_{<m}$ y $t \in \mathbb{F}[x]_{<n}$ no ambos nulos tales que $sf + tg = 0$. Por lo tanto

$$sf = -tg \implies s\frac{f}{mcd(f,g)} = -t\frac{g}{mcd(f,g)},$$

con lo cual, al ser $\frac{f}{mcd(f,g)}$ y $\frac{g}{mcd(f,g)}$ coprimos ,

$$\frac{f}{mcd(f,g)} \Big| t \quad y \quad \frac{g}{mcd(f,g)} \Big| s.$$

Pero si s es no nulo, $\deg(s) < \deg(g)$, y si t es no nulo, $\deg(t) < n$. Se concluye, como alguno de los dos es no nulo, que $\deg(mcd(f,g)) \geq 1$ porque sino no se puede cumplir la condición de divisibilidad.
Recíprocamente, si $R(f,g) \neq 0$, entonces Φ es un epimorfismo y por lo tanto existen s y t tales que $sf + tg = 1$, es decir f y g son coprimos. ■

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que el resultante es una combinación polinomial de f y g, es decir existen polinomios $s,t \in \mathbb{F}[x]$ no ambos nulos con $\deg(s) < m$ y $\deg(t) < n$ que satisfacen la identidad de Bézout

$$R(f,g) = sf + tg.$$

Esto se debe a que si $R(f,g) = 0$, entonces existen $s,t \in \mathbb{F}[x]$, como anteriormente se describió, con las condiciones requeridas que satisfacen $R(f,g) = 0 = sf + tg$, mientras que si $R(f,g) \neq 0$, entonces Φ es un epimorfismo y por lo tanto existen s, t con las condiciones requeridas tales que $R(f,g) = sf + tg$.

Observación 4. Si n y m son fijos, podemos decir que un polinomio f con $\deg(f) \leq n$ tiene $n - \deg(f)$ raíces en ∞, y de manera similar g tiene $m - \deg(g)$ raíces en ∞. Así f y g siempre tiene n y m raíces, respectivamente, en $\mathbb{F}_1 \cup \{\infty\}$ para alguna extensión $\mathbb{F}_1$. Con esta interpretación, el Corolario 2 se cumple para todos los polinomios con $\deg(f) \leq n$ y $\deg(g) \leq m$. Incluyendo $f = 0$ y $g = 0$ excepto en el caso trivial $n = m = 0$.

También tenemos las siguientes fórmulas útiles relacionadas con (3).

Teorema 3. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dos polinomios con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$.
(i) Supongamos que f tiene n raíces $\xi_1,\dots,\xi_n$ en alguna extensión de $\mathbb{F}$. Entonces

$$R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i) \qquad (4)$$

(ii) Supongamos que g tiene m raíces $\eta_1,\dots,\eta_m$ en alguna extensión de $\mathbb{F}$. Entonces

$$R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j) \qquad (5)$$

En (i), f necesariamente tiene grado n, mientras que $\deg(g) \leq m$, el cual puede ser estrictamente menor que m. Similarmente, en (ii), $\deg(g) = m$ y $\deg(f) \leq n$.

La matriz de Sylvester de g y f se obtiene permutando las filas de la matriz de Sylvester de f y g. El número de inversiones es nm, por lo tanto se deduce inmediatamente de la Definición 1 que

$$R_{m,n}(g,f) = (-1)^{nm} R_{n,m}(f,g) \qquad (6)$$

Si $\deg(f) = n$ y $\deg(g) = m$, (6) también se puede concluir de (3). Este tipo de antisimetría explica por qué hay un factor $(-1)^{nm}$ en (5) pero no en (4).

Las propiedades de factorización en el Teorema 3 también pueden expresarse de la siguiente manera.

Teorema 4. Si f_1, f_2 y g son polinomios con $\deg(f_1) \leq n_1$, $\deg(f_2) \leq n_2$ y $\deg(g) \leq m$, entonces

$$R_{n_1+n_2,m}(f_1 f_2, g) = R_{n_1,m}(f_1, g) R_{n_2,m}(f_2, g) \qquad (7)$$

Del mismo modo, si f, g_1 y g_2 son polinomios con $\deg(f) \leq n$, $\deg(g_1) \leq m_1$ y $\deg(g_2) \leq m_2$, se tiene

$$R_{n,m_1+m_2}(f, g_1 g_2) = R_{n,m_1}(f, g_1) R_{n,m_2}(f, g_2) \qquad (8)$$

Demostración. Por el argumento en la Observación 2, podemos suponer que $\deg(g) = m$, entonces g tiene m raíces en alguna extensión de $\mathbb{F}$, por lo tanto (7) se sigue de (5). Del mismo modo, (8) se sigue de (4). ■

La ecuación (6) también nos permite exhibir otro tipo de simetría. Con $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ como antes, se definen los polinomios invertidos por

$$f^*(x) = x^n f(1/x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n \qquad (9)$$

$$g^*(x) = x^m g(1/x) = b_m + b_{m-1}x + \cdots + b_0 x^m \qquad (10)$$

Teorema 5. Con las notaciones anteriores, para cualquier dos polinomios f y g con $\deg(f) \le n$ y $\deg(g) \le m$,

$$R_{n,m}(f^*, g^*) = R_{m,n}(g, f) = (-1)^{nm} R_{n,m}(f, g).$$

Demostración. La matriz de Sylvester $Syl_{n,m}(f^*, g^*)$ se obtiene de $Syl_{m,n}(g, f)$ invirtiendo el orden tanto de filas como de columnas, y por ende tienen el mismo determinante. ■

De acuerdo a la Observación 1, el caso estándar para el resultante es cuando $\deg(f) = n$ y $\deg(g) = m$. Siempre podemos reducir a ese caso usando las siguientes fórmulas.

Teorema 6. (i) Si $\deg(g) \le k \le m$, entonces

$$R_{n,m}(f, g) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f, g). \qquad (11)$$

(ii) Si $\deg(f) \le k \le n$, entonces

$$R_{n,m}(f, g) = (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} R_{k,m}(f, g) \qquad (12)$$

Demostración. (i). Supongamos que $\deg(g) < m$, entonces $b_m = 0$. Entonces la primera columna de la matriz de Sylvester (1) es 0, excepto por su primer elemento a_n, y la submatriz de $Syl_{n,m}(f, g)$ obtenida al eliminar la primera fila y la columna es igual a $Syl_{n,m-1}(f, g)$. Por lo tanto, al desarrollar el determinante $R_{n,m}(f, g)$ por medio de la primera columna,

$$R_{n,m}(f, g) = a_n R_{n,m-1}(f, g).$$

La fórmula (11) ahora sigue para $k = m, m-1, \ldots, 0$ por inducción hacia atrás.
(ii). Por (6) y la parte (i),

$$\begin{aligned} R_{n,m}(f, g) &= (-1)^{nm} R_{m,n}(g, f) \\ &= (-1)^{nm} b_m^{n-k} R_{m,k}(g, f) \\ &= (-1)^{nm-km} b_m^{n-k} R_{k,m}(f, g). \end{aligned}$$

■

Además tenemos que si tanto $\deg(f) < n$ y $\deg(g) < m$, entonces $R_{n,m}(f, g) = 0$. Ya que la primera columna en (1) desaparece, esto también se deduce de (11) o (12).

Teorema 7. Sean f y g polinomios con $\deg(f) \le n$ y $\deg(g) \le m$. Si $n \ge m$ y h es cualquier polinomio con $\deg(h) \le n - m$, entonces

$$R_{n,m}(f + hg, g) = R_{n,m}(f, g) \qquad (13)$$

En forma similar, si $n \le m$ y h es cualquier polinomio con $\deg(h) \le m - n$, entonces

$$R_{n,m}(f, g + hf) = R_{n,m}(f, g) \qquad (14)$$

Demostración. Primero, supongamos que $n \ge m$ y $\deg(h) \le n - m$. La matriz de Sylvester $Syl_{n,m}(f + hg, g)$ se obtiene de $Syl_{n,m}(f, g)$ por operaciones de fila que no cambian su determinante $R_{n.m}$. Si $h(x) = c_l x^l + \cdots + c_0$, súmese c_k veces la fila $n + i - k$ a la fila i, para $i = 1, \ldots, m$ y $k = 0, \ldots, l$.
La segunda parte sigue de manera similar, o por la primera parte y (6). ■

Teorema 8. Si f y g son polinomios de grados n y m como anteriormente, con raíces $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_m$ en alguna extensión, entonces el resultante $R(f(x), g(y - x))$ con $g(y - x)$ considerado como un polinomio en x es un polinomio en y de grado nm con raíces $\xi_i + \eta_j$, $1 \le i \le n$, y $1 \le j \le m$. Además, $R(f(x), g(y - x))$ tiene coeficiente líder $a_n^m b_m^n$. En particular, $R(f(x), g(y - x))$ es mónico si f y g lo son.

Demostración. Tenemos $g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x - \eta_j)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} g(y - x) &= b_m \prod_{j=1}^{m} \big(y - x - \eta_j\big) \\ &= (-1)^m b_m \prod_{j=1}^{m} (x - y + \eta_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4) o el Teorema 2,

$$\begin{aligned} R\big(f(x), g(y - x)\big) &= a_n^m (-1)^{nm} b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \big(\xi_i - y + \eta_j\big) \\ &= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (y - \xi_i - \eta_j). \end{aligned}$$

■

Si $\deg(f) < n$ o $\deg(g) < m$, pero no ambos, entonces por el Teorema 6 $R(f(x), g(y - x))$ sigue siendo un polinomio cuyas raíces están dadas por $\xi_i + \eta_j$, donde ξ_i recorre las raíces de f y η_j las de g, teniendo en cuenta las

multiplicidades correspondientes. Si $\deg(f) < n$ y $\deg(g) < m$, entonces $R(f(x), g(y-x)) = 0$.

Ejemplo 2. Sean $n = 1$ y $f(x) = ax + c$. Entonces, si $a \neq 0$, f tiene la raíz simple $\xi = -c/a$ y por (4) obtenemos

$$R_{1,m}(f,g) = a^m g(-c/a) = \sum_{j=0}^{m} b_j (-c)^j a^{m-j}. \quad (15)$$

Esta fórmula, ignorando la expresión intermedia, también se cumple si $a = 0$ y por lo tanto se tiene $R_{1,m}(c,g) = b_m(-c)^m$, de acuerdo a la Observación 2.

Ejemplo 3. Sean $n > 0$ y $f(x)$ y $g(x)$ sean dos polinomios de grados menores o iguales que n con coeficientes en un campo $\mathbb{F}$. Además, sean $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

Supóngase primero que $d \neq 0$. Entonces, por los Teoremas 7 y 1,

$$\begin{aligned} & R_{n,n}(af + bg, cf + dg) \\ & = R_{n,n}(af + bg - (b/d)(cf + dg), cf + dg) \\ & = R_{n,n}\big((a - bc/d)f, cf + dg\big) \\ & = (a - bc/d)^n R_{n,n}(f, cf + dg) \\ & = (a - bc/d)^n R_{n,n}(f, dg) \\ & = (ad - bc)^n R_{n,n}(f,g) \end{aligned} \quad (16)$$

La fórmula final también se cumple en el caso $d = 0$, por ejemplo al considerar a d como una indeterminada. Se puede escribir el resultado como

$$R_{n,n}(af + bg, cf + dg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^n R_{n,n}(f,g). \quad (17)$$

Para tener un panorama completo, ahora pasamos a ver los casos triviales. Si se permite que $n = 0$ o $m = 0$ en lo anteriormente expuesto. Tenemos que el caso $m = n = 0$ es completamente trivial: $f(x)$ y $g(x)$ son constantes, por lo tanto la matriz de Sylvester (1) tiene 0 filas y columnas, es la matriz vacía, y $R_{0,0}(f,g) = 1$, por definición.
En el caso $m = 0$, $g(x) = b_0$ constante. La matriz de Sylvester es la matriz diagonal $b_0 I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n, y por lo tanto $R_{n,0}(f,g) = b_0^n$.
Similarmente, o por (6), si $n = 0$, entonces $f(x) = a_0$ y $R_{0,m}(f,g) = a_0^m$. Estas fórmulas son casos particulares de (5) y (4).

Obsérvese que las fórmulas (3), (4), (5) en los Teoremas 2 y 3 siguen siendo válidas para $n = 0$ y $m = 0$, con productos vacíos definidos como 1.

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula interesante para el resultante a través del algoritmo de la división.

Teorema 9. Sean f y g polinomios con $\deg(f) = n$ y $\deg(g) \leq m$. Sea, para $k \geq 0$, $r_k(x) = r_{k,n-1}x^{n-1} + \cdots + r_{k,0}$ el residuo de $x^k g(x)$ módulo $f(x)$, es decir, $x^k g(x) = q_k(x)f(x) + r_k(x)$ para algunos polinomios q_k y r_k con $\deg(r_k) \leq n - 1$. Entonces

$$R_{n,m}(f,g) = a_n^m \begin{vmatrix} r_{n-1,n-1} & \cdots & r_{n-1,0} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{0,n-1} & \cdots & r_{0,0} \end{vmatrix} \quad (18)$$

donde a_n es el coeficiente principal de f.
Demostración. Trabajando en el álgebra exterior sobre $\mathbb{F}(x)$, usando (2). Sea D el determinante en (18); entonces

$$r_{n-1}(x) \wedge \cdots \wedge r_0(x) = Dx^{n-1} \wedge \cdots \wedge x^0. \quad (T2)$$

Para $k \leq n - 1$, $x^k g(x) - r_k(x) = q_k(x)f(x)$ tiene grado menor o igual a $n + m - 1$ y es por lo tanto una combinación lineal de $f(x), xf(x), \ldots, x^{m-1}f(x)$; luego usando (T2) y (2) con $g(x)$ reemplazado por 1,

$$\begin{aligned} & (x^{m-1}f(x)) \wedge \cdots \wedge f(x) \wedge \big(x^{n-1}g(x)\big) \wedge \cdots \wedge g(x) \\ & = (x^{m-1}f(x)) \wedge \cdots \wedge f(x) \wedge r_{n-1}(x) \wedge \cdots \wedge r_0(x) \\ & = (x^{m-1}f(x)) \wedge \cdots \wedge f(x) \wedge Dx^{n-1} \wedge \cdots \wedge x^0 \\ & = DR_{n,m}(f,1)x^{n+m-1} \wedge \cdots \wedge 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, usando (2) nuevamente,

$$R_{n,m}(f,g) = DR_{n,m}(f,1).$$

Finalmente, por el Teorema 6, o por (4),

$$R_{n,m}(f,1) = a_n^m R_{n,0}(f,1) = a_n^m.$$

■

Ahora pasamos hacer algunos comentarios acerca de la matriz de Sylvester. El siguiente teorema generaliza el Corolario 1.8, ya que en particular dice que la matriz de Sylvester de f y g es singular si y solo si su máximo común divisor tiene grado mayor o igual que 1.
Teorema 10. Sean f y g dos polinomios con $\deg(f) = n$ y $\deg(g) = m$, y sea $h := mcd(f,g)$ su máximo común divisor, es decir, el divisor común de grado mayor. Entonces $\deg(h)$ es el co-rango de la matriz de Sylvester $Syl(f,g)$. En otras palabras, la matriz de Sylvester $Syl(f,g)$ tiene rango $n + m - \deg(h)$.

Demostración. Primero obsérvese que $Syl_{n,m}(f,g)$ y $Syl_{m,n}(g,f)$ tienen el mismo rango y co-rango, así podemos intercambiar f y g. Por lo tanto, podemos suponer que $n \geq m$.
En este caso, podemos como en la demostración del Teorema 7 para cualquier polinomio q con $\deg(q) \leq n-m$ obtener $Syl_{n,m}(f-qg,g)$ de $Syl_{n,m}(f,g)$ por medio de operaciones de fila que no cambian el rango y co-rango. En particular, podemos reemplazar f por el residuo r obtenido al dividir f por g. Entonces $\deg(r) < m \leq n$ y la primera columna de $Syl_{n,m}(r,g)$ tiene un único elemento distinto de cero, b_m en la fila $m+1$. Por lo tanto, podemos eliminar la primera columna y la $(m+1)$-ésima fila sin cambiar el co-rango, y esto da $Syl_{n-1,m}(r,g)$. Repitiendo este argumento, vemos que si $r \neq 0$ y $k = \deg(r)$, entonces $Syl_{n,m}(f,g)$ tiene el mismo co-rango que $Syl_{k,m}(r,g)$ y $Syl_{m,k}(g,r)$. Repetimos el argumento desde el principio, dividiendo g por r, y así sucesivamente; esto por el algoritmo euclidiano nos permite calcular el MCD, h, y finalmente concluimos con la matriz de Sylvester $Syl_{k,l}(0,h)$, para algunos $k \geq 0$ y $l = \deg(h)$, que claramente tiene co-rango l ya que las primeras l filas son 0 y las últimas k son independientes, esto último se verifica por el $k \times k$ menor de la parte inferior izquierda que es triangular. Alternativamente, el Teorema 10 se sigue también del Teorema 11. ■

También existe una descripción explícita del espacio nulo izquierdo.

Teorema 11. Sean f y g dos polinomios con $\deg(f) \leq n$ y $\deg(g) \leq m$. Sea $v \coloneqq (\alpha_{m-1}, \dots \alpha_0, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0)$ un vector fila de dimensión $m+n$. Entonces $vSyl(f,g) = 0$ si y solo si $pf + qf = 0$, donde $p(x) = \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_0$ y $q(x) = \beta_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \beta_0$.

Demostración. Sea $vSyl_{n,m}(f,g) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+m})$. Entonces, para $j = 1, \dots, m+n$, a_k y b_k definidos para todos los enteros k como en la Definición 1,

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i}\, a_{n+i-j} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \beta_{m+n-i}\, b_{i-j},$$

que es igual al coeficiente de x^{m+n-j} en $pf+qg$. ■

Ejemplo 4. Si $n = m = 2$,

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_0 - b_2a_0)^2 - (a_2b_1 - b_2a_1)(a_1b_0 - b_1a_0).$$

Si $n = m = 3$,

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

De manera más general, si $m = n$, entonces

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix}.$$

III. Discriminante

El discriminante es un objeto fundamental en la matemática, en particular en teoría de números y en geometría algebraica, que indica cuándo un polinomio tiene raíces múltiples.

Varias normalizaciones diferentes del discriminante de un polinomio son utilizadas por diferentes autores, que difieren en signo y en factores que son potencias del coeficiente principal del polinomio. Una elección natural es la siguiente.

Definición 2. Sea f un polinomio de grado n mayor o igual a 1 con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Sea $\mathbb{F}_1$ una extensión de $\mathbb{F}$ donde f se descompone, y sean ξ_1,…, ξ_n las raíces de f en $\mathbb{F}_1$ tomadas con multiplicidades. Entonces el discriminante (normalizado) de f es

$$\Delta_0(f) \coloneqq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i - \xi_j)^2. \qquad (19)$$

Observemos que el campo $\mathbb{F}_1$ siempre existe, por ejemplo, una cerradura algebraica de $\mathbb{F}$ cumple con estas condiciones, como veremos más, Teorema 12, se tiene que $\Delta_0(f) \in \mathbb{F}$ y no depende de la elección de $\mathbb{F}_1$. Esto se sigue del hecho de que $\Delta_0(f)$ es un polinomio simétrico en ξ_1,…, ξ_n, y por lo tanto por un hecho bien conocido, un polinomio en los polinomios simétricos elementales $\sigma_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^k\, a_{n-k}/a_n$, $k = 1, \dots, n$.

Nótese además que $\Delta_0(cf) = \Delta_0(f)$ para cualquier constante $c \neq 0$.
Sin embargo, mientras que la definición de Δ_0 es simple y natural, Δ_0 es particularmente útil para polinomios mónicos. En general, es más conveniente utilizar la siguiente versión,

que de acuerdo al Teorema 13 es un polinomio en los coeficientes de f. Esta es la versión más común del discriminante.

Definición 3. Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n mayor o igual a 1 con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Entonces el discriminante (estándar) de f es

$$\Delta(f) \coloneqq a_n^{2n-2}\Delta_0(f) = a_n^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\xi_i - \xi_j\right)^2, \qquad (20)$$

donde como antes $\xi_1,\ldots,\ \xi_n$ son las raíces de f en alguna extensión $\mathbb{F}_1$ de $\mathbb{F}$.

El discriminante también se puede definir como el resultante de f y su derivada f', con un factor de normalización adecuado, como se establece con mayor precisión en el siguiente teorema.

Teorema 12. Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n mayor o igual a 1 con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Entonces el discriminante de f está dado por

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2}a_n^{-1}R(f,f') \qquad (21)$$

y por lo tanto

$$\Delta_0(f) = (-1)^{n(n-1)/2}a_n^{-(2n-1)}R(f,f') \qquad (22)$$

Observación 5. Para ser precisos, deberíamos escribir $R_{n,n-1}(f,f')$ en este teorema. Regularmente, $\deg(f') = \deg(f) - 1 = n - 1$ y por ello podemos escribir $R(f,f')$ sin ninguna ambigüedad. Por ejemplo, siempre que $\mathbb{F}$ tenga característica 0, como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Sin embargo, si $\mathbb{F}$ tiene característica $p > 0$ y $p|n$, entonces $\deg(f') < n - 1$. En este caso, si $\deg(f') = k$, entonces por el Teorema 6, $R_{n,n-1}(f,f') = a_n^{n-1-k}R_{n,k}(f,f')$ y por lo tanto

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2}a_n^{n-k-2}R_{n,k}(f,f'), \qquad (23)$$

$$\Delta_0(f) = (-1)^{n(n-1)/2}a_n^{-n-k}R_{n,k}(f,f'). \qquad (24)$$

Demostración (Teorema 12). Sea f con raíces $\xi_1,\ldots,\ \xi_n$ en alguna extensión. Entonces $f(x) = a_n\prod_{i=1}^n(x-\xi_i)$, y por lo tanto $f'(\xi_i) = a_n\prod_{j\ne i}(\xi_i - \xi_j)$. En consecuencia, por (4),

$$R_{n,n-1}(f,f') = a_n^{n-1+n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\ne i}\left(\xi_i - \xi_j\right)$$

$$= a_n^{2n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\xi_i - \xi_j\right)\left(\xi_i - \xi_j\right)$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}a_n^{2n-1}\Delta_0(f)$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}a_n\Delta(f).$$

■

Teorema 13. $\Delta(f)$ es un polinomio homogéneo con coeficientes enteros en los coeficientes $a_0,\ldots,\ a_n$ de f. Además, si $n = \deg(f)$,
(i) $\Delta(f)$ es homogéneo de grado $2n - n$ en $a_0,\ldots,\ a_n$.
(ii) Si a_i se considera que tiene un grado i, entonces $\Delta(f)$ es homogéneo de grado $n(n-1)$.

Demostración. La derivada $f'(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ con $b_j = (j+1)a_{j+1}$. Por lo tanto, todas las entradas de la matriz de Sylvester $Syl_{n,n-1}(f,f')$ son múltiplos enteros de $a_0,\ldots,\ a_n$, y por lo tanto $R(f,f')$ es un polinomio homogéneo con coeficientes enteros en $a_0,\ldots,\ a_n$. Además, las únicas entradas, posiblemente, distintas de cero en la primera columna de $Syl_{n,n-1}(f,f')$ son a_n y $b_{n-1} = na_n$; por lo tanto, $R(f,f')$ es un múltiplo de a_n, y $\Delta(f)$ también lo es por (21).
Como $R(f,f')$ tiene grado total $n + n - 1$, esto también muestra que $\Delta(f)$ tiene grado $2n - 2$. Alternativamente, esto se deduce de la Definición 3, ya que reemplazando a_i por ta_i para todo i no cambian las raíces $\xi_1,\ldots,\ \xi_n$ de f.
Para (ii), tengamos en cuenta que si $f_t(x) = \sum_{i=0}^n a_i\, t^i x^i$, para una indeterminada t, entonces f_t tiene raíces $t^{-1}\xi_1,\ldots,\ t^{-1}\xi_n$, y la Definición 3 da

$$\Delta(f_t) = (t^n a_n)^{2n-2}t^{-n(n-1)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\xi_i - \xi_j\right)^2$$

$$= t^{n(n-1)}\Delta(f).$$

Alternativamente, (ii) se deriva fácilmente de (21) y el Teorema 1 (i), (ii). ■

Observación 6. En cuanto al resultante, ver la Observación 3, los coeficientes enteros de $\Delta(f)$ no dependen del campo $\mathbb{F}$ excepto por la no unicidad obvia cuando $char(\mathbb{F}) \ne 0$.

Teorema 14. Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n mayor o igual a 1 con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{F}$, y si las raíces de $f'(x) = 0$ son $\eta_1,\ldots,\ \eta_{n-1}$ en alguna extensión de $\mathbb{F}$. Entonces

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2}n^n a_n^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}f(\eta_j), \qquad (25)$$

y por lo tanto

$$\Delta_0(f) = (-1)^{n(n-1)/2}n^n a_n^{-(n-1)}\prod_{j=1}^{n-1}f(\eta_j). \qquad (26)$$

Demostración. Por el Teorema 12 y (5), ya que $f'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots$ ■

Las raíces η_j de f' son los puntos críticos de f, y los valores de la función $f(\eta_j)$ son los valores críticos. Por lo tanto, suponiendo por simplicidad $a_n = 1$, el Teorema 14 dice que el discriminante es una constante multiplicada por el producto de los valores críticos.

El uso quizás más importante del discriminante es la siguiente consecuencia inmediata de las Definiciones 2 y 3.

Teorema 15. Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n mayor o igual a 1 con coeficientes en un campo $\mathbb{F}$. Entonces

$$\Delta_0(f) = 0 \iff \Delta(f) = 0$$

$$\iff f \text{ tiene una raíz múltiple en alguna extensión de } \mathbb{F}.$$

Equivalentemente, f tiene n raíces distintas en alguna extensión si y solo si el discriminante es distinto de 0.

De acuerdo al Teorema 13, $\Delta(f)$ para f de grado n mayor o igual a 1 es un polinomio en $a_0,\ldots, a_n$; también podemos aplicar este polinomio cuando $a_n = 0$, es decir, a los polinomios f de grado menor que n. Para evitar confusiones, denotamos este polinomio en los coeficientes $a_0,\ldots, a_n$ por $\Delta^{(n)}(f)$, definido para todos los polinomios $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ de grado menor o igual que n. Entonces $\Delta^{(n)}(f) = \Delta(f)$ cuando $a_n \neq 0$. Este polinomio tiene una simetría simple.

Teorema 16. Si $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ es un polinomio de grado menor o igual que n y f^* es definido por (9), entonces

$$\Delta^{(n)}(f^*) = \Delta^{(n)}(f). \tag{27}$$

En particular, si f tiene un grado n y $a_0 \neq 0$, entonces

$$\Delta(f^*) = \Delta(\mathrm{f}). \tag{28}$$

Demostración. Supongamos primero que $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si f tiene raíces $\xi_1,\ldots, \xi_n$ en alguna extensión; estas raíces no son cero y f^* tiene las raíces $\xi_1^{-1},\ldots, \xi_n^{-1}$ y coeficiente principal $a_0 = a_n\xi_1 \cdots \xi_n$. Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 3,

$$\Delta(f^*) = a_0^{2n-2} \prod_{1\le i<j\le n} \left(\xi_i^{-1} - \xi_j^{-1}\right)^2$$

$$= a_n^{2n-2} \prod_{1\le i<j\le n} (\xi_j - \xi_i)^2 = \Delta(f),$$

Lo cual prueba (28). En particular, esto es válido si consideramos $a_0,\ldots, a_n$ como indeterminadas, de esto se sigue (27) en general porque ambos lados son polinomios en $a_0,\ldots, a_n$. ■

Veamos otra consecuencia simple de la definición.

Teorema 17. Si f y g son polinomios de grados n y m mayores o iguales que 1, entonces

$$\Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g)R(f,g)^2. \tag{29}$$

Demostración. Esto se sigue de la Definición 3 y el Teorema 2. Alternativamente, por los Teoremas 4, 7 y nuevamente 4.

$$\begin{aligned} R(fg,(fg)') &= R(fg, f'g + fg') \\ &= R(f, f'g + fg')R(g, f'g + fg') \\ &= R(f, f'g)R(g, fg') \\ &= R(f, f')R(f,g)R(g,f)R(g,g'), \end{aligned}$$

y el resultado se sigue por (21) y (6). ■

Como se mencionó anteriormente, $\Delta^{(n)}(f) = \Delta(f)$ cuando $a_n \neq 0$. En el caso opuesto $a_n = 0$, tenemos la siguiente fórmula simple, que puede considerarse como la relación entre discriminantes para polinomios de grados diferentes.

Teorema 18. Si $a_n = 0$, entonces

$$\Delta^{(n)}(f) = a_{n-1}^2 \Delta^{(n-1)}(f). \tag{30}$$

En particular, si $a_n = a_{n-1} = 0$, $\Delta^{(n)}(f) = 0$.

Demostración. Supongamos primero $a_{n-1} \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Sea $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, este jugara el mismo papel que $f(x)$, así estamos considerando un polinomio de grado $n-1$, y definimos f^* por (9) y g^* (10), con m reemplazado por $n-1$. Entonces $f^*(x) = xg^*(x)$, donde f^* tiene grado n y $g^*(x)$ tiene grado $n-1$. Trivialmente $\Delta(x) = 1$, y veremos más adelante que $R_{1,n-1}(x, g^*) = g^*(0) = a_{n-1}$. Por lo tanto, usando los Teoremas 16 y 17 concluimos

$$\begin{aligned} \Delta^{(n)}(f) = \Delta(f^*) = \Delta(xg^*) &= \Delta(g^*)a_{n-1}^2 \\ &= a_{n-1}^2 \Delta^{(n-1)}(g), \end{aligned}$$

Lo cual demuestra (30) en el caso a_{n-1}, $a_0 \neq 0$. El caso general se sigue, porque ambos lados de (30) son polinomios en $a_0,\ldots, a_{n-1}$. ■

Observación 7. Si fijamos $n \geq 1$ y como en la Observación 4 decimos que un polinomio f con $\deg(f) \leq n$ tiene $n - \deg(f)$ raíces en infinito, entonces los Teoremas 15 y 18 muestran que $\Delta^{(n)}(f) = 0$ si y solo si f tiene una raíz doble, o más precisamente, una raíz múltiple en $\mathbb{F}_1 \cup \{\infty\}$ para

alguna extensión $\mathbb{F}_1$ y en cualquier extensión donde f se descomponga.

Observación 8. Si $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ es un polinomio de grado n con coeficientes no cero a_0,…, a_{n-1}, definimos

$$\Delta^*(f) \coloneqq \prod_{i=0}^{n-1} a_i^{-2} \cdot \Delta(f), \tag{31}$$

El Teorema 18 muestra que si, en términos más generales, para f de grado menor o igual que n se define

$$\Delta^{(n)*}(f) \coloneqq \prod_{i=0}^{n-1} a_i^{-2} \cdot \Delta^{(n)}(f), \tag{32}$$

entonces, cuando $\deg(f) < n$,

$$\Delta^{(n)*}(f) = \Delta^{(n-1)*}(f). \tag{33}$$

IV. Ejemplos de Discriminantes

Ejemplo 5. $n = 1$. Si $f = ax + b$, entonces trivialmente que $\Delta(f) = \Delta_0(f) = 1$.

Ejemplo 6. $n = 2$. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces el Teorema 12 da

$$\Delta(f) = -a^{-1}R(f, f') = -a^{-1}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}$$

$$= b^2 - 4ac \tag{34}$$

y

$$\Delta_0(f) = a^{-2}\Delta(f) = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}. \tag{35}$$

Observe que la fórmula estándar para encontrar las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ puede escribirse como

$$x_\pm = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_0(f)} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta(f)}}{2a}.$$

Ejemplo 7. $n = 3$. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces el Teorema 12 da

$$\Delta(f) = -a^{-1}R(f, f') = -a^{-1}\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}$$

$$= b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2. \tag{36}$$

Ejemplo 8. $n = 3$. Si $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ es mónico, (36) se simplifica a

$$\Delta_0(f) = \Delta(f) = -R(f, f')$$

$$= b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2.$$

Ejemplo 9. $n = 3$. Para $f(x) = x^3 + px + q$, sin término de segundo grado, (36) se simplifica aún más

$$\Delta_0(f) = \Delta(f) = -4p^3 - 27q^2.$$

Ejemplo 10. $n = 3$. El polinomio $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ es importante en la teoría de las funciones elípticas de Weierstrass. Su discriminante es, por (36),

$$\Delta(4x^3 - g_2x - g_3) = 16g_2^3 - 432g_3^2.$$

Equivalentemente, $\Delta_0(4x^3 - g_2x - g_3) = \frac{1}{16}g_2^3 - \frac{27}{16}g_3^2$. En este contexto, es más común cambiar la normalización y definir el discriminante como

$$16\Delta_0(f) = \frac{1}{16}\Delta(f) = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Ejemplo 11. $n = 4$. Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, entonces el Teorema 12 da

$$\Delta(f) = a^{-1}R(f, f')$$

$$= a^{-1}\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$= b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 4b^3d^3 + 18b^3cde - 27b^4e^2$$

$$-4ac^3d^2 + 16ac^4e + 18abcd^3 - 80abc^2de - 6ab^2d^2e$$

$$+144ab^2ce^2 - 27a^2d^4 + 144a^2cd^2e - 128a^2c^2e^2$$

$$-192a^2bde^2 + 256a^3e^3. \tag{37}$$

Ejemplo 12. $n = 4$. Si $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ es mónico, entonces (37) se simplifica ligeramente

$$\Delta_0(f) = \Delta(f) = R(f, f')$$

$$= b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 4b^3d^3 + 18b^3cde$$

$$-27b^4e^2 - 4c^3d^2 + 16c^4e + 18bcd^3$$

$$-80bc^2de - 6b^2d^2e + 144b^2ce^2 - 27d^4$$

$$+144cd^2e - 128c^2e^2 - 192bde^2 + 256e^3.$$

Ejemplo 13. $n = 4$. Si $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ es mónico y sin término de tercer grado, entonces (37) se simplifica aún más

$$\Delta_0(f) = \Delta(f)$$
$$= -4p^3q^2 - 27q^4 + 16p^4r + 144pq^2r$$
$$-128p^2r^2 + 256r^3.$$

Ejemplo 14. Sea $f(x) = x^n + px + q$ para $n \geq 2$. Entonces $f'(x) = nx^{n-1} + p$ y, usando el Teorema 7 con $h(x) = -x/n$, el Teorema 6 y el Ejemplo 2, en el caso de que $\mathbb{F}$ sea de característica 0, nos permiten concluir

$$(-1)^{n(n-1)/2}\Delta(f) = R_{n,n-1}(f, f')$$
$$= R_{n,n-1}(x^n + px + q, nx^{n-1} + p)$$
$$= R_{n,n-1}(p(1 - 1/n)x + q, nx^{n-1} + p)$$
$$= (-1)^{(n-1)^2}n^{n-1}R_{1,n-1}(p(1 - 1/n)x + q, nx^{n-1} + p)$$
$$= (-1)^{(n-1)}n^{n-1}\left(n(-q)^{n-1} + p\big(p(1 - 1/n)\big)^{n-1}\right)$$
$$= n^nq^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}p^n.$$

Como el lado derecho es un polinomio en p y q con coeficientes enteros, la fórmula final es válida para todos los campos y para todo $n \geq 2$. Por consiguiente,

$$\Delta_0(f) = \Delta(f) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1)^{n-1}p^n$$
$$+(-1)^{n(n-1)/2}n^nq^{n-1}.$$

Un buen ejercicio es ver los casos especiales de los ejemplos 6, 9 y 13 con $p = 0$. El siguiente caso es la quintica en la forma de Bring:

$$\Delta_0(x^5 + px + q) = \Delta(x^5 + px + q) = 4^4p^5 + 5^5q^4.$$

V. Discriminantes de Polinomios Reales

Si f es un polinomio real de grado n, entonces sus n raíces en $\mathbb{C}$ consisten en $n - 2v$ raíces reales y v pares $\xi_i, \overline{\xi_i}$ de raíces complejas (no reales), para algún v con $0 \leq v \leq n/2$.

Teorema 19. Si f es un polinomio real de grado n mayor o igual que 1 con $n - 2v$ raíces reales y v pares de raíces complejas (no reales), y todas las raíces distintas y por lo tanto $\Delta(f) \neq 0$, entonces

$$sig\big(\Delta(f)\big) = sig\big(\Delta_0(f)\big) = (-1)^v. \quad (38)$$

Demostración. Esto se sigue en forma directa de las Definiciones 2 y 3, mediante el emparejamiento de términos en forma adecuada.

Alternativamente, se puede factorizar f en sus factores reales irreducibles f_1,..., f_{n-2v}, g_1,…, g_v, donde $\deg(f_i) = 1$ y $\deg(g_j) = 2$, y teniendo presente el teorema 17 y procediendo por inducción se establece

$$sig\big(\Delta(f)\big) = \prod_{i=1}^{n-2v} sig\big(\Delta(f_i)\big) \prod_{j=1}^{v} sig\left(\Delta(g_j)\right).$$

Además, cada $sig\big(\Delta(f_i)\big) = 1$, mientras que $sig\left(\Delta(g_j)\right) < 0$ por la Deposición 3, ya que g_j tiene dos raíces ξ y $\bar{\xi}$ con $(\xi - \bar{\xi})^2 < 0$. ■

Por ejemplo, esto conduce a las siguientes clasificaciones para grados bajos.

Ejemplo 15. $n = 2$. Para un polinomio cuadrático real f, se tiene

- $\Delta(f) > 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) > 0 \Leftrightarrow f$ tiene dos raíces reales distintas.
- $\Delta(f) < 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) < 0 \Leftrightarrow f$ tiene dos raíces complejas conjugadas.
- $\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) = 0 \Leftrightarrow f$ tiene una raíz real de multiplicidad dos.

Ejemplo 16. $n = 3$. Para un polinomio cúbico real f, se tiene

- $\Delta(f) > 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) > 0 \Leftrightarrow f$ tiene tres raíces reales distintas.
- $\Delta(f) < 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) < 0 \Leftrightarrow f$ tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.
- $\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) = 0 \Leftrightarrow f$ o bien tiene una raíz real de multiplicidad tres, o una raíz real de multiplicidad dos junto con una raíz real simple.

Ejemplo 17. $n = 4$. Para un polinomio cuártico real f, se tiene

- $\Delta(f) > 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) > 0 \Leftrightarrow f$ tiene cuatro raíces reales distintas, o cuatro complejas en dos pares de conjugadas.
- $\Delta(f) < 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) < 0 \Leftrightarrow f$ tiene dos raíces reales y dos complejas conjugadas.
- $\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta_0(f) = 0 \Leftrightarrow f$ o bien tiene una raíz real de multiplicidad cuatro, o dos raíces reales, una de multiplicidad tres y otra simple, o una raíz real de multiplicidad dos y dos complejas conjugadas, dos raíces complejas junto con sus conjugadas.

VI. Conclusiones

A través de los ejemplos podemos constatar la importancia que tienen el resultante y discriminante en la teoría de polinomios; varios autores han dado generalizaciones, en particular del resultante para polinomios de varias variables lo cual nos indica que los temas relacionados con estos son de interés vigente. El discriminante tiene un papel muy importante en la teoría de las ecuaciones polinomiales, cuando este se usa en Teoría de Campos Numéricos da información acerca de los primos ramificados de las extensiones. Por su parte, el resultante es una herramienta técnica importante en la Teoría de Eliminación. Por estas razones consideramos que estos dos determinantes son importantes para la Matemática en general.

Referencias

[1] Chen, William Y. C.; Louck, James D.. Interpolation for symmetric functions., Adv. Math. 117 (1996), no. 1, 147-156.
[2] Brown, W. S.; Traub, J. F. On Euclid's algorithm and the theory of subresultants. J. Assoc. Comput. Mach. 18 (1971), 505-514.
[3] Collins, George. Subresultants and Reduced Polynomial Remainder Sequences. J. ACM 14, 1 (1967), 128-142.
[4] von zur Gathen, Joachim; Gerhard, Jürgen. Modern computer algebra. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
[5] Geddes, Keith; Czapor, S.; Labahn, George. Algorithms for Computer Algebra. Kluwer Academic Publishers, 1992.

ISSN: 2594-1011

¿Ecuaciones Funcionales?

Arturo Cueto Hernández [1] , Cesareo García Martínez [2]
[1,2]Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9014 E-mail: arch@correo.azc.uam.mx

Resumen — **En este trabajo presentamos una introducción a las ecuaciones funcionales, esperando despertar el interés en las mismas. Brevemente se comentan los inicios del estudio de las ecuaciones funcionales por parte de D'Alembert, posteriormente se presentan la teoría básica y algunas de las ecuaciones funcionales clásicas. Para finalizar se da un conjunto de ejemplos de estas con su solución.**

Palabras Claves — **Ecuación funcional.**

Abstract — **In this paper we present an introduction to the functional equations, hoping to awaken interest in them. Briefly, the beginnings of the study of functional equations by D'Alembert are discussed, later the basic theory and some of the classical functional equations are presented. Finally, a set of examples of these are given with their solution.**

Keywords — **Functional equation.**

I. Introducción

En este trabajo presentamos una invitación al mundo de las ecuaciones funcionales. Pero ¿qué es una ecuación funcional? Una respuesta sería: es una ecuación cuyas incógnitas son funciones. ¿Qué tan precisa es esta definición? una pregunta natural que surge inmediatamente es ¿qué tipo de funciones? En el desarrollo del trabajo presentaremos varios ejemplos de ecuaciones funcionales con la finalidad de aclarar algunos conceptos; entre estos habrá algunas que se han planteado en olimpiadas de matemáticas y otras consideradas clásicas. Referente a las ecuaciones clásicas diremos por el momento que varias de ellas han sido estudiadas en diversos contextos, esto último nos indica que el mundo de las ecuaciones funcionales es bastante amplio. La teoría de las ecuaciones funcionales es relativamente reciente, ya que se considera que el primer trabajo que trata acerca de las ecuaciones funcionales como tales fue escrito en 1747 por D'Alembert, desde luego cuando nos referimos al "primer trabajo" nos referimos a aquel en el cual se hace un tratamiento sistemático. En 1748 Euler hace una recopilación acerca de las ecuaciones funcionales trigonométricas e hiperbólicas, un trabajo similar fue realizado por Lambert en 1768. Sin embargo, podemos considerar que las ecuaciones funcionales se remontan a la antigua Grecia con Arquímedes, quien hizo uso de las recurrencias. Posteriormente se pueden considerar los trabajos de Oresme comprendidos en el período 1347—1352, y tres siglos después Galileo en 1638 aplicó una variante del trabajo de Oresme. Después de D'Alembert un gran número de matemáticos, eminentes como, Abel, Cauchy, Gauss, Euler dedicaron parte de sus investigaciones al estudio de ecuaciones funcionales particulares; debido a los resultados obtenidos o a la originalidad de la ecuación, algunas de estas hoy en día las conocemos como la ecuación funcional del respectivo personaje.

Esta invitación se basa en los trabajos de J. Aczel [1],[2], un especialista en el campo de las ecuaciones funcionales, al lector interesado es ampliamente recomendable la lectura de estos.

II. Notación

Indicaremos la notación que usaremos:

$\mathbb{Z}$ = conjunto de números enteros,
$\mathbb{Z}^+$ o $\mathbb{N}$ = conjunto de números enteros positivos,
$\mathbb{N}_0$ = conjunto de números enteros no negativos,
$\mathbb{Q}$ = conjunto de números racionales,
$\mathbb{R}$ = conjunto de números reales,
$\mathbb{R}^+$ = conjunto de números reales positivos,
$\mathbb{C}$ = conjunto de números complejos.

III. Definición de una ecuación funcional

Lo primero que haremos será indicar que vamos entender por "ecuación funcional". Originalmente la expresión "ecuación funcional" comprendía todas las ecuaciones en las que funciones desconocidas se veían involucradas, por lo tanto, se incluían las ecuaciones diferenciales e integrales, etc. Hoy en día la expresión "ecuación funcional" se usa generalmente en un sentido más restringido. Antes de dar la definición de ecuación funcional, presentamos la motivación dada por J. Aczel [1]. Recordemos que la idea que se tiene de lo que son las ecuaciones funcionales es la siguiente:

"Las ecuaciones funcionales son ecuaciones, donde ambos lados son construidos con términos a partir de un número finito de funciones desconocidas (de un número finito de variables) y de un número finito de variables independientes. Esta construcción se efectúa mediante un número finito de funciones conocidas de una o varias variables y mediante finitas sustituciones de términos que contienen funciones conocidas y desconocidas en otras funciones conocidas y desconocidas. Las ecuaciones funcionales determinan las funciones desconocidas."

Dado que esta descripción, que difícilmente puede considerarse una definición, contiene el concepto *término*, comenzaremos con la definición del concepto mismo:

Definición 1. Un término se define por las siguientes condiciones:

(a) Las variables independientes son términos.

(b) Si $t_1, t_2, \dots, t_m$ son términos y f es una función de m variables, entonces $f(t_1, \dots, t_m)$ también es un término.

(c) No hay otros términos.

Entonces, una ecuación funcional se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2. Una ecuación funcional es una ecuación

$$t_1 = t_2$$

entre dos términos t_1 y t_2, la cual contiene k variables independientes y $n \geq 1$ funciones desconocidas $f_1, f_2, \dots, f_n$ de $j_1, j_2, \dots, j_n$ variables respectivamente, como también un número finito de funciones conocidas.

Una definición más sencilla, pero en esencia equivalente es:

Definición 3. Una ecuación funcional es una ecuación

$$t_1 = t_2$$

entre dos términos t_1 y t_2 que contienen al menos una función desconocida y un número finito de variables independientes.

Pasamos ahora a la parte complementaria, ya que tenemos una definición de que es una ecuación funcional, diremos que entenderemos por una solución de una ecuación diferencial.

Definición 4. Una solución particular de una ecuación funcional es una función o conjunto de funciones que satisface la ecuación en un dominio dado y la reduce a una identidad.

Definición 5. La solución general es la totalidad de todas las soluciones que pertenecen a la clase de funciones admisibles.

Así en forma natural, tenemos que resolver una ecuación funcional significa encontrar la solución general. Esta solución depende naturalmente del dominio y la clase de funciones admisibles.

Además, una ecuación funcional única puede determinar varias funciones desconocidas que ocurren dentro de la ecuación, como resultado, el número de ecuaciones no está relacionado con el número de funciones que se determinarán.

IV. Clasificación de ecuaciones funcionales

Un primer problema que se nos presenta es: el problema de una clasificación de ecuaciones funcionales. Este es muy difícil y no se ha resuelto hasta el presente de una manera satisfactoria. Por tal razón seguiremos la pauta dada por J. Aczel[1].

Definición 6. Una ecuación funcional en la que todas las funciones desconocidas son funciones de una variable se denomina ecuación funcional ordinaria. Por otra parte, una ecuación funcional en la que al menos una de las funciones desconocidas es una función de varias variables se denomina ecuación funcional parcial.

Para tratar de resolver el problema de clasificación se han introducido varios conceptos que permitan dar una solución. Sin entrar en detalles describiremos estas.

Una propuesta de clasificación de ecuaciones funcionales ordinarias fue dada por Kuczma. Esta clasificación se basa en las nociones de un rango, orden e índice de implicación.

La noción del rango de una ecuación funcional fue introducida por W. Maier.

Definición 7. El número de variables independientes que ocurren en una ecuación funcional se denomina el rango de esta ecuación.

La definición anterior también se puede aplicar a ecuaciones funcionales parciales; sin embargo varios autores consideran que no es apropiada para dar una clasificación de ecuaciones parciales.

Respecto al concepto de orden la situación no es más afortunada. El concepto de orden se ha ido acuñando en varios trabajos en donde se fueron haciendo consideraciones para llegar a una definición amplia. Entre los forjadores del concepto están Kuczma y M. Ghermanescu.

Definición 8. El menor número de ecuaciones adicionales que son necesarias para reducir una ecuación funcional a un sistema donde la evaluación de la función desconocida es en expresiones de una variable, pueden usarse varias variables, se llama el orden de la ecuación funcional.

La ecuación funcional ordinaria más general con una función desconocida, de orden 1, tiene la forma

$$F\left[x_1, \dots, x_p, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p), \varphi\{f[x_1, \dots, x_p, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)]\}\right] = 0 \quad (1)$$

Puede ser reducido al sistema

$$F\left[x_1, \dots, x_p, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p), \varphi(y)\right] = 0,$$

$$f\left[x_1, \dots, x_p, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)\right] = y.$$

La definición anterior del orden tiene algunas deficiencias; por ejemplo, no se puede aplicar a ecuaciones funcionales parciales. Pero aun en el caso de ecuaciones funcionales ordinarias pueden surgir algunas ambigüedades, estas pueden ser originadas por el requisito de que el número de ecuaciones adicionales sea el más pequeño posible. Frecuentemente puede ser difícil decidir si se está usando el mínimo de ecuaciones adicionales.

Daremos a continuación la definición de índice de implicación. Consideremos una ecuación funcional que se ha reducido a un sistema de ecuaciones de la manera descrita anteriormente.

Definición 9. La cantidad de grupos de ecuaciones adicionales que contienen la función desconocida se denomina índice de implicación de esta ecuación.

Una forma más práctica de describir el significado del índice de implicación es que en términos generales, el índice de implicación indica cuántas veces se itera la función desconocida en la ecuación.

Podemos codificar la información del rango, p, el orden, n, y el índice de implicación, i, de una ecuación funcional por medio de la terna $[p, n, i]$, llamamos a esta terna el tipo de la ecuación.

De los resultados probados por J. Aczel y H. Kiesewetter acerca de la reducción del rango se deduce que el rango 2 desempeña un papel particular en la teoría de ecuaciones funcionales en el sentido de que las ecuaciones de un rango más alto usualmente pueden ser reemplazadas por ecuaciones equivalentes de rango 2, mientras que, en general, no es posible reemplazar una ecuación de rango 2 por una ecuación de rango 1.

Cabe señalar que existen otros enfoques para establecer una clasificación de las ecuaciones funcionales, pero no los estudiaremos para no desviarnos de nuestro objetivo.

V. Ecuaciones Funcionales Clásicas

Pasamos ahora a presentar algunas ecuaciones funcionales consideradas clásicas.

Las ecuaciones funcionales más famosas e importantes son conocidas con los nombres de los matemáticos que las estudiaron o introdujeron.

1. Ecuaciones funcionales de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2.1}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{2.2}$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{2.3}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{2.4}$$

2. Ecuación funcional de Abel

$$f[g(x)] = f(x) + \alpha \tag{3}$$

3. Ecuación funcional de D'Alembert

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y) \tag{4}$$

4. Ecuación funcional cuadrática de Euler-Lagrange

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{5}$$

5. Ecuación funcional de Wilson

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)g(y) \tag{6}$$

6. Ecuación funcional larga de D'Alembert

$$f(xy) + f(yx) + f(xy^{-1}) + f(y^{-1}x) = 4f(x)f(y) \tag{7}$$

7. Ecuación funcional pitagórica

$$|f(x+iy)|^2 = |f(x)|^2 + |f(iy)|^2 \tag{8}$$

8. Ecuación funcional de Poisson

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{9}$$

9. Ecuación funcional de Schröder

$$f[g(x)] = af(x), \qquad a \text{ es una constante}, \quad g(x) \text{ es dada}. \tag{10}$$

Consideremos la ecuación (2.1), la ecuación aditiva de Cauchy,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2.1}$$

Esta es equivalente al sistema

$$f(z) = f(x) + f(y)$$

$$z = x + y$$

Por esta razón la ecuación (2.1) es de orden 1. Sin embargo, existen casos particulares de la ecuación (2.1) que son de orden 0, por ejemplo:

$$f(x+y) = f(x) + y \tag{11}$$

Como indicamos en general esta es de orden 1:

$$f(z) = f(x) + y$$

$$z = x + y$$

Pero, de hecho, es de orden 0, ya que la podemos escribir en la forma

$$f(z) = f(x) + z - x$$

donde x y z no están relacionadas por ninguna relación. Por otra parte, la ecuación D'Alembert:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

puede escribirse como

$$f(u) + f(v) = 2f(x)f(y)$$

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Por lo que concluimos que es de orden 2.

Resumimos la información anterior indicando que las ecuaciones (2.1), (4) y (11) son de tipos [2,1,0], [2,2,0] y [2,0,0] respectivamente.

VI. Ejemplos de Ecuaciones Funcionales

En esta sección daremos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales con su solución, algunas de ellas han sido planteadas en olimpiadas de matemáticas.

Ejemplo 1. Describiremos a todas las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Reemplazando x por $1 - x$, tenemos

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$$

De la ecuación dada tenemos que

$$f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x),$$

sustituyendo en la última ecuación y resolviendo para $f(x)$, obtenemos $f(x) = 1 - x^2$. Comprobaremos ahora la solución, para $f(x) = 1 - x^2$ se tiene

$$x^2 f(x) + f(1-x) = x^2(1-x^2) + (1-(1-x)^2)$$

$$= 2x - x^4.$$

Para ciertos tipos de ecuaciones funcionales, un enfoque estándar para resolver el problema es determinar algunos valores especiales (como $f(0)$ o $f(1)$), luego determinar inductivamente $f(n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, n ε ℕ0, de aquí obtener los valores $f(1/n)$ y usar la propiedad de densidad de los racionales para determinar $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplicaremos esto en algunos ejemplos.

Ejemplo 2. Ahora hallaremos todas las funciones

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

tales que la ecuación de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

se cumple para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

Solución: Paso 1. Tomando $x = y = 0$, obtenemos $f(0) = f(0) + f(0)$, lo que implica $f(0) = 0$.

Paso 2. Probaremos que $f(kx) = kf(x)$ para $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ por inducción. Esto es cierto para $k = 1$. Suponga que esto es cierto para k. Tomando $y = kx$, obtenemos

$$f\big((k+1)x\big) = f(x + kx) = f(x) + f(kx)$$

$$= f(x) + kf(x) = (k+1)f(x).$$

Paso 3. Tomando $y = -x$, obtenemos

$$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x),$$

que implica $f(-x) = -f(x)$. Así $f(-kx) = -f(kx)$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $f(kx) = kf(x)$ para $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}$.
Paso 4. Tomando $x = 1/k$, obtenemos

$$f(1) = f\big(k(1/k)\big) = kf(1/k),$$

que implica $f(1/k) = (1/k)f(1)$.
Paso 5. Para $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f(m/n) = mf(1/n) = (m/n)f(1).$$

Por lo tanto, $f(x) = cx$ con $c = f(1)$.

En efecto, para $f(x) = cx$ con $c \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y).$$

Para tratar con funciones en $\mathbb{R}$, después de encontrar la función en $\mathbb{Q}$, podemos usar el siguiente hecho.

Densidad de los números racionales: para cada número real x, existen una sucesión de números racionales creciente que converge a x y otra sucesión de números racionales decreciente que converge a x.

Ejemplo 3. Ahora pasamos a hallar todas las funciones

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que la ecuación de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

se cumple para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$.

Solución: Paso 1. Por el ejemplo 2, tenemos $f(x) = xf(1)$ para $x \in \mathbb{Q}$.
Paso 2. Si $x \geq y$, entonces $x - y \geq 0$. Entonces

$$f(x) = f\big((x-y)+y\big) = f(x-y) + f(y) \geq f(y).$$

Por lo tanto, f es creciente.
Paso 3. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces por la densidad de números racionales, existen sucesiones de racionales $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, creciente y decreciente respectivamente, tales que $p_n \leq x \leq q_n$. Entonces, en el paso 2,

$$p_n f(1) = f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n) = q_n f(1).$$

Tomando límites, el teorema del sándwich implica que $f(x) = xf(1)$ para todo x. Por lo tanto, $f(x) = cx$ con $c \geq 0$.

Observaciones: (1) En el ejemplo 3, si se reemplaza la condición de que "$f(x) \geq 0$" para $x \geq 0$ por la condición de que "f sea monótona", la respuesta es esencialmente la misma, es decir $f(x) = cx$ con $c = f(1)$. Si se reemplaza la condición de que "$f(x) \geq 0$" para $x \geq 0$ por la condición de que "f sea continua en 0", entonces los pasos 2 y 3 en el ejemplo 3 no son necesarios. Se puede tomar una sucesión de racionales creciente $\{p_n\}$ que converge a x y tomar el límite de

$$p_n f(1) = f(p_n) = f(p_n - x) + f(x)$$

para obtener $xf(1) = f(x)$ ya que $\{p_n - x\}$ converge a 0.
(2) La ecuación de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tiene soluciones no continuas. En particular, son soluciones que no son de la forma $f(x) = cx$. Para mostrar esto se requiere el concepto de una *base de Hamel* del espacio vectorial $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ del álgebra lineal.

Ejemplo 4. Este ejemplo es un problema de la olimpiada matemática internacional de 2002. Hallar todas las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todo $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Solución: Supongamos que $f(x) = c$ para todo x. Entonces la ecuación implica $4c^2 = 2c$. Entonces c solo puede ser 0 o $1/2$. Es fácil verificar que $f(x) = 0$ para todo x o $f(x) = 1/2$ para todo x son soluciones.

Supongamos ahora que la ecuación es satisfecha por una función no constante f. Haciendo $x = 0$ y $z = 0$, obtenemos

$$2f(0)\big(f(y) + f(t)\big) = 2f(0),$$

que implica $f(0) = 0$ o $f(y) + f(t) = 1$ para todo y, t. En este último caso, haciendo $y = t$, obtenemos la función constante $f(y) = 1/2$ para todo y. Por lo tanto, podemos suponer que $f(0) = 0$.

Haciendo $y = 1$, $z = 0$, $t = 0$, obtenemos $f(x)f(1) = f(x)$. Como $f(x)$ no es la función cero, $f(1) = 1$. Haciendo $z = 0$, $t = 0$, obtenemos $f(x)f(y) = f(xy)$ para todo x, y. En particular, $f(w) = f\big(w^{1/2}\big)^2 \geq 0$ para $w > 0$.

Haciendo $x = 0$, $y = 1$ y $t = 1$, tenemos

$$2f(1)f(z) = f(-z) + f(z),$$

que implica $f(z) = f(-z)$ para todo z. Entonces f es par.

Definamos la función $g: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(w) = f\big(w^{1/2}\big) \geq 0$. Luego, para todo $x, y > 0$,

$$g(xy) = f\big((xy)^{1/2}\big) = f\big(x^{1/2}y^{1/2}\big)$$

$$= f\big(x^{1/2}\big)f\big(y^{1/2}\big) = g(x)g(y).$$

Como f es par, esto implica que $g(x^2) = f(x)$ para todo x. Haciendo $z = y$, $t = x$ en la ecuación dada, obtenemos

$$\big(g(x^2) + g(y^2)\big)^2 = g((x^2 + y^2)^2) = g(x^2 + y^2)^2$$

para todo x, y. Tomando raíces cuadradas y haciendo $a = x^2$, $b = y^2$, obtenemos $g(a) + g(b) = g(a + b)$ para todo $a, b > 0$.
Posteriormente justificaremos que $g(w) = w$ para todo $w > 0$. Dado que $f(0) = 0$ y f es par, se sigue que $f(x) = g(x^2) = x^2$ para todo x.

En efecto, si $f(x) = x^2$, entonces la ecuación reduce a

$$(x^2 + z^2)(y^2 + t^2) = (xy - zt)^2 + (xt + yz)^2,$$

que es una identidad bien conocida y puede verificarse fácilmente mediante el desarrollo o bien a partir de $|p|^2|q|^2 = |pq|^2$, donde $p = x + iz,\ q = y + it \in \mathbb{C}$.

El concepto de punto fijo de una función es otra idea útil para resolver algunas ecuaciones funcionales. Su definición es muy simple. Decimos que w es un punto fijo de una función f si y solo si w está en el dominio de f y $f(w) = w$. Tener información sobre los puntos fijos de las funciones a menudo ayuda a resolver ciertos tipos de ecuaciones funcionales como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5. Este ejemplo es un problema de la olimpiada matemática internacional de 1983. Determine todas las funciones $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tales que $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y que cuando $x \longrightarrow \infty$, $f(x) \longrightarrow 0$.

Solución: Paso 1. Tomando $x = y = 1$, obtenemos $f\big(f(1)\big) = f(1)$. Tomando $x = 1$ y $y = f(1)$, obtenemos $f\left(f\big(f(1)\big)\right) = f(1)^2$. Entonces

$$f(1)^2 = f\left(f\big(f(1)\big)\right) = f\big(f(1)\big) = f(1),$$

lo que implica $f(1) = 1$. Entonces 1 es un punto fijo de f.
Paso 2. Tomando $y = x$, obtenemos $f\big(xf(x)\big) = xf(x)$. Entonces $w = xf(x)$ es un punto fijo de f para cada $x \in \mathbb{R}^+$.
Paso 3. Supongamos que f tiene un punto fijo $x > 1$. Por el paso 2, $xf(x) = x^2$ también es un punto fijo, en forma similar se ve que $x^2 f(x^2) = x^4$ también es un punto fijo y así sucesivamente. Entonces los puntos de la forma x^m con m una potencia de 2 son puntos fijos. Como $x > 1$, y m recorre las potencias de 2, tenemos que $x^m \longrightarrow \infty$, pero $f(x^m) = x^m \longrightarrow \infty$ y no a 0. Esto contradice la propiedad requerida. Por lo tanto, f no puede tener ningún punto fijo $x > 1$.
Paso 4. Supongamos que f tiene un punto fijo x en el intervalo $(0,1)$. Entonces

$$1 = f\big((1/x)x\big) = f\big((1/x)f(x)\big) = xf(1/x),$$

que implica $f(1/x) = 1/x$. Esto nos lleva a concluir que f tiene un punto fijo $1/x > 1$, contrario al paso 3. Por lo tanto, f no puede tener un punto fijo x en $(0,1)$.
Paso 5. Los pasos 1, 3 y 4 nos muestran que el único punto fijo de f es 1. Por el paso 2, tenemos $xf(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

En efecto, para $f(x) = 1/x$,

$$f\big(xf(y)\big) = f(x/y) = y/x = yf(x).$$

Cuando $x \longrightarrow \infty$, $f(x) = 1/x \longrightarrow 0$.
Ejemplo 6. Este ejemplo es un problema de la olimpiada matemática internacional de 1996. Determinar todas las funciones $f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tales que

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Solución: Paso 1. Tomando $m = n = 0$, obtenemos

$$f\big(f(0)\big) = f\big(f(0)\big) + f(0),$$

lo que implica $f(0) = 0$. Tomando $m = 0$, obtenemos

$$f\big(f(n)\big) = f(n),$$

es decir, $f(n)$ es un punto fijo de f para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Así la ecuación se transforma en

$$f\big(m + f(n)\big) = f(m) + f(n).$$

Paso 2. Si w es un punto fijo de f, veamos que kw es un punto fijo de f para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Los casos $k = 0, 1$ son conocidos. Si kw es un punto fijo, entonces

$$f\big((k+1)w\big) = f(kw + w) = f(kw) + f(w)$$

$$= kw + w = (k+1)w$$

y por lo tanto $(k+1)w$ también es un punto fijo.
Paso 3. Si 0 es el único punto fijo de f, entonces $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ por el paso 1. Obviamente, la función cero es una solución.
De lo contrario, f tiene un punto fijo mínimo $w > 0$. Veamos que los únicos puntos fijos son kw, $k \in \mathbb{N}_0$. Supongamos que x es un punto fijo. Por el algoritmo de división, $x = kw + r$, con $0 \leq r < w$. Tenemos

$$x = f(x) = f(r + kw) = f\big(r + f(kw)\big)$$

$$= f(r) + f(kw) = f(r) + kw.$$

Entonces $f(r) = x - kw = r$. Dado que w es el menor punto fijo positivo, $r = 0$ y $x = kw$.
Dado que $f(n)$ es un punto fijo para todo $n \in \mathbb{N}_0$ por el paso 1, $f(n) = c_n w$ para algunos $c_n \in \mathbb{N}_0$. Tenemos $c_0 = 0$.
Paso 4. Para $n \in \mathbb{N}_0$, por el algoritmo de la división, $n = kw + r$, $0 \leq r < w$. Tenemos

$$f(n) = f(r + kw) = f\big(r + f(kw)\big) = f(r) + f(kw)$$

$$= c_r w + kw = (c_r + k)w = (c_r + [n/w])w.$$

En efecto, para cada $w > 0$, sean $c_0 = 0$ y $c_1, \dots, c_{w-1} \in \mathbb{N}_0$ arbitrarios. La función

$$f(n) = (c_r + [n/w])w,$$

donde r es el resto de n al ser dividido por w, y la función cero, son todas las soluciones. Escribimos $m = kw + r$ y $n = lw + s$ con $0 \le r, s < w$. Entonces

$$f\big(m + f(n)\big) = f(r + kw + (c_s + l)w)$$

$$= c_r w + kw + c_s w + lw$$

$$= f\big(f(m)\big) + f(n).$$

Aparte del concepto de punto fijo, en la resolución de ecuaciones funcionales, la inyectividad y sobreyectividad de las funciones proporcionan información crucial.

Ejemplo 7. Este ejemplo es un problema de la olimpiada matemática internacional de 1987. Demostrar que no existe una función $f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $f\big(f(n)\big) = n + 1987$.

Solución: Supongamos que existe tal función f. Entonces f es inyectiva porque $f(a) = f(b)$ implica

$$a = f\big(f(a)\big) - 1987 = f\big(f(b)\big) - 1987 = b.$$

Supongamos que $f(n)$ no toma exactamente k valores distintos $c_1, \dots, c_k$ de $\mathbb{N}_0$, es decir, $f(n) \neq c_1, \dots, c_k$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $f(f(n))$ no toma los $2k$ valores distintos $c_1, \dots, c_k$ y $f(c_1), \dots, f(c_k)$ de $\mathbb{N}_0$. Los $f(c_j)$ son distintos porque f es inyectiva. Ahora si $w \neq c_1, \dots, c_k, f(c_1), \dots, f(c_k)$, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f(m) = w$. Dado que $w \neq f(c_j)$, $m \neq c_j$, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = m$, así $f\big(f(n)\big) = w$. Esto muestra que $f(f(n))$ solo deja de tomar $2k$ valores, a saber: $c_1, \dots, c_k, f(c_1), \dots, f(c_k)$ y no otros. Como para $n + 1987$ no se toman los 1987 valores $0,1, \dots,1986$ y $2k \neq 1987$, esto es una contradicción.

Ejemplo 8. Este ejemplo es un problema de la olimpiada matemática internacional de 1999. Determine todas las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(y)\big) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $c = f(0)$. Haciendo $x = y = 0$, obtenemos

$$f(-c) = f(c) + c - 1.$$

Entonces $c \neq 0$. Sea A el rango de f, entonces para $x = f(y) \in A$, obtenemos $c = f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$. Resolviendo para $f(x)$, se tiene $f(x) = (c + 1 - x^2)/2$. Ahora, si hacemos $y = 0$, obtenemos

$$\{f(x - c) - f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{cx + f(c) - 1 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Porque $c \neq 0$. Entonces $A - A = \{y_1 - y_2 : y_1, y_2 \in A\} = \mathbb{R}$. Así, para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, sean $y_1, y_2 \in A$ tales que $y_1 - y_2 = x$. Entonces

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1$$

$$= (c + 1 - y_2^2)/2 + y_1 y_2 + (c + 1 - y_1^2)/2 - 1$$

$$= c - (y_1 - y_2)^2/2 = c - x^2/2.$$

Por otra parte, para $x \in A$, $f(x) = (c + 1 - x^2)/2$. Entonces $c = 1$. Por lo tanto, $f(x) = 1 - x^2/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
En efecto, para $f(x) = 1 - x^2/2$, ambos lados dan

$$1/2 + y^2/2 - y^4/8 + x - xy^2/2 - x^2/2.$$

VII. Ecuación de Cauchy

En esta sección presentamos algunos hechos útiles relacionados con la ecuación de Cauchy, tal vez la ecuación funcional más estudiada.

Hecho 1. Sea $A = \mathbb{R}, [0, \infty)$ o $(0, \infty)$. Si $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad y \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

para todo $x, y \in A$, entonces o bien $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ o $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

En efecto, por el ejemplo 2, tenemos $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Si $f(1) = 0$, entonces

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$$

para todo $x \in A$.
De lo contrario, tenemos $f(1) \neq 0$. Como $f(1) = f(1)f(1)$, obtenemos $f(1) = 1$. Entonces $f(x) = x$ para todo $x \in A \cap \mathbb{Q}$.
Si $y \ge 0$, entonces

$$f(y) = f\big(y^{1/2}\big)^2 \ge 0 \text{ y } f(x + y) = f(x) + f(y) \ge f(x),$$

lo que implica que f es creciente. Ahora para cualquier $x \in A \backslash \mathbb{Q}$, por la densidad de los números racionales, existen

sucesiones de racionales $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ tales que $p_n < x < q_n$, las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son creciente y decreciente respectivamente y ambas convergen a x. Dado que f es creciente, se tiene

$$p_n = f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n) = q_n.$$

Tomando límites, el teorema del sándwich nos permite concluir que $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

Este resultado nos permite justificar que para todo $w > 0$ $g(w) = 0$ en el ejemplo 4.

Hecho 2. Si una función $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

para todo $x, y > 0$ y f es monótona, entonces $f(x) = 0$ para todo $x > 0$ o existe c tal que $f(x) = x^c$ para todo $x > 0$.

En efecto, para $x > 0$, $f(x) = f\left(x^{1/2}\right)^2 > 0$. También se tiene que $f(1) = f(1)f(1)$ lo que implica $f(1) = 0$ o 1. Si $f(1) = 0$, entonces $f(x) = f(x)f(1) = 0$ para todo $x > 0$. Si $f(1) = 1$, entonces $f(x) > 0$ para todo $x > 0$, ya que $f(x) = 0$ implica $f(1) = f\big(x(1/x)\big) = f(x)f(1/x) = 0$, lo que lleva a una contradicción.

Definamos $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(w) = lnf(e^w)$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x+y) &= lnf(e^{x+y}) = lnf(e^x e^y) \\ &= lnf(e^x)f(e^y) \\ &= lnf(e^x) + lnf(e^y) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Como f es monótona, se sigue que g también lo es. Entonces $g(w) = cw$ para todo w. Por lo tanto, $f(x) = x^c$ para todo $x > 0$.

VIII. CONCLUSIONES

A modo de conclusión, podemos decir que las ecuaciones funcionales son un tema sumamente interesante e importante dentro de la matemática y que difícilmente se verá estudiado por completo. En particular la ecuación de Cauchy que ha sido estudiada en diversos contextos es seguramente una guía a seguir en futuros trabajos, ya que las técnicas desarrolladas para su estudio bien pueden ser aplicables a otras ecuaciones funcionales.

REFERENCIAS

[1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, 1966.

[2] J. Aczél and J. Dhombres, Functional equations in several variables, Cambridge University Press, 2008.

[3] J. Aczél, A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jdnossy, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 4 (1955), 351-362.

[4] I. N. Baker, Permutable entire functions, Math. Zeitschr. 79 (1962), 243-249.

[5] I. N. Baker, Permutable power series and regular iteration, J. Australian Math. Soc. 2 (1961/62), 265-294.

[6] R. Cooper, On a duplication formula, Math. Gaz. 41 (1957), 217-218.

ISSN: 2594-1011

Masa dependiente de la posición: condición de frontera

Sahory Canseco, J. Avendaño, J. García-Ravelo
Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55254 E-mail: javel@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se resuelve la ecuación de Schrödinger para un pozo de potencial en el cual la masa de la partícula cambia abruptamente al traspasar la frontera del mismo. Las energías dependen ahora no solo de la profundidad y anchura del pozo sino también de la diferencia de masa de la partícula (fuera y dentro del pozo), así como de la condición de frontera que satisface la función de onda y su derivada. Estas condiciones de frontera no son únicas. Esta no-unicidad proviene de la no unicidad del operador de energía cinética. En un intento de dilucidar cuál de las condiciones de frontera es la correcta, se resuelve una ecuación de orden superior (ecuación de Dirac). Los resultados muestran que la ecuación de Dirac favorece una de las condiciones que satisface la función de onda de Schrödinger.**

Palabras Clave – **Masa dependiente de la posición, ecuación de Schrödinger, ecuación de Dirac**

Abstract — **In this work the Schrödinger equation is solved for a potential well in which the mass of the particle changes abruptly when crossing the boundary of well. The energies now depend not only on the depth and width of the well, but also on the difference in mass of the particle (outside and inside the well), as well as the boundary condition that satisfies the wave function and its derivative. These boundary conditions are not unique. This non-uniqueness comes from the non-uniqueness of the kinetic energy operator. In an attempt to elucidate which of the boundary conditions is correct, a higher-order equation (Dirac's equation) is solved. The results show that the Dirac equation favors one of them.**

Keywords — **Position-dependent mass, Schrödinger equation, Dirac equation**

I. Introducción

La ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición es una aproximación de campo medio al complicado problema de muchos cuerpos en materia condensada [1,2]. Inicialmente la idea surge al estudiar impurezas embebidas en cristales perfectos [3], posteriormente se extiende a cristales cuya composición química cambia de región a región [4-9]. Como resultado de esta variación en la composición química es que la masa efectiva de los portadores (electrones y huecos) cambia con la posición, cuando este cambio es suave la ecuación de masa efectiva puede ser establecida razonablemente desde el formalismo de las funciones de Bloch-Wannier. Sin embargo, cuando la variación es abrupta, como en las hetero-estructuras semiconductoras, no hay una derivación satisfactoria.

Cuando la masa no es una constante, sino que depende de la posición, $m(z)$, ésta debe ser considerada como un operador dependiente de la posición que no conmuta con el operador momento, $\hat{p} = -i\hbar d/dz$. Por lo tanto, el operador de energía cinética ya no puede ser escrito en la forma usual. Justamente, cómo escribir el operador de energía cinética es el primer gran problema al usar estas teorías de masa efectiva. Varias expresiones han sido sugeridas a lo largo de las últimas décadas, por ejemplo Bendaniel y Duke proponen [4]

$$\widehat{K} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}\frac{1}{m(z)}\hat{p}\right) \quad , \tag{1}$$

Mientras que Gora y Williams proponen [5]

$$\widehat{K} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m(z)}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m(z)}\right) \quad , \tag{2}$$

En cambio Zhu y Kroemer proponen [9]

$$\widehat{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m(z)}}\hat{p}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m(z)}}\right) \quad . \tag{3}$$

Todas estas expresiones son casos particulares de la forma general sugerida por von Ross [10]

$$\widehat{K} = \frac{1}{4}[m^{\alpha}(z)\hat{p}m^{\beta}(z)\hat{p}m^{\gamma}(z) + m^{\gamma}(z)\hat{p}m^{\beta}(z)\hat{p}m^{\alpha}(z)] \quad , \tag{4}$$

Con la constricción $\alpha + \beta + \gamma = -1$. Estos parámetros reciben el nombre de parámetros de ambigüedad. Es inmediato darse cuenta qué valores deben tomar estos parámetros para obtener (1), (2) y (3) de (4). Todos estos operadores son hermitianos, como deben de ser. Usando uno u otro en el hamiltoniano $\widehat{H} = \widehat{K} + \widehat{V}$, nos llevan a condiciones de frontera diferentes que deben satisfacer el campo de Schrödinger y su gradiente en aquellos puntos del espacio donde el potencial $V(z)$ y/o la masa $m(z)$ presenten discontinuidades finitas [11]. Incluso, en estas situaciones, la característica auto-adjunta del hamiltoniano está comprometida [12]. Esta situación ha incentivado la

investigación en extensiones auto-adjuntas del hamiltoniano [12-15] con el objeto de formalizar el estudio de la ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición por derecho propio.

II. Pozo de potencial con masa variable

El pozo de potencial finito está definido como

$$V(z) = \begin{cases} 0 & |z| > a/2 \\ -V_0 & |z| < a/2 \end{cases}, \quad V_0 > 0 \quad , \tag{5}$$

Supondremos que la partícula tiene masas distintas fuera y dentro del pozo, sin embargo en cada una de estas regiones se mantiene constante, por lo tanto la función que define la masa es

$$m(z) = \begin{cases} m_1 & |z| > a/2 \\ m_2 & |z| < a/2 \end{cases} \quad , \tag{6}$$

Donde m_1, m_2 son tales que $m_1 \neq m_2$. Tanto el potencial como la masa poseen discontinuidades finitas en $z = \pm a/2$.

El campo de Schrödinger estacionario, solución de

$$\hat{H}\psi = \hat{K}\psi + \hat{V}\psi = E\psi \, , \tag{7}$$

Satisface condiciones de frontera en $z = \pm a/2$ distintas dependiendo de qué operador $\hat{K}$ consideremos.

Cuando el hamiltoniano se construye usando el operador de energía cinética (1), el campo de Schrödinger y su derivada dividida por la masa deben de ser continuas en los puntos de discontinuidad del potencial y de la masa

$$\psi(z)|_{z=\pm a/2} \quad \text{continua} \quad , \tag{8}$$

$$\left.\frac{\psi\prime(z)}{m(z)}\right|_{z=\pm a/2} \quad \text{continua} \quad . \tag{9}$$

En cambio cuando se usa el operador de energía cinética (3), las condiciones de frontera son

$$\left.\frac{\psi(z)}{\sqrt{m(z)}}\right|_{z=\pm a/2} \quad \text{continua} \quad , \tag{10}$$

$$\left.\left(\frac{\psi(z)}{\sqrt{m(z)}}\right)'\right|_{z=\pm a/2} \quad \text{continua} \quad . \tag{11}$$

Los estados ligados corresponden a $-V_0 < E < 0$. El potencial (5) y la masa (6) dividen es espacio en tres regiones. La región-I corresponde a $z < -a/2$, la solución de la ecuación de Schrödinger en esta región es entonces

$$\psi_I(z) = Ae^{qz} \tag{12}$$

Con $$q = \sqrt{-\frac{2m_1}{\hbar^2}E} \quad . \tag{13}$$

La región-II es la región del pozo ($|z| \leq a/2$), y el campo de Schrödinger es

$$\psi_{II}(z) = Be^{ikz} + Ce^{-ikz} \quad , \tag{14}$$

Donde $$k = \sqrt{\frac{2m_2}{\hbar^2}(E + V_0)} \quad . \tag{15}$$

Finalmente la región-III corresponde a $z > a/2$, y la solución de la ecuación de Schrödinger es

$$\psi_{III}(z) = De^{-qz} \quad , \tag{16}$$

Donde q está dado por (13).

Aplicando las condiciones de frontera (8) y (9), i.e.

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2) \quad , \tag{17}$$

$$\tfrac{1}{m_1}\psi_I'(-a/2) = \tfrac{1}{m_2}\psi_{II}'(-a/2) \quad , \tag{18}$$

$$\psi_{II}(a/2) = \psi_{III}(a/2) \quad , \tag{19}$$

$$\tfrac{1}{m_2}\psi_{II}'(a/2) = \tfrac{1}{m_1}\psi_{III}'(a/2) \quad , \tag{20}$$

Se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \left(i\frac{m_1}{m_2}k - q\right)e^{-ika/2} & -\left(i\frac{m_1}{m_2}k + q\right)e^{ika/2} \\ \left(i\frac{m_1}{m_2}k + q\right)e^{ika/2} & -\left(i\frac{m_1}{m_2}k - q\right)e^{-ika/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{21}$$

Para obtener soluciones distintas de la trivial $\binom{B}{C} \neq \binom{0}{0}$ el determinante de esta matriz debe anularse. Esto nos lleva a dos soluciones

$$\left(i\tfrac{m_1}{m_2}k + q\right)e^{ika/2} = \pm\left(i\tfrac{m_1}{m_2}k - q\right)e^{-ika/2} \quad , \tag{22}$$

la solución correspondiente al signo (+) corresponde a soluciones pares y la solución con signo (-) corresponde a soluciones impares. Simplificando estas expresiones se obtiene

$$\tfrac{1}{m_1}q = \tfrac{1}{m_2}k\tan(ka/2) \quad , \quad \psi_{II}(x) = 2B\cos(kx) \, , \tag{23}$$

y

$$\tfrac{1}{m_1}q = -\tfrac{1}{m_2}k\cot(ka/2) \quad , \quad \psi_{II}(x) = 2iB\sin(kx) \quad . \tag{24}$$

Las soluciones de estas ecuaciones trascendentes nos dan las energías de los estados ligados, siendo el estado base un estado par.

Si ahora aplicamos las condiciones de frontera (10) y (11), en lugar de obtener la ecuación matricial (21) obtenemos la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} (ik-q)e^{-ika/2} & -(ik+q)e^{ika/2} \\ (ik+q)e^{ika/2} & -(ik-q)e^{-ika/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Igual que antes, el determinante debe ser nulo, e igualmente se obtienen soluciones pares e impares alternadamente, sin embargo las ecuaciones trascendentes de eigenvalores son distintas. Para las soluciones pares

$$q = k\tan(ka/2) \quad , \quad \psi_{II}(x) = 2B\cos(kz) \quad , \qquad (26)$$

$$q = -k\cot(ka/2) \quad , \quad \psi_{II}(x) = 2iB\sin(kz) \quad . \qquad (27)$$

III. Aplicación a una hetero-estructura concreta

Como una ilustración de las soluciones encontradas en la sección anterior, en esta sección se aplican a una hetero-estructura unidimensional de GaAs/$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$. Consideramos un pozo de 1 eV de profundidad. En el GaAs la masa efectiva del electrón es $m_1 = 0.67m_e$, mientras que en el $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ es $m_2 = 0.86m_e$. La masa del electrón libre es m_e. La Fig.1 muestra el comportamiento del estado base de este pozo en función del ancho del pozo manteniendo fijo los demás parámetros, para dos condiciones de frontera.

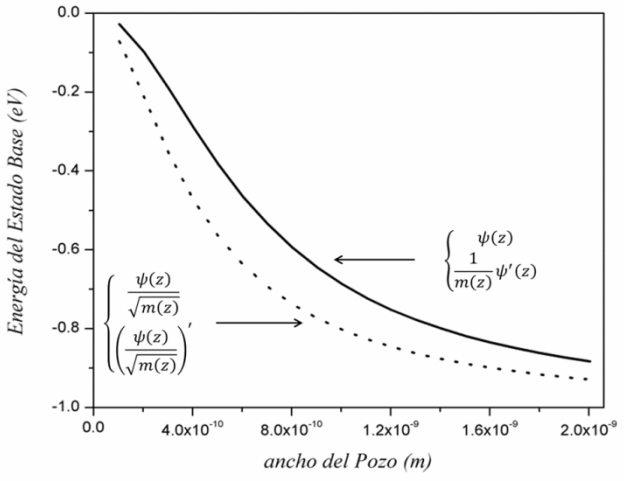


Fig. 1. Energía del estado base en el pozo finito GaAs/$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ en función del ancho del pozo, para dos condiciones de frontera.

La línea continua corresponde al estado base calculado con la ecuación (23) que responde a las condiciones de frontera dadas por ecuaciones (8) y (9), i.e., se ha usado el ordenamiento del operador de energía cinética dado por (1) [Bendaniel y Duke]. La línea punteada es la energía del estado base calculado con la ecuación (26), que corresponde a las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (10) y (11), que provienen del ordenamiento de la energía cinética dado en ecuación (3) y propuesto por Zhu y Kroemer [9]. Es clara la diferencia en los resultados arrojados por estas dos condiciones de frontera. En la siguiente sección resolvemos la ecuación de Dirac, y luego consideramos el límite no-relativista. Esto con el objeto de ver si este límite favorece alguno de los distintos resultados que predice la ecuación de Schrödinger.

IV. Solución de Dirac

La ecuación de Dirac estacionaria

$$c\left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\beta}mc\right]\psi + \hat{V}\hat{\mathbf{1}}\psi = E\psi \quad , \qquad (28)$$

no tiene el problema de la ambigüedad que genera la masa dependiente de la posición en la ecuación de Schrödinger. Esto es debido a la forma en que aparece la masa en ambas ecuaciones.

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ y $\hat{\beta}$ son los operadores matriciales de 4x4 dados por

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}}_2 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & \hat{\mathbf{0}}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{1}}_2 & \hat{\mathbf{0}}_2 \\ \hat{\mathbf{0}}_2 & -\hat{\mathbf{1}}_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad (29)$$

$\hat{\mathbf{0}}_2$ y $\hat{\mathbf{1}}_2$ son las matrices nula e identidad de 2x2, mientras que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ son las matrices de Pauli de 2x2.

Para potenciales constantes, (28) se escribe de manera explícita

$$\begin{pmatrix} mc & 0 & \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ 0 & mc & \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z \\ \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y & -mc & 0 \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z & 0 & -mc \end{pmatrix}\psi = (E-V)\psi \quad , \qquad (30)$$

Considerando solamente movimiento a lo largo del eje-z, se propone como solución el anzat $\psi = \boldsymbol{u}exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right)$, con u un vector de cuatro componentes. Esto nos lleva a dos eigenvalores para la energía $E_\lambda - V = \lambda\sqrt{(cp_z)^2 + (mc^2)^2}$, con $\lambda = \pm 1$, y para cada eigenvalor dos soluciones independientes

$$\psi_\lambda^{\uparrow} = \begin{pmatrix} u_{1,\lambda} \\ 0 \\ u_{3,\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z}{\hbar}z} \quad , \quad \psi_\lambda^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{2,\lambda} \\ 0 \\ u_{4,\lambda} \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z}{\hbar}z} \quad , \qquad (31)$$

Donde una corresponde a espín-arriba y la otra a espín-abajo. Para el pozo de potencial que se está considerando, el espín se conserva. Por lo tanto, solamente se considerará una dirección de espín. Las energías que se consideran aquí no son suficientes para producir excitación en el mar de Dirac, por consiguiente solamente consideraremos soluciones para partículas y excluiremos las soluciones de anti-partícula.

En la región-I el potencial es nulo, por lo tanto la solución de manera explícita es entonces

$$\psi_I(z) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_1}{E+m_1c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_1}{\hbar}z} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_1}{E+m_1c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{p_1}{\hbar}z} \quad , \qquad (32)$$

es una combinación de dos ondas planas espinoriales de momentos $\boldsymbol{p} = (0,0,p_1)$ y $\boldsymbol{p} = (0,0,-p_1)$, la magnitud está dada por

$$p_1^2 = (E^2 - m_1^2c^4)/c^2 \quad . \qquad (33)$$

En la región-II el potencial es $V(z) = -V_0$, por lo cual la solución es

$$\psi_{II}(z) = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_2}{E+V_0+m_2c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_2}{\hbar}z} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_2}{E+V_0+m_2c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{p_2}{\hbar}z} , \quad (34)$$

la magnitud del momento está dada por

$$p_2^2 = [(E+V_0)^2 - m_2^2c^4]/c^2 \quad . \qquad (35)$$

En la región-III el potencial vuelve a ser nulo, por lo tanto la solución es completamente análoga a la solución en la región-I, i.e.

$$\psi_{III}(z) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_1}{E+m_1c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_1}{\hbar}z} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_1}{E+m_1c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{p_1}{\hbar}z} \quad . \qquad (36)$$

Para energías tales que $|E| < m_1c^2$, implica que $p_1^2 < 0$. Haciendo $p_1 = ip_0$, vemos que dos coeficientes uno en la región-I y otro en la región-III deben anularse para evitar divergencias, estos coeficientes son $A_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

Como la ecuación de Dirac es de primer orden solamente se necesita condiciones de frontera para la función de onda en los puntos de discontinuidad del potencial y de la masa, i.e., $\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2)$ y $\psi_{II}(a/2) = \psi_{III}(a/2)$. Esto nos lleva a la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} + i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{-ip_2a/2\hbar} & -\left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} - i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{ip_2a/2\hbar} \\ \left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} - i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{ip_2a/2\hbar} & -\left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} + i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{-ip_2a/2\hbar} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (37)$$

Las condiciones de frontera anteriores no permiten que haya inversión de espín en al atravesar éstas. Una vez más, para determinar soluciones distintas de la trivial, el determinante de (37) debe anularse y una vez más encontramos dos soluciones para las eigenenergías

$$\left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} + i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{-ip_2a/2\hbar} = \pm\left(\frac{p_2}{E+V_0+m_2c^2} - i\frac{p_0}{E+m_1c^2}\right)e^{ip_2a/2\hbar} \quad . \quad (38)$$

La solución correspondiente al signo (+) nos guía al espinor

$$\psi_{II}(z) = 2B_1 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{p_2}{\hbar}z\right) \\ 0 \\ i\frac{cp_2}{E+V_0+m_2c^2}\sin\left(\frac{p_2}{\hbar}z\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad (39)$$

y la ecuación trascendente ya simplificada que determina su energía es

$$p_0 = \frac{E+m_1c^2}{E+V_0+m_2c^2}p_2\tan(p_2a/2\hbar) \quad . \qquad (40)$$

Mientras la solución correspondiente al signo (-) nos lleva al espinor

$$\psi_{II}(z) = 2B_1 \begin{pmatrix} i\sin\left(\frac{p_2}{\hbar}z\right) \\ 0 \\ \frac{cp_2}{E+V_0+m_2c^2}\cos\left(\frac{p_2}{\hbar}z\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad (41)$$

y la ecuación para sus energías es

$$p_0 = -\frac{E+m_1c^2}{E+V_0+m_2c^2}p_2\cot(p_2a/2\hbar) \quad . \qquad (42)$$

La profundidad del pozo es de 1eV, las energías de los estados ligados que hemos buscado en la sección anterior corresponden a valores mayores que el fondo del pozo pero menores que el borde del pozo, i.e., en valor absoluto la energía es menor que 1eV. En las expresiones (40) y (41) está siendo comparada la energía de estos estados ligados con $m_1c^2 \approx 0.5MeV$. Por lo tanto, en este régimen no-relativista 1eV puede ser despreciado frente a 0.5MeV. Esto implica que la tercer componente de los espinores dados por (39) y (41) es pequeña comparada con la primer componente. Esto es válido ya que el numerador $p_2 \to \hbar k$, donde k está dado por (15), y entonces podremos

despreciar esta tercer componente. Por consiguiente en esta aproximación no-relativista los espinores se reducen a

$$\psi_{II}(z) = 2B_1 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{p_2}{\hbar} z\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \psi_{II}(z) = 2iB_1 \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{p_2}{\hbar} z\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (43)$$

Efectuando las mismas aproximaciones en las ecuaciones de eigenvalores (40) y (42), se reducen a

$$\frac{1}{m_1} p_0 = \frac{1}{m_2} p_2 \tan(p_2 a/2\hbar) \quad , \quad (44)$$

$$\frac{1}{m_1} p_0 = -\frac{1}{m_2} p_2 \cot(p_2 a/2\hbar) \ , \quad (45)$$

Donde $p_0 \to \hbar q$ (en el régimen no-relativista), y q está dado por (13).

Podemos observar que las expresiones para los eigenvalores (44) y (45) son las mismas que las expresiones (23) y (24). Asimismo las expresiones para las funciones de onda (43) son las mismas que las que se muestran en (23) y (24).

V. Discusión y Conclusiones

La ecuación de Schrödinger presenta ambigüedades en el ordenamiento del operador energía cinética cuando la masa de la partícula depende de la posición. Esta situación conduce también a condiciones de frontera en determinados puntos del espacio que debe satisfacer la función de onda así como su derivada. Y esto conduce a resultados distintos para los valores de las energías de los estados estacionarios. Esta situación es delicada, pues estos distintos resultados, en principio, son todos correctos. Existen diversas opiniones en la comunidad, algunos favorecen un determinado ordenamiento mientras que otros favorecen otro, si llegar a un consenso hasta el momento. Pareciera que la única manera de discriminar un resultado de otro es el contraste con la naturaleza, lo cual es justamente lo correcto. Sin embargo, tener una teoría que predice resultados distintos, entre los cuales uno es el correcto no es justamente el ideal de una teoría predictiva. Algunos creemos que aún hay algo de principio que no entendemos en la física del campo de Schrödinger. Por ello en este trabajo hemos recurrido a la ecuación de Dirac, que es una ecuación de orden superior, en el sentido que posee más simetrías que la ecuación de Schrödinger. Además, la ecuación de Dirac no tiene la ambigüedad de la ecuación de Schrödinger cuando la masa es dependiente del espacio.

Hemos encontrado que la ecuación de Dirac para el mismo problema (pozo de potencial finito con masa dependiente del espacio) conduce a resultados que en el límite no-relativista se reducen a uno de los resultados predichos por la ecuación de Schrödinger. De esta manera parece ser que la ecuación de Dirac favorece a uno de los ordenamientos propuestos. Justamente al ordenamiento y condiciones de frontera propuestos por Bendaniel y Duke [4]. Habría que hacer un análisis más dtallado de las soluciones de la ecuación de Dirac, aquí solamente se consideraron algunas soluciones compatibles con alguas restricciones.

Agradecimientos

J. Avendaño y J. García-Ravelo agradecen el apoyo proporcionado por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN, y por la COFAA IPN, México.

Referencias

[1] G.H. Wannier, Phys. Rev. **52**, 191 (1937).
[2] J.C. Slater, Phys. Rev. **76**, 1592 (1949).
[3] G. H. Wannier, Phys. Rev. **52**, 191 (1957).
[4] D.J. Bendaniel, C.B. Duke, Phys. Rev. **152**, 683 (1966).
[5] T. Gora, F. Williams, Phys. Rev. **177**, 1179 (1969).
[6] L. Leibler, Phys. Rev. B **12**, 4443 (1975).
[7] G. Bastard, Phys. Rev. B **24**, 5693 (1981).
[8] C.M. van Vliet, A.H. Marshak, Phys Rev B **26**, 6734 (1982).
[9] Q.G. Zhu, H. Kroemer, Phys. Rev. B **27**, 3519 (1983).
[10] O. von Ross, Phys. Rev. B **27**, 7547 (1983).
[11] W. A. Harrison, J. App. Phys**. 110**, 113715 (2011).
[12] M. Gadella, S. Kuru, J. Negro, Phys. Lett. A **362**, 265 (2007).
[13] M. Gadella, F.J.H. Heras,, J. Negro, L.M. Nieto, J. Phys. Math. Theor. **42**, 465207 (2009).
[14] P. Kurasov, J. Math. Anal. Appl. 201, 297 (1996).
[15] J.M. Lévy-Leblond, Phys. Rev. A 52, 1845 (1995).

ISSN: 2594-1011

Análisis de la dimensión fractal de Higuchi y pérdida de complejidad en tacogramas durante pruebas de esfuerzo

N. G. Pérez López[1], A. Salcedo Martínez[2], J. A. Zamora Justo[3], G. Gálvez Coyt[4], A. Muñoz Diosdado[5]

Depto. de Ciencias Básicas, UPIBI-IPN, Av. Acueducto S/N, Barrio la Laguna Ticomán, C.P. 07340, CDMX, México.
Teléfono: (55) 57296000 Ext. 56493 E-mail: ggalvezcoyt@gmail.com, amunozdiosdado@gmail.com.

Resumen —**La complejidad en una serie de tiempo, en sistemas fisiológicos, puede ser un indicador de la capacidad de estos sistemas para autorregularse y controlarse ante la presencia de cambios internos o externos. La complejidad puede ser cuantificada con el valor de su dimensión fractal. El método de la Dimensión Fractal de Higuchi (HFD), determina de manera rápida y precisa la dimensión fractal de una serie de tiempo en términos de la pendiente de un ajuste lineal, proporcionando el parámetro D. El objetivo principal en este trabajo es estudiar la dinámica del sistema cardiovascular sometido a un esfuerzo físico en dos diferentes grupos de personas: adultos jóvenes y adultos de mediana edad sin ningún tipo de enfermedad cardiovascular, ambos con un estilo de vida sedentario. Se obtuvieron las series RR de ambos grupos, tanto en reposo como en prueba de esfuerzo y se analizan con el método de Higuchi. Los resultados obtenidos durante las pruebas de estrés muestran cambios que no están presentes en reposo. Además, la tendencia encontrada varía según la edad, la condición física del sujeto, una persona con mala condición física tiene una pérdida abrupta de complejidad de los tacogramas. Por lo tanto, este parámetro podría ser adecuado para determinar cualitativamente el estrés cardiaco y la condición física.**

Palabras Clave – **Dimensión Fractal de Higuchi, sistema cardiovascular, prueba de esfuerzo, tacogramas**

Abstract — **Complexity in time series from physiological systems could be an indicator of the system's ability to self-regulate and control when internal and external changes come out. Complexity measure can be obtained by calculating its fractal dimension. Higuchi's Fractal Dimension method (HFD) calculate quickly and precisely the fractal dimension of time series in terms of the slope of a linear fitting, returning the D parameter's value. The primary main in this work is to study the cardiovascular system's dynamic when it is summited to physical effort in two groups of subjects: Young adults and middle-aged adults without any apparently cardiovascular disease, both with a sedentary lifestyle. Tachograms from all subjects were obtained, at rest and while performing a stress test, and analyzed with HFD. Results obtained at stress tests show changes that are not at rest. Furthermore, the trend found varies with age and subject's physical condition, a person with a bad physical condition has a tachogram's abruptly complexity loss. Therefore, this parameter could be suitable to determine qualitatively the cardiac stress and physical condition.**

Keywords — **Higuchi's Fractal Dimension, cardiovascular system, stress test, tachograms**

I. Introducción

La aplicación de técnicas de la dinámica no lineal ha sido fundamental en la investigación biomédica, ya que han permitido la comprensión de señales ECG con patrones complejos generadas por los sistemas fisiológicos [1].

Un sistema compuesto de muchas partes que interaccionan entre sí generalmente es considerado como complejo. Por lo tanto, a las señales que se pueden obtener de sistemas fisiológicos (como las señales de ECG) se les puede considerar complejas, por lo que podemos utilizar las técnicas de dinámica no lineal, y con ellas obtener información que resulta ser muy valiosa, ya que algunos parámetros se ven afectados de acuerdo con el estado de salud de la persona. [2]

Normalmente las series de tiempo de estos sistemas complejos presentan variaciones apreciables, de tal manera que al ser graficadas parece ruido aleatorio carente de información útil, sin embargo, mediante diversas técnicas de análisis de series de tiempo [3], se puede determinar el grado de correlación entre los elementos de la serie, este grado de correlación se puede expresar en términos de algún parámetro que depende del método utilizado.

Se ha observado que el análisis de las variaciones en las correlaciones (o autocorrelaciones) en un sistema complejo, por ejemplo, el corazón, permite detectar enfermedades [4].

Por otra parte, el método de Higuchi [5, 6], el cual se caracteriza por el parámetro D, permite clasificar adecuadamente las series, mediante su dimensión fractal. Este método en particular es bastante rápido y confiable para la determinación de la correlación de la serie de los latidos del corazón en el estudio de las series de interlatido cardiaco.

Al existir una falta de información sobre el uso de estas técnicas en las series temporales de latidos cardíacos, la propuesta de esta investigación se centra en el análisis de la dinámica del sistema cardiovascular, específicamente en series temporales de interlatido cardíaco (también conocidas como tacogramas) mediante pruebas de estrés.

La finalidad es poder encontrar una relación entre el estado de salud del sujeto y los resultados del análisis de sus tacogramas con los parámetros que se pueden obtener con técnicas de dinámica no lineal (Dimensión Fractal de Higuchi).

II. Metodología

Los registros electrocardiográficos (ECG) se obtuvieron de sujetos sin ninguna enfermedad cardiovascular aparente y un estilo de vida sedentario. Estos sujetos se dividen en dos grupos:

- Grupo 1 o adultos jóvenes: 21 sujetos con una edad promedio de 22 años.
- Grupo 2 o adultos de mediana edad: 8 sujetos con una edad promedio de 42 años.

A. Protocolo de pruebas de esfuerzo

La grabación de los registros de ECG se realizó con un monitor Holter Fukuda Deshi (FM-150), con una frecuencia de muestreo de 125 Hz. La derivación CM5 fue utilizada debido a la amplificación del complejo QRS que proporciona, facilitando de esta manera el procesamiento digital de la señal y la detección de los picos R para el cálculo de los tacogramas o series de interlatido cardíaco.

El protocolo para la obtención de las señales de ECG es el siguiente:

1. Una hora en reposo, sin ningún tipo de actividad física.
2. 30 minutos caminando a una velocidad de 3.5 Millas por hora (MPH) para el grupo 1 y 3 MPH para el grupo 2. (Primera prueba de esfuerzo)
3. Un breve descanso de 30 a 50 minutos.
4. 30 minutos caminando a una velocidad de 4 MPH para el grupo 1 y 3 MPH para el grupo 2. (Segunda prueba de esfuerzo)

El procesamiento digital de estos registros se realizó a través de algoritmos en MATLAB®, Los picos R dentro de la señal de ECG se detectaron para posteriormente calcular la serie de interlatido cardíaco.

Los tacogramas se segmentaron en subseries de 4096 puntos para la sección de reposo y 2048 puntos para la primera y segunda prueba de esfuerzo. Se escogieron series de tamaño en la forma 2^n debido a que se reducen los errores en el método con esas longitudes en las series.

Finalmente, las subseries fueron analizadas por medio del método de la Dimensión Fractal de Higuchi (HFD).

B. Dimensión Fractal de Higuchi [5]

Partiendo de una serie de la forma: x(1), x(2)… x(n), una nueva serie se construye como se muestra a continuación:

$$x_k^m : x(m), x(m+k), \ldots, x\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right] \cdot k\right) \qquad (m = 1,2,\ldots,k)$$

Posteriormente la longitud de la curva se calcula con la ecuación:

$$L_m(k) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-m}{k}\right]} |X(m+ik) - X(m+(i-1)\cdot k)| \right) \frac{N-1}{\left[\frac{N-m}{k}\right] \cdot k} \right\} \div k$$

El parámetro D se calcula como el valor absoluto de la pendiente del ajuste linear de la grafica $L_m(k)$ vs el vector k en una gráfica logarítmica y este es considerado la Dimensión Fractal de Higuchi.

III. Resultados

La figura 1 muestra una señal electrocardiográfica completa y el tacograma correspondiente a esa señal.

En la segunda sección de la figura 1 se observa la amplificación en el complejo QRS debido a la derivación CM5 que se utilizó. La frecuencia y la amplitud son mayores en la primera y segunda prueba de estrés, b) y c) correspondientemente.

Esto se corrobora en la tercera sección de la figura 1, el tacograma de esta señal, Se puede observar en la sección b) y c), que el tiempo entre latidos cardíacos (intervalos RR) disminuye en cada prueba de esfuerzo en comparación con el ECG en reposo, también es notorio el aumento de la frecuencia cardíaca de acuerdo con la velocidad de cada prueba de esfuerzo, es decir, muestra un menor tiempo entre latidos del corazón.

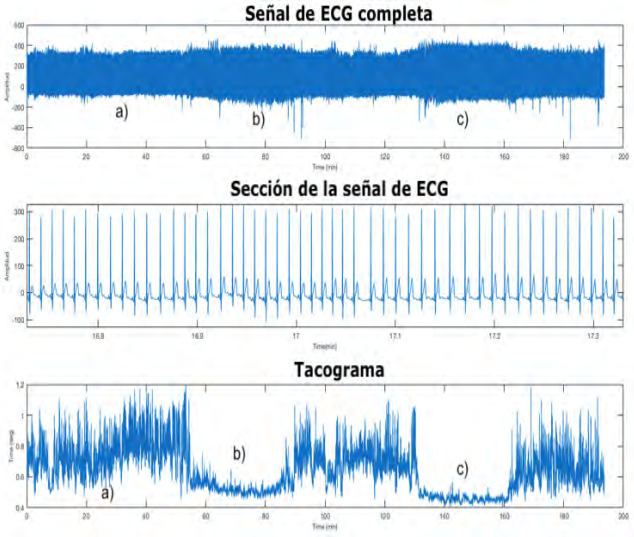


Fig. 1. Señal de ECG de un joven adulto en a) reposo, b) primera prueba de esfuerzo y c) segunda prueba de esfuerzo

Las series de ECG y tacogramas de todos los sujetos fueron analizadas y se encontró que, para el caso de los adultos de mediana edad, estas series presentan amplitudes y frecuencias más grandes a velocidades más lentas, en comparación con los adultos jóvenes.

Se determinó las dimensiones fractal de cada una de las subseries, correspondientes al período de reposo y a las dos diferentes pruebas de esfuerzo. Las gráficas y el parámetro D fueron analizados.

Las gráficas de la figura 2 muestran un típico caso del resultado del análisis de la dimensión fractal por el método de Higuchi de un adulto joven sano.

En cada gráfica, se puede observar como el valor del parámetro D decrece a medida que la velocidad del caminado incrementa.

Las gráficas también muestran como el valor de la ordenada al origen del ajuste lineal (línea roja) tiende a decrecer, más, sin embargo, en la sección de reposo ese valor está por encima de 2.

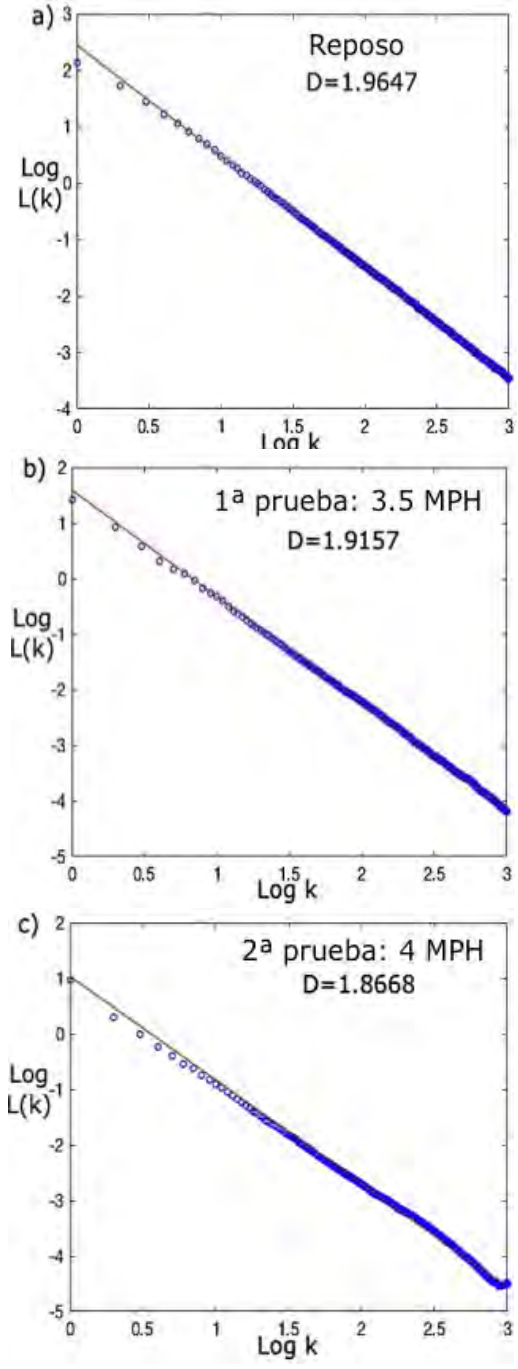


Fig. 2. Dimensión fractal de Higuchi de joven adulto en a) reposo y realizando b) primera prueba de esfuerzo y c) segunda prueba de esfuerzo

En el grupo dos, la tendencia de la disminución del parámetro D también está presente, pero a diferencia de los jóvenes adultos, la disminución de la HFD es mucho más abrupta, incluso desde la primera prueba de esfuerzo.

El valor de la ordenada al origen también tiende a disminuir para los adultos de mediana edad, pero incluso estando en reposo estos valores tienden a ser menores que 2.

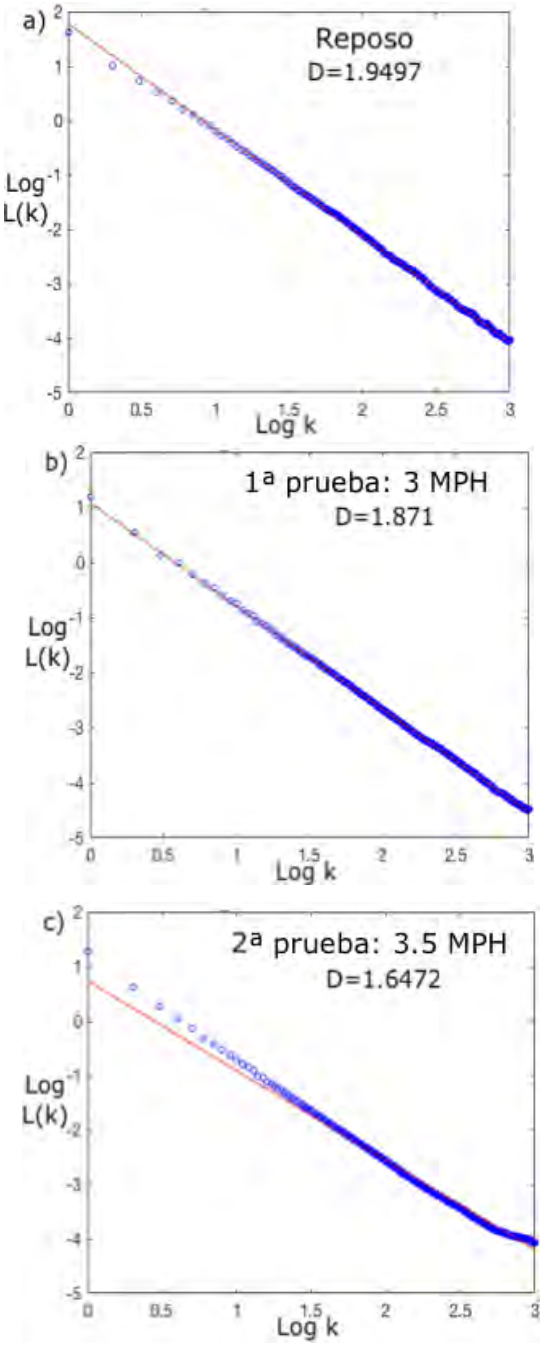


Fig. 3. Dimensión fractal de Higuchi de adulto de mediana edad en a) reposo y realizando b) primera prueba de esfuerzo y c) segunda prueba de esfuerzo

Las figuras 4 y 5 muestran los valores obtenidos para el parámetro D en el grupo 1 y grupo 2 respectivamente.

Es observable como la disminución de ese valor es más notorio en los adultos de mediana edad.

En los jóvenes adultos también decrece ese valor, pero de una manera menos abrupta.

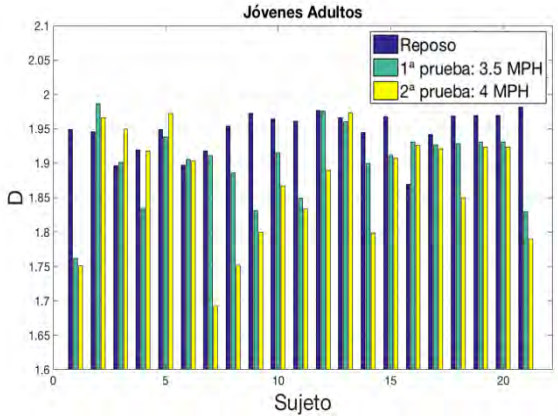


Fig. 4 Valores del parámetro D en jóvenes adultos

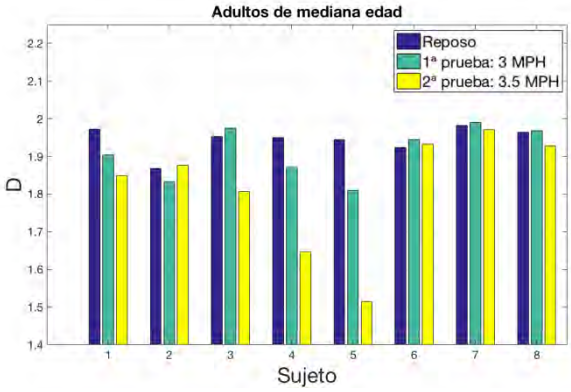


Fig. 5 Valores del parámetro D en adultos de mediana edad

En la figura 6 y 7 se observan el valor de las ordenadas al origen del análisis de HFD.

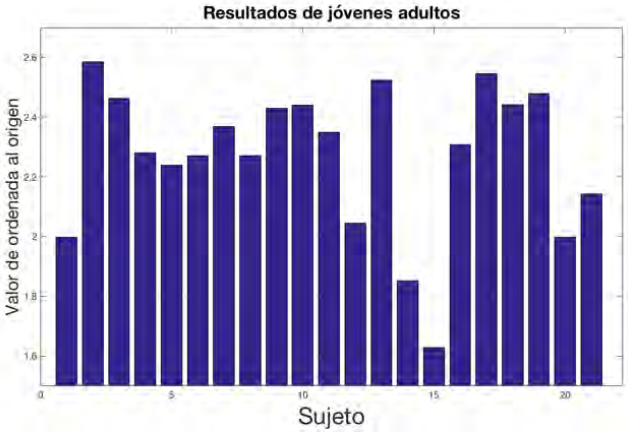


Fig. 6. Valores de la ordenada al origen en jóvenes adultos

.

La figura 6 corresponde al grupo 1, se observa cómo en su mayoría los valores de las ordenadas son iguales o mayores a dos, hay valores que inclusive sobrepasan 2.5.

Los valores del grupo 2 (figura 7) son notoriamente, en general, menores que los obtenidos por los jóvenes adultos en todos.

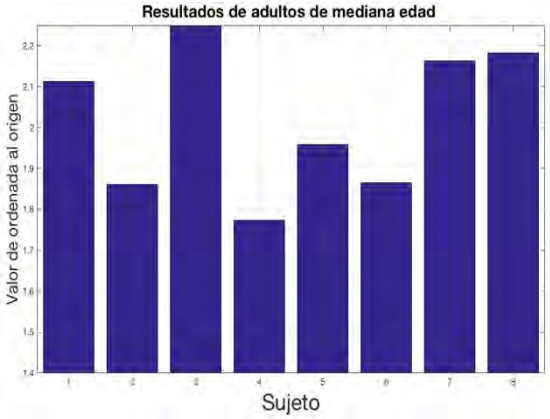


Fig. 7 Valores de la ordenada al origen en adultos de mediana edad

IV. Discusión

Aplicado el HFD, se pueden observar diferencias entre adultos jóvenes y adultos de mediana edad son evidentes. Se encontró una tendencia con el parámetro D, es decir, este parámetro decrece mientras la actividad física aumenta. En este análisis la disminución del parámetro D significa una pérdida de correlación en las series.

Por otro lado, el valor de la ordenada al origen corresponde a la sumatoria de la longitud de la curva punto a punto en toda la serie, es decir, pertenece al valor de la longitud total de la serie. Mientras mayor sea el valor de la ordenada al origen, mayor complejidad la serie tendrá y viceversa. Por ello, este valor puede ser otro criterio para determinar la perdida de complejidad en la serie, el cual se corrobora con el valor de la dimensión fractal de Higuchi.

Estos resultados corroboran la afirmación de que, con el envejecimiento, aparecen cambios fisiológicos, pero en algunos casos estos cambios son más evidentes cuando se somete al sujeto a un estado de estrés [2].

Es notorio, en la figura 4 y 5, como en algunos casos los valores de la dimensión fractal de Higuchi, tienden a disminuir de manera más abrupta que otra dentro del mismo grupo en el que se compara. Debido a la base de datos con la que se cuenta, se sabe que los sujetos que no decrecen sus valores tan abruptamente son personas que, a pesar de llevar un estilo de vida considerado sedentario, ocasionalmente realizan algún tipo de ejercicio o actividad física, solían practicar algún deporte o bien tienden a caminar largas distancias para transportarse a la escuela o trabajo, según sea el caso.

Es posible decir que las personas con una mejor condición física que otras tienen mayor dificultad de perder complejidad en las series de interlatido cardíaco a esas velocidades.

Esas velocidades son suficiente para personas con una menor condición física para disminuir de manera abrupta los valores de HFD.

IV. Conclusiones

Existen diferencias entre la modulación del sistema cardiovascular entre adultos jóvenes y adultos de mediana edad. Podemos determinar la condición física entre un sujeto joven y un adulto, debido a que es más complicado para un joven adulto acelerar su ritmo cardiaco cuando realiza actividad física que para un adulto de mediana edad.

Los resultados sugieren que el uso de esta técnica puede revelar cambios cardiovasculares durante la actividad física, los cuales no están presentes en reposo.

A pesar de que existe una tendencia en la perdida de complejidad en las series conforme aumenta la actividad física, en algunos sujetos esto es más notorio. Estos cambios están altamente relacionados con la edad y la condición física de la persona. Es más complicado, para una persona con una mejor condición física, que exista una pérdida de correlación en los tacogramas que una persona con una condición física menos favorable.

Agradecimientos

A la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) por su apoyo en el proyecto: 20171974, y apoyo económico mediante el programa BEIFI. Y a todos los sujetos de estudio.

Referencias

[1] A. Muñoz Diosdado, L. F. Ramírez Hernández, et. al. “Análisis multifractal de series de tiempo de interlatido cardiaco para caracterizar la severidad del daño cardiaco de pacientes con insuficiencia cardiaca”. XVII Reunión de Física y Matemáticas, México, D. F. 2012

[2] Ivanov, P. Ch., Nunez Amaral, L. A., Goldberger, A. L., Havlin, S. Rosemblum, M. G. Struzik, Z. R. and Stanley, H. E. “Multifractality in human heartbeat dynamics”. Nature (London) 399 (1999) 461465

[3] B. D. Malamud., D. L Turcotte., “Self-Affine Time series: Generation and Analyses”, *Adv. Geophys*., vol. 40, pp 1-90, 1999.

[4] A. Muñoz Diosdado, G. Gálvez Coyt, H. Reyez Cruz, D. Bueno Hernández **“**Metodologías de la dinámica no lineal aplicadas al análisis de las series de tiempo de signos y magnitud de interlatido cardiaco en las fases de sueño vigilia”, Memorias de la XIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, México D. F., pp. 252-257, 2008.

[5] T. Higuchi., “Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory”, *Physica D*, vol. 31, pp. 277–283, 1988.

[6] T. Higuchi., “Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: a numerical investigation”, *Physica D*, vol. 46, pp. 254–264, 1990.

ISSN: 2594-1011

¿Qué es relatividad especial restringida?

Ernesto Sánchez Gutiérrez[1], Héctor Javier Uriarte Rivera[2]
Departamento de Física,
Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 E-mail: [1]erny2_5@hotmail.com, [2]huriarte@esfm.ipn.mx

Resumen — **El objetivo principal de este trabajo es presentar algunos aspectos fundamentales de la Relatividad Especial Restringida (RER). Se ha realizado un análisis, con énfasis tanto en la parte física como matemática, de la estructura de la relatividad especial y con esta base se presentan los avances propuestos por Cohen y Glashow. Se muestra la construcción de la RER, se caracteriza su algebra de Lie y se obtienen los invariantes para cada uno de los posibles grupos de la RER. Asimismo, se mostró porqué los candidatos T(2) y E(2) no son viables como simetría de la naturaleza, mientras que Hom(2) y Sim(2) cuentan con mayores posibilidades de serlo.**

Palabras Clave – **Relatividad, Lie, invariantes, simetrías.**

Abstract — **The main goal of this paper is to present some fundamental aspects of Very Special Relativity (VSR). It has been made an analysis, with emphasis on the physical and mathematical part, of the structure of Special Relativity and on this basis the advances proposed by Cohen and Glashow are shown. The construction of VSR, the characterization of its Lie algebra and the derivation of the invariants of each one of the possible groups of VSR are shown. In addition, it has been shown why the candidates T(2) and E(2) are not viable as a symmetry of nature, while Hom(2) and Sim(2) have a greater likelihood to be so.**

Keywords — **Relativity, Lie, invariants, symmetries.**

I. Introducción

Las simetrías son una característica fundamental y constante en la observación del Universo. Es por ello que la teoría de grupos es esencial en el desarrollo de las teorías físicas, pues es la forma matemática de estudiar a las simetrías. En particular debe emplearse la teoría de Lie si se desea estudiar simetrías continuas.

Debido a que la invariancia de Lorentz se encuentra en las raíces tanto del modelo estándar como de la relatividad general es importante estudiar esta simetría para poder lograr una teoría unificada. Una de las cuestiones fundamentales a resolver en lo concerniente a esta simetría es encontrar cómo reconciliar los modelos gravitacionales que involucran la discretización del espacio con la invarianza de los boost [1].

Diversas propuestas teóricas se han realizado a este respecto. Entre ellas se encuentra la realizada por A. Cohen y S. Glashow [2], que consiste en afirmar que los efectos relativistas experimentalmente confirmados, tales como la dilatación del tiempo o la contracción de la longitud, no requieren al grupo completo de Poincaré para ser explicados. Basta entonces considerar solamente a dos subgrupos de Lorentz y añadirles las traslaciones para lograr este objetivo. Esta propuesta fue nombrada como Relatividad Especial Restringida (RER) -*Very Special Relativity* en inglés-.

II. Estructura de Relatividad Especial

Para obtener la estructura de la Relatividad Especial (RE), presentada por A. Einstein [3], debe tomarse como axioma que el espacio es plano, isotrópico, homogéneo e isomorfo a $\mathbb{R}^4$. En este espacio se ocurrirán los eventos, los cuales pueden identificarse en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ mediante sus coordenadas espaciotemporales, a saber: (t, x, y, z). Posteriormente, considerando los dos postulados de la RE: la invarianza de las leyes físicas entre sistemas inerciales y velocidad de la luz constante independiente del observador, se construye el invariante o pseudodistancia dado por:

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (1)$$

La preservación de este invariante entre sistemas de referencia inerciales implica el concepto de isometría. Por lo que, se puede establecer que las transformaciones que relacionan sistemas de referencia inerciales se encuentran dentro de un grupo matricial de Lie proveniente de una isometría con una métrica dada por $\eta = diag(1, -1, -1, -1)$.

Dentro del grupo de Lie antes mencionado, también llamado grupo general de Lorentz, se encuentra un subgrupo de transformaciones las cuales preservan la dirección del tiempo y no presentan inversiones especulares, el cual es llamado grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ [4].

Debido a que $\mathcal{L}$ es un grupo de Lie, conviene preguntarse acerca de su algebra, la cual es el espacio tangente al grupo en la identidad. Es posible desarrollar el álgebra a partir de resolver la ecuación:

$$\mathfrak{X}^T\eta = -\eta\mathfrak{X} \quad (2)$$

Donde $\mathfrak{X}$ representa a las matrices que forman el álgebra del grupo de Lorentz. El origen de (2) se debe a que el álgebra y el grupo de Lie se relacionan mediante grupos

uniparamétricos generados a partir de la aplicación de la exponencial en los elementos del álgebra.

Se observa que el álgebra de Lorentz puede separarse como la suma directa de dos espacios vectoriales matriciales J y K de cuatro dimensiones, cuyos elementos base o generadores son:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Al aplicar la exponencial a los generadores del espacio J se obtienen las rotaciones alrededor de los tres ejes, explícitamente:

$$\hat{J}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}; \; \hat{J}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix};$$

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Mientras que si se aplica a los generadores del espacio K y se utiliza la hipérbola de calibración se obtienen los *boost* sobre cada uno de los tres ejes, explícitamente:

$$\hat{K}_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \hat{K}_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{K}_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix};$$

Además, es posible obtener partiendo únicamente de los postulados de RE los resultados clásicos verificados experimentalmente. Las formas generales encontradas se encuentran en la Tabla I.

TABLA I.
RESULTADOS CLÁSICOS RE

Dilatación del Tiempo	Contracción de la longitud	Adición de Velocidades
$(\Delta r')^0 = \Lambda^0_0 (\Delta r)^0$	$(\Delta r')^i = \left(\frac{\Lambda^0_0 \Lambda^i_j - \Lambda^i_0 \Lambda^0_j}{\Lambda^0_0}\right)(\Delta r)^i$	$(V')^\mu = \frac{c\Lambda^\mu_\nu V^\nu}{\Lambda^0_\nu V^\nu}$

Se ha utilizado notación tensorial y la convención de suma de Einstein. Los índices latinos van de 1 a 3, mientras que los índices griegos van de 0 a 4. Δr representa la diferencia de dos eventos. El tensor V representa la velocidad propia. La matriz de Lorentz que relaciona a ambos sistemas está representada por Λ. Las cantidades primadas son medidas en un sistema de referencia inercial distinto a la inicial.

Por otra parte, es posible construir un nuevo grupo a través del concepto de producto semidirecto [4]. Este nuevo grupo, llamado grupo de Poincaré, es el producto semidirecto del grupo de las traslaciones con el grupo de Lorentz. El grupo de Poincaré tiene la siguiente forma, representado por matrices 5X5:

$$\hat{P} = \left\{ P_{ij} \in M_5(\mathbb{R}) \,\middle|\, P_{ij} = \begin{pmatrix} \Lambda_i & t_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t_j \in \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \Lambda_i \in \mathcal{L} \right\} \quad (3)$$

La importancia de este grupo, para la RE, radica en que, según el principio de covarianza, tal y como lo formuló A. Einstein, indica que toda ecuación que cumpla con la teoría de la relatividad especial debe ser invariante ante todas las transformaciones pertenecientes al grupo de Poincaré. Sin embargo, la propuesta de Cohen y Glashow es encontrar un subgrupo de Poincaré que sea suficiente para obtener todos los resultados de la RE.

III. GRUPOS DE LIE EN RER

El modelo estándar de la física de partículas ha sido una teoría con una extensa verificación experimental, la cual ha aportado numerosos descubrimientos y tecnología. Sin embargo, se necesitan realizar adecuaciones a esta teoría para poder explicar diversos fenómenos como es la masa del neutrino o incluso la presencia de la materia oscura. Desafortunadamente, no existen datos experimentales suficientes que sugieran cómo realizar una posible modificación a este modelo, causando una búsqueda un tanto a ciegas para esta modificación [1].

Una posible forma de hacer esto es mantener las características esenciales de la relatividad, de las cuales existe abundante evidencia experimental, mientras se reduce el grupo de transformaciones del grupo de Poincaré. Esta reducción se realizará a través del grupo de Lorentz, es decir, se considerarán subgrupos propios de Lorentz que generarán subgrupos propios en el grupo de Poincaré. Se decide abordar el problema de esta manera debido a que una reducción en las traslaciones implicaría que el momento y la energía no se conservarían, debido al teorema de Noether [5]. Debido a que no existen situaciones que sugieran la violación de la conservación del momento o energía, es deseable que el grupo de traslaciones espaciotemporales permanezca intacto en esta reducción.

Como se puede consultar en [6] existen trece posibles subgrupos de Lorentz, sin considerar isomorfismos o elementos discretos, de los cuales cuatro de ellos tienen un solo parámetro, tres con dos parámetros, cinco con tres parámetros y uno con cuatro parámetros. De los subgrupos antes mencionados se escogieron cuatro, cuyo subgrupo de Poincaré asociado se llamará relatividad especial restringida. Estos posibles candidatos a simetría de la naturaleza deben cumplir con dos requisitos esenciales. El primero, no

generar simetrías extras a las sugeridas por los experimentos y el segundo, que se obtengan de ellos los resultados ya verificados experimentalmente.

Primeramente, sea $T_x = K_x + J_y$ y $T_y = K_y - J_x$ un par de generadores a partir de los cuales se construyeron los subgrupos de Lorentz. Se cuentan con las siguientes definiciones:

$$\mathfrak{T}(2) = Span\,(T_x, T_y) \tag{4}$$

$$\mathfrak{E}(2) = Span\,(T_x, T_y, J_z) \tag{5}$$

$$\mathfrak{Hom}(2) = Span\,(T_x, T_y, K_z) \tag{6}$$

$$\mathfrak{T}(2) = Span\,(T_x, T_y) \tag{7}$$

Las definiciones anteriores corresponden a las algebras de Lie de los grupos T(2), E(2), Hom(2) y Sim(2), respectivamente.

Una de las mejores formas de caracterizar a una algebra de Lie es mediante sus reglas de conmutación. A continuación, se presenta en la Tabla II las reglas de conmutación de los generadores para cada una de las RER.

Debido a que la exponencial de una suma de matrices no puede expresarse como la multiplicación de las exponenciales de cada sumando a menos que dichas matrices conmuten, no se cuenta con una forma explicita de las matrices que conforman cada uno de grupos de Lie antes mencionados. Sin embargo, para continuar su estudio se requiere del concepto de vector invariante.

Como es sabido, un vector invariante es aquel que permanece idéntico tras la aplicación de una transformación. Se define al conjunto de todos los vectores que permanecen invariante ante un conjunto de matrices $\hat{A}$ como:

$$\hat{\mathbf{a}} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbf{V} \,\middle|\, A\mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall A \in \hat{A} \right\} \tag{8}$$

Debido a las limitaciones antes mencionadas fue necesaria la utilización de una proposición que permitiese calcular o al menos acotar el conjunto invariante de T(2), E(2), Hom(2) y Sim(2).

TABLA II.

REGLAS DE CONMUTACIÓN RER

$\mathfrak{T}(2)$	$\mathfrak{E}(2)$	$\mathfrak{Hom}(2)$	$\mathfrak{Sim}(2)$
$[T_x, T_y] = 0$	$[T_x, T_y] = 0$ $[T_x, J_z] = -T_y$ $[T_y, J_z] = T_x$	$[T_x, T_y] = 0$ $[T_x, K_z] = T_x$ $[T_y, K_z] = T_y$	$[T_x, T_y] = 0$ $[T_x, J_z] = -T_y$ $[T_y, J_z] = T_x$ $[T_x, K_z] = T_x$ $[T_y, K_z] = T_y$ $[K_z, J_z] = 0$

Utilizando la proposición del invariante (Fig. 1) es posible encontrar el conjunto invariante de los grupos de Lie RER, los resultados se encuentran en la Tabla III.

IV. CONSECUENCIAS DE LA RER

Para poder recobrar una gran parte de los resultados de la RE, es necesario mostrar que es posible, utilizando únicamente transformaciones pertenecientes a la RER, encontrar una transformación que relacione el sistema del observador con el sistema de cualquier partícula.

Se realizó esta búsqueda para partículas con masa con una velocidad arbitraria $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Utilizando el teorema de Noether [5] se tiene que todos los subgrupos de Poincaré que contengan a las traslaciones tendrán como invariante al momento lineal. Por lo que es posible etiquetar a las partículas con su cuadrimomento. El invariante generado a partir del cuadrimomento de partículas con masa es temporaloide y se escribe como:

$$\frac{E^2}{c^2} - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = m^2 c^2 \tag{9}$$

A partir de este invariante se mostró que es posible, utilizando transformaciones pertenecientes a Hom(2), relacionar a los dos sistemas de referencia mediante la transformación dada por:

$$U(E, P_x, P_y, P_z) = \begin{pmatrix} \frac{E}{mc^2} & -\frac{P_x}{mc} & -\frac{P_y}{mc} & -\frac{P_z}{mc} \\ -\frac{cP_x}{E+cP_z} & 1 & 0 & -\frac{cP_x}{E+cP_z} \\ -\frac{cP_y}{E+cP_z} & 0 & 1 & -\frac{cP_y}{E+cP_z} \\ \frac{mc^2}{E+cP_z} - \frac{E}{mc^2} & \frac{P_x}{mc} & \frac{P_y}{mc} & \frac{mc^2}{E+cP_z} + \frac{P_z}{mc} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Los parámetros de energía y momento en la expresión anterior son de la partícula medidos en el sistema del observador.

Proposición del invariante: Sea A y A_i, con $i \in \mathbb{N}$, conjuntos de matrices tales que $\hat{A} = \bigcup_{i=1}^{N} \hat{A}_i$, y sean $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{a}}_i$ sus conjuntos invariantes respectivos, entonces $\hat{\mathbf{a}} = \bigcap_{i=1}^{N} \hat{\mathbf{a}}_i$.

Fig. 1. Proposición del invariante
Tomada de [4], donde también puede consultarse la demostración

TABLA III.

CONJUNTOS INVARIANTES RER

$T(2)$	$E(2)$	$Hom(2)$	$Sim(2)$
$\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ -n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ -n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para poder utilizar los resultados mostrados en la Tabla I es necesario expresar a (10) en términos de la velocidad de la partícula para ello se cuenta con las siguientes ecuaciones:

$$E = \gamma mc^2 \tag{11}$$

$$P_i = \gamma m u_i \tag{12}$$

Utilizando (11) y (12) es posible expresar a (10) como:

$$U(\beta_x,\beta_y,\beta_z)=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\frac{\beta_x}{1+\beta_z} & 1 & 0 & -\frac{\beta_x}{1+\beta_z} \\ -\frac{\beta_y}{1+\beta_z} & 0 & 1 & -\frac{\beta_y}{1+\beta_z} \\ -\frac{(\beta^2+\beta_z)\gamma}{1+\beta_z} & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \frac{(1-\beta^2+\beta_z^2+\beta_z)\gamma}{1+\beta_z} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Donde $\beta_i = \frac{u_i}{c}$ y $\beta^2 = (\beta_x)^2 + (\beta_y)^2 + (\beta_z)^2$.

Con la matriz (12) se obtienen las expresiones generales para Hom(2) y Sim(2). La dilatación del tiempo está plasmada en (14), (15) representa la contracción de la longitud y (16) la adición de velocidades.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{1}{1+\beta_z}\left(\left(1+\beta_z-\beta_x^2\right)\Delta x - \beta_x\beta_y\Delta y - \beta_x\left(1+\beta_z\right)\Delta z\right), \\ \Delta y' &= \frac{1}{1+\beta_z}\left(-\beta_x\beta_y\Delta x + \left(1+\beta_z-\beta_y^2\right)\Delta y - \beta_y\left(1+\beta_z\right)\Delta z\right), \\ \Delta z' &= \frac{1}{1+\beta_z}\left(\frac{\beta_x}{\gamma}\Delta x + \frac{\beta_y}{\gamma}\Delta y + \frac{1+\beta_z}{\gamma}\Delta z\right). \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} V_x' &= \frac{c(V_x(1+\beta_z)-\beta_x(c+V_z))}{\gamma(1+\beta z)\left(c-\left(\beta_x V_x+\beta_y V_y+\beta_z V_z\right)\right)}; \\ V_y' &= \frac{c(V_y(1+\beta_z)-\beta_y(c+V_z))}{\gamma(1+\beta z)\left(c-\left(\beta_x V_x+\beta_y V_y+\beta_z V_z\right)\right)}; \\ V_z' &= \frac{c\left(\beta_x V_x+\beta_y V_y-\left(\left(\beta^2+\beta_z\right)c-\left(1-\beta^2+\beta_z^2+\beta_z\right)V_z\right)\right)}{\left(c-\left(\beta_x V_x+\beta_y V_y+\beta_z V_z\right)\right)} \end{aligned} \tag{16}$$

Se observa que, si la partícula la dirección de movimiento de la partícula coincide con el eje z del sistema de referencia de observador, pueden recobrarse los efectos clásicos de tipo *boost* sobre el eje *z* tal y como se muestran en los libros introductorios de relatividad especial. No se encontró alguna manera de obtener estos mismos resultados para el eje *x* o *y*. Esto parecería indicar que el conjunto de transformaciones halladas induce una dirección preferencial, contradiciendo el segundo postulado de RE. Sin embargo, al examinar cuidadosamente se observó que la forma particular de (10) proviene de la definición de Hom(2) es decir al excluir al eje *z* de la definición de T_x y T_y. Por lo que este resultado indica solamente que es necesario utilizar transformaciones pertenecientes a Hom(2) para reproducir estos resultados clásicos.

Más aún, debido a la orientación del sistema de reposo, es posible afirmar que basta con considerar únicamente las transformaciones pertenecientes a Hom(2), en lugar del grupo de Lorentz completo para asegurar que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, ya que las transformaciones tipo *boost* aseguran este resultado. Permitiendo así explicar el famoso resultado de Michelson – Morley considerando únicamente a Hom(2).

Por otra parte, debido a que tanto T(2) como E(2) tienen como conjunto invariante a un conjunto no trivial se tiene que en estos grupos se pueden generar operadores que violen Lorentz localmente.

En particular, considere al vector *r* como el vector diferencia entre un par de eventos arbitrarios en el sistema del observador. Considere ahora una transformación A perteneciente a E(2), la cual inducirá un sistema de referencia en el cual se realiza la medición de la distancia entre los eventos del sistema del observador, esta medición se realiza instantáneamente [3]. Por lo tanto, el vector en el sistema inducido es

$$r' = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} \tag{17}$$

Considere ahora su proyección sobre el vector *n*. Dado que E(2) es una isometría y el vector *n* su invariante se tiene (18). Sin embargo, por construcción se tiene (19).

$$\langle r, n\rangle = \langle Ar, n\rangle = \langle r', n\rangle \tag{18}$$

$$\langle r, n\rangle = c\Delta t + \Delta z = \Delta z' = \langle r', n\rangle \tag{19}$$

La única forma en la que este resultado sea compatible con la contracción de la longitud, fundamentada en los postulados de la RE, es que $\Delta t = 0$. Lo cual indica que el sistema inducido no tiene movimiento respecto al sistema del observador.

Esta forma de pensar contrasta con la forma usual de pensar en física, pues generalmente la definición del nuevo marco coordenado es el que induce la transformación que lo relaciona con el sistema de reposo. Desde esta otra perspectiva podemos considerar que al restringir el grupo de transformaciones también se reduce el numero de marcos accesibles por el observador, es decir, un sistema de referencia está permitido por el grupo de simetría, si y solo si, existe una transformación de Lorentz que lo relaciona con el sistema de reposo.

Por lo tanto, fue necesario descartar a E(2), y por ende a T(2), como posibles simetrías de la naturaleza. Por otra parte, Sim(2) y Hom(2) no presentan este problema con los marcos de referencia accesibles, es decir, ya sea en su forma

(10) o (13), Hom(2) garantiza que para toda partícula con masa en movimiento existe una transformación de Lorentz que la relaciona con el sistema del observador.

A pesar de que Hom(2) y Sim(2) tengan como único invariante al trivial, esto no significa que estas propuestas RER no tengan invariantes que a la fecha no tengan verificación experimental.

Por ejemplo, como puede consultarse en [7], la amplitud de decaimiento de dos partículas sin espín a partir de una en reposo depende de los cuadrimomentos de los productos. Entonces si se considera A como un elemento de Hom(2) o Sim(2) se tiene que:

$$\frac{\langle p_1, n\rangle}{\langle p_2, n\rangle} = \frac{\langle Ap_1, An\rangle}{\langle Ap_2, An\rangle} = \frac{k\,\langle Ap_1, n\rangle}{k\,\langle Ap_2, n\rangle} = \frac{\langle p_1', n\rangle}{\langle p_2', n\rangle} \quad (20)$$

Es decir, se ha creado un invariante a partir de la razón de éstos y en consecuencia una dirección preferencial la cual puede ser verificada experimentalmente. Esta dirección preferencial en ningún momento está presente en la relatividad especial. Por lo tanto, un resultado favorable en este sentido reforzará la confianza en Sim(2) u Hom(2) como simetría de la naturaleza. Se requiere de una prueba experimental para la determinación y la supervivencia de estos candidatos.

V. Conclusiones

Se observó que la teoría de Lie sirve para estudiar las transformaciones entre sistemas de referencia en relatividad especial. Además, se ha presentado la construcción del grupo de Poincaré desde la teoría de grupos, motivando físicamente la elección de la métrica, mostrando también el origen de las transformaciones de Lorentz que se presentan en los libros introductorios.

Por otra parte, se observó que la relatividad especial puede ser una forma de evitar el rompimiento de simetría del grupo de Lorentz, ya que fue posible recobrar los resultados ampliamente verificados considerando únicamente a los grupos Hom(2) y Sim(2).

Para obtener estos resultados, se ha mostrado que la matriz (13) que relaciona al observador en reposo con el sistema de la partícula. A partir de ella se han presentado explícitamente los resultados clásicos de mayor relevancia. Se concluye así que se pueden explicar los resultados del experimento de Michelson-Morley únicamente utilizando Hom(2).

Finalmente, se ha mostrado que no todos los candidatos planteados por RER son viables para funcionar como simetría de la naturaleza por medio del análisis de sus invariantes. Por otra parte, se planteó la necesidad de una verificación experimental para candidatos Hom(2) y Sim(2).

Referencias

[1] S. Liberati, “Tests of Lorentz invariance: a 2013 update”, Class. Quantum Grav. 30 (2013), 133001.

[2] A.G. Cohen, S.L. Glashow, “Very special relativity”, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), 21601.

[3] Hawking, S. (2007). A stubbornly persistent ilussion. (1 ed.) Estados Unidos: Running Press.

[4] Sánchez, E. (2017). “Aplicación de la teoría de Lie en relatividad especial restringida” (tesis de licenciatura). IPN Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México.

[5] V, Arnold. (1989). “Mathematical Methods of Classical Mechanics” (2 ed.). Estados Unidos: Springer.

[6] R. Shaw, The subgroup of the homogeneous Lorentz group, Quart. J. Math. Oxford 21 (1970), 101.

[7] Griffiths, D. (2008). Introduction to Elementary Particles. (2 ed). Alemania: Wiley.

ISSN: 2594-1011

Descomposición multifractal utilizando Sistemas de Funciones Iteradas

José Luis del Río-Correa[1], Jeanett López-García[2], Gabriela Durán-Meza[3]
[1,3]Departamento de Física, UAM-Iztapalapa, México D.F., México.
Teléfono (55) 5804-4617 Fax (55) 5804-4610, E-mail: jlrc@xanum.uam.mx, , E-mail: igabydu@xanum.uam.mx
[2]División de Matemáticas e Ingeniería, UNAM-FES Acatlán, Edo. de Méx., México.
E-mail: jeanettlg@hotmail.com

Resumen —**Analizamos dos tipos de descomposiciones multifractales (DM) de fractales F generados por un Sistema de Funciones Iteradas (SFI), son la DM geométrica y la estadística, la primera es generada por un SFI y la segunda por un SFI con probabilidad. En la primera, F se descompone en subconjuntos M(φ) de puntos caracterizados por la misma frecuencia vectorial φ, y evaluamos su dimensión de Hausdorff (DH). En la segunda, F se descompone en subconjuntos Jα de puntos con la misma dimensión puntual α; sin embargo Jα está compuesto por un subconjunto infinito M(φ), por lo tanto Jα es un multifractal, esto implica que su DH es la máxima DH de sus componentes M(φ), usando un procedimiento de maximización encontramos φ* tal que DH de M(φ*) es mayor que cualquier otro M(φ) para una α fija, este procedimiento da en forma natural las funciones auxiliares propuestas por Cawlin y Mauldin. Por lo tanto, presentamos una descripción más simple de la DM.**

Palabras Clave – **Sistemas de funciones iteradas, Descomposición Geométrica Multifractal, Descomposición Estadística multifractal, Dimensión de Hausdorff, Dimensión puntual, Operador de Hutchinson.**

Abstract — **We analyze two types of multifractal decompositions (MD) of fractals F generated by an Iterated Function System (IFS), they are the geometric and the statistical MD, the first is generated by an IFS and the second by an IFS with probability. In the first, F is decomposed in subsets M(φ) of points characterized by the same vector frequency φ, and we evaluate their Hausdorff dimension (HD). In the second, F is decomposed in subsets Jα of points with the same pointwise dimensionα; however Jα is composed by an infinite subsets M(φ), therefore Jα is a multifractal, this implies that its HD is the maximum HD of its components M(φ), using a maximizing procedure we find φ* such that HD of M(φ*) is greater than any other M(φ) for a fixed α, this procedure gives in a natural form the auxiliary functions proposed by Cawlin and Mauldin. Thus we present a more simple description of the MD.**

Keywords —**Iterated Function Systems, Geometrical Multifractal Decomposition, Statistical Multifractal Decomposition, Hausdorff dimension, Pointwise dimension, Hutchinson Operator.**

I. Introducción

El Sistema de Funciones Iteradas (SFI) es una poderosa herramienta para estudiar los fractales [1], cuando está conformado por funciones contractivas, tiene asociado un fractal único F que es invariante bajo el operador de Hutchinson [2], además éste es el atractor del SFI. Cuando F es totalmente disconexo, cada punto de F puede ponerse en correspondencia uno a uno con los elementos del espacio de código [1], luego F puede descomponerse en un número infinito de fractales M(φ) caracterizados por su frecuencia, y dada la dimensión de Hausdorff (DH) de ellos, obtenemos la descomposición geométrica de F.
Cuando se asocia una probabilidad a cada función del SFI, *F* está compuesta por multifractales en lugar de fractales, sin tener en cuenta este hecho, Cawley y Mouldin [3] hicieron la descomposición estadística definiendo una función conveniente (véase (26)). En este trabajo mostramos cómo se obtiene esa expresión teniendo en cuenta que los componentes de *F* son multifractales: para encontrar la DH de estos componentes utilizamos un procedimiento de maximización, como resultado de este procedimiento obtenemos la función propuesta por Cawley y Mouldin.

II. Metodología

La descomposición geométrica multifractal.

Sea el Sistema de Funciones Iteradas (SFI) el conjunto de funciones contractivas $\left\{X; w_0\left(x\right), w_1\left(x\right), ..., w_{s-1}\left(x\right)\right\}$ con factores de contracción $\left\{r_0, r_1, ..., r_{s-1}\right\}$, el operador de Hutchinson (OH) del SFI se define como $W\left(A\right) = \bigcup_{n=0}^{s-1} w_n\left(A\right)$, el OH tiene un fractal *F* como su conjunto fijo, es decir $W\left(F\right) = F$, si las funciones $w_i\left(x\right)$ satisfacen que $w_i\left(F\right) \cap w_j\left(F\right) = \varnothing$, con $i \neq j$, entonces *F* es un fractal autosimilar con factores de contracción

$\{r_0, r_1, ..., r_{s-1}\}$ y su Dimensión de Hausdorff *D* viene dada por la solución única de $\sum_{j=0}^{s-1} r_j^D = 1$.

Un subconjunto de *F* se obtiene cuando se aplica w_j al fractal *F*, el cual se llama *cilindro fractal de primer orden* (1-cilindro), y se denota por $C_j = w_j(F)$, su diámetro es $D(C_j) = D(w_j(F)) = r_j D(F)$, donde $D(F)$ es el diámetro de *F*, aplicando *K* veces el OH a *F* de forma iterativa, el fractal se separa en *s* cilindros de primer orden, s^2 cilindro de segundo orden, cilindro s^K de orden *K*, es decir

$$\begin{aligned} F &= \boldsymbol{W}(F) = \bigcup_{z_1=0}^{s-1} C_{z_1}; \\ F &= \boldsymbol{W}^2(F) = \boldsymbol{W} \circ \boldsymbol{W}(F) = \bigcup_{z_2=0}^{s-1}\bigcup_{z_1=0}^{s-1} C_{z_2 z_1}; \\ F &= \boldsymbol{W}^K(F) = \boldsymbol{W} \circ \boldsymbol{W} \circ \circ \circ \boldsymbol{W}(F) = \bigcup_{z_K=0}^{s-1} \ldots \bigcup_{z_2=0}^{s-1}\bigcup_{z_1=0}^{s-1} C_{z_K \ldots z_2 z_1}; \end{aligned} \quad (1)$$

cada *K*-cilindro está caracterizado por una secuencia $\boldsymbol{s}_K = \{z_1 z_2 ... z_K\}$, clasificamos estos cilindros por la frecuencia de los dígitos $\{0,1,...,s-1\}$ en $\boldsymbol{s}_K$, denotado por $N_j(K)$ las veces en que aparece el dígito *j* en $\boldsymbol{s}_K$, el vector de frecuencia de un *K*-cilindro viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\sigma_K) &= \left(f_0(\sigma_K), f_1(\sigma_K), ..., f_{s-1}(\sigma_K)\right) \\ &\text{con } f_j(\sigma_K) = \frac{N_j(\sigma_K)}{K} \end{aligned} \quad (2)$$

Sea $M(f(K))$ el conjunto de *K*-cilindros con el mismo vector de frecuencia, es decir $M(\mathbf{f}(K)) = \{C_{s_K} | \mathbf{f}(s_K) = \mathbf{f}(K)\}$, su cardinalidad está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Card } M(\boldsymbol{f}(K)) &= \frac{K!}{N_0(K)!N_1(K)!...N_{s-1}(K)!} \\ &= \left[f_0(K)^{N_0(K)} f_1(K)^{N_1(K)} ... f_{s-1}(K)^{N_{s-1}(K)}\right]^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

y el diámetro de estos cilindros es

$$D(C_{s_K}) = r_0^{N_0(s_K)} r_1^{N_1(s_K)} ... r_{s-1}^{N_{s-1}(s_K)} D(F) \quad (4)$$

por lo tanto, la dimensión de caja de M (f (K)) es:

$$\text{Dim}_B(M(\mathbf{f}(K))) = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} f_j(K) \ln f_j(K)}{\sum_{j=0}^{s-1} f_j(K) \ln r_j} \quad (5)$$

Tomando el límite cuando *K* tiende a infinito, obtenemos la descomposición geométrica multifractal de *F*, porque en este límite $\boldsymbol{s}_K$ tiende a la dirección de un punto de *F* y el K-cilindro tiende a un punto del fractal *F*, por lo que el conjunto $M(\mathbf{f}(K))$ tiende al conjunto de puntos con el mismo vector de frecuencia de su dirección, y la dimensión de conteo de caja de $M(\mathbf{f}(K))$ tiende a la dimensión de Hausdorff de este conjunto de puntos. Sea x un punto de *F*, con su dirección dada por:

$$x = 0.z_1 z_2 ... z_K ... = \lim_{K\to\infty} w_{z_1} \circ w_{z_2} \circ ... \circ w_{z_K}(F) \quad (6)$$

Entonces su vector de frecuencia de punto es

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(x) &= \lim_{K\to\infty} \boldsymbol{f}(K) = \left(\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{s-1}(x)\right) \\ &\text{con } \varphi_j(x) = \lim_{K\to\infty} \frac{N_j(K)}{K} \end{aligned} \quad (7)$$

El conjunto de puntos con el mismo vector de frecuencia sería $M(\vec{\varphi}(x)) = \lim_{K\to\infty} M(\mathbf{f}(x))$ con una dimensión de Hausdorff:

$$\begin{aligned} \text{Dim}_H(M(\vec{\varphi}(x))) &= \frac{\sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j(x) \ln \varphi_j(x)}{\sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j(x) \ln r_j} \\ &= \frac{\vec{\varphi}(x) \cdot \ln \vec{\varphi}(x)}{\vec{\varphi}(x) \cdot \ln \vec{r}(x)} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde $\vec{a} \cdot \ln \vec{b} = \sum_{j=0}^{s-1} a_j \ln b_j$. Como *F* es la unión de los conjuntos $M(\vec{\varphi}(x))$, y cada uno de ellos es un fractal, (8) da la descomposición multifractal de *F* en términos del vector de frecuencia de la dirección del punto que pertenece a *F*.

A partir de (8) se sigue que el conjunto $M(\vec{\varphi}_N(x))$ con $\vec{\varphi}_N(x) = \{\varphi_i = r_i^D\}$ tiene su DH idéntica a la DH de *F*, por lo que este conjunto tiene la máxima DH de todos los fractales que conforman *F*,

$$\text{Dim}_H(F) = \text{Dim}_H(M(\vec{\varphi}_N(x))) \geq \text{Dim}_H(M(\vec{\varphi}(x))) \quad (9)$$

Por esta propiedad, las componentes de $\vec{\varphi}_N(x)$ se denominan *pesos uniformes* [4].

La descomposición estadística multifractal

El fractal *F* generado por el SFI es el soporte de una medida estadística μ (ME) cuando cada función $w_j(x)$ tiene asociada una probabilidad p_j, en este caso tenemos un SFI con probabilidades (SFIP) definido por:

$$\left\{X; w_0(x), w_1(x), ..., w_{s-1}(x); p_0, p_1, ..., p_{s-1}\right\} \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{s-1} p_i = 1; \tag{10}$$

la ME del cilindro de primer orden es $\mu(C_{z_j}) = p_j$, y la ME de un cilindro *K* es:

$$\mu\left(C_{z_1 z_2 \ldots z_{z_K}}\right) = \mu\left(w_{z_1} \circ w_{z_2} \circ \ldots \circ w_{z_K}(F)\right) = p_{z_1} p_{z_2} \ldots p_{z_K} = p_0^{N_0(K)} p_1^{N_1(K)} \ldots p_{s-1}^{N_{s-1}(K)} \tag{11}$$

esta ME satisface la ley de potencias $\mu(C_{s_K}) = \left[D(C_{s_K})\right]^{a_{s_K}}$ con el exponente de Holder:

$$\alpha\left(\vec{p}, \vec{f}(K)\right) = \alpha_{\sigma_K} = \frac{\ln \mu(C_{\sigma_K})}{\ln \Delta(C_{\sigma_K})} = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} N_j(K) \ln p_j}{\sum_{j=0}^{s-1} N_j(K) \ln r_j} = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} f_j(K) \ln p_j}{\sum_{j=0}^{s-1} f_j(K) \ln r_j} = \frac{\vec{f} \cdot \ln \vec{p}}{\vec{f} \cdot \ln \vec{r}} \tag{12}$$

La ME del conjunto $M(\mathbf{f}(K))$ viene dado por su cardinalidad

$$\text{Card}\left(M(f(K))\right) = \left[D(C_{s_K})\right]^{-\text{Dim}_B(M(f(K)))} \tag{13}$$

veces la ME del cilindro *K*, por lo tanto

$$\mu\left(M(\boldsymbol{f}(K))\right) = \left\{\Delta(C_{\sigma_K})\right\}^{\alpha(\vec{p}, \vec{f}(K)) - \text{Dim}_B M(\boldsymbol{f}(K))} \tag{14}$$

Como la ME tiene la propiedad $0 \le \mu(A) \le 1$ para cualquier conjunto A, entonces el exponente del lado derecho de (14) satisface que:

$$\alpha\left(\vec{p}, \vec{f}(K)\right) \ge \text{Dim}_B M\left(\vec{f}(K)\right) \tag{15}$$

la igualdad se cumple cuando el vector de frecuencia $f(K)$ es idéntico al vector de probabilidad $\boldsymbol{p}$, esta condición define un conjunto especial donde la ME se está condensando [5], porque cuando $K \to \infty$ toda la ME se concentra en $M(\boldsymbol{p})$ como sigue de (14)

La descomposición estadística de *F* en subconjuntos con el mismo valor del exponente de Holder (EH), de (12) se sigue que todos los miembros de $M(f(K))$ tienen el mismo valor del EH, sin embargo, $a_{s_K} = A$ la condición se cumple cuando el vector de frecuencia tiene la propiedad de que $\vec{f} \cdot \ln \vec{p} = A\vec{f} \cdot \ln \vec{r}$, esto implica que la proyección de $\boldsymbol{f}$ en el plano generado por los vectores **ln p** y **ln r** está en una línea con pendiente *A*, esta condición es satisfecha por una gran cantidad de vectores de frecuencia, por lo tanto hay varios conjuntos $M(\boldsymbol{f}(K))$ con el mismo valor de EH, y el conjunto J_A está dado por

$$J_A(K) = \left\{C_{\sigma_K} \middle| \alpha_{\sigma_K} = A\right\} = \bigcup' M\left(\tilde{f}(K)\right) \quad \text{tal que } \tilde{\boldsymbol{f}}(K) \cdot \ln \vec{p} = A\tilde{\boldsymbol{f}}(K) \cdot \ln \vec{r} \tag{16}$$

Cuando *K* tiende a infinito, el EH tiende a $a(x)$ que es la dimensión puntual del punto $x \in F$, es decir

$$\alpha(x) = \lim_{K \to \infty} \frac{\ln \mu(C_{\sigma_K})}{\ln \Delta(C_{\sigma_K})} = \frac{\vec{\varphi}(x) \cdot \ln p}{\vec{\varphi}(x) \cdot \ln r} \tag{17}$$

y *F* se descompone en conjuntos J_a conformados por puntos con el mismo valor de la dimensión puntual: $J_{\alpha_0} = \left\{x \middle| \alpha(x, \vec{p}) = \alpha_0\right\}$, este es un conjunto multifractal debido a que es la unión de un número infinito de conjuntos $M(\varphi(x))$, en símbolos:

$$J_{\alpha_0} = \bigcup' M\left(\tilde{\varphi}(x)\right) \quad \text{tal que } \tilde{\varphi}(x) \cdot \ln \vec{p} = \alpha_0 \tilde{\varphi}(x) \cdot \ln \vec{r} \tag{18}$$

Como J_{a_0} es un multifractal, su dimensión Hausdorff está dada por la máxima DH de sus conjuntos de componentes fractales [6]:

$$\text{Dim}_H(J_\alpha) = D(\alpha) = \text{Max Dim}_H\left(M\left(\tilde{\varphi}(x)\right)\right) \tag{19}$$

III. RESULTADOS

Procedimiento de maximización

La DH de J_a está determinada por el vector de frecuencia $\varphi^*(x)$ que maximiza (8) con las siguientes restricciones:

$$\frac{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{\varphi}}{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{r}} = \alpha \text{ y } \sum_{j=0}^{s-1} j_j(x) = 1 \tag{20a, 20b}$$

Este vector de frecuencia se puede encontrar maximizando la función de Lagrange:

$$I(\vec{\varphi}) = \frac{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{\varphi}}{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{r}} - q \frac{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{p}}{\vec{\varphi} \cdot \ln \vec{r}} - \lambda \sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j \tag{21}$$

Donde *q* y λ son los multiplicadores de Lagrange indeterminados. Como la derivada de (21) respecto al vector de frecuencia está dada por

$$\frac{\partial I(\vec{\varphi})}{\partial \varphi_k} = \frac{\ln e\ \varphi_k p_k^{-q}}{\vec{\varphi}\cdot\ln\vec{r}} - \frac{\ln r_k \sum_{j=0}^{s-1}\varphi_j \ln\varphi_j p_j^{-q}}{\left(\vec{\varphi}\cdot\ln\vec{r}\right)^2} - \lambda \quad (22)$$

los componentes del vector φ* (*x*) satisfacen que

$$\lambda\varphi^*\cdot\ln\vec{r} = \ln e\ \varphi_k^* p_k^{-q} - \left\{\mathrm{Dim}_H M(\varphi^*) - q\alpha(\varphi^*)\right\}\ln r_k \quad (23)$$

donde usamos (8) y (17). Como φ*(*x*) depende de la función indeterminada *q*, tenemos que $a(j^*) = a(q)$ y $\mathrm{Dim}_H M(j^*) = D(a) = D(q)$, entonces (23) se puede reescribir en la forma:

$$\lambda\varphi^*\cdot\ln\vec{r} = \ln e\ \varphi_k^* p_k^{-q} - \ln r_k^{D(q)-q\alpha(q)} = \ln\frac{e\ \varphi_k^*}{p_k^q r_k^{D(q)-q\alpha(q)}} \quad (24)$$

el lado izquierdo de (24) depende de todas las componentes de φ* (*x*) y el lado derecho es una función de solo la k-ésima componente, esto implica que el lado derecho es una constante, que se selecciona como la unidad, entonces tenemos que

$$\varphi_k^* = p_k^q r_k^{\beta(q)} \quad \text{con}\ \beta(q) = D(q) - q\alpha(q) \quad (25)$$

y por (20b) satisface:

$$\sum_{k=0}^{s-1} p_k^q r_k^{b(q)} = 1 \quad (26)$$

Esta es la función auxiliar definida por Cawley y Mouldin [3]. Tomando la derivada implícita de esta ecuación se obtiene que

$$\frac{d\beta(q)}{dq} = -\frac{\varphi^*\cdot\ln\vec{p}}{\varphi^*\cdot\ln\vec{r}} = -\alpha(q) \quad (27)$$

y

$$\frac{d^2\beta(q)}{d^2 q} = -\frac{1}{\varphi^*\cdot\ln\vec{r}}\sum_{k=0}^{s-1}\varphi_k^*\left(\ln p_k - \alpha(q)\ln r_k\right)^2 \quad (28)$$

Por otro lado, de la definición de β(*q*) esta derivada viene dada por

$$\frac{db(q)}{dq} = \left(\frac{dD}{da} - q\right)\frac{da}{dq} - a \quad (29)$$

Las ecuaciones combinadas (27) y (29) tenemos que:

$$\frac{dD}{da} = q \quad (30)$$

IV. Discusión

Los resultados dados por (27) y (30) implican que D(α) y β(*q*) son un par de transformadas de Legrende, por lo tanto, ambas funciones contienen la misma información, por lo que para encontrar el espectro de dimensión D(α).

(i) β(*q*) se encuentra resolviendo (26);

(ii) α(*q*) se evalúa usando (27);

(iii) D(*q*) se obtiene de (25); y

(iv) D(α) se obtiene cuando el parámetro *q* se elimina entre las funciones D(*q*) y α(*q*).

Hay un caso especial

$$p_k = r_k^C \text{ para todo K, cuando } \sum_{k=0}^{s-1} p_k = 1 \quad (31)$$

entonces C corresponde con D la dimensión de Hausdorff de F.

Usando este resultado en (17) el valor de la dimensión puntual es α = D, por lo tanto todos los puntos $x \in F$ tienen la misma dimensión puntual, esto implica que $b(q) = D - qD$ al introducirla en (25), tenemos

$$j_k^* = r_k^D = p_k \quad (32)$$

Este es el vector de frecuencia $\vec{\varphi}_N(x)$.

El comportamiento de la función β(*q*) es el siguiente:

(i) de (27) concluimos que $b'(q) < 0$, de modo que β(*q*) es estrictamente decreciente;

(ii) de (28) tenemos que $b''(q) > 0$ de modo que β(*q*) es una función convexa.

Por otro lado, obtenemos el comportamiento del espectro de dimensiones D(*q*) a partir de las ecuaciones (25), (27) y (28):

$$D'(q) = qa'(q) = -qb''(q) \quad (33)$$

por lo tanto, D(*q*) es estrictamente creciente de -∞ a 0 y estrictamente decreciente de 0 a ∞. Y tiene un máximo para *q*=0.

V. Conclusiones

Mostramos que existe una diferencia esencial entre la descomposición geométrica y la descomposición estadística; ya que en la segunda, el fractal *F* se descompone en

multifractales, lo que hace necesario la introducción de un principio extremal para el cálculo de la Dimensión de Hausdorff de los conjuntos Jα. Lo importante de este punto de vista es que el principio extremal nos lleva de manera natural a obtener la función auxiliar de Cawlin y Mauldin, la cual fue introducida como un postulado para hacer la descomposición estadística. El punto de vista que nosotros tomamos permite encontrar directamente la relación entre la función $\beta(q)$ y la dimensión fractal $D(\alpha)$ del conjunto Jα, encontrando directamente que estas funciones conforman un par de funciones de Legendre, lo cual en el tratamiento de Cawlin y Mauldin se establece de una manera más compleja.

REFERENCIAS

[1] Barnsley M F 1986 *Fractals Everywhere* (Boston: Academic Press)
[2] Hutchinson J 1981 Fractals and self-similarity *Ind. J. Math* **30** 713-747
[3] Cawley R and Mauldin R D 1992 Multifractal decompositions on moran fractals *Adv. Math.* **92** 196-236
[4] Edgar G A 1998 *Integral, Probability, and Fractal Measures* (New York: Springer Verlag)
[5] Mandelbrot B 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: W. H. Freeman)
[6] Billingsley P 1965 *Ergodic Theory and Information* (New York: John Wiley)

ISSN: 2594-1011

El electromagnetismo donde todo se puede modelar. Tratamiento multipolar de sistemas vivos como la anguila eléctrica (electrophorus electricus).

Brenda Elizabet Jiménez Ramos[1], Rafael Zamorano Ulloa[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (044) 55 3593 4907 E-mail: bren10jr@hotmail.com

Resumen — **El electromagnetismo es un área de la física que puede describirnos cientos de miles de fenómenos inmersos en la naturaleza. Es de suma importancia saber que la generación de cargas eléctricas está también relacionada con la vida misma, partiendo de la célula primigenia la cual ya está dotada con un potencial eléctrico y cierta polarización. Este es un ejemplo básico, pero ahora especializándonos un poco más en anguilas eléctricas, esta especie de pez puede generar bajos y altos potenciales los cuales pueden llegar hasta los 600-900V. El problema general de este trabajo es conocer como las anguilas eléctricas son capaces de generar esta cantidad de voltaje con descripción física, aquí mostramos que por medio del análisis de la electrodinámica podemos saber qué es lo que ocurre con los campos electromagnéticos que produce la anguila los cuales están íntimamente relacionados con los potenciales. Hemos encontrado que las anguilas eléctricas poseen una densidad de carga positiva en la parte superior de su cuerpo, mientras que en la parte inferior se describe una densidad de carga negativa, lo que superpone a un dipolo eléctrico perfecto. Nuestros resultados se basan en el comportamiento de los campos electromagnéticos y que repercusión tienen con sus potenciales.**

Palabras Clave – **Anguila, campos, densidades, dipolo, eléctrica, electromagnetismo, potenciales.**

Abstract — **Electromagnetism is an area of physics that can describe hundreds of thousands of phenomena immersed in nature. It is very important to know that the generation of electric charges is also related to life itself, starting from the primitive cell which is already closed with an electric potential and a certain polarization. This is a basic example, but now specializing a little more in electrical pipes, this fish species can generate low and high levels that can reach up to 600-900V. The general problem of this work is to know how electric eels are able to generate this voltage with the physical description, here we show that through the analysis of electrodynamics, we can know what happens with the electromagnetic fields that produce the eel which are closely related to the potentials We have found that electric eels have a positive charge density in the upper part of their body, while the lower part is described as a negative charge density, which superimposes a perfect electric dipole. Our results are based on the behavior of electromagnetic fields and the impact they have on their potentials.**

Keywords — **Anguilla, fields, densities, dipole, electric, electromagnetism, potentials.**

I. Introducción

La anguila eléctrica (electrophorus electricus) se destaca como depredador formidable en virtud de su poco común eléctrico armamento y estrategias de caza únicas. Cuando golpean, las anguilas eléctricas generan cientos de voltios de electricidad, entregados en pulsos de 1 ms, la descarga eléctrica de ataque de la anguila generalmente activa las neuronas motoras de las presas cercanas, de modo que cada pulso eléctrico se traduce en un potencial de acción de la neurona motora de la presa e, inevitablemente, poco después, en una contracción muscular. Las altas tasas de descarga causan altas tasas de contracción muscular, lo que resulta en la inmovilización del tétanos en las presas (y en posibles depredadores). Las anguilas aprovechan este breve período de inmovilidad para capturar a sus presas, que luego se tragan enteras [1].

Cabe señalar que también es legendaria por esta misma capacidad para incapacitar a los peces, humanos y caballos con cientos de voltios de electricidad. Pocas especies han cosechado más interés e investigación histórica que las anguilas eléctricas. Utilizados por primera vez como fuente de electricidad apreciada en experimentos de Walsh, Humboldt y Faraday, desempeñaron un papel fundamental en el aislamiento del receptor de acetilcolina y en la determinación de la estructura de los canales de sodio con tensión [2]. La producción y detección de campos eléctricos es esencial para los organismos vivos, desde la célula unitaria hasta los humanos.

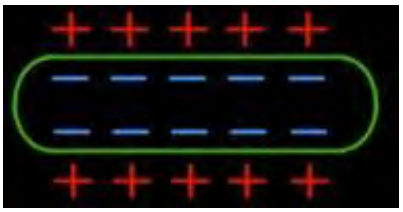


Fig.1 Forma canónica de cualquier tipo de célula, la cual llamaremos para fines prácticos célula unitaria [3].

Caracterizar las fuentes de corriente, $\vec{J}(x,y,z;t)$ desconocidas que generan un campo bioeléctrico particular es un problema fundamental que se presentan en una amplia variedad de contextos biológicos, incluida la interpretación de electrocardiogramas (ECG), electroencefalogramas

(EEG), así como los registros de estimulación cerebral profunda e interfaces cerebro-máquina. La biónica, y la medicina del futuro necesitan un conocimiento más profundo del bio-electromagnetismo en particular la generación de campos bio-electromagnéticos.

Esta parte es de gran interés para nosotros ya que las anguilas eléctricas no son una carga puntual en movimiento, sino que, posee órganos eléctricos están ubicados en la zona craneal, y consisten en tres pares diferenciados empleados con fines distintos; están formados por miles de electrocitos conectados en serie. Un par, llamado órgano de Sachs en honor al naturalista Carl Sachs, produce descargas de bajo voltaje (alrededor de 10 V), empleadas para detectar posibles presas y comunicarse con otros gimnótidos; el pez cuenta con numerosos módulos receptores distribuidos de manera irregular sobre la piel para percibir las emisiones de este tipo. Los otros dos pares, llamados órganos de Hut y Main, producen descargas hasta 5 veces más potentes, con las que la anguila atonta a sus potenciales presas. Puede mantener la producción de descargas durante períodos de hasta 1 minuto.

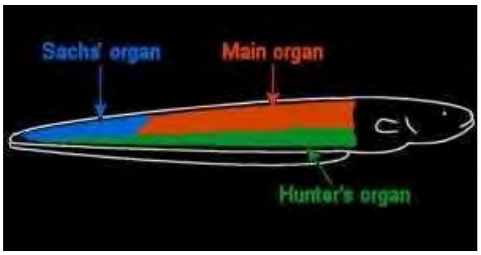


Fig. 2 La anguila eléctrica posee tres órganos eléctricos distribuidos en su alargado cuerpo, cada uno de ellos lo utiliza para cosas distintas o más generalmente para generar alto o bajo voltaje, es de suma importancia que la anguila desarrolla un electrolocalización gracias a su órgano eléctrico llamado Sachs el cual genera bajas intensidades de voltaje, los campos electromagnéticos se propagan como ondas en el medio, y al rebotar en un "obstáculo" (el cual puede ser una roca, hasta un pez que será la comida de la anguila) al regresar la onda y ser captada por la anguila sabe lo que tiene en frente, esto se desarrolla evolutivamente por la mala visión que posee la anguila, mientras que los órganos de Main y Hunter los utiliza para generar voltajes de alta intensidad para cazar a sus presas o para defenderse en caso de ser atacadas.

La electrorrecepción es la fuente alternativa de percepción sensorial utilizada por los peces eléctricos. Hay dos tipos básicos de células que pueden percibir frecuencias eléctricas, ambas derivadas de los detectores de línea lateral, células que se encuentran en los peces para la detección de movimiento en el agua [5].

Más en general los emisores de corrientes eléctricas se encuentran con forma de carga positiva en la parte superior de la anguila. Y como carga negativa en la parte baja, es importante notar que la anguila eléctrica posee receptores eléctricos y mecánicos que en conjunto ayudan a la electrolocalización para saber que hay a su alrededor, y esencialmente para reconocer a sus presas o un posible depredador.

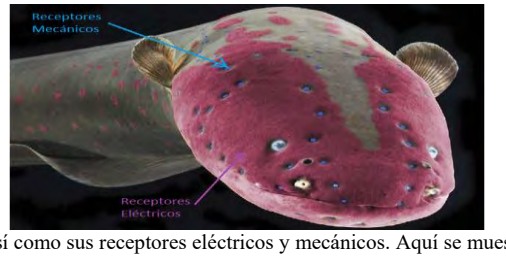


Fig. 3 Así como sus receptores eléctricos y mecánicos. Aquí se muestra que las anguilas eléctricas usan alta tensión simultáneamente como un arma y para una electrolocalización precisa y rápida de las presas y los conductores que se mueven rápidamente.

La evolución de la anguila nunca tuvo un paso en falso para poder generar esta cantidad de voltajes de la forma en la que los electrocitos parecieran se conectan en serie unos sobre otros para una mayor producción de potencial.

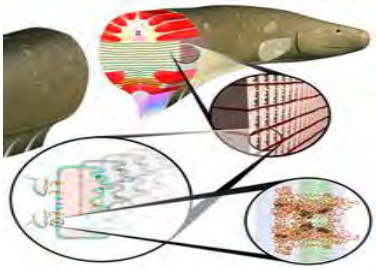


Fig. 4 Para ejemplificar los electrocitos se muestran de forma cuadrada aplicados los unos sobre los otros. Según explican los investigadores en la revista especializada Nature Nanotechnology, las membranas celulares de órganos eléctricos de la anguila contienen, a escala manométrica, numerosos conductores con forma de canales receptores de iones y canales bombeadores de iones. Todos estos canales trabajan juntos para formar gradientes de concentración iónica a través de toda la membrana, y provocar así la liberación de un potencial de acción (o impulso eléctrico) [6].

II. METODOLOGÍA

A. Electromagnetismo canónico: Las ecuaciones de Maxwell.

Sabemos que las soluciones para los campos eléctrico y magnético de las ecuaciones de maxwell pueden expresarse como ondas. Estas ondas corresponden a los fenómenos de radio, luz, rayos x, etc., dependiendo de la longitud de onda. Se puede expresar que las ecuaciones de maxwell son base para tratamiento en la luz. Comenzaremos escribiendo las ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos producidos por una carga que se mueve de forma arbitraria.

Si una carga se mueve de forma arbitraria que en este caso de estudio es la distribución de carga es la que posee la anguila, el campo eléctrico que encontraríamos ahora en algún punto depende solamente de la posición y no del movimiento de la carga por ahora, sino en un momento anterior, en un instante que es más temprano en el tiempo que

tomaría luz, yendo a la velocidad c, para recorrer la distancia $\boldsymbol{r'}$ desde la carga hasta el punto de campo [7].

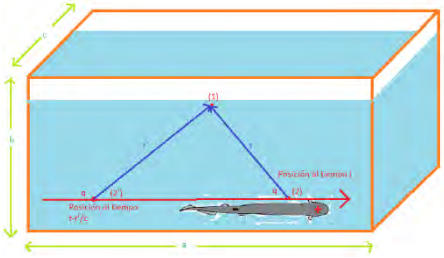


Fig. 5 Análogamente y en el sistema de estudio de las anguilas tenemos que la posición que medimos es la (2'), es decir en un tiempo retardado, inmersa en un medio el cual es el agua, y las condiciones de frontera están impuestas por las dimensiones de la pecera con coordenadas rectangulares en x=a, y=b, z=c, además de que en un caso más real serían las dimensiones del rio igualmente con las mismas coordenadas.

Así que aquí está el centro del universo del electromagnetismo: la teoría completa de la electricidad y el magnetismo, y de la luz; una descripción completa de los campos producidos por cualquier cargo por movimiento; y más. Todo está aquí. Aquí está la estructura construida por Maxwell, completa en todo su poder y belleza. Es probablemente uno de los mayores logros de la física. Para recordarle su importancia, vamos a poner todo junto en un marco agradable.

Cuadro Jiménez Zamorano Feynman
Umbrella del conocimiento electromagnético.
Descripción global de todos los fenómenos relacionados con la electricidad y el magnetismo.

Ecuaciones de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boldsymbol{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boldsymbol{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \qquad \boldsymbol{c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Soluciones generales:

$$\boldsymbol{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \qquad \boldsymbol{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$$\boldsymbol{V(1,t) = \int \frac{\rho\left(2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} d\tau_2} \quad \boldsymbol{\vec{A}(1,t) = \int \frac{\vec{j}\left(2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}} d\tau_2}$$

Complementando:

$$\boldsymbol{\rho_T = \rho_f + \rho_p} \qquad \boldsymbol{\vec{J_T} = \vec{J_f} + \vec{J_p} + \vec{J_\mu} + \vec{J_D}}$$

$$\boldsymbol{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

Identificar y comprender las fuentes actuales que dan origen a los campos bioeléctricos es un problema fundamental en las ciencias biológicas. Es muy difícil, por ejemplo, atribuir las características variables en el tiempo de un electroencefalograma registrado desde la superficie de la cabeza a la actividad neuronal de áreas específicas del cerebro; los sistemas modelo pueden proporcionar información importante sobre tales problemas. Algunas especies de peces generan activamente un campo eléctrico cuasi-dipolo oscilante (c 1000 Hz) para comunicarse y sentir su ambiente en la oscuridad. Un órgano eléctrico especializado comprende células de tipo neuronal cuya señal colectiva subyace a este campo eléctrico. Como un paso hacia la comprensión de la biofísica detallada de la generación de señales en estos peces, utilizamos un enfoque de modelado de elementos finitos detallado anatómicamente para realizar ingeniería inversa de la señal del órgano eléctrico en un ciclo de oscilación. Encontramos que el perfil espaciotemporal de la corriente a lo largo del órgano eléctrico constituye una onda progresiva que está bien descrita por dos componentes espaciales de Fourier que varían en el tiempo [4].

B. El potencial de una carga en movimiento; la solución general de Liénard y Wiechert

En la última sección hicimos una simplificación al calcular nuestra integral para $\vec{A}$ considerando solo las velocidades bajas. Pero al hacerlo, nos perdimos un punto importante y también uno en el que es fácil equivocarse. Por lo tanto, ahora abordaremos un cálculo de los potenciales para que una carga puntual se mueva de cualquier forma, incluso con una velocidad relativista. Una vez que tengamos este resultado, tendremos el electromagnetismo completo de las cargas eléctricas.

Tratemos de calcular el potencial escalar $V(1)$ en el punto (x_1, y_1, z_1) producido por una carga puntual, como un electrón, moviéndose de cualquier manera. Al proponer una carga "puntual" nos referimos a una bola de carga muy pequeña, encogida lo más diminuta que se quiera, con una densidad de carga $\rho(x, y, z)$. Podemos encontrar V de la ecuación $V(1,t) = \int \frac{\rho(2, t - \frac{r_{12}}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} d\tau_2$:

$$V(1,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}} d\tau_2 \quad \ldots\ldots (1)$$

La respuesta parece ser, y en casi todos, al principio, pensarían que la integral de esa carga de ρ "puntual" es solo la carga total q, de modo que:

$$V(1,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \quad (esto\ es\ incorrecto)$$

Por r'_{12} nos referimos al vector de radio desde la carga en el punto (2) al punto (1) en el tiempo retardado $(t - \frac{r_{12}}{c})$. Está mal, la respuesta correcta es:

$$v(1,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'_{12}}\cdot\frac{1}{1-\frac{v_{r'}}{c}} \quad \ldots\ldots(2)$$

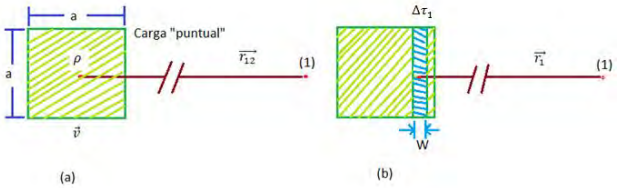


Fig. 6 Una carga "puntual", considerada como una pequeña distribución cúbica de carga ρ, se mueve con la velocidad $\vec{v}$ hacia el punto (1). (b) El elemento de volumen $\Delta\tau_1$ utilizado para calcular los potenciales.

Donde $v_{r'}$, es la componente de la velocidad de la carga paralela a r'_{12}, es decir, hacia el punto (1). Ahora te mostraremos por qué. Para que el argumento sea más fácil de seguir, haremos primero el cálculo de una carga "puntual" que tiene la forma de un pequeño cubo de carga que se mueve hacia el punto (1) con la velocidad v, como se muestra en la figura 6 (a). Deje que la longitud de un lado del cubo sea a, lo que consideramos que es mucho, mucho menos que r_{12}, la distancia desde el centro de la carga hasta el punto (1).

Ahora para evaluar la integral de la ecuación (1), volveremos a los principios básicos; lo escribiremos como la suma:

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} \quad \ldots\ldots(3)$$

Donde r_i es la distancia desde el punto (1) al i-ésimo elemento de volumen ΔV_i y ρ_i es la densidad de carga en ΔV_i en el momento $t_i = t - \frac{r_i}{c}$. Donde $r_i \gg a$, siempre, será conveniente tomar nuestro ΔV_i en forma de rebanadas finas y rectangulares perpendiculares a r_{12}, como se muestra en la figura 6 (b).

Supongamos que comenzamos tomando los elementos de volumen $\Delta\tau_i$ con un espesor w mucho menor que a. Los elementos individuales aparecerán como se muestra en la figura 7 (a), donde hemos incluido más que suficiente para cubrir la carga. Pero no hemos demostrado la carga, y por una buena razón. ¿Dónde deberíamos dibujarlo? Para cada elemento de volumen $\Delta\tau_i$ tenemos que tomar ρ en el momento $t_i = (t - \frac{r_i}{c})$, pero dado que la carga se está moviendo, está en un lugar diferente para cada elemento de volumen $\Delta\tau_i$.

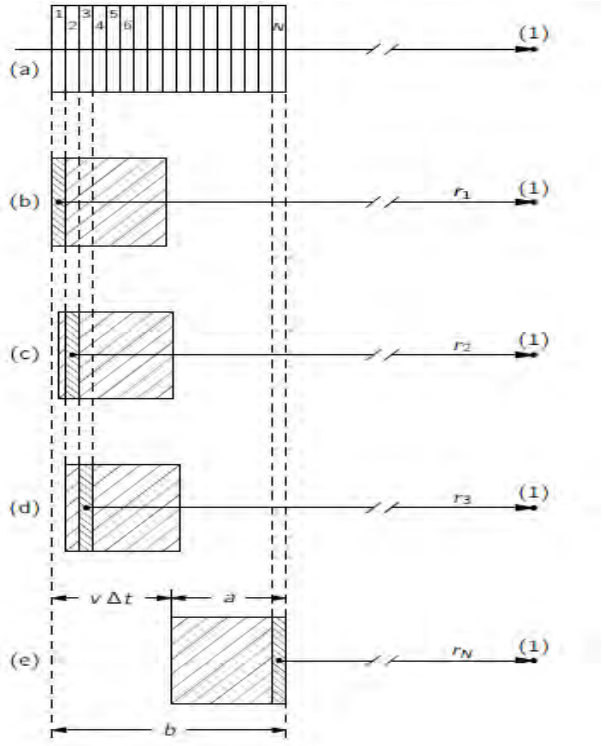


Fig. 7 Integrando $\rho(t - \frac{r'}{c})d\tau$ para una carga en movimiento. Esto es inevitablemente por que las anguilas están en movimiento de la misma forma que los electrocitos, y la naturaleza no se equivoca, pues cuando la anguila realiza una descarga debe ser lo más rápido y eficiente para hacer que su presa se inmovilice, pues las descargas eléctricas producen que los músculos de la presa se contraigan impidiendo el movimiento y que este pueda escapar.

Digamos que comenzamos con el elemento de volumen etiquetado "1" en la figura 7 (a), elegido de modo que en el momento $t_1 = (t - \frac{r_1}{c})$ el borde "posterior" de la carga ocupa $\Delta\tau_1$, como se muestra en la figura 7 (b). Entonces cuando evaluamos $\rho_2\Delta\tau_2$, debemos usar la posición de la carga en el momento ligeramente posterior $t_2 = (t - \frac{r_2}{c})$, cuando la carga estará en la posición que se muestra en la figura 7 (c). Y así sucesivamente, para $\Delta\tau_3$ y $\Delta\tau_4$, etc. Ahora podemos evaluar la suma.

Dado que el grosor de cada $\Delta\tau_i$ es w, su volumen es wa^2. Entonces, cada elemento de volumen que se superpone a la distribución de carga contiene la cantidad de carga $wa^2\rho$, dónde ρ es la densidad de carga dentro del cubo, que consideramos uniforme. Cuando la distancia desde la carga al punto (1) es grande, cometeremos un error insignificante configurando todos los r_i en los denominadores igual a un valor promedio, por ejemplo, la posición retardada r' del centro de la carga. Entonces la suma de la ecuación (3) es:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\rho w a^2}{r'}$$

Donde ΔV_N es el último ΔV_i que se traslapa con las distribuciones de carga, como se muestra en la figura 7 (e). La suma es, claramente:

$$N\frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'}\left(\frac{Nw}{a}\right)$$

Ahora ρa^3 es solo la carga total q y Nw es la longitud b que se muestra en la parte (e) de la figura 7. Entonces tenemos:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

¿Qué es b? Es la longitud del cubo de carga aumentada por la distancia movida por la carga entre $t_1 = (t - \frac{r_1}{c})$ y $t_N = (t - \frac{r_N}{c})$ que es la distancia que la carga se mueve en el tiempo:

$$\Delta t = t_N - t_1 = \frac{r_1 - r_N}{c} = \frac{b}{c}$$

Como la velocidad de la carga es v, la distancia que se movió es $v\Delta t = \frac{vb}{c}$. Pero la longitud b es esta distancia agregada a, entonces:

$$b = a + \frac{v}{c}b$$

Resolviendo para b, obtenemos:

$$b = \frac{a}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)}$$

Por supuesto, v significa la velocidad en el tiempo retardado $t' = (t - \frac{r'}{c})$, que podemos indicar escribiendo $[1 - \frac{v}{c}]_{ret.}$, y la ecuación 1.4 para el potencial se convierte en:

$$V(1,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right]_{ret.}}$$

Este resultado concuerda con nuestra afirmación, la ecuación (2). Hay un término de corrección que se produce porque la carga se mueve ya que nuestra integral "barre la carga". Cuando la carga se mueve hacia el punto (1), su contribución a la integral se incrementa en la relación $\frac{b}{a}$. Por lo tanto, la integral correcta es $\frac{q}{r'}$ multiplicada por $\frac{b}{a}$, que es $\frac{1}{[1-\frac{v}{c}]_{ret.}}$.

Si la velocidad de la carga no está dirigida hacia el punto de observación (1), puede ver que lo que importa es el componente de su velocidad hacia el punto (1). Llamando a este componente de velocidad v_r, el factor de corrección es $\frac{1}{[1-\frac{v}{c}]_{ret.}}$. Además, el análisis que hemos realizado va exactamente de la misma manera para una distribución de carga de cualquier forma; no tiene que ser un cubo. Finalmente, dado que el "tamaño" de la carga q no entra en el resultado final, el mismo resultado se mantiene cuando dejamos que la carga se reduzca a cualquier tamaño, incluso a un punto. El resultado general es que el potencial escalar para una carga puntual que se mueve con cualquier velocidad es:

$$V(1,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'\left[1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)\right]_{ret.}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Esta ecuación a menudo se escribe en la forma equivalente:

$$V(1,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left[r - \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right]_{ret.}} \quad \ldots\ldots (6)$$

Donde $\vec{r}$ es el vector de la carga al punto (1), dónde v está siendo evaluado, y todas las cantidades en el paréntesis deben tener sus valores en el tiempo retardado $t' = t - \frac{r'}{c}$.

Lo mismo ocurre cuando calculamos A para una carga puntual, desde la ecuación $\vec{A}(1,t) = \int \frac{j(2,t-\frac{r_{12}}{c})}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}} d\tau_2$. La densidad de corriente es $\rho\vec{v}$ la integral sobre ρ es lo mismo que encontramos para V El potencial del vector es:

$$\vec{A}(1,t) = \frac{qv_{ret}}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left[r - \left(\vec{v}\cdot\vec{r}/c\right)\right]_{ret}} \quad \ldots\ldots (7)$$

Liénard y Wiechert fueron los primeros que dedujeron los potenciales para una carga puntual, y por ello se les conoce como potenciales de Liénard-Wiechert.

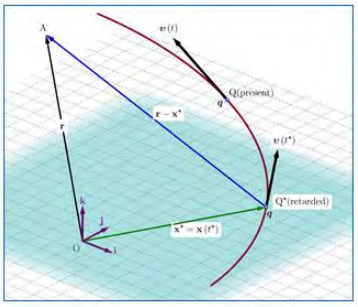


Fig. 8 Las figuras describen los potenciales de Liénard-Wiechert, que son quienes dedujeron los potenciales dados para una carga en movimiento.

Solo es necesario calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a partir de estos potenciales (usando $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\nabla V - {}^{\partial \vec{A}}/_{\partial t}$). Ahora lo que sigues es solo aritmética. La aritmética, sin embargo, está bastante involucrada, por lo que no escribiremos los detalles. Y tenemos que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\vec{E} = -\nabla V - {}^{\partial \vec{A}}/_{\partial t} \quad \ldots\ldots (9)$$

III. Resultados

Los campos eléctricos generados por peces débilmente eléctricos a menudo se comparan con los resultantes de un dipolo oscilante para el cual la polaridad de la cabeza y la cola son de signo opuesto. Sin embargo, en muchas especies, esta analogía no puede explicar las complejidades espaciotemporales observadas. Usando nuestro modelo, hemos predicho que estas variaciones involucran a que se propaga hacia abajo por el OE hacia la cola, viajando a ~ 210 m / s [4].

Es de nuestro interés el tratamiento para un dipolo, la anguila eléctrica utiliza su cuerpo como un dipolo eléctrico de su cabeza a su cola cuando logra atrapar a su presa, [8] por medio de un campo electromagnético, el cual se describe en la siguiente figura:

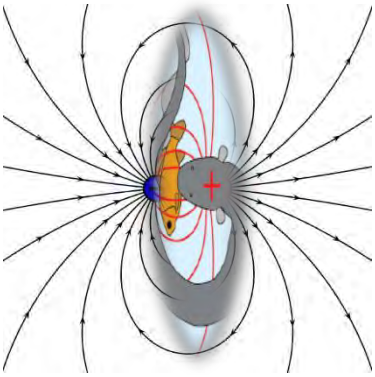


Fig. 9 Las líneas equipotenciales descritas por el pez son dadas a la naturaleza de las cargas distribuidas en su cuerpo como un dipolo eléctrico, es por eso que para sea una forma más amable de ver sobrepusimos los campos de la anguila eléctrica con la que produce un dipolo eléctrico y es increíble notar como son iguales, pues todo en la física de cargas eléctricas se describe de la misma forma. Las líneas equipotenciales nacen de las cargas positivas y llegan a las negativas.

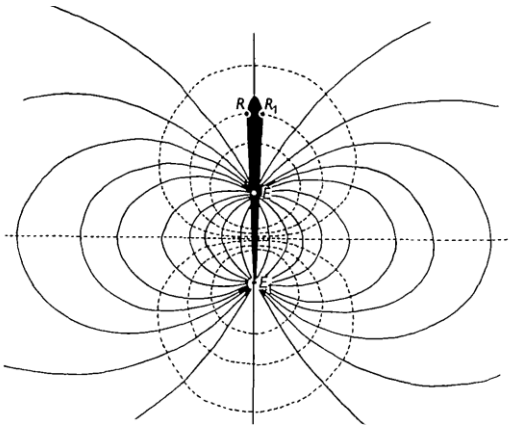


Fig. 10 Más aún, a pesar de que la anguila no este de forma alargada que es la forma en la que siempre se desplaza y viaja así, se sigue comportando como un dipolo, el motivo por el cual se dobla juntando su cola con densidad de carga negativa y la parte superior de su cuerpo que es de densidad positiva es para aumentar el potencial del dipolo.

IV. Discusión

El primer planteamiento inmediato que obtenemos al analizar como produce la anguila eléctrica su potencial, que es mayor al que poseen otros peces con capacidades eléctricas, es decir, entre más electrocitos que son los que poseen distribuidos en su mayor parte en la zona de la cabeza en la anguila eléctrica como se muestra en la figura 12, de forma inmediata como resultado de la física entre más cargas eléctricas hay más líneas de carga eléctrica, y por lo tanto más intensidad de potencial.

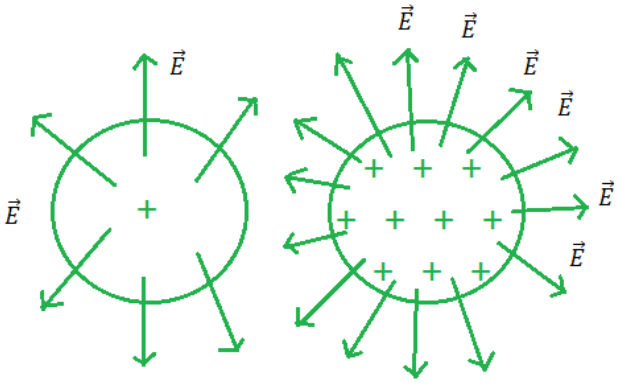


Fig. 11 Mostramos que entre más carga hay, más líneas de carga eléctrica, y por ende hay más potencial eléctrico, ya que el campo eléctrico y el potencial son directamente proporcionales.

Siguiendo esta interpretación física, obtenemos que de las líneas de campo eléctrico y como ya lo hemos demostrado sus líneas equipotenciales son perpendiculares a estas anteriores, lo cual nos da la forma y/o geometría del cuerpo en el cual está presente esta carga.

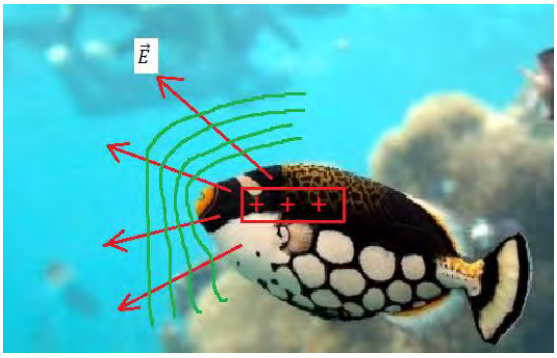


Fig. 12 En la siguiente figura se ejemplifica como un pez con distribución de carga positiva en la parte superior de su cuerpo, que es de donde salen las líneas de carga eléctrica y las líneas equipotenciales perpendiculares a ellas, las cuales describen la forma del portador.

Hemos también llegado a la interpretación por los potenciales de Liénard-Wiechert que a distancias lejos de la anguila esta se interpreta más como un dipolo eléctrico, mientras que cerca va perdiendo esta forma.

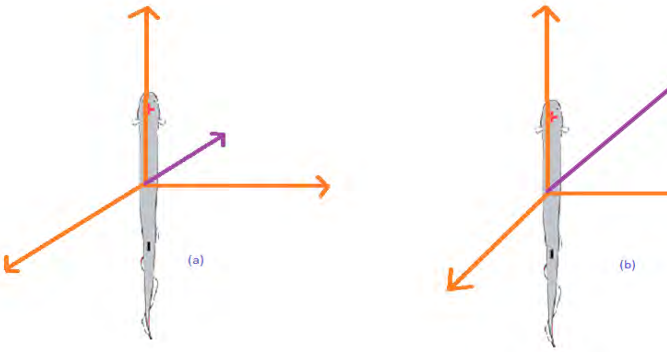


Fig.13 Mostramos en esta figura como es que hay campos cercanos y lejanos, ambos los podemos conocer, la diferencia es que mientras veamos los campos eléctricos producidos por la anguila entre más lejos estos serán mucho más notables a un dipolo eléctrico, mientras de forma contraria, es decir, más cerca esta forma se va perdiendo.

Los potenciales de Liénard-Wiechert también nos muestran que en el paso donde la anguila produce su mayor potencial que es cuando intensifica sus campos eléctricos al instante en el que ya tiene a su presa indispuesta a huir, este se dobla o dobla el dipolo que forma su cuerpo y en ese instante deja de viajar a través del agua, es por ello que consideramos el potencial estático.

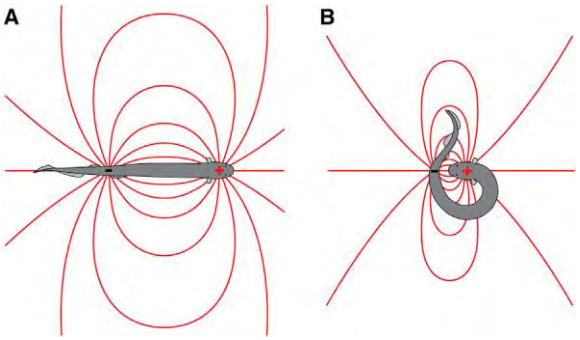


Fig. 14 (A) Campo dipolo que rodea una anguila eléctrica en una configuración lineal. Las líneas indican líneas de campo eléctrico (una carga de prueba positiva experimentaría una fuerza tangente a la línea en cualquier punto, en la dirección del polo negativo). Las líneas equipotenciales no están ilustradas, pero serían normales a las líneas de campo. La densidad (arbitraria) de las líneas de campo refleja la intensidad del campo eléctrico. (B) La intensidad del campo eléctrico se ha maximizado entre la boca y la cola mediante el curvado. El campo eléctrico real generado por una anguila muy probablemente divergiría de este esquema idealizado, por ejemplo, al tener fuentes más distribuidas de líneas de campo en la cabeza y la cola [8].

V. Conclusiones

Calculamos los potenciales V y A para fuente dipolar en movimiento, lo cual modela el órgano eléctrico (ρ(t),P(t),j(t)) de la anguila, mientras esta se está moviendo, obtenemos cierta información sobre las densidades de carga del órgano eléctrico de la anguila por extrapolación de las línea de campo eléctrico, E, hacia el interior del cuerpo de la anguila. El animal posee una concentración de carga positiva distribuida en su cabeza de la cual salen las líneas del campo electrito. Por otro lado las líneas equipotenciales van rodeando la cabeza del animal. Pero como la física lo demanda estas líneas equipotenciales son perpendiculares al campo eléctrico. La parte inferior del cuerpo de la anguila posee una distribución de carga negativa que pertenece a la entrada de líneas de campo eléctrico.

La naturaleza nuca se equivoca, es por ello que la anguila sabe que la intensidad de voltaje que debe aplicar cuando está cerca o lejos de una presa o depredador, y cuando tiene una presa cerca esta se dobla aumentando el potencial del dipolo que forma con su cuerpo.

Es increíble como la evolución ayuda a la anguila a formar pilares de electrocitos para poder generar estos potenciales con valores tan grandes que van de los 600 a los 900 volts, y utilizar también potenciales bajos para usarlos como electrolocalización. Esto es gracias a que posee una gran cantidad de electrocitos en su cuerpo, es decir, entre más carga posee más líneas de campo eléctrico y una mayor intensidad.

Sin lugar a dudas la física es una herramienta que abre puertas en diversos temas, como en la biología, la cual nos permite entender de forma más completa el cómo se comportan los campos electromagnéticos generados por las anguilas, como

un dipolo oscilante de forma más clara estando a una distancia grande, la cual se va perdiendo conforme se acerca a la anguila. Y se recupera el dipolo cuando el animal se dobla para poder engullir su presa una vez que esta ya ha sido atrapada en un primer paso.

AGRADECIMIENTOS

Brenda E. Jiménez agradece el trabajo de su coautor y maestro por todo lo enseñado e inculcado para la investigación en el ámbito científico.

REFERENCIAS

[1] Kenneth Catania T., "The shocking predatory strike of the electric eel" (Science Research, 5 DECEMBER 2014) VOL 346 ISSUE 6214.

[2] Kenneth C. Catania, "Electric eels use high-voltage to track fast-moving prey" (Nature Communications Published 20 Oct 2015).

[3] George B., et. al. "Physics: With illustrative examples from medicine and biology", Vol. 3: Electricity and Magnetism. ADDISON WESLEY.

[4] Nature Reports 2015 "Ultrafast traveling wave dominates the electric organ discharge of Apteronotus leptorhynchus: an inverse modelling study". Aaron R. Shifman1, 2, André Longtin2, 3 & John E. Lewis1, 2; Page1, 2, 10.

[5] University of Briston http://www.chm.bris.ac.uk/webprojects2001/riis/electriceels.htm.

[6] Jian Xu & David A. Lavan. "Designing artificial cells to harness the biological ion concentration gradient". Nature nanotechnology. Vol 3 Page 666-670 Year 2008

[7] Richard Feynman, Lectures Feynman Vol. II, Chapter 21. Editorial-Page-

[8] Kenneth Catania T. "Electric Eels Concentrate Their Electric Field to Induce Involuntary Fatigue in Struggling Prey" (Current Biology) VPY

ISSN: 2594-1011

Tasa de Formación Estelar en el UV de las Galaxias Coloreadas

V. Hernández-Rosas[1], A.M. Hidalgo -Gámez[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México, Ciudad de México
Telefono: 57296000 Ext. 55017
E-mail: veronicahdr@gmail.com, ahidalgo@esfm.ipn.mx

Resumen — **Las galaxias coloreadas son aquellas que presentan colores anómalos en la imagen compuesta *gri*, en concreto verde, púrpura, y azul brillante. Tienen apariencia compacta, bajas metalicidades y un valor muy alto del ancho equivalente de la línea [OIII]λ5007Å que parece indicar la presencia de un brote de formación estelar extremadamente activo. En este trabajo se obtiene la tasa de formación estelar (SFR) en el UV para una muestra de estas galaxias. Es interesante que las galaxias con colores verdes presenten mayor SFR que las galaxias con tonos azules o púrpuras.**

Palabras Clave – **Formación estelar, función de luminosidad, galaxias: compactas, galaxias: evolución, galaxias: starburst**

Abstract — **Coloured galaxies are those with anomalous colors in the *gri* composite image, specifically green, purple, and bright blue. Also they have a compact appearance, low metallicity, and a very high value of the equivalent width of line [OIII]λ5007Å. This value might indicate the presence of an extremely active star formation starburst. In this investigation the Star Formation Rate (SFR) for a sample of these galaxies is obtained from the far UV image from the GALEX telescope. It is interesting that galaxies with green colors have higher SFR than galaxies with blue or purple tones.**

Keywords — **galaxies: compact, galaxies: evolution, galaxies: starburst, luminosity function, star formation.**

I. Introducción

Las galaxias coloreadas son galaxias que presentan colores anómalos en la imagen compuesta de los filtros *gri* del Sloan Digital Sky Survey (SDSS)[1].

Se tienen verdes, púrpuras, azul brillante, rosa, gris y café, pero las tres primeras son las más numerosas y por tanto el objeto de estudio en esta investigación.

La característica principal de todas ellas es la gran anchura equivalente (EW) de la línea de oxígeno $[OIII]\lambda 5007Å$, que parece indicar la presencia de un brote de formación estelar extremadamente activo.

(1) http://www.sdss.org/

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-2018-1188

El subgrupo verde, llamado Green Pea (GP), fue el primero en detectarse [1] teniendo una alta tasa de formación estelar y baja metalicidad [2]. [3] concluyen que las GP caracterizadas por una fuerte formación estelar son una etapa corta de evolución de las galaxias compactas azules (BCG). Por otro lado, [4] proponen que estas galaxias podrían ser parecidas a las Lyman Break Galaxies del universo temprano. Además, proponen que los distintos colores que exhiben son debidos a que están a diferentes redshifts y la línea [OIII]λ5007Å cae en diferentes bandas. Sin embargo, en un estudio fotométrico y espectroscópico realizado por [5] para una muestra de estas galaxias sugiere que podrían no ser el mismo tipo de galaxias aunque todas se encuentran en fase de starburst.

La idea de este trabajo es estudiar la emisión en el ultravioleta de estas galaxias y, a partir de esta, obtener la tasa de formación estelar en el UV. Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección II se detalla la selección de la muestra, en la sección III se presenta la reducción de datos y obtención del flujo y la luminosidad, en la sección IV se explica cómo se obtiene la SFR y se discuten los resultados, finalmente en el sección V se presentan las conclusiones.

II. Selección de la Muestra

La muestra de galaxias aquí estudiada proviene del catálogo SHOC de galaxias con líneas de emisión estudiado por [6]. De las 612 galaxias de este catálogo se tomaron aquellas para las que la EW de la línea [OIII]λ5007Å fuera mayor que 200Å y que tuvieran un radio petrossian menor a 2" para las muy distantes y menor a 4" para las más cercanas. Así se tiene una muestra de 81 galaxias con alta formación estelar y de apariencia puntual. De ellas, 33 presentan un color verde en la imagen compuesta de los filtros *gri* del SDSS, 21 son púrpuras y 26 son azul brillante. Esta muestra se correlacionó con la base de datos del Telescopio Galaxy Evolution Explorer (GALEX)[2] con el fin de obtener imágenes de aquellas que habían sido observadas tanto en el lejano como en el cercano ultravioleta (FUV y NUV respectivamente). Se encontraron solo 48 de las 81 galaxias originales con la posibilidad de obtener los datos necesarios para el cálculo de la SFR. La submuestra final aquí estudiada comprende 17 galaxias verdes, 17 púrpuras y

14 azules. En la Figura 1. se observa un ejemplo de galaxias de cada grupo.

En una observación detallada de las imágenes se determina que las galaxias no parecen tener compañeras cercanas. Además, los tres grupos presentan alta emisión en el UV, aparentemente las verdes más que los otros grupos.

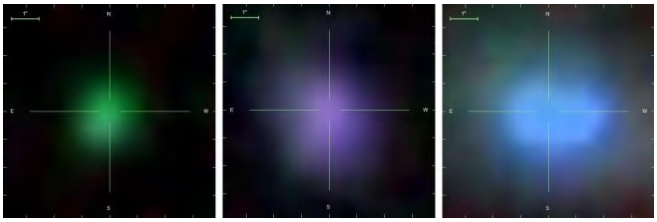


Figura 1. Galaxias coloreadas: J004054.31+153409.8, J010513.47-103740.9, J003218.59+150014.0

III. Reducción y análisis de datos

El flujo de las galaxias en el FUV y NUV se calcula a partir de las magnitudes que se obtienen de las imágenes de GALEX. Dichas imágenes ya están reducidas y calibradas por el equipo técnico del telescopio. Sin embargo, nosotros decidimos hacer las substracción del background (contaminación de fondo que existe en la imagen), ya que es el proceso más delicado de la reducción de datos, y al ser nuestras galaxias muy pequeñas y puntuales y el campo con el que trabaja GALEX es muy grande, el flujo de estas podría verse afectado por una substracción de cielo no centrada en la galaxia. La rutina de substracción del background, así como la obtención de las magnitudes se realiza por medio del software Source Extractor (SE). Este normalmente es usado para la detección y fotometría de fuentes en imágenes fits.

Una vez obtenidas las magnitudes se requiere hacer la llamada corrección K, pues la radiación electromagnética experimenta un corrimiento al rojo debido a la expansión del universo y la magnitud que se obtiene de un objeto con un alto redshift (z) no es la misma que obtendríamos si dicho objeto estuviera a z=0, es decir, si no tuviera tal corrimiento. Esta corrección nos da la diferencia que existe entre dichas magnitudes. El factor de la corrección K se obtiene usando el K-correction calculator desarrollado por [7]. La corrección K se aplica únicamente para la magnitud en el FUV por razones prácticas en el desarrollo de este trabajo.

El flujo de las galaxias se obtiene a partir de la magnitud corregida, usando la siguiente expresión:

$$F_0 = 10^{\frac{m_0}{-2.5}} \tag{1}$$

Donde m_0 representa la magnitud, y F_0 el flujo del objeto. Al flujo obtenido se le hace una corrección por extinción, debida a que parte de la radiación que emite el objeto es dispersada y absorbida en el medio interestelar. Para dicha corrección se utiliza la siguiente expresión:

$$F_c = F_0 * 10^{0.4\,A_{FUV}} \tag{2}$$

Donde F_c es el flujo corregido y A_{FUV} el coeficiente de extinción total que representa tanto la extinción interna (de la galaxia en cuestión) como la extinción galáctica (debida al polvo de nuestra galaxia).

Para el cálculo de la extinción interna usamos la expresión propuesta por [8]:

$$A_{iFUV} = \begin{cases} 2.99\,(m_{FUV} - m_{NUV}) + 0.27, & (m_{FUV} - m_{NUV}) < 0.90 \\ 2.96\,, & (m_{FUV} - m_{NUV}) \geq 0.90 \end{cases} \tag{3}$$

Por otro lado, para el cálculo de la extinción galáctica usamos la curva de extinción galáctica de [9], de modo que:

$$A_{gFUV} = 8.15\,E(B-V) \tag{4}$$

Donde $E(B-V) = A_B - A_V$. Así el coeficiente de extinción total de la ecuación (2) será:

$$A_{FUV} = A_{iFUV} + A_{gFUV} \tag{5}$$

A partir del flujo corregido se obtiene la luminosidad de las galaxias, tomando en cuenta que esta es proporcional al flujo emitido y al cuadrado de la distancia al objeto. Para estos cálculos se utiliza la distancia catalogada en el RC3 [10] tomada de la base de datos NASA/ IPAC Extragalactic DataBase (NED)[3].

La luminosidad se determina mediante la expresión:

$$L_{cFUV} = 4\pi D_L^2 F_{cFUV} \tag{6}$$

El valor obtenido de la magnitud, flujo y luminosidad para cada galaxia de la muestra se presentan en la tabla 1.

IV. Tasa de formación estelar (SFR)

La tasa de formación estelar nos dice cuántas estrellas se están formando en determinado tiempo dentro de nuestras galaxias. Normalmente esta se da en masas solares por año ($M_\odot$/yr). Al principio se mencionó que debido al ancho equivalente de la línea $[OIII]\lambda 5007$Å se cree que hay un brote de formación estelar muy intenso en ellas, lo que motiva a realizar este cálculo. Además, la SFR brinda información importante acerca de la evolución de las galaxias.

(2) http://galex.stsci.edu/GR6/
(3) https://ned.ipac.caltech.edu/

Para el cálculo de la SFR en el UV consideramos la siguiente relación [8]:

$$SFR_c\left[M_\odot\, yr^{-1}\right] = 1.08 \times 10^{-28}\, L_{cFUV}\, [erg\, s^{-1}\, Hz^{-1}] \quad (7)$$

Los valores determinados del Flujo, Luminosidad y SFR corregidos para cada galaxia de la muestra se presentan en la Tabla 1. En la Tabla 2 se presentan los valores promedio de cada uno de los grupos de galaxias coloreadas, junto con los valores del flujo en el FUV y la luminosidad.

Tabla 2. Valores promedio del flujo, luminosidad y SFR para cada grupo de galaxias.

Valores Promedio	Verdes	Púrpuras	Azules
Flujo ($x10^{-28}$erg s^{-1}cm^{-2}Hz^{-2})	0.73	1.18	4.31
Luminosidad ($x10^{28}$erg s^{-1} Hz^{-1})	7.78	1.76	0.56
SFR ($M_\odot$ yr^{-1})	8.51 ±0.62	1.90 ±0.14	0.61 ±0.04

La diferencia de valores entre los tres grupos se ve bien en la Tabla 2, donde las galaxias verdes tienen una SFR en promedio tres veces superior a la de las púrpuras y casi 15 veces superior a las de las azules. Esto puede indicar dos cosas. Una sería que el brote de las galaxias azules es menos intenso que el de las galaxias verdes, lo que indicaría que aunque las tres tienen un brote intenso, las verdes están sufriendo realmente una fase starburst mientras que las azules solo tienen un brote de formación estelar. La otra explicación es que el brote de formación estelar es más antiguo en las galaxias azules y, por tanto, estas casi no tienen ya gas para seguir formando estrellas. Como las galaxias azules están más cerca que las verdes, entonces se puede ver que los tres tipos de galaxias serían iguales pero el brote va declinando y por eso cambia el color de las mismas. Sin embargo, los resultados obtenidos por Miranda-Pérez et al. (en preparación) calculando la edad del brote mediante la anchura equivalente de Hβ, tal y como indican [11], no parecen que confirmen esta explicación.

Por otro lado, Magaña-Serrano et al. (enviado) encontraron que la SFR promedio de galaxias tardías, Sm e irregulares es de 0.1 o menor, por lo que se podría concluir que las galaxias del grupo azul que tienen una SFR promedio de 0.61 estarían experimentando solo un brote de formación estelar.

V. Conclusiones

Se obtiene la Tasa de Formación Estelar para una muestra de 48 galaxias coloreadas. Estas presentan tres colores: verdes (guisantes) y púrpuras y azules brillantes (canicas). Se observa que las primeras tienen una SFR mucho mayor que la que presentan las galaxias de los otros dos grupos. Esto puede ser una indicación de que el brote de formación estelar que están sufriendo las galaxias verdes es o más intenso o más joven que el brote que sufren las galaxias púrpuras y azules. Aunque la SFR promedio de las galaxias azules indica que estas pueden estar experimentado solo un brote de formación estelar y no están realmente en una fase de starburst.

Referencias

[1] Cardamone, C., Schawinski, K., Sarzi, M., Bamford, S.P., et al., 2009, "Galaxy Zoo green peas: discovery of a class of compact extremely star-formig galaxies", MNRAS,399,1991-1205.

[2] Amorín, R.O., Perez-Montero, E., Vílchez, J.M., & Papaderos, P., 2012, "The star formation history and metal content of the green peas. New detailed GTC-OSIRIS spectrophotometry of three galaxies", ApJ, 749,185.

[3] Amorín, R.O., Perez-Montero, & E., Vílchez, J.M., 2010, "On the oxygen and nitrogen chemical abundances and the evolution of the "green pea" galaxies", ApJL, 715, L128.

[4] Izotov, Y.I., Guseva N.G., & Thuan T.X., 2011, "Green Pea galaxies and cohorts: luminous compact emission-line galaxies in the Sloan Digital Sky Survey", ApJ, 728,161.

[5] Miranda-Pérez, B. E., 2017, "Estudio espectrofotométrico de galaxias coloreadas" Tesis de Maestría, ESFM_IPN.

[6] Kniazev, A.Y., Pustilnik, S.A., Grebel, E.K., Lee, H., & Pramskji, G.A., 2004, "Strong emission line H II galaxies in the Sloan Digital Sky Survey. I. Catalog of DR1 objects with oxygen abundances from T_e measurements", ApJS, 153,429.

[7] Chilingarian, I.V., Melchior, A. & Zolotukhin, I.Y., 2010, "Analytical approximations of K-corrections in optical and near-infrared bands", MNRAS, 405,1409.

[8] Salim, S., Rich, R.M., Charlot, S., Brinchmann, J., et al., 2007, " UV star formation rates in the local Universe", ApJSS, 173,267.

[9] Cardelli, J.A., Clayton, C., & Mathis, J.S., 1989, "The relatiomship between infrared, optical, and ultraviolet extinction", ApJ, 345,245.

[10] De Vaucouleurs, G., De Vaucouleurs, A., Corwin JR., et al., 1991, "Third reference catalogue of bright galaxies, version 3.9"

[11] Copetti, M.V.F., Pastoriza, M.G., & Dottori, H.A., 1986, "HII regions age indicators", A&A 156, 111

Tabla 1. Datos y valores calculados para la muestra de galaxias.

$SDSS\ ID^a$	z^a	D^a	$m_0{}^b$ (mag)	$F_{FUV}{}^b$ $(x10^{-27} erg\ s^{-1} cm^{-2} Hz^{-2})$	$L_{FUV}{}^b$ $(x10^{28} erg\ s^{-1} Hz^{-2})$	$SFR_{FUV}{}^b$ $(M_\odot yr^{-1})$	
VERDE							
J004054.31+153409.8	0.28	1164.90	21.76	1.70	27.56	29.77	± 2.43
J004236.92+160202.6	0.25	1017.40	21.01	0.42	5.25	5.67	± 0.40
J022907.36-085726.2	0.18	750.20	19.89	1.32	8.92	9.63	± 0.68
J030321.41-075923.1	0.16	677.00	19.27	2.34	12.85	13.88	± 0.98
J031623.96+000912.2	0.20	831.20	20.87	0.35	2.90	3.14	± 0.23
J032613.63-063512.4	0.16	665.10	20.03	0.48	2.55	2.76	± 0.20
J033947.79-072541.2	0.26	1070.20	20.05	0.58	7.98	8.62	± 0.63
J075315.73+401449.9	0.16	644.50	20.67	0.30	1.53	1.65	± 0.14
J090122.80-002818.8	0.19	767.80	20.92	1.03	7.29	7.88	± 0.55
J103344.04+635317.2	0.35	1425.00	19.96	0.50	12.20	13.19	± 0.94
J113303.78+651341.3	0.24	992.60	19.83	1.17	13.81	14.92	± 1.06
J113459.52-000104.1	0.24	987.80	20.68	0.34	3.96	4.28	± 0.30
J130029.28+021502.9	0.27	1115.50	21.00	0.34	5.15	5.56	± 0.40
J130211.04-000516.4	0.23	925.40	21.42	0.11	1.12	1.21	± 0.09
J143804.20+013333.5	0.31	1282.50	20.44	0.44	8.80	9.51	± 0.67
J144205.40-005248.5	0.28	1159.40	20.23	0.34	5.60	6.06	± 0.43
J235347.68+005402.0	0.22	919.10	20.60	0.62	6.34	6.84	± 0.49
PURPURA							
J010513.47-103740.9	0.06	256.60	19.76	1.62	1.27	1.38	± 0.10
J014721.67-091646.2	0.14	557.30	19.94	0.55	2.07	2.24	± 0.16
J020051.59-084542.9	0.09	356.20	20.10	0.71	1.09	1.18	± 0.09
J024052.19-082827.4	0.08	337.40	19.71	0.79	1.08	1.17	± 0.08
J030539.70-083905.2	0.07	266.50	21.51	1.08	0.92	1.00	± 0.07
J040937.62-051805.8	0.07	306.00	20.06	0.61	0.68	0.74	± 0.05
J082530.67+504804.4	0.10	398.50	19.17	1.38	2.61	2.82	± 0.20
J085207.68-001117.8	0.16	639.10	20.09	0.85	1.97	2.13	± 0.15
J092918.38+002813.0	0.09	383.30	19.35	0.95	1.67	1.81	± 0.13
J095023.28+004229.2	0.10	399.10	18.99	1.64	3.13	3.38	± 0.24
J130148.00+013718.6	0.09	350.60	19.15	2.47	3.62	3.92	± 0.31
J135155.89+032524.2	0.13	531.50	19.26	1.20	4.06	4.39	± 0.32
J140725.20+052837.8	0.09	348.90	19.75	0.73	1.06	1.15	± 0.08
J141940.32+050906.7	0.06	234.10	19.47	2.05	1.34	1.45	± 0.10
J142214.30-003919.6	0.11	434.50	19.59	0.54	1.21	1.32	± 0.09
J164359.15+443632.9	0.05	217.80	19.21	1.30	0.73	0.80	± 0.06
J232936.48-011056.9	0.07	273.00	19.66	1.55	1.38	1.50	± 0.11
AZUL							
J003218.59+150014.0	0.02	75.10	17.75	5.37	0.36	0.39	± 0.03
J014721.67-091646.2	0.04	155.20	18.87	1.31	0.37	0.41	± 0.03
J013344.62+005711.2	0.02	79.70	19.39	1.29	0.09	0.11	± 0.01
J021852.90-091218.7	0.01	52.30	19.98	0.80	0.02	0.03	± 0.00

J025346.70-072343.9	0.00	18.30	17.68	5.46	0.02	0.02	± 0.01
J084029.91+470710.2	0.04	172.60	18.53	1.76	0.62	0.68	± 0.05
J093006.43+602653.3	0.01	57.00	16.82	9.05	0.35	0.38	± 0.03
J104554.72+010405.7	0.03	105.70	17.87	8.08	1.08	1.17	± 0.08
J114649.33+005346.0	0.06	230.90	20.57	0.51	0.32	0.35	± 0.03
J115247.51-004007.6	0.00	17.50	18.45	2.03	0.01	0.01	± 0.00
J122419.68+010559.5	0.04	162.20	19.66	4.72	1.40	1.60	± 0.11
J135930.37-010322.2	0.02	99.40	20.42	0.50	0.05	0.06	± 0.00
J144805.28-011057.7	0.03	112.50	18.18	10.10	1.53	1.66	± 0.12
J211527.07-075951.3	0.03	118.10	18.82	9.40	1.57	1.70	± 0.13

a Los valores presentados fueron tomados de la base de datos NED.
b Resultados obtenidos se acuerdo a la secciones III y IV

ISSN: 2594-1011

Oscilaciones de neutrinos: un análisis estadístico de los datos de experimento Daya Bay utilizando una matriz de covarianza

J. García-Bello[1], D. Tun-Molina[1],J. Escamilla-Roa[2], B. Vargas-Perez[1], J. García-Ravelo[1]
[1]Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Sección de estudios de posgrsdo e investigación,
Unidad Profesional Adolfo López Mateos,
Gustavo A. Madero, Edificio 9, CP 07738, Cd, de México, México.
[2]Instituto Politécnico Nacional,
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingenieria Hidalgo,ca Hidalgo, México.
E-mail: [(a)]fisjorge@live.com, [(d)]dtun@outlook.com, [(b)] roa@uaeh.edu.mx,
[(e)]fis.vargas.perez@gmail.com, [(c)]g.ravelo@hotmail.com

Resumen – **Los neutrinos son partículas consideradas en el modelo estándar con masa cero. Sin embargo, el fenómeno conocido como oscilaciones de neutrinos en el cual su "sabor" de los neutrinos cambia conforme los neutrinos viajan en el espacio, muestra que la masa de dichas partículas es diferente de cero. Este trabajo tiene como objetivo estimar los parámetros $sen^2 2\theta_{13}$ y Δm^2_{ee} involucrados en un modelo de oscilaciones mediante el análisis estadístico de los datos publicados por la colaboración experimental Daya Bay. Para tal análisis se adopta un enfoque shape. Los resultados obtenidos son consistentes con los publicados por la colaboración Daya Bay permitiendo el desarrollo de posteriores análisis independientes.**

Palabras Clave – **Oscilaciones de neutrinos, análisis shape, neutrinos de reactores, Colaboración Daya Bay, parámetros de oscilación, matriz de covarianza**

Abstract — ***N*eutrinos are particles considered in the standard model with mass equal to zero. However the phenomenon know as neutrino oscillations in which the "flavor" property of neutrinos changes as neutrinos travel in space shows that the mass of these particles is different to zero. This work aims to estimate the parameters $sen^2 2\theta_{13}$ y Δm^2_{ee} involved in an oscillation model through the statistical analysis of the data published by Daya Bay collaboration. For such analysis, a shape approach is adopted. The results obtained are consistent with those published by Daya Bay and allow the development of subsequent independent analyzes.**

Keywords — **Neutrino oscillaitons, shape analysis, reactor neutrino, Daya Bay collaboration, oscillations parameters, covariance matrix**

I. Introducción

El neutrino ha sido una partícula muy interesante desde la propuesta de su existencia en 1930 por Wolfgang Erns Pauli, hasta su detección experimental encabezada por R. Davis a finales de la década de los 60's. En la actualidad el estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, en el cual el sabor (electrón, muon y tau) cambia conforme se propagan en el espacio, ha sido de gran interés para ir en búsqueda de física más allá del modelo estándar. Tal fenómeno conduce al conocimiento de una masa diferente de cero para los neutrinos. Muchos son los experimentos de oscilaciones de neutrinos que se diseñan para determinar los parámetros involucrados en el modelo, como Daya Bay [1], Double CHOOZ [2] y RENO [3]. Dedicados principalmente a determinar el parámetro θ_{13}, relacionado con el factor de fase de la llamada violación CP.

A continuación se describe el cuerpo del trabajo. En la Sección II, el arreglo experimental, que permite detectar neutrinos de reactores. La Sección III, el cálculo del espectro de neutrinos esperado en cada detector considerando y no oscilaciones de neutrinos. Se describe el análisis estadístico realizado y se muestran los resultados obtenidos en la Sección IV. Las Secciones V y VI contienen una pequeña discusión y nuestras conclusiones, respectivamente. Se recomienda [4] para ver detalles del experimento.

II. Sobre el experimento Daya Bay

En esta Sección se describe de forma general la ubicación del experimento, así como la distribución de los seis reactores nucleares y los ocho detectores con los que cuenta Daya Bay.

A. Ubicación

El sitio experimental se localiza en la zona Este de la península de Dapeng, en la costa Oeste de la bahía de Daya Bay, China. Las ciudades más cercanas son Hong Kong y Shenzhen. Se cuenta con tres plantas nucleares en operación, Daya Bay, LingAo y LingAo-II. Cada planta cuenta con dos reactores nucleares, sumando seis en total. Además se cuenta con ocho detectores de antineutrinos (AD), distribuidos en tres salas experimentales (SE), como se muestra en la Fig. 1.

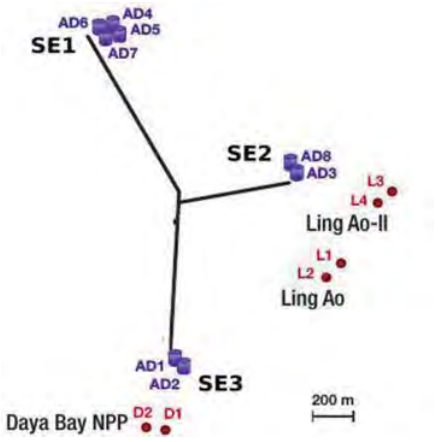


Fig. 1. Se muestra esquemáticamente la ubicación de los reactores (L_1, L_2, L_3, L_4, D_1, D_2), salas experimentales (SE) y detectores (AD) del experimento Daya Bay.

B. Detección

Los antineutrinos son detectados por medio de líquido centellador que tiene un alto contenido de hidrógeno vía el decaimiento beta inverso (DBI):

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \qquad (1)$$

donde un antineutrino de sabor electrón $\bar{\nu}_e$, interacciona con un protón p del detector para producir un positrón e^+ y un neutrón n. Este DBI se utiliza para identificar la llegada de un antineutrino electrón al detector, para ello dos señales deben ser observadas:

-La primera es una señal de rayos gamma de 8 MeV; emitidos cuando el positrón producto del DBI, es capturado por el Gadolineo (Gl) del detector.

-La segunda corresponde a la captura del neutrón, realizada por los protones del líquido centellador del detector. Esta captura radia 2.2 MeV, por lo que es posible identificarla detectando los rayos gamma que la acompañan.

Cuando estas dos señales aparecen con una diferencia de tiempo entre 1 a 200 mili-segundos se considera la detección de un antineutrino con sabor electrón que llegó al detector.

C. Reactores: Fuentes de antineutrinos

Los reactores nucleares juegan un papel crucial en la física experimental de neutrinos. A continuación se resumen los aspectos más importantes de los reactores como fuentes de neutrinos.

La potencia de los reactores nucleares proviene de los procesos de fisión de los isótopos de uranio y plutonio. Debido a su alto contenido de neutrones se fisionan y producen partículas *hijas* vía el decaimiento beta. La alta abundancia de estos isótopos radiactivos produce un significativo flujo de antineutrinos que depende de diferentes factores; la energía térmica total del reactor, la fracción de cada isotopo utilizado, la tasa de fisión de cada isótopo, y el espectro de antineutrinos de los isótopos individuales. La composición promedio habitual de isótopos en los reactores es 58% de ^{235}U, 30% de ^{239}Pu, 7% de ^{238}U y 5% de ^{241}Pu.

III. Espectro de antineutrinos

El espectro de antineutrinos indica la cantidad de antineutrinos que se producen en el reactor nuclear a determinada energía. En esta Sección se describen los ingredientes con los cuales se construye el espectro de antineutrinos de los reactores del experimento Daya Bay.

A. Espectro de antineutrinos

El espectro de antineutrinos en los reactores [5, 6], está determinado por la expresión

$$\frac{d\phi}{dE_\nu} = \frac{W_{th}}{\langle e \rangle} \sum_i f_i(t) S_i(E_\nu) C_i(E_\nu) + S_{SNF}(E_\nu), \qquad (2)$$

Donde $S_{SNF}(E_\nu)$ es una contribución del subporcentaje del flujo de antineutrinos electrón del combustible nuclear consumido presente en la piscina de enfriamiento adyacente a cada núcleo del reactor. Esta corrección introduce una incertidumbre del 0.38% en la cantidad pronosticada de interacciones de antineutrinos electrón de un reactor por lo que no se toma en cuenta en este análisis. La $C_i(E_\nu)$ es una corrección al subporcentaje en la emisión del flujo de antineutrinos electrón atribuida a una población de partículas *hijas* de fisión fuera de equilibrio. Esta corrección introduce un 0.15% de incertidumbre en el número de interacciones de antineutrinos electrón de un reactor, por lo que no se toma en cuenta en este trabajo. W_{th} [MeV/s] es la energía térmica del núcleo del reactor, la cual se toma como un promedio de los valores mostrados en [5] para los dos periodos de toma de datos. $f_i(t)$ es la fracción utilizada de cada isótopo. $\langle e \rangle = \sum_i f_i(t) e_i$ [MeV/fisión] es la energía térmica promedio liberada por fisión. La energía e_i liberada por fisión del i-ésimo isótopo se toma de [6]. $S_i(E_\nu)$ es el espectro de antineutrinos asociado al i-ésimo isótopo en función de la energía del antineutrino E_ν. El espectro de antineutrinos del i-ésimo isótopo se ajusta a la función

$$S_i(E_\nu) = \exp\left(\sum_{i=1}^{6} \alpha_i E_\nu^{i-1}\right), \qquad (3)$$

donde los coeficientes α_i se tomaron de [7, 8].

B. Espectro de neutrinos en el d-ésimo detector

El espectro de antineutrinos esperado en el d-ésimo detector desde el r-ésimo reactor está dado por

$$S_{dr} = \frac{1}{4\pi L_{dr}^2} \frac{d\phi}{dE_\nu} \epsilon^d N_p^d \sigma(E_\nu), \qquad (4)$$

donde L_{dr} [m] es la distancia entre el detector d y el reactor r. La eficiencia de selección del decaimiento beta inverso se

denota por ϵ^d. N_p^d es el número de protones en el d-ésimo detector y $\sigma(E_\nu)$ es la sección eficaz del DBI [9], dada por

$$\sigma(E_\nu) = 0.0952(E_e P_e / MeV^2) \times 10^{-42} cm^2, \quad (5)$$

donde E_e y P_e son la energía y el momento del positrón involucrado en (1). En un DBI la energía del antineutrino y del positrón obedecen la siguiente relación

$$E_e = E_\nu - \left(M_n - M_p\right) = E_\nu - 1.29 MeV. \quad (6)$$

Siendo $M_n = 939.56\, MeV$ la masa del neutrón y $M_p = 938.3\, MeV$ la masa del protón. Escribiendo (5) en términos de la energía del antineutrino (6) obtenemos [10]

$$\sigma(E_\nu) \approx 1.0 \times 10^{-43}(E_\nu - 1.29)\sqrt{(E_\nu - 1.29)^2 - m_e^2}. \quad (7)$$

En (7) se denota la masa del positrón como $m_e = 0.511\, MeV$. Se ha considerado la eficiencia $\epsilon^d = 1$.

C. Probabilidad de superveniencia

La probabilidad de que un antineutrino que se origina con sabor electrón se detecte en el mismo sabor se conoce como probabilidad de supervivencia P_{super}. Para estimar el espectro de antineutrinos considerando oscilaciones, basta con incluir tal probabilidad como un término multiplicativo en (4).

$$\begin{aligned} P_{super} = 1 - & cos^4\theta_{13} sen^2 2\theta_{12} sen^2\Delta_{21} \\ & - sen^2 2\theta_{13} cos^2\theta_{12} sen^2\Delta_{31} \\ & - sen^2 2\theta_{13} sen^2\theta_{12} sen^2\Delta_{32}, \end{aligned} \quad (8)$$

Donde $\Delta_{ij} \equiv 1.267\, \Delta m_{ij}^2 L/E_\nu$, E_ν [MeV] y L [m] son los mismos que en (4). Δm_{ij}^2 [eV^2] es la diferencia de masas al cuadrado de los eigenestados de masa ν_i y ν_j, con $i, j = 1,2,3$. Se ha considerado $sen^2 2\theta_{12} = 0.857$, $cos^2\theta_{12} = 0.699$ y $\Delta m_{21}^2 = 7.50 \times 10^{-5}\, MeV^2$. Dado que las fases Δ_{31} y Δ_{32}son aproximadamente iguales, se puede reescribe (8) en función de una fase efectiva Δ_{ee},

$$\begin{aligned} P_{super} = 1 - & cos^4\theta_{13} sen^2 2\theta_{12} sen^2\Delta_{21} \\ & - sen^2 2\theta_{13} sen^2\Delta_{ee}, \end{aligned} \quad (9)$$

la probabilidad es independiente de la jerarquía de masas. Aquí la definición de Δm_{ee}^2 es empírica y cumple la relación [11]

$$\Delta m_{ee}^2 = cos^2\theta_{12}|\Delta m_{31}^2| + sen^2\theta_{12}|\Delta m_{32}^2|. \quad (10)$$

Además $|\Delta m_{31}^2| \cong |\Delta m_{ee}^2| \pm 2.3 \times 10^{-5}\, eV^2$ y $|\Delta m_{32}^2| \cong |\Delta m_{ee}^2| \mp 5.2 \times 10^{-5}\, eV^2$ asumiendo una jerarquía normal (signo superior) e inversa (signo inferior).

IV. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Dentro de los diferentes análisis estadísticos realizados por la colaboración Daya Bay se define la siguiente chi-cuadrada

$$\chi^2 = \sum_{i,j}(N_j^f - \omega_j N_j^n)(V^{-1})_{ij}\,(N_i^f - \omega_i N_i^n), \quad (11)$$

donde $N_i^{f,n}$ es el número observado de eventos en el i-ésimo bin de energía, el cual se toma de [5]. Los indices superiores *f* y *n* denotan un detector lejano y cercano respectivamente. La matriz de covarianza V incluye las incertidumbres sistemáticas y estadísticas. La cantidad ω_i es un peso que se construye con la razón entre mediciones en los detectores lejanos y cercanos en el i-ésimo bin, tal como se muestra a continuación

$$\omega_i = \frac{N_i^f}{N_i^n}, \quad (12)$$

Donde es el número de neutrinos esperado en el i-ésimo bin de energía [11]. Los elementos de la matriz de covarianza V_{ij} se componen de la suma de un término estadístico V_{ij}^{est} y uno sistemático V_{ij}^{sist} determinado por simulación Monte-Carlo

$$V_{ij}^{sist} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(N_j^{ran} - N_j^{nom}\right)(N_i^{ran} - N_i^{nom}), \quad (13)$$

Donde M es el número de muestras Monte-Carlo. $N_i^{ran(nom)}$ es el número aleatorio (nominal) de eventos esperados en el bin de energía *i*. El valor de V_{ij}^{est} se propone como N_i^{nom}.

El mejor ajuste de (11) arroja una $\chi_{min}^2 = 56.42$ para los valores $sen^2 2\theta_{13} = 0.12$ y $\Delta m_{ee}^2 = 2.5 \times 10^{-3}\, eV^2$. En la Fig. 2, se muestran las regiones de confianza de los parámetros $sen^2 2\theta_{13}$ vs Δm_{ee}^2, a niveles de confianza de 68.3%, 95.5% y 99.7%.

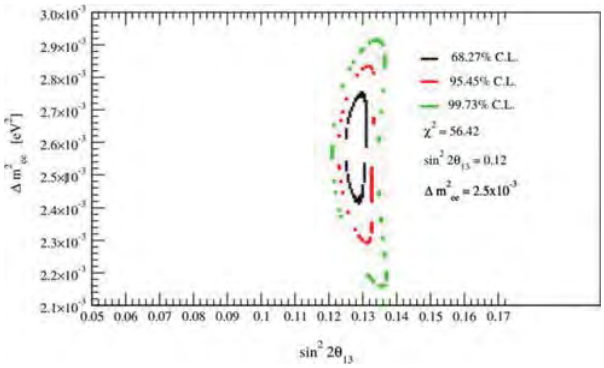


Fig. 2. Regiones de confianza permitidas para los parámetros de oscilaciones de neutrinos $sen^2 2\theta_{13}$ y Δm_{ee}^2 con un 68.27%, 95.45% y 99.73% de nivel de confianza para un análisis con enfoque de matriz de covarianza.

V. Discusión

La estrategia empleada para el cálculo de la matriz de covarianza no es explicita en los artículos [5] y [6]. En estos artículos se menciona que las incertidumbres estadísticas se calculan analíticamente, sin embargo, no se muestran los datos necesarios para obtener su valor. Por tal motivo en este trabajo se propone un valor para las incertidumbres estadísticas.

VI. Conclusiones

Los resultados obtenidos en el análisis son consistentes con los valores reportados por la colaboración Daya Bay. Por lo que se concluye 1) la cantidad de información que el experimento reporta, ha sido eficientemente interpretada, encaminando la calibración de nuestros códigos con el fin de continuar con otros estudios, 2) las hipótesis de trabajo empleadas a causa de la falta de claridad resultaron apropiadas para la obtención de los resultados y 3) con los resultados obtenidos se tiene la posibilidad de unir este análisis con uno que utilice un enfoque de pulls [12], [13] y [14].

Agradecimientos

J. Garcia-Bello agradece la entera colaboración de J. Escamilla-Roa, J García-Ravelo, D. Tun-Molina y B. Vargas-Perez, ya que sus sugerencias han sido una gran aportación al trabajo.

Referencias

[1] Official site of the Daya Bay http://dayabay.ihep.ac.cn/twiki/bin/view/Public.
[2] Y. Abe et al. (Double CHOOZ), JHEP 01 (2016), arXiv:1510.08937
[3] Ahn, J. K. et al. (RENO), arXiv:1003.1391
[4] X. Guo et al. (Daya Bay), hep-ex/0701029, Proposal to DOE.
[5] F. P. An et al. [Daya Bay Collaboration], Phys. Rev. D 95, no.7,072006(2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.072006 [arXiv:1610.04802[hep-ex]].
[6] F. P. An et al. [Daya Bay Collaboration], Chin. Phys. C41, no. 1, 013002 (2017) doi:10.1088/1674-1137/41/1/013002 [arXiv:1607.05378 [hep-ex]].
[7] X. B. Ma et al., Phys.Rev.C88, 014605 (2013). arXiv:1212.6625 [nucl-ex].
[8] P. Huber, Phys. Rev. C84, 024617 (2011).
[9] P. Vogel and J. F. Beacom, Phys.Rev. D60, 053003 (1999).
[10] F.Suekane. Neutrino Oscillations A Practical Guide to Basic and Applications. Springer Japan. 2015.
[11] F. P. An et al. [Daya Bay Collaboration], Phys. Rev. Lett. 115, no.11, 111802 (2015). [arXiv:1505.03456 [hep-ex]].
[12] F. P. An et al. [Daya Bay Collaboration], Phys. Rev. D 93, no.7, 072011 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.072011
[13] F. P. An et al. (Daya Bay), Chin. Phys. C37 (2013) 011001, arXiv:1210.6327 [hep-ex].
[14] F. P. An et al. [Daya Bay Collaboration], Phys. Rev. Lett. 108, 171803 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.171803 [arXiv:1203.1669 [hep-ex]].

ISSN: 2594-1011

La degeneración de la energía y sus funciones de onda asociadas en los procesos de hibridación cuántica del átomo de carbono

Eduardo Casas Martínez[1], Berenice N. Castañeda Avila[1], Rafael Zamorano Ulloa[2]
[1]Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) IPN. , México D.F. México
[2]Departamento de Física Avanzada, Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM). México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: e.igual.mxc.alcuadrado@gmail.com

Resumen — **Todos los organismos vivos dependen entre otras cosas de la capacidad única del carbono para enlazarse con otros elementos y formar complejas estructuras moleculares. Sin embargo, los organismos vivos en su gran mayoría están formados por agua (H_2 O); por tanto el carbono se combina con el hidrógeno y el oxígeno del agua, además de otros elementos como el nitrógeno, fósforo, calcio y azufre, constituyendo la mayor parte de las estructuras biológicas presentes en los tejidos vivos. El criterio más importante en el que se basa la vida y por tanto fundamental, es la capacidad de organización que tienen las moléculas para conformarse en estructuras repetitivas. Por ejemplo, el carbono forma cadenas de polímeros, que hoy sabemos que son clave para la replicación y conservación de nuestro ADN. De aquí la importancia del carbono en el origen de la vida. Aquí mostramos el proceso de hibridación del carbono desde el enfoque de la teoría cuántica. Estudiamos el proceso de hibridación sp^2 del carbono, modelando cada orbital del hibrido como un átomo hidrogenoide; asociamos una función de onda (ψ_(sp_1^2) ,ψ_(sp_2^2) ,ψ_(sp_3^2) ,ψ_p) a cada orbital hibrido de forma independiente. Resolvemos la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en tres dimensiones; aplicando el principio de superposición encontramos la función de onda general que describe el sistema. Encontramos la expresión para la energía del sistema hibrido y sus funciones de onda asociadas. Observamos el comportamiento del espectro de energía y la degeneración para la hibridación sp^2; con ello obtenemos la energía de enlace que forma el carbono con otros elementos, así como el comportamiento de los estados excitados y la degeneración del hibrido modelado como un conjunto de cuatro átomos hidrogenoides. Finalmente logramos entender la forma en que el carbono se entrelaza para formar las complejas estructuras que dieron origen a la vida en el universo.**

Palabras Clave – **hibridación, átomo hidrogenoide, sp2, ecuación de Schrôdinger**

Summary - **All living organisms depend among other things on the unique ability of carbon to bond with other elements and form complex molecular structures. However, living organisms are mostly made up of water (H_2 O); therefore carbon combines with the hydrogen and oxygen of water, in addition to other elements such as nitrogen, phosphorus, calcium and sulfur, constituting most of the biological structures present in living tissues. The most important criterion on which life is based and therefore fundamental, is the ability of organizations to have molecules to conform to repetitive structures. For example, carbon forms polymer chains, which we now know are key to the replication and conservation of our DNA. Hence the importance of carbon at the origin of life. Here we show the process of carbon hybridization from the quantum theory approach. We studied the sp ^ 2 hybridization process of carbon, modeling each orbital of the hybrid as a hydrogen atom; we associate a wave function (ψ_ (sp_1 ^ 2), ψ_ (sp_2 ^ 2), ψ_ (sp_3 ^ 2), ψ_p) to each hybrid orbital independently. We solve the Schrödinger equation independent of time in three dimensions; applying the superposition principle we find the general wave function that describes the system. We find the expression for the hybrid system energy and its associated wave functions. We observe the behavior of the energy spectrum and the degeneracy for sp ^ 2 hybridization; with this we obtain the binding energy that forms the carbon with other elements, as well as the behavior of the excited states and the degeneration of the modeled hybrid as a set of four hydrogen atoms. Finally, we managed to understand the way in which carbon intertwines to form the complex structures that gave rise to life in the universe.**

Keywords - **hybridization, hydrogen atom, sp2, Schrödinger equation**

I. Introducción

El carbono junto con el hidrogeno y el helio es un elemento muy abundante en el Universo; se genera a partir del ciclo CNO (Hans Bethe, 1938), carbono-nitrógeno-oxígeno mediante las reacciones nucleares de fusión al interior de las estrellas. Los modelos teóricos muestran que el ciclo CNO es la fuente de energía dominante en las estrellas más masivas. El carbono conforma uno de los más de cien elementos químicos que existen en la naturaleza y es el que sustenta la vida en la tierra; de aquí radica la importancia de su estudio. Existen varias teorías para explicar el origen de la vida en nuestro planeta, una de ellas está basada en la hipótesis sobre la química del carbono (A. Oparin y Haldane, 1923). El 95% de las estructuras biológicas que constituyen el organismo de los seres vivos se compone tan solo de cuatro elementos (carbono C, oxígeno O, hidrógeno H y nitrógeno N). De ellos, el carbono resulta ser el más importante ya que sin él no sería posible constituir las estructuras de ADN.

Las propiedades químicas del carbono le permiten a este elemento acoplarse con una gran cantidad de átomos distintos para formar moléculas enormes y de gran complejidad. Es decir; los átomos de carbono se unen entre sí formando largas cadenas que sirven de base para construir otras moléculas más complejas, tal es el caso de las proteínas, glúcidos, vitaminas y grasas. Esta facilidad para enlazar moléculas es lo que permitió la evolución de los organismos vivos. De hecho, la química del carbono es tan variada que es capaz de formar

más compuestos químicos que el resto de los elementos de la tabla periódica juntos. Durante la formación del sistema solar, en la Tierra primitiva se establecían las condiciones necesarias para originar una excelente combinación de grandes cantidades de carbono y agua, las cuales fueron determinantes para el origen de la vida. Por tanto "el carbono es el elemento que fundamenta la base química para la vida". En la naturaleza el carbono que forma la materia orgánica se recicla gracias al proceso de fotosíntesis, donde las plantas transforman la energía de la luz solar en hidratos de carbono, incorporándolo de la atmósfera a sus tejidos.

II. Metodología

A partir de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\hat{H}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (1)$$

Donde el Hamiltoniano que describe el sistema se expresa como:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) \quad (2)$$

Además, sabemos que el potencial $V(r)$ para un átomo hidrogenoide tiene la forma:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (3)$$

Para la solución del problema en tres dimensiones, consideramos la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas; de modo que:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi) - \frac{Ze^2}{r}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (4)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi(r,\theta,\varphi) + \frac{(-\hbar^2)}{2\mu r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi) - \frac{Ze^2}{r}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (5)$$

Sabemos que el operador $\hat{L}^2$ se expresa como:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad (6)$$

Entonces, la ecuación (5) quedará expresada, como:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi(r,\theta,\varphi)+\frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}\psi(r,\theta,\varphi) - \frac{Ze^2}{r}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (7)$$

Es fácil ver que $[\hat{H},\hat{L}^2]=0$. Por tanto las eigenfunciones de $\hat{L}^2$ deben ser soluciones del Hamiltoniano; en este sentido, proponemos:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (8)$$

Por tanto, la ecuación de Schrödinger se puede escribir como:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)+\frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) - \frac{Ze^2}{r}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) = ER(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}Y_l^m(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)+\frac{\hat{L}^2Y_l^m(\theta,\varphi)}{2\mu r^2}R(r) - \frac{Ze^2}{r}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) = ER(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (10)$$

Ahora, tenemos que $\hat{L}^2Y_l^m(\theta,\varphi)=\hbar^2l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)$ entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}Y_l^m(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)+\frac{\hbar^2l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)}{2\mu r^2}R(r) - \frac{Ze^2}{r}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) = ER(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (11)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)+\frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2r}R(r)+\frac{2\mu E}{\hbar^2}R(r)=0 \quad (12)$$

Ahora definimos $R(r)=\frac{\chi(r)}{r}$; por tanto:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi(r)}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\chi(r)}{r}+\frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2r}\frac{\chi(r)}{r}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\frac{\chi(r)}{r}=0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{r^2}r\chi"(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\chi(r)}{r} + \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2 r}\frac{\chi(r)}{r} + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\frac{\chi(r)}{r} = 0 \quad (14)$$

Multiplicamos la ecuación (14) por r^3; obtenemos:

$$r^2\chi"(r) - l(l+1)\chi(r) + \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2}r\chi(r) + \frac{2\mu E}{\hbar^2}r^2\chi(r) = 0 \quad (15)$$

Ahora definimos $k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$, además de considerar el radio de Bohr $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$, entonces:

$$r^2\chi"(r) - l(l+1)\chi(r) + \frac{2Z}{a}r\chi(r) - k^2r^2\chi(r) = 0 \quad (16)$$

A partir del análisis asintótico de la ecuación diferencial (ec. (16)) obtenemos:

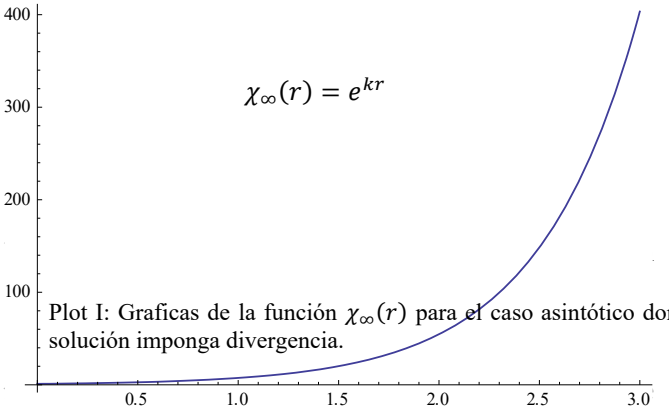
Caso I: Consideremos $r \to \infty$

$$\chi_\infty"(r) + \left[\frac{2Z}{ar} - \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\right]\chi_\infty(r) = 0 \quad (17)$$

$$\chi_\infty"(r) - k^2\,\chi_\infty(r) = 0 \quad (18)$$

Por tanto la solución para la ecuación (18) es de la forma:

$$\chi_\infty(r) = e^{kr} + e^{-kr} \quad (19)$$



Plot I: Graficas de la función $\chi_\infty(r)$ para el caso asintótico donde $r \to \infty$. Para la solución del problema, se requiere evitar que la solución imponga divergencia.

expresa como:

$$\chi_\infty(r) = e^{-kr} \quad (20)*$$

Caso II: Consideremos $r \to 0$

$$r^2\chi_0"(r) + \left[\frac{2Z}{a}r - k^2r^2 - l(l+1)\right]\chi_0(r) = 0 \quad (21)$$

$$r^2\chi_0"(r) - [l(l+1)]\chi_0(r) = 0 \quad (22)$$

Notemos que la ecuación (22) tiene la forma de la ecuación de Cauchy – Euler, donde sus soluciones se expresan de la forma:

$$\chi_0(r) = r^s \quad ; \quad \chi'_0(r) = sr^{s-1} \quad ; \quad \chi"_0(r) = s(s-1)r^{s-2}$$

Así, la ecuación (22) se escribe como:

$$r^2s(s-1)r^{s-2} - [l(l+1)]r^s = 0 \quad (23)$$

$$s(s-1) - [l(l+1)] = 0 \quad (24)$$

$$s^2 - l^2 - (s+l) = 0 \quad => \quad (s+l)(s-l) - (s+l) = 0 \quad (25)$$

Observemos que para $s = -l$ se satisface la ecuación (25); además para el caso donde $s = l+1$; también se satisface la igualdad.

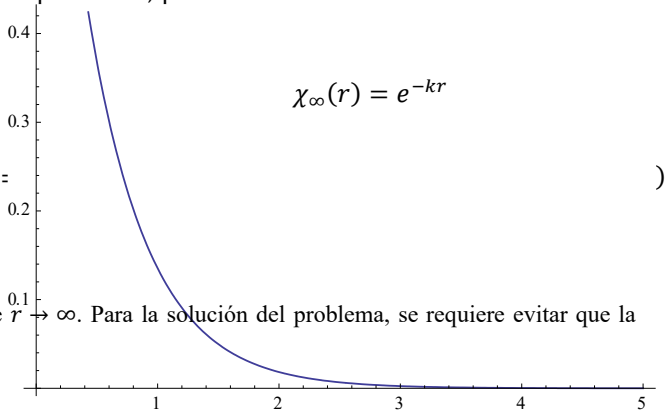
Ya que se busca no tener divergencia en la solución para $r \to 0$ entonces:

$$\chi_0(r) = r^{l+1} \quad (26)*$$

Así construimos la solución para $\chi(r)$, como el producto de las soluciones obtenidas mediante el análisis asintótico, es decir:

$$\chi(r) = \chi_0(r)\chi_\infty(r)g(r) = e^{-kr}r^s g(r) \quad (27)$$

Ahora proponemos la siguiente definición $\eta(r) = r^s g(r)$, donde $g(r)$ se puede expresar como una serie de potencias, por tanto:



$$= \eta"(r)e^{-\kappa r} - 2k\eta'(r)e^{-\kappa r} + k^2\eta(r)e^{-kr} \quad (28\,b)$$

Ahora regresemos a la ecuación diferencial (16); $r^2\chi"(r) - l(l+1)\chi(r) + \frac{2Z}{a}r\chi(r) - k^2r^2\chi(r) = 0$ la cual se puede reescribir como:

$$r^2\big(\eta"(r) - 2k\eta'(r) + k^2\eta(r)\big)e^{-kr} - l(l+1)e^{-kr}\eta(r) + \frac{2Z}{a}re^{-kr}\eta(r) - k^2r^2e^{-kr}\eta(r) = 0 \quad (29)$$

$$r^2\big(\eta"(r) - 2k\eta'(r) + k^2\eta(r)\big) - l(l+1)\eta(r) + \frac{2Z}{a}r\eta(r) - k^2r^2\eta(r) = 0 \quad (30\,a)$$

$$r^2\left(\eta"(r) - 2k\eta'(r)\right) - l(l+1)\eta(r) + \frac{2Z}{a}r\eta(r) = 0 \qquad (30\ b)$$

Expresamos la función $\eta(r)$ y sus derivadas como una serie de potencias, de la forma:

$$\eta(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} \quad ; \quad \eta'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s) r^{j+s-1} \quad ; \quad \eta"(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s)(j+s-1) r^{j+s-2}$$

Así, al sustituir en la ecuación (30) obtenemos:

$$r^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s)(j+s-1) r^{j+s-2} - 2k\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s) r^{j+s-1} + k^2\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s}\right) - l(l+1)\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} + \frac{2Z}{a} r\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} - k^2 r^2 \sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} = 0 \qquad (31)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s)(j+s-1) r^{j+s} - 2k\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s) r^{j+s+1} + k^2\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s+2} - l(l+1)\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} + \frac{2Z}{a}\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s+1} - k^2\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s+2} = 0 \qquad (32)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s)(j+s-1) r^{j+s} - 2k\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,(j+s) r^{j+s+1} - l(l+1)\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s} + \frac{2Z}{a}\sum_{j=0}^{\infty} C_j\, r^{j+s+1} = 0 \qquad (33)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j\,[(j+s)(j+s-1) - l(l+1)] r^{j+s} + \sum_{j=0}^{\infty} C_j\left[\frac{2Z}{a} - 2k(j+s)\right] r^{j+s+1} = 0 \qquad (34)$$

Para la primer sumatoria, extraemos el primer término considerando el caso cuando $j = 0$; es decir:

$$C_0[s(s-1) - l(l+1)] + \sum_{j=1}^{\infty} C_j\,[(j+s)(j+s-1) - l(l+1)] r^{j+s} + \sum_{j=0}^{\infty} C_j\left[\frac{2Z}{a} - 2k(j+s)\right] r^{j+s+1} = 0 \qquad (35)$$

Ahora para acoplar las sumatorias en la primer sumatoria consideremos el siguiente cambio: $j \to j+1$

$$C_0[s(s-1) - l(l+1)] + \sum_{j=0}^{\infty} C_j\,[(j+1+s)(j+s) - l(l+1)] r^{j+s+1} + \sum_{j=0}^{\infty} C_j\left[\frac{2Z}{a} - 2k(j+s)\right] r^{j+s+1} = 0 \qquad (36)$$

$$C_0[s(s-1) - l(l+1)] + \sum_{j=0}^{\infty}\left\{C_{j+1}[(j+s+1)(j+s) - l(l+1)] + C_j\left[\tfrac{2Z}{a} - 2k(j+s)\right]\right\} r^{j+s+1} = 0 \qquad (37)$$

Para que se cumpla la igualdad, tenemos:

$$C_0[s(s-1) - l(l+1)] = 0 \qquad (38)$$

Por otro lado C_0 es un coeficiente completamente arbitrario, por tanto $C_0 \neq 0$. Así la expresión para la recurrencia se escribe como:

$$C_{j+1}[(j+s+1)(j+s) - l(l+1)] + C_j\left[\frac{2Z}{a} - 2k(j+s)\right] = 0 \qquad (39)$$

$$C_{j+1} = \frac{C_j\left[2k(j+s) - \frac{2Z}{a}\right]}{(j+s+1)(j+s) - l(l+1)} \qquad (40)$$

Por tanto para evitar divergencia en la función $g(r)$, proponemos truncar la serie de modo que la función asociada ahora se escriba como un polinomio de grado ρ; es decir: $C_{\rho+1} = 0$ y $C_\rho \neq 0$

Recordemos que, previamente al resolver la ecuación (23) obtuvimos que $s = l + 1$.

De acuerdo a las condiciones anteriores escribimos:

$$2k(\rho+s) - \tfrac{2Z}{a} = 0 \quad => \quad 2k(\rho + l + 1) = \tfrac{2Z}{a} \qquad (41)$$

En este sentido, notemos que $\rho + l + 1$ pertenece a los números naturales, por tanto definimos:

$$n = \rho + l + 1\ ; \qquad n \in \mathbb{N}$$

Entonces:

$$2kn = \frac{2Z}{a} \qquad (41)$$

Donde k se había definido previamente como: $k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$ elevando al cuadrado la ecuación (41), tenemos:

$$4\left(-\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)n^2 = \left(\frac{2Z}{a}\right)^2 \qquad (42)$$

Por lo tanto, la energía en el estado n se escribe como:

$$E_n = \frac{-Z^2\hbar^2}{2\mu a^2 n^2} \quad ; \quad con \quad n \in \mathbb{N} \qquad (43)*$$

Ahora trabajamos en la función de onda; entonces:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \quad ; \quad Donde\ R_{nl}(r) = \frac{\chi(r)}{r} = \frac{\chi_0(r)\chi_\infty(r)g(r)}{r} \qquad (44)$$

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\chi_0(r)\chi_\infty(r)g(r)Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{1}{r}r^{l+1}e^{-kr}\left(\sum_{j=0}^{\rho} C_j\, r^j\right)Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (45)$$

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = r^l e^{-kr}\left(\sum_{j=0}^{n-l-1} C_j\, r^j\right)Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (46)$$

Notemos que en la ecuación (46) $n - l - 1 \geq 0$; además de que en los armónicos esféricos $l \geq |m|$.

Entonces, retomamos la ecuación (30 b) $r^2\big(\eta"(r) - 2k\eta'(r)\big) - l(l+1)\eta(r) + \frac{2Z}{a}r\eta(r) = 0$; donde previamente habíamos definido $\eta(r) = r^s g(r)$.

Por tanto: $\eta'^{(r)} = r^s g'(r) + sr^{s-1}g(r)$; $\eta"(r) = \mathrm{r^s g"}(r) + 2sr^{s-1}g'(r) + s(s-1)r^{s-2}g(r)$

$$r^{s+2}\mathrm{g"}(r) + 2sr^{s+1}g'(r) + s(s-1)r^s g(r) - 2kr^{s+2}g'(r) - 2ksr^{s+1}g(r) - l(l+1)r^s g(r) + \frac{2Z}{a}r^{s+1}g(r) = 0 \qquad (47)$$

$$r^{s+2}\mathrm{g"}(r) + (2sr^{s+1} - 2kr^{s+2})g'(r) + \left[s(s-1)r^s - 2ksr^{s+1} - l(l+1)r^s + \frac{2Z}{a}r^{s+1}\right]g(r) = 0 \qquad (48)$$

$$r\mathrm{g"}(r) + (2s - 2kr)g'(r) + \left[\frac{s(s-1) - l(l+1)}{r} - 2ks + \frac{2Z}{a}\right]g(r) = 0 \qquad (50)$$

Ya que sabemos que: $s = l + 1$

$$r\mathrm{g"}(r) + [2(l+1) - 2kr]g'(r) + \left[\frac{2Z}{a} - 2ks\right]g(r) = 0 \qquad (51)$$

Recordemos la siguiente relación $2k(\rho + s) = \frac{2Z}{a}$ de donde se había encontrado la energía del sistema; entonces:

$$r\mathrm{g"}(r) + [2(l+1) - 2kr]g'(r) + [2k(\rho+s) - 2ks]g(r) = 0 \qquad (52)$$

$$r\mathrm{g"}(r) + [2(l+1) - 2kr]g'(r) + 2k\rho g(r) = 0 \qquad (53)$$

Ahora proponemos el siguiente cambio de variable: $\xi = 2kr$ de donde, obtenemos:

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr}\frac{d}{d\xi} = 2k\frac{d}{d\xi}$$

También:

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr}\frac{d}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2k\frac{d}{d\xi}\right) = 2k\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{d\xi}\right) = 2k\frac{d\xi}{dr}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}\right) = 2k\left(2k\frac{d}{d\xi}\right)\left(\frac{d}{d\xi}\right) = 4k^2\frac{d^2}{d\xi^2}$$

Ya que: $\mathrm{g"}(r) = \frac{d^2}{dr^2}g(r)$; $g'(r) = \frac{d}{dr}g(r)$

Entonces para reescribir la ecuación (53), tenemos:

$$\frac{\xi}{2k}4k^2\frac{d^2}{d\xi^2}g(\xi) + [2(l+1) - \xi]2k\frac{d}{d\xi}g(\xi) + 2k\rho g(\xi) = 0 \qquad (54)$$

$$2k\xi\frac{d^2}{d\xi^2}g(\xi) + [2(l+1) - \xi]2k\frac{d}{d\xi}g(\xi) + 2k\rho g(\xi) = 0 \qquad (55)$$

$$\xi\frac{d^2}{d\xi^2}g(\xi) + [2(l+1) - \xi]\frac{d}{d\xi}g(\xi) + \rho g(\xi) = 0 \qquad (56)$$

Por tanto podemos comparar la ecuación (56) con la ecuación diferencial de Laguerre:

$$x\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_p(x) + (1-x)\frac{d}{dx}\mathcal{L}_p(x) + p\mathcal{L}_p(x) = 0$$

ISSN: 2594-1011

Modelado de concentración de contaminantes en la atmósfera mediante la ecuación de difusión-advección

Y. Medina Quiroz[1], S. Ramírez Escamilla[1], R. Zamorano Ulloa[1], J. Gama Vázquez[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: yjmrq103@gmail.com

Resumen — **Se resuelve la ecuación de difusión-advección para modelar la concentración de contaminantes en la atmósfera. Se interpreta mediante gráficas que la velocidad del viento y los coeficientes de difusión tienen efectos importantes sobre la concentración de los contaminantes: la difusión y disminución de la concentración de los contaminantes, y la rapidez con que ésta disminuye, respectivamente. Se interpreta también que las contingencias ambientales se deben a la nula presencia de corrientes de viento.**

Palabras Clave – **Advección, coeficiente de difusión, concentración, contaminantes, difusión, fuentes fijas y móviles, incompresible.**

Abstract — **For pollutants concentration modelling, the diffusion-advection equation is solved. By graphs it is interpreted that wind speed and diffusion coefficients have important effects on the pollutants concentration: the diffusion and diminution of pollutants concentration, and the speed of this diminution, respectively. It is also interpreted that environmental contingencies are due to the absence of wind flows.**

Keywords — **Advection, concentration, diffusion, diffusion coefficient, fixed and mobile sources, incompressible, pollutants.**

I. Introducción

En la Ciudad de México los principales emisores de contaminantes atmosféricos son los vehículos (fuentes móviles), las industrias y las residencias (fuentes fijas). Las contingencias que se han presentado periódicamente en los meses de Junio y Julio de los últimos años provocan enfermedades respiratorias, principalmente, en niños aún en desarrollo y en adultos mayores; así mismo se han observado afectaciones a los animales y a la vegetación de la Ciudad [1].

La ecuación de Difusión (1) se utiliza para modelar la concentración *u* de una sustancia o material en una región determinada del espacio para algún intervalo de tiempo. En particular puede modelar contaminantes en la atmosfera. Esta ecuación se puede generalizar involucrando más variables del medio como la velocidad del viento *v*, las funciones de fuentes o sumideros del contaminante en la atmosfera *R* o los coeficientes de difusividad α característicos de cada material, como en (2).
Las funciones *R* además de considerar las fuentes y los sumideros de los contaminantes, también engloban las ganancias y las pérdidas de la concentración del contaminante producidas por fenómenos físico-químicos, entre ellos las reacciones químicas generadas de las interacciones entre ellos [5].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla u + \alpha \nabla^2 u + R \tag{2}$$

Los principales componentes de la contaminación atmosférica, el porcentaje que representan y su coeficiente de advección se presentan en la tabla 1 [2] [3] [6].

Tabla 1. Coeficientes de Difusividad de los contaminantes en el aire y promedios de concentración en la Ciudad de México.

Contaminante	Difusividad en el aire $\alpha(10^{-5}\ m^2/s)$
CO_2	1.381
CH_4	1.952
CO	1.807
SO_2	1.089
O_3	1.444
NH_3	1.978
N_2O	1.436
NO	1.802
NO_2	1.361

El término de partes por billón (ppb) o partes por millón (ppm) es una unidad utilizada en el área de las ciencias ambientales como medida de la concentración de un contaminante en el aire, agua o suelo.

Al generar una gráfica para un determinado tiempo de la solucion de (2), se genera un modelo más real sobre los fenómenos dispersivos del viento sobre la concentración de los contaminantes en la atmosfera y cómo la presencia de este es importante para tener una mejor calidad de aire.

II. METODOLOGÍA

En los siguientes apartados se describe la solución de la ecuación de difusión-advección para el modelado de la concentración de contaminantes.

A. Consideraciones

Para estudiar los efectos de la advección sobre la concentración de los contaminantes en la Ciudad de México se resolverá la ecuación (2) bajo las siguientes consideraciones:

1. La región de estudio se delimita como una superficie rectangular paralela al plano local.

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in [0, L_1], y \in [0, L_2]\}$$

2. Se considera que el contaminante es incomprensible, es decir, R=0.

3. Las componentes de la velocidad del viento se consideran distintas

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$v_x \neq v_y$$

4. Se considerara al coeficiente de difusión α en general.

B. Solución

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores la ecuación (2) se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

Y las condiciones del problema son:

Condiciones de Frontera

1) $u(0,y,t) = 0$ 2) $u(L_1,y,t) = 0$ $para\ y \in [0,L_2],\ t > 0$
3) $u(x,0,t) = 0$ 4) $u(x,L_2,t) = 0$ $para\ x \in [0,L_1],\ t > 0$

Puesto que analizaremos una región bien delimitada del espacio.

Condición inicial

5) $u(x,y,0) = u_0$ $para\ \ x \in [0,L_1], y \in [0,L_2]$

Donde u_0 es la concentración inicial de los contaminantes.

Para resolver la ecuación (3) es necesario considerar el siguiente cambio de variable [5]:

$$u(\vec{r},t) = e^{-(\vec{b}\cdot\vec{r} + \alpha(\vec{b}\cdot\vec{b})\,t)}\, W(\vec{r},t)$$

Donde

$$\vec{r} = (x,y)\ y\ \vec{b} = \left(\frac{v_x}{2\alpha}, \frac{v_y}{2\alpha}\right)$$

$$\alpha(\vec{b}\cdot\vec{b}) = \frac{v_x^2}{4\alpha} + \frac{v_y^2}{4\alpha}$$

Obteniendo sus derivadas respectivas, sustituyendo en (3) y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right\} \qquad (4)$$

Que es la Ecuación de Difusión en dos dimensiones. Este cambio de variable que se usa hace que las condiciones que se tienen se modifiquen a:

Condiciones de Frontera

1.1) $W(0,y,t) = 0$ 2.1) $W(L_1,y,t) = 0$ $para\ y \in [0,L_2],\ t > 0$
3.1) $W(x,0,t) = 0$ 4.1) $W(x,L_2,t) = 0$ $para\ x \in [0,L_1],\ t > 0$

Condición inicial

5.1) $W(\vec{r},0) = u(\vec{r},0)e^{\vec{b}\cdot\vec{r}} = u_0 e^{\vec{b}\cdot\vec{r}}$ $para\ \ x \in [0,L_1], y \in [0,L_2]$

Para resolver la ecuación (4) ahora utilizamos el método de separación de variables [7] en donde se quiere encontrar una solución de la forma:

$$W(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) = XYT$$

Sustituyendo esta solución propuesta en la ecuación (4) y simplificando se obtienen las siguientes tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \beta X = 0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \gamma Y = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha(\gamma + \beta)T = 0$$

Donde β y γ son constantes de separación.

Para obtener los valores de estas constantes de separación se requiere hacer un análisis de las condiciones de frontera e iniciales que se dan. Debido a que nuestras condiciones de frontera son condiciones de Dirichlet (o periódicas) tanto β como γ tomaran el valor de constantes negativas $-k_1^2$ y $-k_2^2$, respectivamente. Los cuales a su vez determinan la constante para la función *T(t)*. Obteniendo así las soluciones respectivas de cada ecuación diferencial ordinaria:

$$X(x) = A_1 \cos(k_1 x) + A_2 sen(k_1 x)$$

$$Y(y) = A_3 \cos(k_2 y) + A_4 sen(k_2 y)$$

$$T(t) = A_5 e^{-\alpha\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)t}$$

Donde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 son constantes.

Luego la solución general para W(x, y, t) es:

$$W(x,y,t) = [A_1 \cos(k_1 x) + A_2 sen(k_1 x)][A_3 \cos(k_2 y) + A_4 sen(k_2 y)] * \left(A_5 e^{-\alpha\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)t}\right)$$

Para encontrar los valores de las constantes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, k_1 y k_2; solo falta aplicar las condiciones que se dan para W(x, y, t).

III. Resultados

La solución que se obtiene para W(x, y, t) es:

$$W(x,y,t) = \sum_{n\in N}\sum_{m\in N} A_{nm}\, sen\left(\frac{n\pi}{L_1}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) e^{-\alpha\left(\frac{n^2\pi^2}{L_1{}^2}+\frac{m^2\pi^2}{L_2{}^2}\right)t}$$

con:

$$A_{nm} = \frac{8u_0\,\pi^2}{(L_1L_2)^2}\frac{mn}{\left[\left(\frac{v_y}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{v_x}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2\right]} * \left\{1-(-1)^m e^{\frac{v_y L_2}{2\alpha}}\right\}\left\{1-(-1)^n e^{\frac{v_x L_1}{2\alpha}}\right\}$$

Pero la concentración u(x, y, t) de una sustancia en una región es:

$$u(\vec{r},t) = e^{-(\vec{b}\cdot\vec{r}+\alpha(\vec{b}\cdot\vec{b})\,t)}\, W(\vec{r},t)$$

Entonces

$$u(\vec{r},t) = \frac{8u_0\,\pi^2}{(L_1L_2)^2}\sum_{n\in N}\sum_{m\in N}\frac{mne^{-\vec{b}\cdot\vec{r}}}{\left[\left(\frac{v_y}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{v_x}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2\right]} * \left\{1-(-1)^m e^{\frac{v_y L_2}{2\alpha}}\right\}\left\{1-(-1)^n e^{\frac{v_x L_1}{2\alpha}}\right\} sen\left(\frac{n\pi}{L_1}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) * e^{-\left[\alpha\left(\frac{n^2\pi^2}{L_1{}^2}+\frac{m^2\pi^2}{L_2{}^2}\right)+\left(\frac{v_x^2}{4\alpha}+\frac{v_y^2}{4\alpha}\right)\right]t}$$

En las siguientes figuras se muestran algunos casos particulares de esta solución. En la figura 1 se analiza el efecto de la diferencia entre las componentes de la velocidad del viento sobre la concentración de los contaminantes. En la figura 2 se analiza el efecto de los coeficientes de difusión sobre la concentración de los contaminantes

IV. Discusión

La figura 1 (arriba) muestra la concentración de los contaminantes como función de la posición. En este caso las componentes de velocidad son las mismas y se observa que la distribución es simétrica. En la figura 1 (abajo) se grafican las mismas condiciones pero con la componente de velocidad en *y* mayor que en *x*. Se observa que, en efecto, la concentración de los contaminantes es mayor en la dirección de *y*. Estoy explica cómo el viento difunde los contaminantes. Otra observación importante que se extrae de estas gráficas es que la concentración máxima disminuye cuando una de las componentes de la velocidad es mayor que otra. Esto explica por qué las corrientes de aire no sólo transportan contaminantes, sino que también disminuyen su concentración. A su vez, se interpreta que la ausencia de corrientes de viento genera el problema conocido como contingencia ambiental.

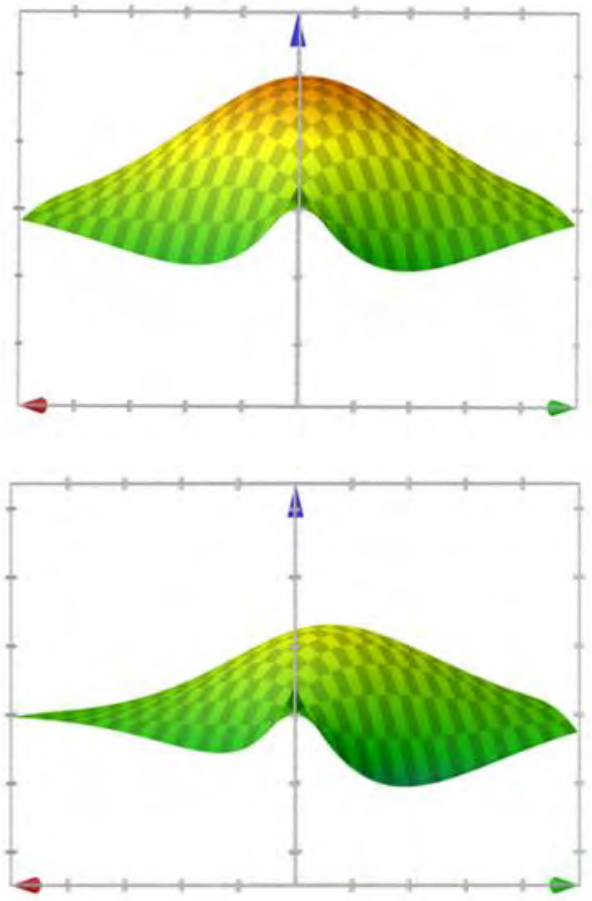


Fig. 1. Variación de la concentración de los contaminantes debida a la diferencia entre las componentes de la velocidad del viento. Se grafica la concentración como función de la posición en *x* e *y*, a un tiempo fijo.

La figura 2muestra la concentración de los contaminantes como función de la posición en x y del tiempo. En la figura 2 (abajo) se grafican las mismas condiciones que en 2 (arriba) pero con un coeficiente de difusión mayor. Se observa que cuando el coeficiente de difusión es grande, la concentración de los contaminantes disminuye mucho más rápido que cuando el coeficiente de difusión es pequeño en un mismo intervalo de tiempo; es decir, los contaminantes con coeficientes de difusión más grandes, disminuyen su concentración en la atmósfera más rápido debido a la difusión-advección provocada por corrientes de viento.

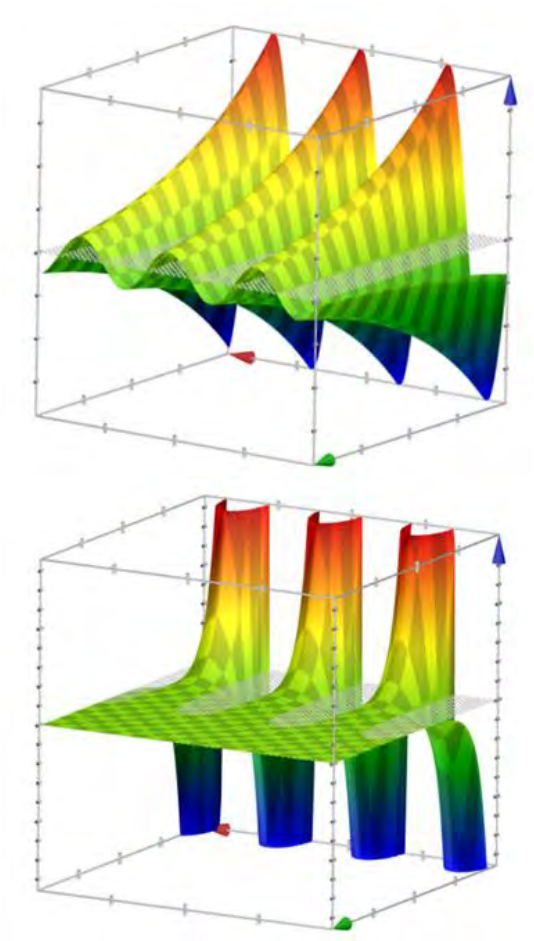


Fig. 2. Variación de la concentración de los contaminantes debido a la diferencia entre coeficientes de difusión. Se grafica la concentración como función de la posición en *x* y del tiempo, para un valor de *y* fijo.

V. Conclusiones

De los resultados obtenidos analíticamente y su interpretación a través de las gráficas se concluye lo siguiente:

1. Las difusión-advección de los contaminantes por corrientes de viento implica un transporte del material pero también una disminución de la concentración.
2. Los coeficientes de difusión miden qué tan rápido disminuye la concentración de los contaminantes en una región debido a corrientes de viento.
3. Cuando en la atmósfera no se presentan corrientes de viento (v=0) se generan las contingencias ambientales.

Referencias

[1] Página web disponible: http://www.aire.cdmx.gob.mx/default.php

[2] Página web disponible: https://datos.gob.mx/busca/dataset/indicadores-basicos-del-desempeno-ambiental--atmosfera--calidad-del-aire

[3] Página web disponible: http://www.aire.cdmx.gob.mx/descargas/publicaciones/flippingbook/inventario-emisiones-cdmx2014-2/IE-CDMX-2014.pdf

[4] Página web disponible: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v53n1/v53n1a6.pdf

[5] Simulación numérica de un problema de contaminación atmosférica, Lic. en Ciencias Ambientales Pedro Molina Jiménez, Universidad Politécnica de Madrid, 2013.

[6] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, “Differential Equations with Boundary-Value Problems”, Seventh Edition, 2009, Cengage Learning

ISSN: 2594-1011

La memoria del electrón clásico

H. Betanzos, J. Avendaño
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55254 E-mail: javel@esfm.ipn.mx

Resumen — **Estudiamos en 1-dimensión la dinámica de un electrón en interacción con su propio campo de radiación usando un formalismo causal. La ecuación de movimiento resultante es una ecuación integro-diferencial no-lineal que depende de la historia del acoplamiento electrón-campo –de reacción-de-radiación en cada punto de su trayectoria. Al sustituir esta historia de acoplamiento detallada por un promedio, la ecuación integro-diferencial deviene en una ecuación diferencial lineal con memoria.**

Palabras Clave – **Auto-interacción, reacción de radiación**

Abstract — **We study in 1-dimension the dynamics of an electron interacting with its own radiation field using a causal formalism. The resulting equation of motion is a non-linear integro-differential equation that depends on the history of the electron-field-radiation-reaction coupling at each point in its trajectory. By replacing this history of detailed coupling by an average, the integro-differential equation becomes a linear differential equation with memory.**

Keywords — **Self-interaction, radiation reaction**

I. INTRODUCCIÓN

De la electrodinámica sabemos que las partículas cargadas aceleradas emiten radiación. Esta radiación emitida transporta energía, momento y momento angular, lo cual afecta necesariamente el movimiento subsiguiente de las partículas (este efecto es llamado reacción de radiación). Por lo tanto, el movimiento de las partículas cargadas está determinado, en parte, por la forma en que tiene lugar la emisión de radiación. En muchas situaciones los efectos de la reacción de radiación sobre las partículas son despreciables, esto sucede en aquellas situaciones donde esta energía de radiación es muy pequeña comparada con la energía característica del sistema [1,2]. Sin embargo, cuando la energía de la radiación emitida es del orden de la energía característica del sistema, los efectos de la reacción de radiación sobre las partículas son importantes. Esta energía característica define un tiempo característico; la manera de hacerlo es igualar el tiempo que requeriría una fuerza externa para llevar la energía cinética de la partícula desde cero hasta esta energía característica, con el tiempo que requiere la fuerza de reacción de radiación para alcanzar esta misma energía. Para electrones este tiempo característico es $6.26X10^{-24}s$ que es el tiempo requerido por la luz en recorrer una distancia del orden de $10^{-13}\ cm$. Por lo tanto, solamente en aquellos sucesos que ocurran en estos tiempos y estas distancias, los efectos de la reacción de radiación serán importantes. En la electrodinámica estocástica (EDE), teoría clásica que intenta erigirse como fundamento de la teoría cuántica [3], durante la interacción de partículas puntuales con el campo de punto cero (elemento fundamental de la EDE) estos tiempos y estas longitudes son fundamentales. Por consiguiente, los efectos de la reacción de radiación juegan un papel crucial en esta teoría. Nuestro interés en la EDE nos lleva a estudiar con cuidado estos efectos. Una manera aproximada de hacerlo es recurrir a la ecuación de Abraham-Lorentz [2-5], la cual posee una tercera derivada de la posición de la partícula radiante, lo cual por decir lo menos es una presencia rara en la ecuación de Newton para la dinámica de las partículas. Debido a ello esta ecuación contiene peculiaridades matemáticas que deben tratarse con cuidado, pues si esto no se hace son comunes soluciones indeseables como aquellas que predicen pre-aceleraciones, i.e., las partículas comienzan a sufrir aceleración antes de que alguna fuerza actúe sobre ellas [1-5]. En este trabajo se presenta una metodología que pretende estar libre de estos procesos a-causales.

II. MODELO TEÓRICO

Consideremos un electrón interaccionando con un campo electromagnético. El acoplamiento de la carga al campo, en la norma de Coulomb, se hace a través del llamado acoplamiento mínimo, i.e., efectuando, en la función hamiltoniana de partícula libre, la sustitución $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, (e es la carga del electrón). De esta manera la función hamiltonia que describe esta dinámica es

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)d^3x \quad . \qquad (1)$$

El campo electromagnético en la norma de Coulomb esta descrito por el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, el cual satisface la ecuación de onda, y puede ser expresado en una expansión de modos normales

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{k}\sqrt{\frac{2\pi c^2\epsilon_k}{\omega_k{}^2}}\left[a_{k\lambda}e^{-i\omega_k t}\mathbf{G}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})\right]+\mathbf{c.c.}\quad,\quad(2)$$

aquí λ es el índice de polarización, $k=c\omega_k$ la magnitud del vector de onda y $a_{k\lambda}$ son los coeficientes de la expansión. Las funciones ortonormales $\mathbf{G}_{\mathbf{k}\lambda}$ satisfacen la ecuación de Helmholtz, la condición de transversalidad y ortonormalidad. Además deben de cumplir las condiciones de frontera impuestas para **E** y **B**. Como punto de partida podemos considerar el sistema encerrado en una caja cúbica de lado L (el cual se hace tender a infinito más adelante). Las ecuaciones de Hamilton para los grados de libertad de la partícula nos guían hacia la siguiente ecuación de movimiento de la partícula [3]

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}=\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{k}\left(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})\right)\left\{ie\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_k}{V}}\left[a_{k\lambda}e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}-a^{*}_{k\lambda}e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{4\pi e^2}{V}\int_0^t dt'(\dot{\mathbf{x}}'\cdot\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})\cos(\omega_k(t-t')-(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')))\right\}\quad,\quad(3)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ es el vector de polarización, **x** es la posición de la partícula al tiempo t y $\dot{\mathbf{x}}'$ es la posición de la partícula al tiempo t′. La fuerza sobre el electrón consta de dos términos, el primero es la fuerza de Lorentz libre y el segundo término es la fuerza de reacción de radiación, que es precisamente la que nos interesa en este trabajo. La ecuación dinámica para el electrón sometido a su propia interacción es entonces

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}=-\frac{4\pi e^2}{V}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{k}\left(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})\right)$$
$$\int_0^t dt'(\dot{\mathbf{x}}'\cdot\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})\cos\left(\omega_k(t-t')-(\hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))\right)\Big\},\quad(4)$$

desarrollando el triple producto vectorial y sumando sobre la polarización se obtiene

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\frac{4\pi e^2}{V}\sum_k\int_0^t dt'(\mathbf{u}_\mathbf{k})\cos(\omega_k(t-t')-(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')))\,,\quad(5)$$

donde

$$\mathbf{u}_\mathbf{k}=\left(1-\frac{\hat{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)\dot{\mathbf{x}}'+\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}'\cdot\dot{\mathbf{x}}}{c}-\hat{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{x}}'\right)\hat{\mathbf{k}}\quad.\quad(6)$$

Suponiendo que el movimiento del electrón es no relativista la expresión para el vector $\mathbf{u}_\mathbf{k}$ se simplifica

$$\mathbf{u}_\mathbf{k}=\dot{\mathbf{x}}'-(\hat{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{x}}')\hat{\mathbf{k}}\quad,\quad(10)$$

que es la componente de la velocidad perpendicular al modo **k**, esta expresión puede reescribirse como

$$\mathbf{u}_\mathbf{k}=\dot{\mathbf{x}}'\sin^2\alpha+\mathbf{w}^{\perp}\quad,\quad(8)$$

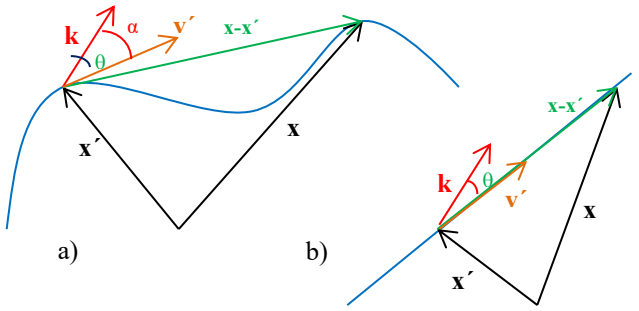


Fig. 1. Trayectoria de la partícula, **v**′ es la velocidad al tiempo t′ y θ es el ángulo entre el modo **k** y el vector **x**-**x**′ a) El ángulo α entre el modo **k** y **v**′ depende de t′ en general. b) Si la partícula se mueve en línea recta el ángulo α=θ es fijo para el modo **k**.

donde α es el ángulo que hace $\dot{\mathbf{x}}'$ con el vector **k** y $\mathbf{w}^{\perp}$ es un vector ortogonal a $\dot{\mathbf{x}}'$. En el argumento de la función coseno de (5) podemos usar la siguiente notación para simplificar

$$\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta=\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta=\omega s\cos\theta\,,\quad(9)$$

aquí $s(t,t')=\frac{|x-x'|}{c}$ es el tiempo en que la luz viaja entre las posiciones $\mathbf{x}'$ y **x** del electrón, θ depende de t′ por supuesto (ver figura 1a). Pasando al límite continuo en (5) y sustituyendo en (8) y (9)

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\frac{e^2}{2\pi^2c^3}\int\omega^2 d\omega d\Omega_k\cdot$$
$$\int_0^t dt'(\dot{\mathbf{x}}'\sin^2\alpha+\mathbf{w}^{\perp})\cos(\omega(t-t')-\omega s\cos\theta).\quad(10)$$

En general no es posible intercambiar la integración en el tiempo con la integración en el ángulo sólido en el espacio **k**. Si restringimos el movimiento del electrón a una línea recta, entonces $\theta(t')=cte.\forall t'\in[0,t]$ y además α=θ (ver figura 1b). Realizando la integral sobre el ángulo sólido para este caso obtenemos

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^\infty\omega^2 d\omega\int_0^t dt'\dot{\mathbf{x}}'K(\omega s)\cos(\omega(t-t'))\quad,\quad(11)$$

donde

$$K(\omega s)=-3\left(\frac{\cos\omega s}{\omega^2 s^2}-\frac{\sin\omega s}{\omega^3 s^3}\right)\quad.\quad(12)$$

Esta ecuación es muy complicada de resolver, pero podemos observar que el factor $K(\omega s)$ juega el rol de un factor de estructura o función de corte sobre la frecuencia para un valor fijo de t′ (ver figura 2).

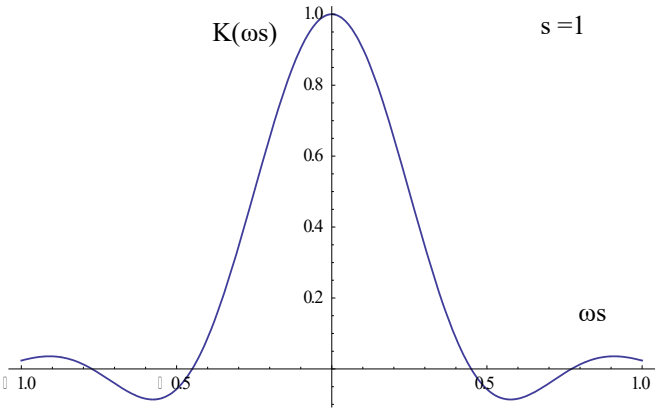


Fig. 2. Para longitudes de onda larga (o para s muy pequeñas) $\omega s \to 0$ y el valor de $K \to 1$, con este valor de K se recupera la ecuación de Abraham-Lorentz. Para $\omega s \to \infty$ el valor de $K \to 0$, esta propiedad nos da un "cutoff" en la frecuencia.

Observamos que $s(t,t') = \frac{|x-x'|}{c}$ no toma valores negativos y debido al valor tan alto de la rapidez de la luz respecto a la rapidez de la partícula esta cantidad varía poco, por lo tanto podemos tomar como aproximación un valor promedio para esta cantidad $s(t,t') = s_0$. De esta forma $K(\omega s) = K(\omega)$ es solo función de la frecuencia, lo cual permite expresar (11) como

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{4e^2}{3\pi c^3}\int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^t dt'\dot{\mathbf{x}}'K(\omega)\cos\big(\omega(t-t')\big) \quad , (13)$$

después de algunas manipulaciones con la delta de Dirac la ecuación integro-diferencial se transforma en una ecuación diferencial en diferencias (retardo)

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{3m\tau}{{s_0}^3}\left[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-s_0) - \dot{\mathbf{x}}(t-s_0)\right] \quad , (14)$$

$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}$. Desarrollando (14) en serie de Taylor alrededor de t, recuperamos al orden más bajo la ecuación de Abraham-Lorentz sin divergencias infinitas

$$(m+\delta m)\ddot{\mathbf{x}}(t) = m\tau\dddot{\mathbf{x}}(t) \quad , \quad (15)$$

$$\delta m = \frac{3m\tau}{2s_0} \quad , \quad (16)$$

pues la masa re-normalizada δm es finita debido a que s_0 es finito.

III. Discusión (oscilaciones del electrón)

Proponemos una solución para la ecuación diferencial en diferencias (14) de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C_1}e^{-(\sigma+i\omega)t} + \mathbf{C_2} \;\; ; \;\; \sigma,\omega \geq 0 \quad , \quad (17)$$

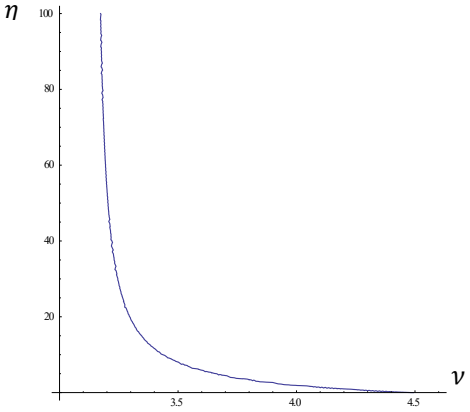


Fig. 3. Soluciones de (18) y (19) en el intervalo $(\pi, \nu_1]$ donde ν_1 es el primer valor de auto-oscilación del electrón. Cuando $\nu \to \pi$ el tiempo de vida de la oscilación $t_\nu = \frac{1}{\sigma} \to 0$. El valor $\nu = \pi$ es el ínfimo de los valores que puede tomar ν para que se cumpla la condición $\eta \geq 0$.

sustituyendo (17) en (14), separando la parte real e imaginaria y llamando $\nu = \omega s_0$, $\eta = \sigma s_0$, $\xi = \frac{3m\tau}{{s_0}^3}$ obtenemos

$$\nu^2 - \eta^2 = \xi\{1 + e^\eta[(\eta-1)\cos\nu - \nu\sin\nu]\} \quad , \quad (18)$$

$$2\eta\nu = -\xi\{e^\eta[(\eta-1)\sin\nu + \nu\cos\nu]\} \quad , \quad (19)$$

un sistema de dos ecuaciones trascendentes con dos incógnitas. Se pueden obtener soluciones de la forma $\eta(\nu) \geq 0$ de manera numérica (ver figura 3), estas soluciones representan para $\eta > 0$ oscilaciones amortiguadas que decaen con tiempo de vida $t_\nu = \frac{1}{\sigma}$. En general:

$$\nu \in \cup_{j=1}^{\infty}(j\pi, \nu_j] \quad , \quad (20)$$

donde $\nu_j$es el j-ésimo cero de $\eta(\nu)$. Estos valores se pueden obtener tomando $\eta = 0$ en (18) y (19), las cuales se reducen

$$\xi = -(1+\sec\nu) \quad , \quad (21)$$

$$\nu = \tan\nu \quad , \quad (22)$$

la ecuación trascendente (22) tiene las raíces: $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 4.490946$, $\nu_2 = 7.724525$, $\nu_3 = 10.904121$, $\nu_4 = 14.06193$, $\nu_5 = 17.220755$, $\nu_6 = 20.371303$, $\nu_7 = 23.519452$, etc. Sin embargo las raíces con subíndices pares sustituidas en (21) dan valores negativos para ξ . Por lo tanto tenemos que descartarlas y nos quedamos con las raíces de subíndice impar que son físicamente aceptables en (20), (21) y (22). Usando la expresión para la frecuencia de Compton $\omega_C = \frac{mc^2}{\hbar}$ y la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, podemos

escribir el valor de las frecuencias de oscilación estable 8auto-sostenida) del electrón como sigue

$$\omega = \frac{\nu\xi}{2\alpha}\omega_C \quad , \quad (23)$$

evaluando esta expresión en las raíces de subíndice impar tenemos: $\frac{\omega}{\omega_C} = 1109,7433,19173,36324$, etc. El primer valor de la frecuencia de auto-oscilación es tres órdenes de magnitud mayor a la frecuencia de Compton. En este caso la ecuación (17) toma la forma $\mathbf{x}(t)\sim e^{-i\omega t}$ de aquí se sigue que la rapidez máxima $|\dot{x}_{max}| = a\omega = cs_0\omega = \nu c$, donde $a = cs_0$ es la estructura efectiva del electrón inducida por la auto-oscilación (que podemos considerar como la amplitud de estas oscilaciones). Desafortunadamente este valor de la rapidez es superlumínico. Lo cual es una contradicción respecto a las suposiciones hechas. Desde la óptica de la EDE, una posible solución a esto es esperar que al agregar la contribución del campo de punto cero (CPC) estas frecuencias de auto-oscilación puedan disminuir. La inclusión del CPC es natural ya que el acoplamiento CPC-electrón-autocampo es inseparable.

Por otro lado, para oscilaciones amortiguadas ($\eta > 0$) si tomamos

$$\omega = \frac{3}{2\alpha}\omega_C \approx 205.5\omega_C \quad , \quad (24)$$

con $\nu \to \pi$ por la derecha, $\eta \to \infty$, se debe tener

$$s_0 = \frac{\nu}{\omega} = \nu\tau \approx \pi\tau \quad , \quad (25)$$

estas oscilaciones inducen una estructura efectiva para el electrón $a = cs_0$, de (25) resulta que $a \approx \pi r_C$ donde $r_C = c\tau$ es el radio clásico del electrón. El tiempo de vida de las oscilaciones está dado por $t_\nu = \frac{1}{\sigma} = \frac{s_0}{\eta} \approx \frac{\pi\tau}{\eta} \to 0$. Se puede argumentar que debido a esta característica estas oscilaciones no tienen importancia, no obstante desde la perspectiva de la EDE el electrón está sujeto permanentemente a la acción de un campo de punto cero fluctuante (CPC), el cual podría "estimular" por resonancia las oscilaciones y mantenerlas estables mediante un proceso de balance detallado de energía.

IV. Conclusiones

La ecuación integro-diferencial a la cual se arriba desde el modelo del electrón puntual en interacción con su propio campo, es una ecuación causal, aunque con las limitaciones de ser no-relativista. Esta ecuación contiene un kernel $K(\omega s)$, que induce una estructura efectiva espacio-temporal para el electrón. Sin embargo, resolver esta ecuación es muy complicado, por ello en el kernel que depende de manera continua del tiempo, se considera un tiempo promedio s_0. Esto hace que la ecuación integro-diferencial se pueda transformar en una ecuación diferencial en diferencias en el tiempo, o también llamada ecuación diferencial con retardo o memoria temporal para el movimiento del electrón. Esta memoria temporal en el tiempo es inducida justamente por el tiempo promedio s_0, introducido en el kernel de la integral. En un sentido más alegórico decimos que el electrón tiene una memoria de corto alcance en el tiempo. Esta ecuación admite soluciones en las cuales el electrón efectúa auto-oscilaciones que dependen de la memoria temporal del electrón. Estas oscilaciones estarían induciendo una estructura efectiva al electrón (que al fin de cuentas provienen del kernel ya mencionado); sin embargo la frecuencia de estas oscilaciones es muy alta, tan altas que la mínima es tres órdenes de magnitud mayor que la frecuencia de Compton. En la electrodinámica cuántica (EDC) estas auto-oscilaciones del electrón se observan pero su frecuencia de dos veces la frecuencia de Comptom (este efecto en la EDC es conocido como zitterbewegung [6]). Estas frecuencias son tan altas que la velocidad promedio que tendría el electrón en estas oscilaciones son superlumínicas. Esta situación nos lleva a descartar estas soluciones. Otro tipo de soluciones que se encuentran en la ecuación con memoria son las soluciones amortiguadas, éstas poseen frecuencias de oscilación menores, aunque con tiempos de vida muy pequeños. Podría pensarse que debido a esta situación, estas soluciones no son importantes, sin embargo en la EDE el electrón está inmerso en un campo de punto cero (al igual que en la EDC, aunque virtual) que contiene todas las frecuencias y por lo tanto hay frecuencias resonantes que pueden alimentar estas oscilaciones amortiguadas y llegar a un equilibrio dinámico.

Agradecimientos

J. Avendaño agradece el apoyo proporcionado por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN, y por la COFAA IPN, México.

Referencias

[1] J. D, Jackson, "Electrodinámica Clásica (Traducción de Classical Electrodynamics, 2nd edition, ALHAMBRA, 1980).
[2] F. Rohrlich, "Classical Charged Particles, Foundations of Their Theory" , (Addison-Wesley, 1990).
[3] L. de la Peña and A. M. Cetto, The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic *Electrodynamics* ,Kluwer Academia Publisher, Netherlands, 1996
[4] M. Abraham, "Prinzipien der Dynamik des Elektrons" Ann. Physik. Vol. 10, p. 105, 1903.
[5] H. A. Lorentz, "The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiation Heat (second edition)": Dover Publications, New York 1952.
[6] P. W. Miloni, "The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics (Academic Press, 1994, San Diego, USA).

ISSN: 2594-1011

Matemáticas básicas en un curso de Criptografía para ingenieros

Ricardo López Bautista, Georgina Pulido Rodríguez
Departamento de Ciencias Básicas, DCBI-A, UAM, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9014, 15, 17 Fax (55) 5318-9540 E-mail: galoisenlinea@azc.uam.mx

Resumen — **Los alumnos de ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco que pueden inscribirse al curso de Criptografía no han cursado asignaturas donde se estudien fundamentos de álgebra abstracta o teoría de números, tales como anillos, enteros módulo n, campos finitos, factorización de enteros o teoría de números, en los que se sustenta la Criptografía. Para apoyar a estos alumnos, se imparte esta asignatura con un enfoque operativo y se apega al texto "Handbook of applied Cryptography" de A. Menezes, en un curso semipresencial en el Centro de Evaluación en Línea para Matemáticas galoisenlinea (http://galois.azc.uam.mx), basado en Moodle. Nuestro enfoque pedagógico se basa en el diseño de bancos de preguntas y ejercicios para exámenes con recursos didácticos tutoriales, pseudocódigos para algoritmos criptográficos con diversos sistemas algebraicos computacionales, solución de ejercicios y librerías de Mathematica. El mayor apoyo hacia los alumnos reside en las autoevaluaciones, que están a su disposición a toda hora y que siempre les muestran ejercicios diferentes dentro del tema de estudio, pues les brinda retroalimentación específica para cada ítem. Los objetivos de esta asignatura Criptografía son: analizar, diseñar y evaluar formalmente algoritmos y protocolos criptográficos utilizando paquetes computacionales.**

Palabras Clave – **Criptografía, teoría de números, matemáticas para ingeniería.**

Abstract — **The students of engineering of the autonomous Metropolitan University Unidad Azcapotzalco that can register to the course of cryptography have not studied subjects where they study fundamentals of abstract algebra Abstract algebra or number theory, such as rings, integer modulo n, finite fields, integer factorization or number theory, theory of numbers, in which cryptography is supported. To support these students, this subject is taught with an operative approach and adheres to the text "Handbook of applied Cryptography" by A. Menezes, in a blended course at the online Math Assessment Center galoisenlinea (http://galois.azc.uam.mx) based in Moodle. Our pedagogical approach is based on the design of question benches and exercises for exams with didactic resources tutorials, pseudo codes for cryptographic algorithms with various computational algebraic systems, exercise solution and libraries of Mathematica. The greater support for students lies in self-assessments, which are available every time and always show them different exercises within the subject of study, because it gives them specific feedback for each item. The objectives of this subject cryptography are: to analyze, design and formally evaluate algorithms and cryptographic protocols using computational packages.**

Keywords — **Cryptography, Number theory, Mathematics for engineering.**

I. Introducción

La asignatura Criptografía se ubica como optativa en los planes de estudios de Ingeniería en Computación y de Ingeniería Electrónica en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (UAM-A), dentro de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería (DCBI-A). Las asignaturas de matemáticas que se cursan en el tronco general tienen fundamentos de Cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, probabilidad y estadística, programación, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales de n entradas reales. En Computación deben llevar álgebra lineal, matemáticas discretas, lógica y análisis y diseño de algoritmos como obligatorias; en Electrónica, son optativas.

Los objetivos del curso Criptografía son: analizar, diseñar y evaluar formalmente algoritmos y protocolos criptográficos utilizando paquetes computacionales; el libro de texto es Menezes [1]. Debido a que los contenidos del curso hacen referencia a temas de álgebra moderna que no está considerada dentro de los planes de estudios, se propone una guía de trabajo para cubrir objetivos de aprendizaje que permitan al alumno de ingeniería cursar con éxito su asignatura de Criptografía, dentro del plazo en el que se inscribe. El programa de estudios puede ser consultado en [2]. El curso ha sido programado en cada trimestre desde 2013; se ha impartido en sistema tradicional y en Sistema de Aprendizaje Individualizado (SAI); este trabajo se refiere a la forma en la que ha sido puesto en práctica en SAI por el autor López, quien también lo fue del programa de estudios Criptografía, que puede ser consultado en [2].

Hay aproximadamente 300 alumnos de nuevo ingreso al año para las carreras donde se imparte Criptografía y, aunque hay registrados alrededor de 4,000 alumnos en ellas, solamente unos cuantos están en posibilidades de inscribirse a Criptografía, pues tiene como antecedente una cadena larga de materias.

Desde que se puso en marcha la asignatura Criptografía, se han inscrito entre cuatro y seis alumnos al trimestre, de los cuales varios son alumnos que presentarán su examen de recuperación en SAI, que podrían ser llamados "oyentes", pero cuya condición está plenamente aceptada en la DCBI-A. Parece que prefieren ponerse a prueba sin la presión que significa inscribir la materia. De los alumnos que inician el programa, aprueba la mayoría.

II. METODOLOGÍA

A. Sistema de evaluación automática enfocado en un texto específico.

El curso de Criptografía en SAI, que está disponible en http://galois.azc.uam.mx, está basado en Moodle [3] y sigue una secuencia apegada al libro Menezes [1]. El diseño del curso que aquí se comenta está orientado a la elaboración de códigos en Mathematica, cuyos resultados están definidos con precisión. Cada cuestionario se elabora con múltiples respuestas parciales, todas ellas con dos posibilidades: "respuesta correcta" o bien, "error".

Algunos temas son: Matemáticas básicas. Álgebra abstracta: Anillos. Grupo multiplicativo de los enteros módulo n. Campos. Espacios vectoriales. Campos finitos. Algoritmos en $\mathbb{Z}$p (p primo). Algoritmos en los enteros. Factorización de enteros. Teoría de números. Criptografía de llave pública. Operaciones con números primos en Criptografía. Manejo de llaves a través de técnicas de llave simétrica o de llave pública. Modelos para evaluar la seguridad. Cifradores de flujo. Cifradores de bloque. Encriptado de llave pública. Funciones Hash e integridad de datos. Identificación y autenticación de entidad. Firmas digitales. Protocolos de establecimiento de llave. Técnicas de manejo de llaves. El tema de espacios vectoriales se trabaja en álgebra lineal; pero los contenidos de álgebra abstracta, están fuera del currículo. Un alumno de ingeniería interesado en Criptografía ha de cubrir esos materiales por su cuenta.

Partición del curso en diez unidades de evaluación. El curso de Criptografía está organizado en unidades, cada una con un conjunto de recursos tales como asesorías personalizadas, videos, tutoriales, screencasts, programas, ejercicios resueltos, para que el alumno estudie en forma autodidacta y autoevaluaciones con ejercicios para preparar su examen. Los temas de álgebra abstracta aparecen justo en la primera unidad del curso. Como se ha mencionado, el alumno tendrá que cubrir por su cuenta ese material. Para apoyar al alumno en esta parte, además de las ligas y referencias específicas a materiales de estudio, hay un conjunto de ítemes de evaluación con ejercicios orientados a la operatividad algebraica en cuestión. Por ejemplo, se le pide al alumno factorizar un número, calcular el residuo de la división de un número entre otro, determinar el conjunto de primos menores que un número dado, con CAS. Los números que se usan en este curso son enteros con más de tres cifras, pudiendo tener hasta 100 dígitos en una cadena de caracteres sin cortes. No se escriben en notación científica ni se usan aproximaciones decimales. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de ejercicio de la primera unidad con un cuadro de información de apoyo.

Autoevaluaciones y exámenes con calificación y retroalimentación automatizada. Al finalizar cada autoevaluación, recibe su calificación, junto con la retroalimentación para cada ejercicio. Al estar resolviendo varias autoevaluaciones, ninguna es igual a las anteriores, pues el banco de preguntas y ejercicios es grande. En la autoevaluación, cuando ha enviado sus respuestas, encontrará retroalimentación para cada uno de los ejercicios o problemas, consistente en su calificación, las respuestas esperadas y lo más importante, el procedimiento detallado del ejercicio. Los alumnos pueden hacer las autoevaluaciones las veces que lo requieran; la ventaja que proporciona el sistema galoisenlinea es que cada autoevaluación será diferente una de otra, aunque con el mismo nivel de dificultad y abarcando los mismos temas. Este esquema se repite para las subsecuentes autoevaluaciones. Es en esa forma de trabajo que el alumno investiga, prueba y pone en práctica conceptos; en vez de pedirle que demuestre teoremas, se le pide que descifre mensajes encriptados con algoritmos clásicos de encriptación utilizando esencialmente el programa Mathematica (Wolfram Research) [5], que programe, que aplique conceptos, especialmente en el primer tema.

Dinámica para acreditación del curso con 10 exámenes. La forma en la que el autor López ha conducido el curso establece que, para acreditarlo, el alumno debe aprobar 10 exámenes presenciales en las instalaciones de la UAM-A. Los exámenes constan de ejercicios en los que el alumno deberá calcular lo que se pide usando instrucciones específicas del programa; en la guía de estudio se dan referentes tales como [8], donde puede revisar la teoría y, a la vez, practicar con ejercicios.

La dinámica seguida para presentar cada examen es: el alumno realiza y aprueba en su casa la autoevaluación correspondiente, trabajando fundamentalmente con el programa Mathematica, sube su archivo "autoevaluación-n.nb" al aula virtual en Moodle que se tiene en http://galois.azc.uam.mx/, y se presenta en una sala de cómputo de la UAM-A para hacer su examen, donde también tendrá que programar y "subir" su código al servidor en el lugar que se indica en el examen.

Para asentar una calificación en la unidad, primero ha de aprobar el cuestionario (examen) correspondiente en Moodle, que se obtiene en forma automática inmediatamente que el alumno lo envía. Acto seguido, cada código que el alumno elabora para dar solución a los ejercicios de su examen es probado por el profesor junto con el sustentante: le pide que modifique algún dato o variable, le pide que explique una instrucción, o bien, que modifique una respuesta con base en el concepto evaluado. Si el alumno logra cumplir las condiciones solicitadas, el código se toma como "entregado" y se valida la calificación obtenida; en caso contrario, se asume que el alumno no aprobó el examen y deberá volver a elaborar una autoevaluación aprobatoria para tener derecho a presentar un nuevo examen.

Curso enfocado a problemas aplicados y su solución con CAS. El curso de Criptografía en SAI está orientado a la programación de algoritmos clásicos de encriptación, de factorización y logaritmo discreto, para resolver estos problemas en el curso, utilizamos para ello Mathematica [5];

entonces, los objetivos de aprendizaje de los antecedentes de álgebra abstracta son más bien de aplicación, de acuerdo con la taxonomía de Bloom [4]. Cuando los mismos temas de álgebra se manejan en una carrera de matemáticas (no es el caso en UAM-A), el nivel tendría que ser el más alto dentro de la misma taxonomía, pudiendo exigir al alumno demostraciones de enunciados y la creación de nuevos teoremas y aplicaciones teóricas.

Aun cuando los conceptos del álgebra moderna son abstracciones complejas con un aparato teórico formal, algunas de sus aplicaciones pueden ser explicadas con ejemplos al alcance de las matemáticas que se cursan en ingeniería, además de que existen los CAS que incluyen algoritmos asociados con Criptografía. Al software Mathematica se le pueden adicionar librerías que potencian su capacidad de cálculo, tal es el caso del módulo llamado CNT [5], que es uno de los soportes para el curso SAI que se imparte en la DCBI-A.

En el programa de estudios, que aparece en [2], se mencionan las modalidades de evaluación de la asignatura 1112036 Criptografía: "al menos dos evaluaciones periódicas consistentes en preguntas conceptuales, resolución de problemas, tareas y elaboración de programas".

Se muestran en la Fig. 2 algunos pseudocódigos que permiten hacer cálculos en aritmética, álgebra y teoría de números, los cuales son esenciales para el curso y que son pertinentes para la primera unidad del curso usando las librerías de Mathematica, que aparecen en [5].

Una de varias referencias que se citan en el curso puede verse en [6].

En la Fig. 3 se muestra un ejemplo de los ejercicios del curso, donde se piden al alumno soluciones con el uso de Mathematica. En la Fig. 4 se muestra un código realizado por un alumno para responder a otro de los ejercicios.

III. Resultados

a. Construcción y acceso a los alumnos de un banco de pseudocódigos criptográficos implementados en Mathematica, disponibles a toda hora en http://galois.azc.uam.mx.

Estos pseudocódigos se aplican en autoevaluaciones y exámenes. De importancia crucial para los alumnos es el hecho de que cada pregunta del banco de reactivos proporciona al alumno la solución y procedimiento paso a paso para obtener la solución.

b. Disponibilidad para los alumnos del aula de autoevaluaciones a toda hora, con intentos ilimitados y bancos de reactivos con miles de instancias, diferentes unas de otras.

Los alumnos inscritos y aquellos que ya no pueden inscribir la materia, tienen disponibilidad de todos los recursos en galoisenlinea, así como de asesorías asincrónicas o bien presenciales.

c. Aumento de la matrícula de alumnos regulares, así como de alumnos que ya no pueden inscribir la materia.

El hecho de que los alumnos cuenten con la guía temática, libros tipo Creative Common y la serie de recursos que ofrece galoisenlinea, ha impactado en que se inscriban más alumnos a galoisenlinea. Adicionalmente, el entusiasmo por resolver problemas de Criptografía ha motivado a un conjunto de alumnos para pedir proyectos terminales o de servicio social. Al menos uno de ellos se ha concretado, como puede verse en [7].

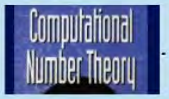
IV. Conclusiones

A pesar de que un ingeniero no necesariamente adquiere la formación de un matemático, es posible que, en un curso de criptografía, el cual es altamente tecnificado y con requerimientos avanzados en matemáticas, este profesional logre una comprensión adecuada y cubra los objetivos del curso, lo anterior es posible en la medida en que se le proporcionen las herramientas adecuadas y en el tiempo oportuno. El contar con un sistema de evaluación dinámica como es el caso del sistema en http://galois.azc.uam.mx y que en este sistema exista la disponibilidad de recursos a toda hora nos ha mostrado que esto ofrece una alternativa viable para que estos ingenieros puedan cubrir los objetivos del curso a pesar de que se requiere de un bagaje teórico y práctico muy demandante, han sido capaces de realizar las prácticas correspondientes a principios teóricos complejos que van más allá del alcance de su plan de estudios. Al estar implementando el curso de criptografía con el software Mathematica, se ha visto que el alumno trabaja los ejercicios y da muestras del logro de objetivos de temas abstractos en el curso. Esto ha redundado en que a lo largo de los años más alumnos se interesan en tomar este curso en el sistema galoisenlinea.

Durante el año 2015, el SAI impulsó un concurso de Criptografía abierto para toda la comunidad de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, basado en la parte inicial del curso que aquí se describe, donde los autores fueron parte del jurado; si bien participaron varios alumnos de licenciatura y de posgrado, el ganador fue uno de los últimos.

Apéndice

Los autores mantienen presencia permanente en el aula designada para tal fin, para brindar asesorías a los alumnos que así lo soliciten, además de un conjunto de referentes digitales en el curso, para brindar apoyo a los alumnos en fuentes accesibles. Por ejemplo, en la página http://www.matem.unam.mx/~rajsbaum/cursos/web/presentacion_seguridad_1.pdf se encuentran los temas: Criptografía de llave secreta (simétrica); algoritmos de cifrado, el problema con este tipo de cifrado; criptografía de llave pública (asimétrica); algoritmos de cifrado; definir el problema con este tipo de cifrado; firmas digitales; sobres digitales; certificado digital; autoridad certificadora. Esta página fue consultada el 3 de abril de 2018.

Librería CNT Click y visualice en Mathematica----->. 

Considere los enteros $a = 85396413918726792699088431529333627483 3$, $m = 63441983061257690094129816600673711658 27$.

En este ejercicio, encontrará el mínimo entero positivo k para el cual $a^k \equiv 1 \pmod{m}$.

El valor del número k es: .

Instrucciones.

★ Escribirá en el cuadro su resultado, sin comas, sin espacios, sin puntos.

Fig. 1. Ejemplo de ejercicio para los antecedentes de álgebra. Tomado de autoevaluaciones y examenes en http://galois.azc.uam.mx/

Encriptacion el Gamal. A partir de un mensaje cifrado obtenga el mensaje descifrado.

Datos Conocidos:

El Alfabeto={A,B,F,G,H,J,L,M,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,b,d,g,h,i,j,l,o,r,s,t,u,v,w,y,z,1,2,3,4,5,6,7,8,9, }.

El primo p=9757733675818557226834381964903879989549795925120 9.

Un generador del grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^*$ es α =3.

Llave privada, compartida por los 2 usuarios:

Escogemos un a tal que $1 \leq a \leq p-2$, este a es la llave secreta.

Puesto que el problema del Logaritmo discreto, en general no está resuelto.

Los dos usuarios comparten esta llave secreta. a =72148952387465152531832791096970213350264366858696.

Datos Conocidos:

Calculamos $\alpha^a \pmod{p}$=26558633744607115609319813742447239362361997453534.

la llave pública es la triada $(p, \alpha, \alpha^a \pmod{p})$.

Datos desconocidos:

Construímos un mensaje $\mathbb{M}$ en el alfabeto y le asignamos un número, lo llamaremos: m.

Datos desconocidos:

Escogemos un k tal que $1 \leq a \leq p-2$, pero k no se publica.

Datos Conocidos:

Calculamos $\alpha^k \pmod{p}$, este valor se hace del dominio público: α^k =87134004571510986409817565445354339804242719857366.

Calculamos $\delta = m(\alpha^a)^k \pmod{p}$, este valor se publica y su valor es:96371896658901094173603515488778462282211061162 34.

El mensaje descifrado $\mathbb{M}$ es: .

Fig. 3. Pregunta de examen: Algoritmo de encriptación ElGamal. Se pide descifrar un mensaje con el uso de comandos de Mathematica. Tomado de autoevaluaciones y examenes en http://galois.azc.uam.mx/

Encriptacion con RSA. A partir de un mensaje cifrado obtenga el mensaje descifrado.

Los datos conocidos son:
Alfabeto={A,B,F,G,H,J,L,M,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,a,b,d,g,h,i,j,k,l,o,r,s,t,u,v,w,y,z,1,2,3,4,5,6,7,8,9,
},
(Note que el alfabeto tiene el espacio como uno de sus elementos).

La llave pública es la pareja de números: (n,e).

Donde, el módulo n es el producto de dos primos:

n=pq=

177139570796347249368535436054947658130426084236524854452600055340402374434776755691958351537808645214439185781887738415629824340762135298432540198654398506130896487712053050709371123922495043788482 49.

El exponente de encriptación es e=17581.

Los datos desconocidos son:

El primo p: Calcule p=

28267662631058349882990069755249478840749804203814736677228222 ✓.

El primo q: Calcule q=

62665093010456340649703588681791291369424929875051846135067814 ✓.

El problema de factorización NO esta resuelto en general.

Si n=pq es el producto de 2 primos puede ser muy difícil encontrar los factores p y q.

Sin embargo si se conoce el valor EulerPhi[pq], entonces es relativamente fácil encontrar los primos p y q.

En este ejercicio, el valor EulerPhi[pq]=

177139570796347249368535436054947658130426084236524854452600055340402374434776755691958351537808645123506430140373047882936165903721365088257806119787815693834859867274857543321886322088491748272861 60}.

El exponente de desencriptación es d: Calcule d=

12035334583711779157654034376180818931619018123003750562745627 ✓.

Mensaje cifrado con RSA es:
c=555586078906725937493535175895438715588169402246457503740058627768305246875494918870183690996841349045905817478360670705782344234413165850269186795756099538411325595260216208837700346198770468805362 5.

Encuentre el mensaje descifrado: RTHMP7VX6rhAGLi ✓.

Fig. 4. Ejemplo de ejercicio para descrifrar un mensaje utilizando RSA. Respuestas del alumno.
Tomado de autoevaluaciones y examenes en http://galois.azc.uam.mx/

Cálculo de números primos

```
(* Prime[i] nos calcula el i-ésimo primo.*)
In[1]:=Table[Prime[i],{i,1,100000}]
Out[1]:=
{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,....,
1299673,1299689,1299709}
```

Cálculo del inverso multiplicativo de a módulo m

```
PowerMod[a,-1,m]
In[3]:= PowerMod[2313,-1,1299709]
Out[3]= 560791
```

Factorización de enteros.

```
In[13]:=
    FactorInteger[10899875813577371890652470457608336643893837274993995330177140237787606161]
Out[13]=
    {{3,2},{13,1},{17,1},{59,2},{227,1},{263,1},{1031,1},{1831,1},{9511,1},{24419,1},{1017787,1},{5909397066670194198829711610729671640583,1}}
```

Factorización de polinomios modulo p

```
Factor[f(x), Modulus->p]
In[6]:= Factor[8+38 x-18 x^2-38 x^3+10 x^4,Modulus->5]
Out[6]= 2 (1+x)^2 (4+x)
```

Cálculo de raíces r-ésimas de a módulo m

```
PowerMod[a,-1,m]
In[4]:= PowerMod[2313,1/17,1299709]
Out[4]= 829267
```

Cálculo de valores de la función Phi de Euler para n: {n, φ(n)}

```
In[3]:= Table[{k,EulerPhi[k]},{k,800,820,3}]
Out[3]=
    {{800,320},{803,720},{806,360},{809,808},{812,336},{815,648},{818,408}}
```

Cálculo del mínimo entero m tal que a^m≡1 mod n:

MultiplicativeOrder[a,n]

```
In[12]:= MultiplicativeOrder[1213322212,1299689]
Out[12]= 649844S
```

Checksum MD5 en formato hexadecimal:

```
Needs["CNT`"];
In[1]:= IntegerString[Hash["Prerequisitos para un curso de criptografia para ingenieros","MD5"],16,32]
Out[1]= d67dbf919e489ef5f4d47ded7b6d9591
```

Fig. 2. Ejemplos de códigos en Mathematica para el curso de Criptografía. Tomado de autoevaluaciones y examenes en http://galois.azc.uam.mx

REFERENCIAS

[1] Menezes, A. J., Van Oorschot, P. C., & Vanstone, S. A. (1996). Handbook of applied cryptography. CRC press.

[2] http://cbi.azc.uam.mx/work/models/CBI/Documentos/Licenciaturas/IngComputacion/PlanesProgEstudio/SeguridadRedes/1112036.pdf página consultada el 3 de abril de 2017.

[3] Moodle (2017). Sistema para el Manejo del Aprendizaje en línea gratuito. Recuperado de https://moodle.org/?lang=es

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Bloom%27s_taxonomy página consultada el 29 de mayo de 2017.

[5] Mathematica (2017) Recuperado de http://www.wolfram.com/ Wolfram Demonstrations Proyect (2017). Recuperado de http://demonstrations.wolfram.com/

[6] http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion10.pdf página consultada el 1 de mayo de 2018.

[7] Gaona, A.,Alvarado, O., López, R. Co-procesador aritmético para campos finitos binarios F2m en un FPGA. ROC&C 2012, Vol. 1, No. 1, Nov. 2012.

ISSN: 2594-1011

Pruebas de Fricción en tejido plano de mezclilla

Edith Cortez Martínez[1,*], Leydy Karina Ignacio Luz[1], Arturo Fidencio Méndez Sánchez[2,] Teresa Ramírez Rodríguez[3].
[1]Departamento de Ciencias Básicas, ESIT, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[3]Departamento de Acabados, ESIT, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[*]E-mail: ecm261078@hotmail.com

Resumen — **La industria textil tiene un papel central en las actividades de la sociedad, además de figurar entre las industrias más antiguas, siendo una de las actividades industriales más importantes para la economía. Una de las prendas de uso cotidiano a nivel mundial son los pantalones de mezclilla, el nombre genérico y comercial del producto objeto de investigación es tela de mezclilla o denim. Se trata de un tejido plano, elaborado con hilos crudos teñidos de azul indigo. En México se producen más 600 toneladas, cada mes, pero, así como se consume dicho producto también se desecha.**
Existe interés en comprender como actúan este tipo de materiales hacia el medio ambiente, pero al mismo tiempo se debe reconocer y caracterizar los materiales constituyentes para identificar sus características, anomalías y cómo cambian éstas durante su degradación. Es por esto que en el presente trabajo se realizan pruebas experimentales de fricción para analizar cuál es el comportamiento de dos telas nacionales mexicanas con diferente contenido de algodón.

Palabras Clave – **tejido plano, pruebas de fricción, mezclilla.**

Abstract — **The textile industry has a central role in the activities of society, besides being among the oldest industries, being one of the most important industrial activities for the economy. One of the garments of daily use worldwide are jeans, the generic and commercial name of the product under investigation is denim or denim. It is a flat woven fabric, made with raw threads dyed indigo blue. In Mexico, more than 600 tons are produced each month, but as this product is consumed, it is also discarded.**
There is interest in understanding how these types of materials act towards the environment, but at the same time the constituent materials must be recognized and characterized to identify their characteristics, anomalies and how they change during their degradation. This is why in the present work experimental friction tests are carried out to analyze the behavior of two Mexican woven fabrics with different cotton content.

Keywords — **cloth, denim friction, pants**

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-201818223

I. INTRODUCCIÓN

Tomando la contaminación, como problemática central en la actualidad para la sociedad que se preocupa por el medio ambiente y su impacto en la salud, y retomando estudios que caracterizan a la industria textil como una de las industrias más contaminantes del planeta.
Cada año se venden 80.000 millones de prendas en el mundo. Desde que diversas empresas impusieron el llamado "Fast fashion" un sistema basado en usar y tirar sin pensar más allá, el consumo de prendas se ha disparado, mientras toneladas de ropa vieja se acumulan sin que nadie sepa bien qué hacer con ellas. El problema medioambiental ha llegado a tal punto que alarma a los mismos fabricantes. Sin embargo, algunas respuestas de ellos mismos es el reciclado de las mismas prendas [1].
Centrándose en la mezclilla ya que es un elemento cotidiano en la vestimenta de los mexicanos y del mundo, tiene gran presencia a lo largo de nuestra vida por la cantidad enorme de producción de pantalones jeans, chamarras y toda prenda hecha con este textil, ocurren implicaciones ambientales de gran magnitud pues la mezclilla pues es uno de los textiles más contaminantes en el mundo. De acuerdo a un reporte publicado por la página de tecnología ambiental [2] se resume que mediante un estudio realizado por la agencia de medioambiente y control de energía de Francia (ADEME), tejido denim 666gr tan solo en la producción de una prenda se consumen 2mil litros de agua y emiten 13kg de CO2 y 10kg de colorantes y químicos. Además, en la elaboración del tejido de algodón (1.5 metros cuadrados de tela) con un ciclo de vida de 4 años y lavado cada tres usos puede consumir hasta 8 mil litros de agua y a nivel mundial se estimó que este tejido plano es el responsable del empleo del 10% de los pesticidas y 25% de los insecticidas.

Entre unas de las pruebas físicas para evaluar la calidad de los tejidos textiles, se encuentra el estudio de la fricción, ya sea estática o dinámica, pues permite determinar características estructurales de los tejidos, que condicionan de forma muy notable su comportamiento durante el uso. Es de importancia para los tejidos el análisis del coeficiente de fricción en las dos direcciones principales de un tejido, as saber sentido urdimbre que es la dirección por donde se genera la tela y la dirección trama que es la dirección trasversal a la dirección de elaboración del tejido.

En este trabajo se analizan experimentos de fricción estática para muestras de tejido plano. Particularmente, este tipo de tejido corresponde a la mezclilla de la cual existen dos proveedores de empresas mexicanas. No obstante, a la fecha no se han determinado estos coeficientes de fricción en las direcciones principales de las telas.

II. TEÓRIA

La fuerza de fricción se puede definir como la fuerza que experimentan dos superficies en contacto en movimiento relativo o al inicio de éste. A la fuerza que se opone al movimiento relativo entre las superficies de contacto se le denomina fuerza de fricción dinámica, mientras que la fuerza que se opone al inicio del deslizamiento o movimiento se le denomina fuerza de fricción estática. Como se sabe, esta fuerza tiene origen debido a las imperfecciones mayormente microscópicas entre las superficies en contacto, inclusive a nivel atómico y molecular, de ahí que la fuerza electromagnética tome relevancia por lo que es común que efectos triboeléctricos tengan origen durante las pruebas de fricción.
Además, se conoce que la fuerza de fricción estática entre cualquier par de superficies no lubricadas responde a dos leyes empíricas descubiertas por Leonardo da Vinci, a saber, es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y es proporcional a la fuerza normal [3]. Si se analiza un bloque que está en reposo sobre una superficie horizontal, donde existe una fuerza de tensión, una fuerza normal que la superficie ejerce sobre el objeto y en este caso es igual al peso (W) del objeto, dado que el sistema está en equilibrio, véase la Fig. 1,
De esta figura se puede inferir que

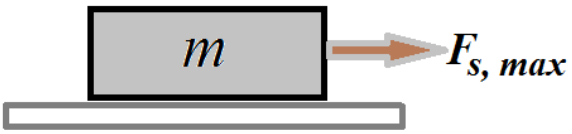
$$F_{s,max} = \mu_s \cdot N \qquad (1)$$

A la razón de la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática ($F_{s,max}$) entre la fuerza normal ($N = mg$), se le conoce como coeficiente de fricción estática μ_s.

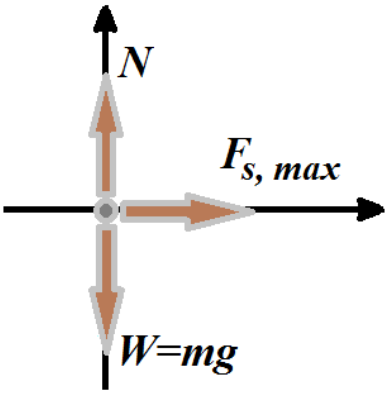
Aunque la expresión más general fue desarrollada matemáticamente por Coulomb [3],

$$F_s \leq \mu_s \cdot N \qquad (2)$$

Particularmente, la igualdad se cumple cuando la fuerza de fricción alcanza su valor máximo ($F_{s,max}$), por lo que la situación que representa la ec. (1) es el caso de estudio en el presente trabajo.



a)



b)

Fig 1. a) Objeto en equilibrio sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza de tensión y b) diagrama de cuerpo libre.

III. EXPERIMENTACIÓN

A. *Telas de Mezclilla*

Se analizaron dos tipos de tejido plano tipo mezclilla obtenidas de proveedores mexicanos. En la tabla I se resumen las características dadas por los proveedores respecto a los porcentajes de fibras de cada tejido plano.

TABLA I.
TELA MEZCLILLA

Lugar de compra	Características de compra		
	Nombre del tejido comercial	Color	%Fibras
Parisina	Mezclilla lickra	Negro	90% algodón 10% poliéster
Centro	Mezclilla	Azul Marino	% desconocido

B. *Pruebas de fricción*

La medida de la fricción de los tejidos se lleva a cabo mediante diversos métodos. El más conocido y clásico consiste en un accesorio fabricado a medida que puede ser montado sobre un dinamómetro convencional [4]. Véase Fig. 2.

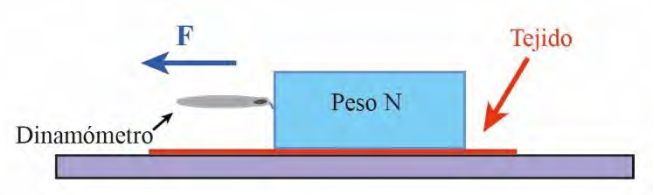


Fig. 2. Diagrama para determinar el coeficiente de fricción en tejidos.

Asimismo, la masa N puede estar también recubierta de tejido lo cual permite estudiar el coeficiente de fricción tejido contra tejido. Véase Fig. 3.

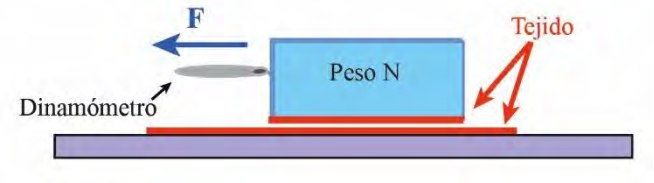


Fig. 3. Diagrama Tejido-Tejido

Según sea la orientación del tejido se puede estudiar la fricción urdimbre-urdimbre, urdimbre-trama.
En este trabajo se analizaron estas dos situaciones, así como distintas superficies de contacto. Todo esto se resume en la tabla II. La figura 4 ilustra la metodología utilizada en este estudio.

Fig. 4. Experimento de Fricción Tejido-Madera.

IV. Resultados

En la figura 5 se muestra la gráfica de Fuerza máxima respecto a la fuerza normal aplicada considerando las superficies de contacto urdimbre-Trama. Del mismo modo en la Figura 6 se muestra la gráfica de Fuerza máxima respecto a la fuerza normal aplicada considerando las superficies de contacto urdimbre-Madera. En ambas gráficas se puede ver el comportamiento lineal esperado. Asimismo, se incluye el ajuste por mínimos cuadrados correspondiente que por comparación con la ec. (1), la pendiente corresponde al coeficiente de fricción estático.

La tabla II muestra los diferentes coeficientes de fricción estática obtenidos utilizando las diferentes superficies, a saber, madera, aluminio, granito, acrílico, tela en urdimbre y tela en trama. Es de mencionar que en general, los coeficientes de fricción para la mezclilla centro son mayores que la mezclilla Parisina, lo cual se considera que es debido a la naturaleza de las fibras de cada mezclilla, pero para distinguirlas, se requieren de análisis químicos y de microscopía óptica para elucidar estas hipótesis.

TABLA II.
TELA MEZCLILLA

Tela Mezclilla	Coeficientes de Fricción (U. A.)	
	Parisina	Centro
Urdimbre-trama	0.2696	0.4537
Urdimbre-urdimbre	0.2361	0.5366
Urdimbre-madera	0.3823	0.4333
Urdimbre- Acrílico	0.4489	0.3523
Urdimbre-Aluminio	0.4524	0.3747
Urdimbre-Granito	0.1915	0.5335
Color	Negro	Azul marino

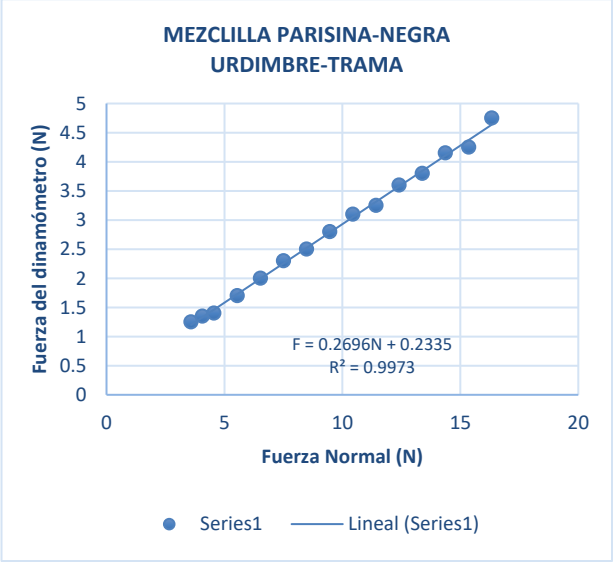


Fig.5. Experimento de Fricción Urdimbre-Trama en Mezclilla Negra

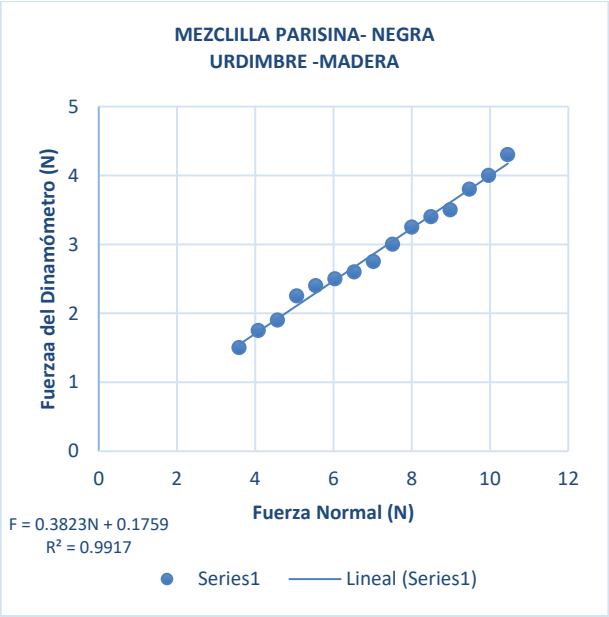


Fig. 6-. Experimento de Fricción Urdimbre-Madera en Mezclilla Negra

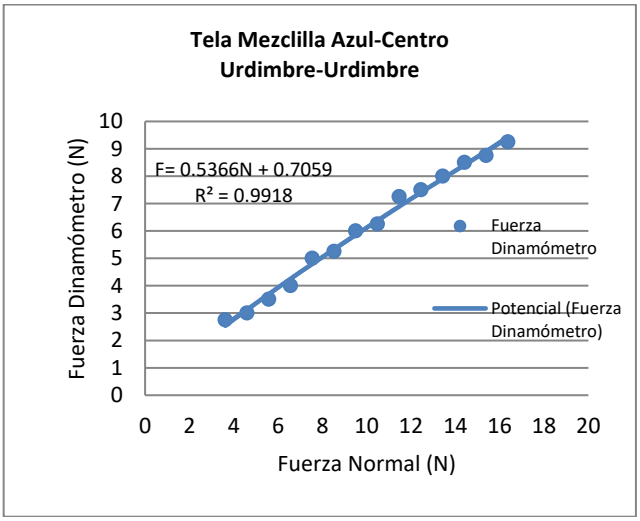


Fig.7. Experimento de Fricción Urdimbre-Granito en Mezclilla Centro

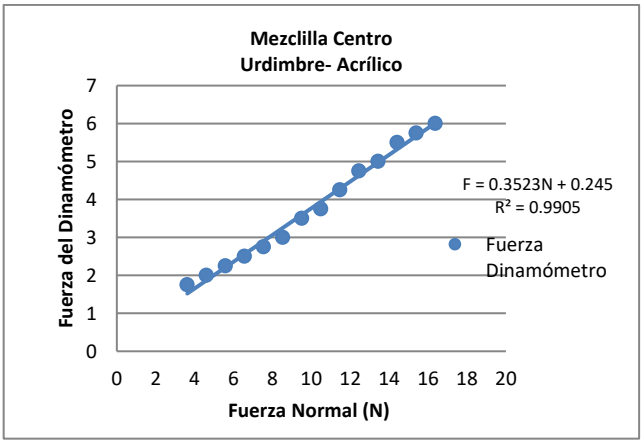


Fig.8 Experimento de Fricción tela mezclilla–centro Urdimbre-Acrílico

IV. Conclusiones

Se determinaron los coeficientes de fricción estática para dos telas de tejido plano de mezclilla de proveedores mexicanos, con diferentes porcentajes de algodón.

Se evidenció que los coeficientes de fricción estática fueron distintos dependiendo de la dirección del tejido, esto es urdimbre-trama y urdimbre-urdimbre.

Las telas analizadas mostraron coeficientes de fricción similares en función de las distintas superficies estudiadas, como madera, aluminio, granito y acrílico. En la actualidad las telas de mezclilla que se encuentra de manera cotidiana en tiendas comerciales como Parisina o distribuidores nacionales, no las tienen caracterizadas. Ya que estos distribuidores desconocen la cantidad en porcentaje del contenido de fibra de algodón que contiene las telas, tampoco tienen información alguna respecto a los coeficientes de fricción.

Se realizó una caracterización primaria de pruebas de fricción en telas de mezclilla que servirá como referencia para estudios posteriores de degradación de este tipo de tejidos.

Referencias

[1] C. Hernández Hernández, comunicación personal de reciclado de prendas, diciembre 2017.

[2] Tecnología ambiental sostenibilidad empresarial, "Jeans, peligrosos para el medio ambiente," referencia electrónica, https://tecnologiaambiental.mx/2017/11/10/jeans-peligrosos-medio-ambiente/, fecha de consulta mayo 2018.

[3] R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane, "Física," Vol 1, 9a edición, Ed. Compañía editorial, continental, S. A. de C. V., México, 1999.

[4] E. Carrera, "Caracterización de Tejidos. Principales ensayos físicos para evaluar la calidad de los tejidos textiles," Universitad Politécnica de Catalunya. 1ª edición, julio, Edit. Terrassa pp 238, 2015.

ISSN: 2594-1011

Introducción al movimiento Browniano

O. Contreras-Vergara[1], N. Sánchez-Salas[1], J.I. Jiménez-Aquino[2]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional - Edif. 9 UP Zacatenco, CP 07738, Ciudad de México, México
[2]Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana–Iztapalapa - Apartado Postal 55-534, CP 09340, Ciudad de México, México
E-mail: ocv_26494@hotmail.com, norma@esfm.ipn.mx, ines@xanum.uam.mx

Resumen — **Este trabajo tiene como objetivo presentar una introducción al estudio del movimiento Browniano (MB). Se muestra la descripción teórica desarrollada por Paul Langevin en 1908, basada en la segunda ley de Newton. También se presenta la descripción del MB con un enfoque moderno, a partir del uso de métodos matemáticos que involucran funciones de correlación para la velocidad y la posición de una partícula Browniana, con lo que se obtiene el comportamiento de la partícula en los regímenes llamados Browniano y balístico.**

Palabras Clave – **Funciones de correlación, movimiento Browniano, partícula Browniana, regímenes Browniano y balístico, segunda ley de Newton**

Abstract — **This work presents an introduction to the study of the Brownian movement (BM). The theoretical description developed by Paul Langevin in 1908 is shown, based on Newton's second law. The description of the BM with a modern approach is also presented, from the use of mathematical methods that involve correlation functions for the speed and position of a Brownian particle, with which the behavior of the particle is obtained in the so-called Brownian and ballistic regimes.**

Keywords — **Correlation functions, Brownian motion, Brownian particle, Brownian and ballistic regimes, Newton's second law**

I. Introducción

Cuando se arrojan granos de polen en la superficie de agua contenida en algún recipiente se aprecia un fenómeno muy interesante, los granos comienzan a moverse de forma muy irregular y muy animada, como si el agua les diera vida para moverse libremente, tal como se muestra en la Fig. 1. Dicho fenómeno llamó la atención del biólogo escocés Robert Brown en el año de 1827, quien expuso el fenómeno a la comunidad científica y no encontró una explicación inmediata a dicho fenómeno.

Una explicación satisfactoria a dicho fenómeno estuvo en manos del gran físico alemán Albert Einstein, quien en el año de 1905 resolvió el problema de forma muy audaz. Einstein, propuso que el movimiento errático de las partículas Brownianas se debe a la gran cantidad de colisiones que éstas experimentan con las moléculas del fluido en el que están inmersas. Es importante resaltar que el tamaño de una partícula Browniana es orden de micras ($\sim 10^{-6}\, m$). El movimiento de las partículas Brownianas es tan complicado que no es posible describirlo de forma determinista, sino que el fenómeno debería de modelarse a partir del uso de variables probabilísticas. Einstein, entonces obtuvo una ecuación de difusión para densidad de probabilidad $P(x,t)$, donde x es la posición y t el tiempo. Mostró que el desplazamiento cuadrático promedio (DCP) está dado por $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, siendo D el coeficiente de difusión.

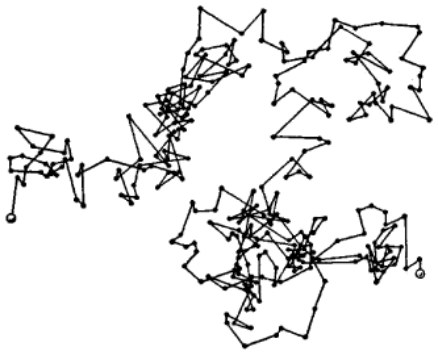


Fig. 1. Movimiento aleatorio efectuado por una partícula browniana.

Por otra parte, en 1908 el científico francés Paul Langevin propuso otro método alternativo de solución basado en la segunda ley de Newton, mucho más simple que el método propuesto por Einstein [1]. La propuesta de Langevin fue la siguiente: debido al tamaño de la partícula Browniana, y de acuerdo con la hidrodinámica clásica, sobre una partícula de masa m actúa la fuerza de fricción dada por la ley de Stokes $-\alpha v$, siendo $\alpha = 6\pi\nu a$ con ν la viscosidad y a el radio de la partícula. La otra hipótesis de Langevin fue la más importante, supuso que también sobre la partícula Browniana debe actuar otra fuerza que tome en cuenta los efectos del medio donde está inmersa, esta fuerza es de carácter aleatorio o estocástico, $\xi(t)$, que depende del tiempo. Esta fuerza da cuenta de la enorme cantidad de colisiones incesantes de las moléculas del fluido sobre la partícula Browniana (granos de polen). Como consecuencia la partícula experimenta un movimiento completamente errático. Langevin establece entonces una ecuación diferencial a partir de la segunda ley de Newton, hoy conocida como ecuación de Langevin o ecuación diferencial estocástica, esto es: $m\dot{v} = -\alpha v + \xi(t)$.

Este trabajo está parcialmente patrocinado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP- 20180286 y la COFAA-IPN. JIJA agradece el apoyo del CONACyT

Con esta formulación del MB, Langevin obtuvo el mismo DCP que Einstein.

Hoy en día existe en la literatura una gran cantidad de artículos sobre MB con un enfoque matemático moderno, el propósito de este trabajo es presentar el método para resolver el MB propuesto por Langevin en 1908 y también resolver el MB utilizando una herramienta matemática más actual [2]. El MB tiene muchas aplicaciones en las distintas ramas del conocimiento científico, que van desde el estudio de los sistemas físicos, químicos, biológicos, astrofísicos, geofísicos, finanzas, medicina y otros más [3-4]. Asimismo, el estudio del MB ha abierto otros campos investigación basados en la teoría de los procesos estocásticos.

II. Metodología

A. Razonamiento de Langevin

A partir de la segunda ley de Newton Langevin propuso la siguiente ecuación diferencial de movimiento para una partícula Browniana:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\frac{dx}{dt} + \xi(t)\,. \tag{1}$$

Multiplicando ambos lados por x se tiene:

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x\frac{dx}{dt} + \xi(t)x. \tag{2}$$

Note que (2) puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2(x^2)}{dt^2} - mv^2 = -\frac{\alpha}{2}\frac{d(x^2)}{dt} + \xi(t)x. \tag{3}$$

Enseguida Langevin toma el promedio para obtener:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2(\langle x^2\rangle)}{dt^2} - \langle mv^2\rangle = -\frac{\alpha}{2}\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt} + \langle\xi(t)x\rangle\,, \tag{4}$$

Langevin asume que el promedio del ensamble es tal que $\langle\xi(t)x\rangle = 0$, lo que significa que la trayectoria promedio no es afectada por las fluctuaciones estocásticas, es decir la trayectoria promedio es independiente de dichas fluctuaciones. Por otro lado, también introduce la hipótesis del principio de equipartición obtenida de la mecánica estadística, es decir $\langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$. Con esta información es posible escribir (4) de la siguiente manera:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2(\langle x^2\rangle)}{dt^2} + \frac{\alpha}{2}\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt} = k_BT. \tag{5}$$

Con los métodos de integración usuales es posible hallar un resultado para $\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt}$: $E = \sigma$

$$\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt} = \frac{2k_BT}{\alpha} + Ce^{-\gamma t}\,, \tag{6}$$

siendo C una constante de integración y $\gamma = {}^{\alpha}/_{m}$.

Langevin estimó que el decaimiento exponencial se aproxima a cero para un tiempo de relajación $\tau = {}^{1}/_{\gamma}$ del orden de 10^{-8}, en esa región $\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt}$ entra a un régimen constante $\frac{d(\langle x^2\rangle)}{dt} = \frac{2k_BT}{\alpha}$, una vez más hacemos la integración en este régimen con respecto al tiempo y se obtiene:

$$\langle x^2\rangle - \langle x_0^2\rangle = 2\left(\frac{k_BT}{\alpha}\right)t\,, \tag{7}$$

definiendo el coeficiente de diffusion como:

$$D = \frac{k_BT}{\alpha}\,, \tag{8}$$

que es precisamente el coeficiente de difusión de Einstein.

A. Razonamiento moderno

Note que (1) representa un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, a saber

$$\begin{aligned} x &= \dot{v} \\ \frac{dv}{dt} + \gamma v &= \Gamma(t), \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\Gamma(t) = \xi(t)/m$ es la fuerza estócastica por unidad de masa, que satisface las propiedades de un ruido blanco Gaussiano dado por:

$$\langle\Gamma(t)\rangle = 0\,, \langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = q\delta(t-t')\,, \tag{10}$$

siendo q la intensidad de las fluctuaciones o simplemente del ruido. Siguiendo el método del factor integrante se puede mostrar que la solución de (9) se obtiene de la siguiente manera. Multiplicando en ambos lados de (9) por $e^{\gamma t}$ se tiene

$$e^{\gamma t}\left(\frac{dv}{dt} + \gamma v\right) = e^{\gamma t}\Gamma(t), \tag{11}$$

o bien

$$\frac{d(e^{\gamma t}v)}{dt} = e^{\gamma t}\Gamma(t). \tag{12}$$

Integrando para tiempos entre 0 y t obtenemos

$$v(t) = e^{-\gamma t}v_0 + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')}\Gamma(t')dt', \tag{13}$$

calculemos ahora la función de correlación entre dos tiempos distintos es decir $\langle v(t_1)v(t_2)\rangle$

$$\begin{aligned} &v(t_1)v(t_2) \\ &= \left(e^{-\gamma t_1}v_0^2 + \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t'_1)}\Gamma(t'_1)dt_1'\right)\left(e^{-\gamma t_2}v_0\right. \\ &\left. + \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-t_2')}\Gamma(t_2')dt_2'\right) \\ &= v_0e^{-\gamma(t_1+t_2)} + e^{-\gamma t_1}v_0\int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-t_2')}\Gamma(t_2')dt_2' \\ &+ e^{-\gamma t_2}v_0\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t'_1)}\Gamma(t'_1)dt_1' \\ &+ \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')}\Gamma(t'_1)\Gamma(t_2')dt_2'\,dt_1' \end{aligned} \tag{14}$$

Luego

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + e^{-\gamma t_1} v_0 \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-t_2')}\langle \Gamma(t_2')\rangle dt_2' + e^{-\gamma t_2} v_0 \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t'_1)}\langle \Gamma(t'_1)\rangle dt_1' + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')}\langle \Gamma(t'_1)\Gamma(t_2')\rangle dt_2' dt_1', \quad (15)$$

por hipótesis el promedio del ruido es cero y su función de correlación está dada en (10), y por lo tanto

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')} q\delta(t_1 - t_2) dt_2' dt_1'. \quad (16)$$

Esta doble integral se evalúa de la siguiente manera [5]:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')} q\delta(t_1-t_2) dt_2' dt_1' = q\int_0^{\min(t_1,t_2)} e_1^{-\gamma(t_1+t_2-2t_1)} dt_1 = \frac{q}{2\gamma}\left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}\right). \quad (17)$$

Rescribiendo (16) obtenemos:

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{q}{2\gamma}\left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}\right). \quad (18)$$

En el estado estacionario $\gamma t_1 \gg 1,\ \gamma t_2 \gg 1$ con lo cual (18) pasa a ser

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = \frac{q}{2\gamma}\left(e^{-\gamma|t_1-t_2|}\right). \quad (19)$$

Si $t_1 = t_2$ se obtiene entonces la velocidad media cuadrática

$$\langle v^2(t)\rangle = \frac{q}{2\gamma}. \quad (20)$$

Luego a partir de la mecánica estadística el valor promedio de la energía es

$$\langle E\rangle = \frac{k_B T}{2} = \frac{1}{2} m\langle v^2(t)\rangle = \frac{1}{2} m \frac{q}{2\gamma}. \quad (21)$$

Con lo cual se concluye que:

$$q = \frac{2\gamma k_B T}{m}. \quad (22)$$

Que se conoce como la relación de fluctuación-disipación. Esto significa que en el estado estacionario existe un balance entre las fuerzas de fricción y las fuerzas estocásticas de tal forma que la fuerza de fricción tiende a frenar el movimiento de la partícula, mientras que las fuerzas fluctuantes la matienen en movimiento.

Para el caso de una partícula Browniana es difícil medir la función de correlación para la velocidad, sin embaergo es posible medir los valores del desplazamiento cuadrático medio. Suponiendo que la partícula en tiempo $t = 0$ está en $x = x_0$ con una velocidad $v = v_0$, el valor del desplazamiento cuadrático medio a un tiempo t es

$$\langle (x(t)-x_0)^2\rangle = \left\langle \left[\int_0^t v(t_1)dt_1\right]^2 \right\rangle = \left\langle \int_0^t v(t_1)dt_1 \int_0^t v(t_2)dt_2 \right\rangle = \int_0^t\int_0^t \langle v(t_1)v(t_2)\rangle dt_1 dt_2. \quad (23)$$

Sustituyendo (18) en esta última integral

$$\langle (x(t)-x_0)^2\rangle = \int_0^t\int_0^t \left[v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{q}{2\gamma}\left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}\right)\right]. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^t\int_0^t e^{-\gamma(t_1+t_2)} dt_1 dt_2 = \left(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}\right)^2, \quad (25)$$

$$\int_0^t\int_0^t e^{-\gamma|t_1-t_2|} dt_1 dt_2 = 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t_2)} dt_2 = \frac{2}{\gamma}t - \frac{2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t}). \quad (26)$$

Sustituyendo (25) y (26) en (24) se llega a que

$$\langle (x(t)-x_0)^2\rangle = \left(v_0^2 - \frac{q}{2\gamma}\right)\left(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}\right)^2 + \frac{q}{\gamma^2}t - \frac{q}{\gamma^3}(1-e^{-\gamma t}). \quad (27)$$

Luego, note que el valor cuadrático medio de la velocidad (19) no depende del tiempo en el régimen estacionario, es decir

$$\langle v_0^2 \rangle = \langle v^2(t) \rangle = \frac{q}{2\gamma}. \tag{28}$$

Además en este régimen nuevamente consideramos $\gamma t \gg 1$, $t \gg \frac{1}{\gamma}$ con lo cual (26) se reescribe como

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = 2\left(\frac{q}{2\gamma^2}\right) t = 2Dt, \tag{29}$$

donde

$$D = \frac{q}{2\gamma^2} = \frac{\frac{2\gamma k_B T}{m}}{2\gamma^2} = \frac{k_B T}{\alpha}, \tag{30}$$

que es el coeficiente de difusión de Einstein.

A partir de (27), para tiempos cortos, es decir, $t \ll \frac{1}{\gamma} = \tau$ se puede hacer un desarrollo en serie (y teniendo en cuenta (28)) obtenemos que el desplazamiento cuadrático medio viene dado por

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \frac{q}{2\gamma^2} t^2 , \tag{31}$$

que corresponde al régimen de una partícula libre.

III. RESULTADOS

El comportamiento de los resultados obtenidos arriba se muestra en la Fig. 2, que representa una gráfica del desplazamiento cuadrático medio contra el tiempo, en el que se muestran los regímenes balístico y Browniano.

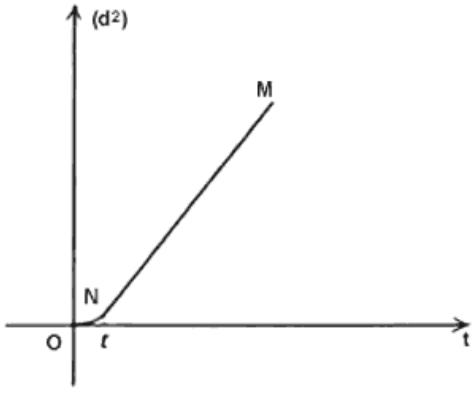


Fig. 2. Gráfica del desplazamiento cuadrático medio para una partícula browniana, el valor de τ indica el paso del régimen balístico al browniano.

IV. CONCLUSIONES

En la descripción del MB existen dos regímenes de la escala de tiempo de observación, el régimen de tiempos cortos $t \ll \frac{1}{\gamma} = \tau$, cuyo desplazamiento cuadrático promedio está dado por (31). En este régimen de aproximación la partícula se comporta como partícula libre, también conocido como régimen balístico. Por otra parte esta el régimen de tiempos largos $t \gg \tau$, que corresponde al régimen conocido como difusivo o régimen browniano. En esta región la partícula browniana está en contacto térmico con el medio que le rodea, es decir con el fluido, por esta razón el MB tambien se conoce como difusión térmica.

AGRADECIMIENTOS

O. Contreras-Vergara agradece la guía y apoyo de J.I. Jiménez-Aquino y N. Sánchez-Salas para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] J.L García – López "Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems". Lectures notes for a graduate course. Univerisdad de Zaragoza, Zaragoza, España, mayo 2004, P.p 4.

[2] H. Risken "The Fokker-Plank equation, methods of solutions and applications" Abteilung für Theoretische Physik. Universität Ulm, Oberer eselsberg D-7900 Ulm, Fed. Rep. Of Germany. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984. P.p 32-35.

[3] Philip Nelson "Biological Phisics. Energy, Information, life" N.Y University, U.S.A, 2004.

[4] K. Sekimoto "Stochastic Energetics, lectura notes in physiscs"Matières et Systèmes Complexes Universitè Paris, France Springer Berlin Heidelberg 2010.

[5] H. Risken "The Fokker-Plank equation, methods of solutions and applications" Abteilung für Theoretische Physik. Universität Ulm, Oberer eselsberg D-7900 Ulm, Fed. Rep. Of Germany. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984. p.p 33.

ISSN: 2594-1011

Dispositivo para comunicación con velocidad de 9.6 kbd implementando un mapeo del tiempo a los números naturales mediante un láser de helio-neon y un pic

Hernández Hernández Jaime Vidal, Solis Machorro Iveth
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
E-mail: vidal@esfm.ipn.mx, iveth.sm.09@gmail.com

Resumen — **Se diseñó un prototipo capaz de convertir datos, caracteres pertenecientes al código ASCII provenientes de un Smartphone, en señales luminosas moduladas por ancho de pulso y transmitir a una velocidad de 115.2 kBd. Para llevar a cabo la modulación, se utilizó un microcontrolador PIC16F1827. Por otra parte, para la emisión de luz se empleó un láser de Helio-Neón con una potencia de 4.1 mW y una longitud de onda de 633 nm. La señal proveniente del circuito transmisor fue detectada mediante un fototransistor colocado a 5 m de distancia de la fuente de luz modulada; dicha señal es convertida en pulsos eléctricos, estos pulsos son reinterpretados por otro microcontrolador a través de su módulo EUSART. Finalmente, la información detectada se envió a un segundo Smartphone para su visualización; de esta manera se establece una comunicación unidireccional. Entre las principales ventajas del prototipo frente a dispositivos de uso comercial podemos encontrar: codificación y decodificación mediante software, así como un bajo costo. El prototipo se puede emplear para: establecer comunicación entre dos puntos sin necesidad de infraestructura preexistente, obtener datos experimentales en un ambiente controlado y modificado. Hemos adaptado el dispositivo para obtener un comportamiento similar a los sistemas Li-Fi ya que, a diferencia del Wi-Fi, la información no atraviesa las paredes. Por lo tanto, los datos transmitidos permanecen seguros dentro del área establecida para llevar a cabo la comunicación y son encriptados vía software y hardware; esto ofrece una alternativa de comunicación local a bajo costo.**

Palabras Clave – **Comunicación, láser**

Abstract — **A prototype was designed to convert data, characters belonging to the ASCII code coming from a Smartphone, into light signals modulated by pulse width and transmit at a speed of 115.2 kBd. To carry out the modulation, a PIC16F1827 microcontroller was used. On the other hand, a Helium-Neon laser with a power of 4.1 mW and a wavelength of 633 nm was used for the emission of light. The signal from the transmitting circuit was detected by a phototransistor placed 5 m away from the modulated light source; This signal is converted into electrical pulses, these pulses are reinterpreted by another microcontroller through its EUSART module. Finally, the information detected was sent to a second Smartphone for viewing; in this way a unidirectional communication is established. Among the main advantages of the prototype versus commercial devices we can find: coding and decoding using software, as well as a low cost. The prototype can be used to: establish communication between two points without the need for pre-existing infrastructure, obtain experimental data in a controlled and modified environment. We have adapted the device to obtain a behavior similar to Li-Fi systems since, unlike Wi-Fi, the information does not go through the walls. Therefore, the transmitted data remains safe within the established area to carry out the communication and is encrypted via software and hardware; this offers an alternative of local communication at low cost.**

Keywords — **Communication, laser**

I. Introducción

En años recientes, el avance en las tecnologías de comunicación inalámbrica ha implicado un aumento en el uso del espectro electromagnético, en particular de la región del espectro correspondiente a ondas de radio y microondas. La introducción de la tecnología GSM, de radiocomunicaciones, de transmisiones televisivas, de Bluetooth, etcétera, ha causado una saturación del espacio de ondas electromagnéticas. Esta saturación ha requerido una administración eficiente de los rangos de frecuencia de operación para evitar interferencias, asegurar la funcionalidad de los dispositivos y la disponibilidad de frecuencias para usos particulares, por ejemplo: para uso exclusivo de usuarios militares, aéreos, comerciales, o para dispositivos específicos [1].

Para tratar de aliviar el problema de sobresaturación, reguladores como la FCC o la ITU han abierto más rangos del espectro de transmisión permisible. Sin embargo, el espectro de ondas de radio es finito y conforme la sociedad avanza también lo hace la telecomunicación, en poco tiempo el rango del espectro electromagnético destinado a la comunicación por ondas electromagnéticas quedará totalmente distribuido, limitando la expansión de la tecnología inalámbrica. Propuestas de dispositivos dinámicos capaces de detectar congestión en el tráfico de las ondas y de cambiar sus transmisiones a rangos menos congestionados podrían ayudar a aliviar esta problemática. Sin embargo, esta tecnología aún sigue en desarrollo y no resolvería por completo el problema [2]. Debido a estas crecientes dificultades, se propone una alternativa de comunicación inalámbrica que extiende el uso del espectro electromagnético; es decir, del rango de ondas de radio al de luz visible. Con lo anterior se logran dos avances: el primero es la expansión del espectro útil de comunicaciones y lo

segundo es la implementación de un avance a la tecnología inalámbrica. Investigadores han propuesto que un estándar Li-Fi podría ser una actualización a la comunicación Wi-fi, la tecnología Li-fi tiene el potencial de proveer velocidades de transmisión de datos mucho mayores que el Wi-fi, aunque con menor distancia de alcance y de línea directa [3].

En este trabajo se presenta un prototipo capaz de convertir datos, caracteres pertenecientes al código ASCII provenientes de un Smartphone, en señales luminosas moduladas por ancho de pulso y transmitir a una velocidad de 115.2 kBd.

II. Metodología

La primera parte del proyecto fue el diseño del circuito electrónico; este consta de un emisor y un receptor, cuyas componentes electrónicas fueron simuladas en Proteus (Software de simulación para circuitos eléctricos). Después de la simulación, los componentes, se montaron en un Protoboard. En la Fig. (1) se muestra el diagrama esquemático del emisor (a la izquierda) y del receptor (a la derecha). En la segunda parte se instaló un LED infrarrojo en el circuito emisor y un fototransistor en el receptor para poder verificar el funcionamiento de la señal que se transmite y se recibe. Finalmente, se remplazó el LED infrarrojo por un LED láser y el fototransistor por una celda solar, esto con el propósito de ampliar la distancia a la que se puede transmitir la señal [5].

En la Fig. (2) se muestra el diagrama de conexión del amplificador de audio utilizado (LM386) en el circuito receptor y emisor [6].

CIRCUITO TRANSMISOR

El diagrama esquemático del emisor se muestra en la Fig. (3), en este diagrama "Vin" es la entrada de la señal de audio, la cual es previamente modulada mediante ancho de pulso (PWM) por un PIC16F1827.Dicha señal pasa por un capacitor el cual se encarga de filtrar el audio y posteriormente a través de un potenciómetro se varía su intensidad. Luego, la señal ingresa al LM386 por el pin 3; es amplificada y después convertida en pulsos eléctricos los cuales activan un láser. El LM386 es un amplificador de audio, debido a esto la variación del voltaje de la señal de audio produce un cambio en la amplitud de la luz emitida por el láser. Mediante el pin 6 se alimentó el amplificador de audio LM386 con una fuente de 9V. Entre el pin 1 y 8 se conectó un capacitor y un potenciómetro los cuales se encargan de variar la ganancia del amplificador en un intervalo de 20 y 200. Los pines 4 y 7 se conectaron directamente a tierra y en el 5 se armó un divisor de tensión con las resistencias R3, R4 yR5 para evitar una corriente eléctrica excesiva que pueda dañar el láser [7].

CIRCUITO RECEPTOR

La señal luminosa proveniente del emisor es recibida por una celda solar la cual es sensible en rango del espectro electromagnético correspondiente a la luz visible y tiene una respuesta muy rápida (razón por la que es más eficiente que un fototransistor y una foto-celda). La celda solar transforma los cambios de amplitud de la luz recibida en pulsos eléctricos los cuales son enviados al LM386 para ser filtrados, demodulados y amplificados por éste. Luego, la señal es enviada a una bocina la cual convierte los impulsos eléctricos en sonido. En la Fig. (4) se muestra el diagrama esquemático del circuito receptor.

De manera similar al emisor, el amplificador de audio del receptor se alimenta por el pin 6 con una batería de 9V y su terminal negativa se encuentra en el pin 4. Las entradas del comparador del LM386 se encuentran en los pines 2 y 3 (entrada negativa y entrada positiva, respectivamente) en las cuales se conectó el ánodo y el cátodo de la celda solar. Entre el pin 3 y el cátodo se coloca un potenciómetro y un capacitor para regular y filtrar, respectivamente, la señal proveniente de la celda solar [7].

Entre el pin 1 y 8 del circuito integrado se conecta un capacitor electrolítico de 10 microfaradios, el cual se encarga de fijar la ganancia (relación entre la amplitud de una señal de salida respecto a la señal de entrada) de amplificación [8]. En el pin 7 se conecta un capacitor de bypass al negativo de la batería, esto es un capacitor que se encarga de filtrar la señal de DC, elimina el ruido y proporciona una señal AC [9]. Finalmente, en el pin 5, se colocó un capacitor y una resistencia en serie para filtrar la señal de salida del LM386 en un intervalo de 20 Hz – 2000 Hz. Y un capacitor en configuración de acoplamiento con la bocina para evitar daño en el LM386 por la corriente inducida y mejorar la calidad del sonido producido por la bocina.

Aunque inicialmente el circuito sólo se diseñó para transmitir audio de manera analógica, se modificó para transmitir datos de manera digital en forma de texto.

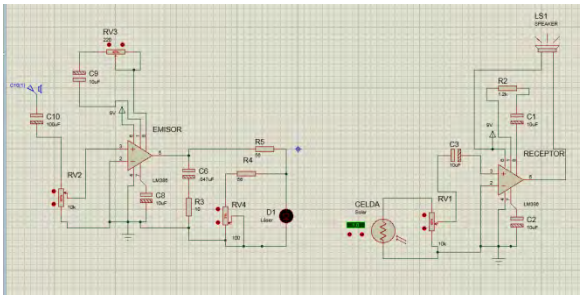


Fig. 1 Diagrama esquemático del circuito emisor y receptor. El emisor transforma ondas de sonido en pulsos eléctricos que activan un láser. El receptor interpreta y demodulados pulsos de luz enviados por el transmisor; luego, filtra y amplifica la señal convirtiéndola en ondas de audio nuevamente.

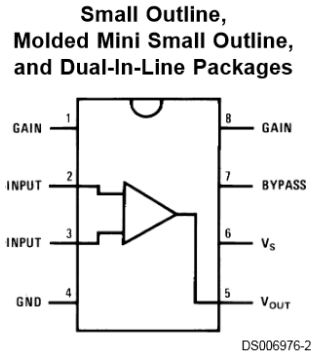


Fig. 2 Diagrama de conexión (pines) de un LM386.

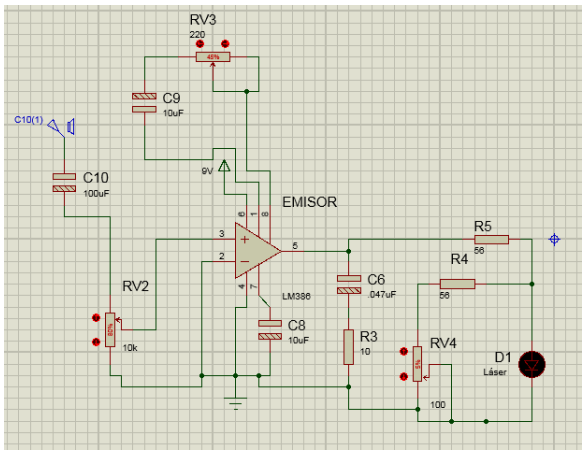


Fig. 3. Diagrama esquemático del convertidor de señal de audio a pulsos de luz emitidos por un láser mediante el uso de un LM386.

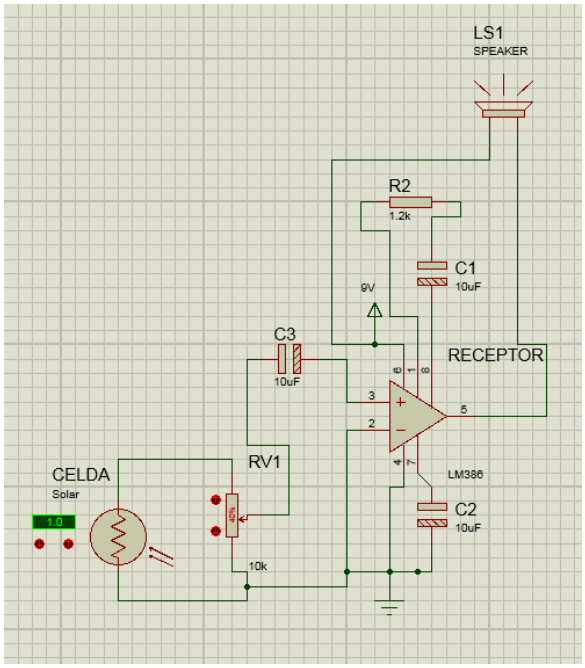


Fig. 4 Diagrama esquemático del convertidor de la señal luminosa proveniente de láser a ondas de sonido mediante el uso de un LM386.

III. Resultados

Se logró armar y verificar el funcionamiento del prototipo propuesto. Aunque las simulaciones de la parte electrónica fueron correctas, en la práctica se tuvieron que hacer pequeñas modificaciones debido a ruidos e interferencias eléctricas, por ejemplo: variación de resistencias y capacitancias. Estos cambios se ven reflejados en los esquemas anteriores.

En el armado del prototipo se hicieron pruebas iniciales con un led infrarrojo para realizar el proceso de transmisión, y fototransistor para detectar la señal emitida, con este primer diseño se logró una comunicación con un alcance de 7 cm. Estas pruebas permitieron realizar una calibración del arreglo electrónico para reducir el nivel de ruido y optimizar el desempeño de receptor y emisor. Finalizadas las pruebas, se instaló el láser en el circuito emisor y la celda solar en el receptor; con esto se logró extender la distancia de transmisión hasta 5m y con velocidad de transferencia de 9600 baudios por segundo.

El prototipo implementado es una muestra de las posibilidades de la tecnología Li-fi, aunque el dispositivo fue diseñado sólo para transmitir información de voz, el prototipo tiene la flexibilidad para ser adaptado y transmitir otro tipo de información más compleja, por ejemplo: transmisión de datos digitales como video o internet, inclusive para la comunicación serial de algunos dispositivos electrónicos con protocolos como I2C entre otros.

IV. Conclusiones

Se logró armar y verificar el funcionamiento del prototipo propuesto. Aunque las simulaciones de la parte electrónica fueron correctas, en la práctica se tuvieron que hacer pequeñas modificaciones debido a ruidos e interferencias eléctricas, por ejemplo: variación de resistencias y capacitancias. Estos cambios se ven reflejados en los esquemas anteriores.

En el armado del prototipo se hicieron pruebas iniciales con un led infrarrojo para realizar el proceso de transmisión, y fototransistor para detectar la señal emitida, con este primer diseño se logró una comunicación con un alcance de 7 cm. Estas pruebas permitieron realizar una calibración del arreglo electrónico para reducir el nivel de ruido y optimizar el desempeño de receptor y emisor. Finalizadas las pruebas, se instaló el láser en el circuito emisor y la celda solar en el receptor; con esto se logró extender la distancia de transmisión hasta 5m.

El prototipo implementado es una muestra de las posibilidades de la tecnología Li-fi, aunque el dispositivo fue diseñado sólo para transmitir información de voz, el prototipo tiene la flexibilidad para ser adaptado y transmitir

otro tipo de información más compleja, por ejemplo: transmisión de datos digitales como video o internet, inclusive para la comunicación serial de algunos dispositivos electrónicos con protocolos como I2C entre otros.

REFERENCIAS

[1] Swain, Frank. “Will we ever… face a wireless ‘spectrum crunch’?” BBC News. Oct. 13, 2013. Web. (Sep. 6, 2015).

[2] <http://www.bbc.com/future/story/20131014-are-we-headed-for-wireless-chaos>.

[3] Stample, G., and Werbach, K. “The end of spectrum scarcity (spectrum allocation and utilization)”.

[4] DOI: 10.1109/MSPEC.2004.127548

[5] Savage, Neil. “Li-fi gets ready to compete with Wi-fi”. IEEE Spectrum.. Nov. 20, 2015. Web. (Sep. 6, 2015).

[6] <http://spectrum.ieee.org/telecom/internet/lifi-gets-ready-to-compete-with-wifi>.

[7] https://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n_electromagn%C3%A9tica

[8] http://www.circuitsgallery.com/2012/06/laser-communication-project-circuit.html

[9] http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/8887/NSC/LM386.html

[10] Boylestad, Robert L. Análisis Introductorio de Circuitos. Ed. 3. Trillas. México, 1995

[11] https://es.wikipedia.org/wiki/Ganancia_(electr%C3%B3nica)

[12] http://www.microsofttranslator.com/bv.aspx?ref=SERP&br=ro&mkt=es-MX&dl=es&lp=EN_ES&a=http%3a%2f%2fwww.electro-labs.com%2fbypass-capacitors-why-and-how-to-use-them%2f

ISSN: 2594-1011

Origen de la vida: un “well-posed problema”

Isthar Cahum Marruffo[1], Diana Patricia Barragán Vázquez[1], Rafael Zamorano Ulloa[2]
[1]ESFM-IPN, México D.F., México
[3]Laboratorio de mediciones magnéticas y biofísicas, ESFM-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: Isthar.cahum@hotmail.com

Resumen — **En este trabajo utilizamos ecuaciones diferenciales parciales. En esta rama, existen los llamados: “well posed problems”, éstos son problemas de Cauchy, que tiene propiedades analíticas adecuadas tales que: existe solución, es única, y depende de manera continua de las condiciones iniciales.**

Modelamos el desarrollo de un volcán desde su inicio hasta su extinción, utilizando la ecuación diferencial parcial de difusión in-homógenea en coordenadas cartesianas en una sección rectangular de placa tectónica con varios kilómetros de espesor, en la cual, existe difusión de calor de la parte más caliente a la más fría; proponiendo después condiciones de frontera no homogéneas en el eje z, con el objetivo de encontrar la relación entre éstas y la formación de volcanes y criovolcanes.

Hallamos la solución a la ecuación no homogénea, utilizando dos veces y de manera sucesiva separación de variables. Posteriormente utilizamos desarrollo en series de potencias, y aplicamos el método de funciones ortogonales de Fourier. Obteniendo las soluciones espacial y temporal. Éstas se analizan en contextos de actividad volcánica, como nacimientos y erupciones volcánicas. A su vez, al ser nuestro planteamiento un “well posed problem”, provee información útil, que apoya una teoría sobre el origen de la vida alrededor de áreas volcánic

Palabras Clave – **difusión de calor, ecuación in-homogénea, origen de la vida, puntos calientes, well-posed problem,**

Abstract —
We find the solution to the non-homogeneous equation, using twiceand successively separating variables. We then use power series development, and apply the Fourier orthogonalfu nction method. Getting the spatialand temporal solutions. Thes e areanalyzed in contexts of volcanic activity, such as births an d volcanic eruptions. At the same time, as our approach is a"w ell posed problem", it provides usefulinformation that supports a theoryabout the origin of life around volcanicareas.*Keywords* —

heat diffusion, homogeneous equation, origin of life, hot spots, well-posedproblem,

I. Introducción

Una infinidad de fenómenos en el universo incluyen en su comportamiento cambio. Cambio en el tiempo, cambio en el espacio, cambio de concentraciones, cambio de temperatura, etc. Las cantidades físicas mencionadas y sus cambios, generalmente siguen leyes matemáticas que se expresan en forma de ecuaciones diferenciales. El comportamiento térmico interno de la Tierra a través de millones de años también puede ser modelado con ecuaciones diferenciales parciales. La difusión de calor del núcleo de la Tierra hacia su superficie obedece una ecuación diferencial de difusión. La descripción matemática de esta difusión es el problema planteado en este trabajo y se escogió principalmente para mostrar la relevancia de la aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales y sus condiciones de frontera. Además, tiene impacto en el conocimiento que podemos adquirir en la formación de volcanes, respiraderos hidrotermales y actividad volcánica.

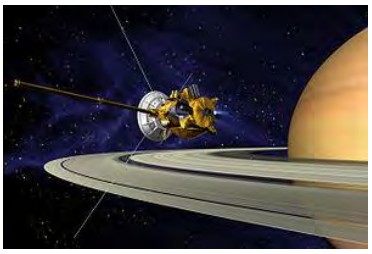


Figura 1. Sonda Cassini, entrando en órbita con Saturno.

También se vuelve un tema de más amplio interés pues se puede extender a problemas vulcanológicos en otros planetas y se pueden incluir los llamados “criovolcanes” o “volcanes fríos”. Los volcanes fríos se encuentran en satélites y otros planetas, por ejemplo en Quobar un cuerpo pequeño del sistema solar localizado en el cinturón de Kuiper, o en Triton un satélite de Neptuno. La sonda Cassini-Huygens lanzada por la NASA en 1997, encontró Criovolcanes y fumarolas de Metano en dos satélites de Saturno (Titán y Encélado), según Seewald: “los gases emitidos por dichos volcanes son la fuente principal de su atmósfera, además de expulsar vapor de agua desde sus océanos congelados, entre los elementos expulsados en dicho vapor se encuentra el hidrógeno, las implicaciones de que sean correctas dichas afirmaciones son fundamentales para la posibilidad de vida

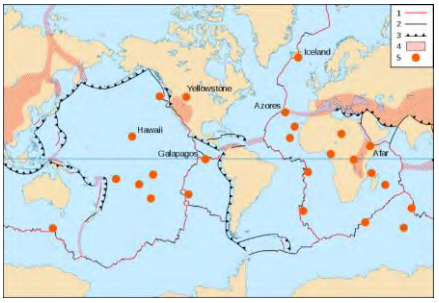


Figura 2. Ubicación de los principales “puntos calientes”.

en estos satélites" (Science)[1]. El modelar a los llamados criovolcanes sigue la misma sistemática que desarrollamos aquí en este trabajo, para volcanes calientes en la Tierra.

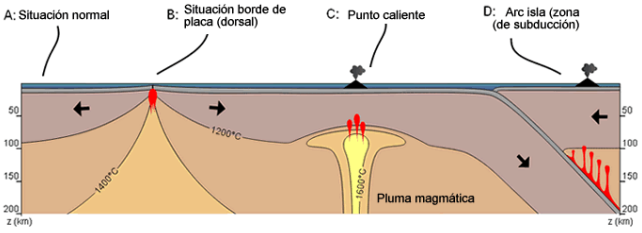


Figura 3. Deriva de la corteza terrestre sobre un punto caliente. El calor asciende del núcleo de la Tierra al manto por convección.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: El planteamiento del problema se basó en considerar un trozo de corteza continental, y estudiar la difusión de calor en él; y así relacionar los máximos de la función que nos describió éste fenómeno con la posible localización de los llamados "punto calientes", que según Donald J de Paolo y Michel Manga "son áreas de actividad volcánica alta en relación a sus entornos"[2], los cuales están ubicados en el interior de placas tectónicas, y aunque la mayoría de los volcanes del mundo afloraron por la actividad geológica en los límites de las placas tectónicas algunos volcanes se forman en puntos calientes, como lo es el Kilaue en Hawai, el cual se encuentra sobre un punto caliente lejos de los límites de las placas tectónicas, éste punto ha sido grabado por tomografía sísmica, y se estima que tiene una anchura de 500–600 km. (Zhao, Science) [3].

Además los puntos calientes pueden formar largas cadenas de volcanes extintos al moverse una placa litosférica sobre el punto caliente fijo en el manto. En placas oceánicas esto puede producir la formación de archipiélagos volcánicos en los que la edad de sus rocas aumenta a medida que se incrementa la distancia al punto caliente. Un ejemplo clásico de este fenómeno es una vez más las islas de Hawái, las cuales son una cadena de volcanes cuyo proceso de formación debió ser el siguiente: cada isla en la cadena comienza como un volcán activo que es alimentado por el punto caliente y que finalmente, por la acumulación de material, se eleva por encima de la superficie del océano. John P. Rafferty afirma que "a medida que la tectónica de placas aleja al volcán del punto caliente, el volcán se extingue. El punto caliente creará entretanto otro volcán: la próxima isla de la cadena" (Encyclopaedia Britannica, Inc.)[4]. (Figura 5).

Nos interesa calcular la difusión en toda su extensión espacial y temporal resolviendo analíticamente la ecuación diferencial de calor in-homogénea que describe éste fenómeno, bajo condiciones de frontera propias de la geofísica que está operando.

Por otro lado se sabe que la Tierra se encuentra en la llamada zona habitable del sistema solar; pero más allá de estas condiciones exteriores favorables, existe la pregunta latente, de cómo fue en realidad que comenzó la vida, qué compuestos, procesos e intercambios químicos fueron los acertados que dieron origen al primer microorganismo vivo en la tierra; Szostak afirma: "Hoy, la cuestión de cómo la química en la Tierra infantil dio origen al ARN y a las células basadas en ARN es la cuestión central de la investigación sobre el origen de la vida." (Nature)[5].

La teoría de fuentes hidrotermales, trata de explicar cómo a partir de los compuestos que emanan de los respiraderos, (formando "sopas bioquímicas"), se pudieron haber formado los primeros seres vivos; es así como la actividad volcánica está directamente ligada con los orígenes de la vida; Szostack también afirma que: "Los escenarios geoquímicos preferidos involucran regiones volcánicas o cráteres de impacto, con química orgánica compleja, múltiples fuentes de energía y ciclos dinámicos de luz-oscuridad, calor-frío y húmedo-seco….Las lagunas o lagos en las regiones volcánicas fueron probablemente entornos para el "salto inicial" de la vida"(Nature)[5], Beatty, Overmann, y Lince indican que "Los respiraderos hidrotermales pueden parecerse al ambiente en el que evolucionó la vida… éstos dan las condiciones necesarias para realizar fotosíntesis empleando como fuente de luz la radiación geotérmica producida por dichos respiraderos" (PNAS)[6]; y Fox-Skelly Jasmin indica: "La actividad volcánica actúa como un faro, atrayendo la vida a la zona". (BBC, earth)[7].

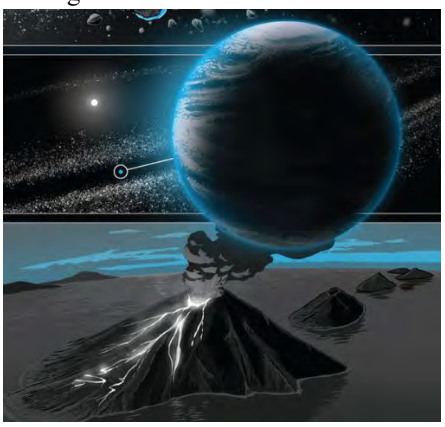


Figura 4. Estanques o lagos en entornos de regiones volcánicas para el salto-arranque de la

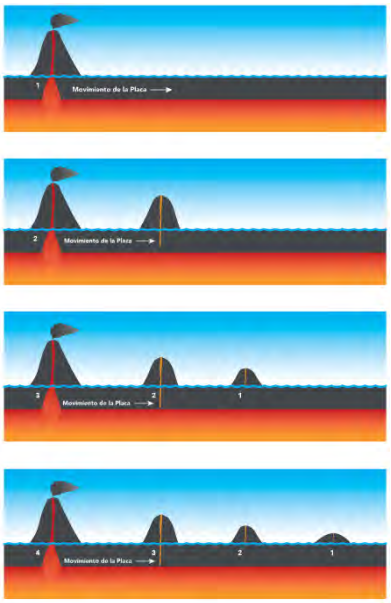


Figura 5. Proceso del surgimiento de cadenas de volcanes.

La difusión de calor de un punto caliente presenta distribución espacial y temporal, parece lógico esperar que dure muchos miles de años para que pueda soportar procesos bioquímicos complejos que

llevan a la formación de, al menos, microscópicas y primitivas formas de vida. La determinación cuantitativa de esa difusión de calor en el espacio y el tiempo puede arrojar información útil para contar con una escala de tiempo y una distribución de zonas templadas, no muy calientes, no muy frías que favorezcan la producción de cadenas de reacciones químicas que lleven a una biología primigenia.
SUSTENTACIÓN DEL PROBLEMA: La noción de un well-posed problem es muy importante en las matemáticas aplicadas; más aún en la ciencia en general; éste concepto fue planteado por J. Hadamard un matemático francés. Hadamard decía: "Es la física matemática la que nos muestra qué problemas debemos preguntarnos a nosotros mismos también es ella quien nos hace prever la solución."

Él creía que los modelos matemáticos de los fenómenos físicos deberían tener las siguientes propiedades:

1) Existe una solución
2) La solución es única.
3) El comportamiento de la solución cambia continuamente con las condiciones iniciales.

Las primeras dos propiedades son naturales, pues al realizar un modelo matemático sobre algún fenómeno físico, biológico o de cualquier otra ciencia, se espera obtener una solución que al interpretarla en el contexto dado, nos proporcione información relevante, y siendo la solución única, esta información se vuelve confiable y trascendente; la tercera propiedad convierte a nuestro modelo, en un modelo estable; pues, por ejemplo, si se usa un modelo matemático con ciertas condiciones de frontera iniciales para hacer predicciones sobre algún proceso físico, lo ideal sería que si la solución depende continuamente de datos y parámetros, no tuviera que haber preocupaciones por pequeños errores en la medición; ya que éstos no producirán grandes errores en la predicción.

Ejemplos de well posed problems son: el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace y la ecuación del calor con condiciones iniciales específicas. Estos pueden considerarse problemas "naturales" en el sentido de que existen procesos físicos modelados por estos problemas.

El problema aquí planteado, es un well-posed problem.

II. Metodología

Se estudia la difusión de calor a través de una placa tectónica. Tomando como fuente de calor un "punto caliente". Se supone que la placa tiene las siguientes dimensiones: 1000 km de largo, 1000 km de ancho y 100 kilómetros de grosor. Una corriente de materiales calientes llega al manto superior y después a la parte posterior de la placa, una temperatura de 1500°C, entra a la placa y se difunde. Se analiza la difusión de calor en esta placa, así como la pérdida de calor a través de la parte superior. Se supone además, que la difusión actúa en un solo sentido, en este caso a lo largo del eje z, es decir, de la parte inferior a la superior, que variará de 0 a 100 km. La ecuación de difusión es una ecuación diferencial en derivadas parciales, utilizada para estudiar diversos fenómenos físicos, como lo son tinta en agua, glutamato en neuronas, flujo de calor; la difusión involucra aspectos de observación experimental, descripción teórica y aplicaciones técnicas, siendo campo de estudio de extensas áreas de la ciencia y la tecnología, de las cuales pueden mencionarse la ciencia de los suelos, la hidrología, la ecología, la producción de petróleo y los reactores catalíticos, convirtiéndose en un tema de verdadera importancia interdisciplinaria.

Ecuación Diferencial de nuestro modelo:

$\frac{du}{dx^2}^2 + \frac{du}{dy^2}^2 + \frac{du}{dz^2}^2 = D\frac{du}{dt}$ --- > Ecuación de difusión, cuya solución se propone como el producto de sus variables:

$U(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, esta función describe la transferencia de calor a través de un cuerpo tridimensional en un tiempo t.
Para nuestro problema, se utilizó dicha ecuación, como estamos suponiendo que hay pérdida de calor en una de las caras, se empleó con una modificación, restándole una constante multiplicada por la función que describe la temperatura.

$$\frac{du}{dx^2}^2 + \frac{du}{dy^2}^2 + \frac{du}{dz^2}^2 - \sigma u = \frac{du}{dt} \quad \text{------ (1),}$$

σ>0 constante.
Esta es la ecuación de difusión modificada. Dónde el coeficiente de difusión D, es una propiedad del material, en este caso de una placa tectónica, es el valor obtenido de la conductividad térmica de un dividida entre el producto del valor de su densidad y la capacidad calorífica específica del mismo. En problemas de calor, como en el presente, se refiere al coeficiente de difusión térmica, el cual es un índice que expresa la velocidad de cambio, y flujo de temperaturas, en un material hasta que alcanza el equilibrio térmico.
Sometemos (1), de acuerdo a las especificaciones del problema a las siguientes condiciones de frontera:

1) $u(0,y,z,t) = 0$
2) $u(a,y,z,t) = 0$
3) $u(x,0,z,t) = 0$
4) $u(x,b,z,t) = 0$
5) $u(x,y,0,t) = 1500°C$
6) $u(x,y,c,t) = 700°C$
7) $u(x,y,z,0) = 1100$

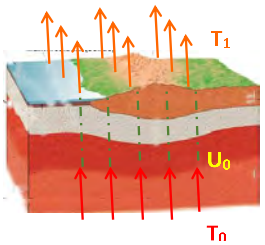


Figura 6. Diagrama de una sección de placa, en la cual se muestra el flujo de calor de acuerdo a las condiciones de frontera.

Tenemos una ecuación in-homogénea con condiciones de frontera independientes del tiempo in-homogéneas en el eje z. Haremos, pues, el siguiente cambio de variable:

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z,t) + \varphi(z)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial v^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial v^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos:

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma v - \sigma\varphi = \hat{D}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Agrupando términos:

$$\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial z^2} - \sigma v\right) + \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma\varphi\right) = \hat{D}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$(\nabla^2 v - \sigma v) + (\tfrac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma\varphi) = \mathrm{D}\frac{\partial v}{\partial t} - - - - - (2)$$

La ecuación (2) se hace homogénea si:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma\varphi = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma\varphi - - - - - (3)$$

Lo que nos lleva a tener que dar solución a los siguientes dos problemas:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma\varphi \rightarrow P1$$
$$\nabla^2 v = D\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma v \rightarrow P2$$

Dado el cambio de variable, es necesario modificar las condiciones de frontera:
Notemos que como la función φ solo depende de z, las primeras cuatro condiciones, no aplican pues se refieren a x & y.

1) $u(0,y,z,t) = v(0,y,z,t) = 0,$
$\rightarrow 1.1) v(0,y,z,t) = 0$

2) $u(1000,y,z,t) = v(1000,y,z,t) = 0$,
$\rightarrow 1.2) v(1000,y,z,t) = 0$

3) $u(x,0,z,t) = v(x,0,z,t)$=0,
$\rightarrow 1.3) v(0,y,z,t) = 0$

4) $u(x,1000,z,t) = v(x,1000,z,t) = 0,$
$\rightarrow 1.4) v(x,1000,z,t) = 0$

5) $u(x,y,0,t) = v(x,y,0,t) + \varphi(0) = 1500$,
si suponemos:
$1.5)\ \varphi(0) = 0 \rightarrow\ 2.5)\ v(x,y,0,t) = 0$

6) $u(x,y,100,t) = v(x,y,100,t) + \varphi(100)$=0,
si suponemos
$1.6)\ \varphi(100) = u_0 \rightarrow\ 2.6)\ v(x,y,100,t) = 0$

7) $u(x,y,z,0) = v(x,y,z,0) + \varphi(0) = U_0$,
Despejando:
$1.7) U_0 - \varphi(z) =\ v(x,y,z,0)$

Se resolvió P1, sujeto a las condiciones correspondientes, usando el método de series de potencias:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma\varphi$$
$$\varphi'' - \sigma\varphi = 0$$

Supongamos $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, entonces
$\varphi'' = \sum_{n=2}^{\infty}(n)(n-1)C_n z^{n-2}$

Entonces:

$$\varphi'' - \sigma\varphi = \sum_{n=2}^{\infty}(n)(n-1)C_n z^{n-2} - \sigma\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n =$$

$$= C^2(2)z^0 + \sum_{n=3}^{\infty}(n)(n-1)C_n z^{n-2} - \sigma C_0 z^0 - \sigma\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n =$$

$$= (2C_2 - \sigma C_0) + \sum_{k=1}^{\infty}[C_{k+2}(k+2)(k+1) - \sigma C^k]\, z^k = 0$$

Luego:

$C_2 = \frac{\sigma}{2} C_0$ y se debe tener que $C_{k+2} = \frac{\sigma C_k}{(k+2)(k+1)}$

Haciendo que k tome valores sucesivos enteros, comenzamos con k=0.

$k = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\sigma}{2} C_0$

$k = 1 \rightarrow C_3 = \frac{\sigma}{(3)(2)} C_1$

$k = 2 \rightarrow C_4 = \frac{\sigma}{(4)(3)} C_2 = \frac{\sigma}{(4)(3)} C_0 = \frac{\sigma^2}{(2)(3)(4)} C_0$

$k = 3 \rightarrow C_5 = \frac{\sigma}{(5)(4)} C_3 = \frac{\sigma}{(5)(4)} \frac{\sigma}{(3)(2)} C_1 = \frac{\sigma^2}{(2)(3)(4)(5)} C_1$

$k = 4 \rightarrow C_6 = \frac{\sigma}{(6)(5)} C_4 = \frac{\sigma}{(6)(5)} \frac{\sigma}{(2)(3)(4)} C_0 = \frac{\sigma^3}{(2)(3)(4)(5)(6)} C_0$

$k = 5 \rightarrow C_7 = \frac{\sigma}{(7)(6)} C_5 = \frac{\sigma}{(7)(6)} \frac{\sigma^2}{(2)(3)(4)(5)} C_1 = \frac{\sigma^3}{(2)(3)(4)(5)(6)(7)} C_0$

.
.

Así que la solución es de la forma:

$$\varphi = C_0 + C_1 x + \frac{\sigma}{2} C_0 x^2 + \frac{\sigma}{3!} C_1 x^3 + \frac{\sigma^2}{4!} C_0 x^4 + \frac{\sigma^2}{5!} C_1 x^5 + \frac{\sigma^3}{6!} C_0 x^6 + \frac{\sigma^3}{7!} C_1 x^7 + + \cdots$$

$$\varphi = C_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2!} x^2 + \frac{\sigma^2}{4!} x^4 + \frac{\sigma^3}{6!} x^6 + \cdots\right) + C_1 \left(x + \frac{\sigma}{3!} x^3 + \frac{\sigma^2}{5!} x^5 + \frac{\sigma^3}{7!} x^7 + ..\right)$$

La cual es equivalente a:

$$\varphi(z) = C_0 senh\ (\sigma z) + C_1 \cosh(\sigma z) \quad \text{-----(4)}$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$\varphi(0) = C_0 senh\ (0) + C_1 \cosh(0) = C_1 = 1500$$
$$\varphi(100) = C_0 senh\ (100\sigma) + T_0 \cosh(100\sigma) = T_1$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$C_0 = \frac{T_1 - cosh(100\sigma)1500}{senh\,(100\sigma)}$$

Finalmente:

$$\varphi(z) = \left[\frac{T_1 - \cosh(100\sigma) * 1500}{senh\,(100\sigma)}\right] * senh\ (\sigma z) + 1500 * \cosh(\sigma z)$$

----(5)

Se resolvió P2, sujeto a las condiciones 1.1) a 1.7), mediante el método de separación de variables.

$\frac{dv}{dx^2} + \frac{dv}{dy^2} + \frac{dv}{dz^2} = D \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma v$, suponiendo $v = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, se hace la sustitución en la ecuación anterior:

$$\frac{dXYZT}{dx^2} + \frac{dXYZT}{dy^2} + \frac{dXYZT}{dz^2} = D \frac{\partial XYZT}{\partial t} + \sigma XYZT$$

Y multiplicando ambos lados por $\frac{1}{XYZT}$:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = D \frac{T'}{T} + \sigma$$

Y se resolvió, para cada variable, obteniendo:

$$x = C_1 sen\left(\frac{n\pi}{1000} x\right)$$

$$y = C_2 sen\left(\frac{m\pi}{1000} y\right)$$

$$z = c_3 sen\left(\frac{p\pi}{100}\right)$$

$$T = c_4 e^{\frac{-(h+\lambda)}{D} t}$$

Sustituyendo los resultados en v:

$$V(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$
$$= C_1 sen\left(\frac{n\pi}{1000} x\right) C_2 sen\left(\frac{m\pi}{1000} y\right)\ c_3 sen\left(\frac{p\pi}{1000} z\right) c_4 e^{\frac{-(\sigma+\lambda)}{D} t}$$

Haciendo Amnp=c1c2c3 y utilizando el principio de superposición:

$$V(x,y,z,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mnp} sen\left(\frac{n\pi}{1000} x\right)\ sen\left(\frac{m\pi}{1000} y\right)\ sen\left(\frac{p\pi}{100} z\right) e^{\frac{-(\sigma+\lambda)}{D} t}$$

III. Resultados

De la solución general, graficamos algunas soluciones particulares y notamos que la solución matemática puede generar y que de hecho lo hace o incluir soluciones de distribución de calor en que casi en su totalidad emerge a la superficie principalmente en una “columna de calor” intenso y que se disipa y disminuye en intensidad conforme nos alejamos radialmente (lateralmente) de ella. Toda la energía escapa por esa columna. Si la superficie terrestre de nuestra placa, correspondiente al área amarilla de las gráficas, presenta algunas grietas, o por el calor que ha soportado por

miles de años, se rompe, empezaran a salir los materiales muy calientes del magma, lava, rocas, gases y se ira formando un volcán. Nuestra solución matemática, analítica, no numérica, de la distribución de calor con un máximo al centro a lo largo de la altura "z", mostrada en las figuras 7-14, cumple las condiciones de frontera geofísicas que hemos impuesto, y es evidente que describe el nacimiento de un volcán ya sea sobre tierra firme o en el interior del mar. El medio exterior circundante, arriba de z = c, no afecta el interior de la placa tectónica en nuestro modelo. Así nace un volcán, según nuestra solución analítica mostrada en las figuras 7-14.

Sobre la duración del proceso:

A continuación se muestran gráficas de esta solución, se graficó variando a x & y, y dejando a z constante utilizando los siguientes parámetros, que se consideraron razonables:

T_0=1500
T_1=700
U_0=1100
σ=.000001

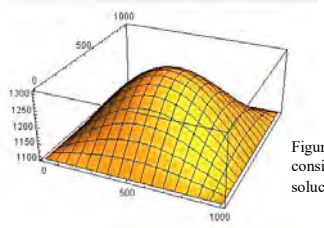
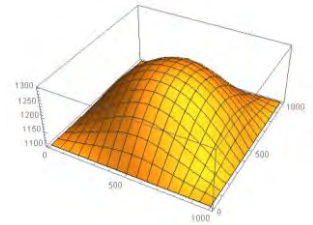


Figura 7. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo t=0.



de u(x,y,z,t) para n=m=p=1 y n=m=p=3, considerando los dos primeros sumandos de la solución con A_{111}, A_{333} al tiempo t=0.

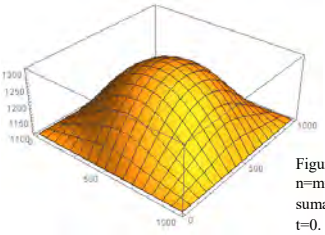


Figura 9. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, n=m=p=3, n=m=p=5 considerando los tres primeros sumandos de la solución con A_{111}, A_{333} al tiempo t=0.

Como se puede observar de las figuras 1,2 y 3, no hay variación relevante conforme aumentan los sumandos, por lo que se procedió a graficar ahora a un tiempo distinto:

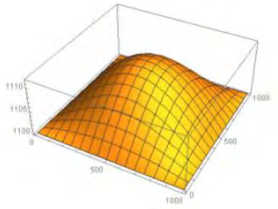


Figura 10. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo

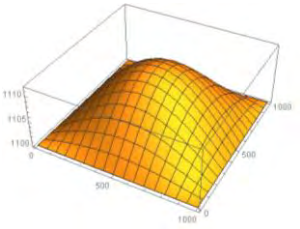


Figura 11. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo t=2.

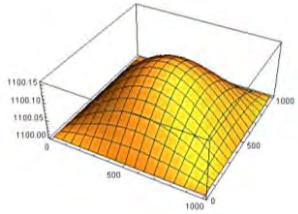


Figura 12. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo t=2.

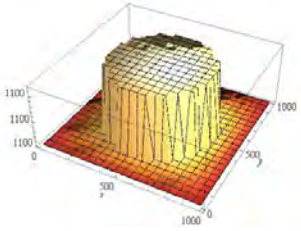


Figura 13. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo t=5.

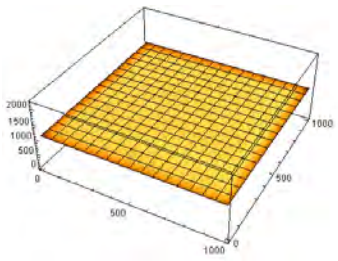


Figura 14. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111}, al tiempo t=10.

El análisis de los resultados obtenidos mediante las gráficas de las soluciones encontradas, que se realizó a una determinada altura de la placa, indica que el calor se acumula en el centro de la placa. Asimismo se encontró que la variación conforme se aumentan los parámetros m, n y p en la solución, es mínima, así que el término de mayor relevancia es el correspondiente a m=n=p=1, pues la amplitud de nuestra solución decae con rapidez al

incrementar el valor de dichos parámetros, cabe señalar que los términos constantes asociados con índices pares se anula, así que nuestra solución es diferente de cero solo para índices impares. Las características de la solución matemática hacen surgir propiedades físicas específicas. Este comportamiento físico, debido a la solución matemática, no había sido posible predecirlo.

También se puede observar que conforme transcurre el tiempo, el cual contribuye a nuestra solución con una exponencial elevada a un número negativo, los valores de la función u, disminuyen entre 110 y 160°C. Conforme el tiempo aumenta, la variación en la temperatura se va haciendo cada vez menor.

IV. Conclusiones

El análisis de los resultados obtenidos mediante las gráficas de las soluciones encontradas, que se realizó a una determinada altura de la placa, indica que el calor se acumula en el centro de la placa. Asimismo se encontró que la variación conforme se aumentan los parámetros m, n y p en la solución, es mínima, así que el término de mayor relevancia es el correspondiente a m=n=p=1, pues la amplitud de nuestra solución decae con rapidez al incrementar el valor de dichos parámetros, cabe señalar que los términos constantes asociados con índices pares se anula, así que nuestra solución es diferente de cero solo para índices impares. Las características de la solución matemática hacen surgir propiedades físicas específicas. Este comportamiento físico, debido a la solución matemática, no había sido posible predecirlo.

También se puede observar que conforme transcurre el tiempo, el cual contribuye a nuestra solución con una exponencial elevada a un número negativo, los valores de la función u, disminuyen entre 110 y 160°C. Conforme el tiempo aumenta, la variación en la temperatura se va haciendo cada vez menor.

Referencias

[1] Jeffrey S. Seewald, “Detecting molecular hydrogen on Enceladus”. Science

[2] Donald J. DePaolo y Michael Manga. 2003. Deep Origin of Hotspots - the Mantle Plume Model. Science

[3] DapengZhao, “Global tomographic images of mantle plumes and subducting slabs: insight into deep Earth dynamics “. Science.

[4] John P. Rafferty, “Hotspot”. Encyclopaedia Britannica, Inc

[5] How Did Life Begin? Nature.

[6] J. Thomas Beatty, Jörg Overmann, Michael T. Lince, Ann K. Manske, Andrew S. Lang, Robert E. Blankenship, Cindy L. Van Dover, Tracey A. Martinson and F. Gerald Plumley Blankenship, Cindy L. Van Dover, Tracey A. Martinson and F. Gerald Plumley, 2005 “An obligately photosynthetic bacterial anaerobe from a deep-sea hydrothermal vent“.PNAS

[7] Jasmin Fox-Skelly 6 November 2015, “The strange Worms that live on erupting mud vulcanoes”. BBc earth.

ISSN: 2594-1011

Soluciones de las ecuaciones Korteweg-de Vries y Schrödinger no lineal por el método de simetrías

Francisco Hernández S.[1], Pablo Paniagua[2] y Francisco J. Turrubiates[1]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Adolfo López Mateos, Edificio 9, 07738, Ciudad de México, México.
[2]Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo del Instituto Politécnico Nacional, Pachuca: Ciudad del Conocimiento y la Cultura, Carretera Pachuca-Actopan km 1+500, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, México.
E-mail: fco.hzsep@hotmail.com, ppaniagua@ipn.mx, fturrub@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se estudia el procedimiento general para encontrar soluciones invariantes de ecuaciones diferenciales bajo transformaciones de grupos. Dichas soluciones invariantes se obtienen a partir del álgebra de Lie del grupo de simetría asociada a la ecuación diferencial. Los generadores infinitesimales de la ecuación por estudiar forman una base del álgebra de Lie del grupo de simetría. Las soluciones invariantes bajo grupos de transformaciones se obtienen al aplicar cada grupo a una solución general. En particular se estudian con este procedimiento las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de Korteweg-de Vries (KdV), Korteweg-de Vries modificada (mKdV) y la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE). Finalmente, se construye para cada una de ellas la solución más general posible obtenida a partir de las transformaciones de simetría.**

Palabras Clave — ***Grupos de simetría, Soluciones invariantes, Ecuaciones diferenciales no lineales.***

Abstract— **In this paper a general procedure to find invariant solutions under group transformations of differential equations is studied. Such invariant solutions are obtained from the Lie algebra of the symmetry group associated to the differential equation. The infinitesimal generators of the equation span a basis of the Lie algebra of the symmetry group. The invariant solutions under the group of transformations are obtained when each group is applied to a general solution. In particular, three differential equations are studied under this method, the Korteweg-de Vries (KdV), the modified Korteweg-de Vries (mKdV) and the Nonlinear Schrödinger equation (NLSE). Finally, the most general solution obtained from the symmetry transformations is constructed for each of these cases.**

Keywords — ***Symmetry groups, Invariant solutions, Nonlinear differential equations.***

I. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales en la descripción de sistemas físicos, por lo que obtener técnicas para resolverlas es un tema muy importante de estudio. Existen diferentes métodos para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales, en este trabajo se emplea un método desarrollado por S. Lie, el cual consiste en emplear los grupos continuos de transformaciones que dejan invariante la ecuación diferencial. El estudio de simetrías proporciona un procedimiento para resolver una ecuación diferencial por medio de cuadraturas. Bajo ciertas condiciones y empleando grupos de simetrías con el método descrito por S. Lie, se puede reducir en uno el orden de una ecuación diferencial cuando esta es invariante bajo transformaciones de un grupo uniparamétrico. De esta manera, haciendo uso de los grupos de transformaciones de simetría es posible determinar nuevas soluciones de la ecuación diferencial, algunos ejemplos de grupos de transformaciones son rotaciones, traslaciones y los escalamientos. En física estos grupos de transformaciones tienen una aplicación inmediata a través del teorema de Noether, el cual establece de manera simple que, a cada simetría generada por acciones de grupos le corresponde una cantidad conservada, derivando así en la construcción de leyes de conservación.

El objetivo de este trabajo es presentar los elementos del procedimiento general para obtener soluciones invariantes de ecuaciones diferenciales y mostrar su aplicación con tres casos de ecuaciones diferenciales no lineales. Debido a que es más simple trabajar con operaciones algebraicas a trabajar con operaciones de grupos, para determinar los grupos de simetrías de una ecuación diferencial se trabaja con el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie de transformaciones de simetría. Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección II se establece la relación que existe entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie asociada y se define lo que es el grupo de simetrías de una ecuación diferencial. En la sección III se describe el método de prolongaciones, el cual consiste en describir el espacio de las variables dependientes e independientes $X \times U$, en términos de dichas variables y las derivadas de las variables dependientes $X \times U \times U_1 \times \cdots \times U_n$, en donde U_i representa al espacio generado por la derivada de orden i de la variable dependiente. A partir del método de prolongaciones se determina una condición necesaria para establecer si un grupo de transformaciones formará un grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales. Posteriormente en las secciones IV, V y VI se aplica el método de prolongaciones a las ecuaciones de Korteweg-de Vries, Korteweg-de Vries modificada y la ecuación de Schrödinger

no lineal respectivamente, para las cuales se obtuvieron los grupos de simetrías y soluciones invariantes. Finalmente, en la sección VII se presentan nuestras conclusiones.

II. Grupos de Simetría

Una solución invariante de una ecuación diferencial es una solución que bajo transformaciones de grupos seguirá siendo solución de la ecuación. La herramienta fundamental para encontrar soluciones invariantes de una ecuación diferencial son los grupos de simetrías, los cuales forman un grupo de Lie G siempre que se cumpla un criterio de simetría. El criterio para determinar si un grupo de transformaciones es un grupo de simetrías se enuncia en la sección III. A continuación, se presentan los conceptos necesarios para poder obtener dichos grupos.

Dada una variedad diferenciable m-dimensional M con coordenadas $x \in M$, un *grupo uniparamétrico local de transformaciones* o *flujo,* es una aplicación diferenciable $\varphi: M \times \mathbb{R} \mapsto M$, tal que:

$$\varphi(x,0) = \varphi_x(0) = x,$$
$$\varphi(\varphi(x,t),s) = \varphi(x,t+s),$$

para $x \in M$ y $t,s \in \mathbb{R}$. El *generador infinitesimal* v, de la aplicación φ, es un campo vectorial diferenciable tangente a la familia de curvas generadas por el flujo, es decir $v_x = (\varphi_x)'_o$. Otra herramienta fundamental es el llamado *mapeo exponencial* $\exp: \mathfrak{g} \mapsto G$ que permite recuperar la estructura del grupo local a partir del álgebra de Lie. Si G es un grupo de transformaciones actuando en una variedad M a través de la acción del grupo $\Psi: G \times M \mapsto M$, tal que si $(h,x) \in G \times M$, entonces

$$\Psi\big(g, \Psi(h,x)\big) = \Psi(g \cdot h, x),$$
$$\Psi(e, \mathrm{x}) = \mathrm{x},$$
$$\Psi\big(g^{-1}, \Psi(g,x)\big) = x,$$

donde e denota el elemento identidad de G. Existe una acción asociada del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio tangente de M, denotado TM. Es decir, si $v \in \mathfrak{g}$ y $\psi: \mathfrak{g} \mapsto TM$, entonces $\psi(v)$ es un campo vectorial cuyo flujo coincide con la acción del grupo uniparamétrico $\exp(\epsilon v)$ de G en TM. Esto significa que para $x \in M$,

$$\psi(v)|_x = \frac{d}{d\epsilon}\Psi(\exp(\epsilon v), x)\,|_x = d\Psi_x(v|_e).$$

Usualmente se omite hacer referencia al mapeo ψ y se identifica el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con su imagen $\psi(\mathfrak{g})$, la cual forma un álgebra de Lie de campos vectoriales sobre TM. Los generadores infinitesimales de la acción del grupo se obtienen por medio de la transformación

$$v|_x = \frac{d}{dt}(\exp(tv)x)|_{t=0}, \qquad (1)$$

para $v \in \mathfrak{g}$, los cuales generan una base de $\mathfrak{g}$. Sean $v_1, \cdots, v_r$ campos vectoriales en una variedad diferenciable M tales que

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k v_k,$$

para $i,j = 1, \cdots, r$ y c_{ij}^k ciertas constantes. Entonces existe un grupo de Lie G cuya álgebra de Lie tiene a c_{ij}^k como constantes de estructura relativas a una base $w_1, \cdots, w_r$, y una acción de grupo de G en M donde $\psi(w_i) = v_i$. Esto es, si se conocen los generadores infinitesimales $v_1, \cdots, v_r$ de la base de un álgebra de Lie, entonces siempre es posible usar la exponenciación para hallar un grupo de transformaciones cuya acción esté generada por el álgebra de Lie ya conocida.

Un resultado de gran importancia es que siempre es posible encontrar por medio de (1) al grupo de transformaciones cuya álgebra de Lie coincida con el álgebra generada por los generadores infinitesimales. Esto puede ser consultado en forma detallada en [1] y [2].

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales L, con p variables independientes $x = (x^1, \cdots, x^p)$ y q variables dependientes $u = (u^1, \cdots, u^q)$. Un *grupo de simetrías* del sistema L es un grupo local de transformaciones G, definido en un subcojunto $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, de manera que G transforma soluciones de L en L. Es decir, si $u = f(x)$ es solución del sistema L, entonces para $g \in G$, $\tilde{u} = g \cdot f(x)$ también es solución del sistema L. Esto es, el grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales es el mayor grupo de transformaciones actuando en las variables dependientes e independientes del sistema, con la propiedad de que transforma soluciones del sistema en nuevas soluciones. [3].

III. Invariantes

Considere un sistema de k ecuaciones diferenciales Δ_l, $l = 1, \cdots, k$. El siguiente paso consiste en determinar los invariantes del sistema Δ_l bajo un grupo de simetrías. Dichos invariantes se encuentran de la forma siguiente.

Supongamos que G es un grupo uniparamétrico de transformaciones actuando sobre M, con un generador infinitesimal expresado en las coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_m)$ como:

$$v = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}. \qquad (2)$$

Un invariante $\zeta(x)$ de G, es una solución de la ecuación diferencial

$$v(\zeta) = \xi^1(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0\,. \tag{3}$$

La solución se encuentra integrando el sistema característico

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{d\xi^m(x)}\,. \tag{4}$$

En este trabajo se consideran en particular ecuaciones diferenciales con una variable dependiente u, y dos variables independientes x y t. Por lo tanto, se propone un generador infinitesimal de la forma

$$v = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{5}$$

Para poder encontrar las funciones coeficientes ξ, τ, η de modo que el grupo uniparamétrico $e^{\epsilon v}$ sea un grupo de simetrías para cualquier parámetro $\epsilon \in \mathbb{R}$, es necesario obtener las prolongaciones del generador propuesto. Considere el espacio de las variables independientes X y el espacio de las variables dependientes U, entonces la n-ésima prolongación $pr^{(n)}$ toma elementos del espacio $X \times U$ y los envía a un espacio el cual represente derivadas del sistema hasta orden n, denotado por $M^{(n)} = X \times U \times U_1 \times \cdots \times U_n$. Si $v \in M \subset X \times U$ es un campo vectorial con grupo uniparamétrico $\exp(\epsilon v)$, la n-ésima prolongación $pr^{(n)}v$ será un campo vectorial definido sobre el espacio extendido $M^{(n)}$ y que está definido como el generador infinitesimal del correspondiente grupo uniparamétrico prolongado, $pr^{(n)}[\exp(\epsilon v)](x, u^{(n)})$ para cualquier $\left(x, u^{(n)}\right) \in M^{(n)}$, ver [3] y [4]. La n-ésima prolongación de un campo vectorial v está dada de manera recursiva como sigue

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{\alpha=1} \sum_j \eta_\alpha^j\left(x, u^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}. \tag{6}$$

De la expresión anterior se obtienen explícitamente para el tipo de ecuaciones diferenciales que serán tratadas aquí las siguientes prolongaciones

$$pr^{(1)}v = v + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t}, \tag{7.a}$$

$$pr^{(2)}v = pr^{(1)}v + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \tag{7.b}$$

$$pr^{(3)}v = pr^{(2)}v + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta^{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \eta^{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \eta^{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}}, \tag{7.c}$$

$$\vdots$$

Mientras que los coeficientes η^i están dados por:

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t\,, \tag{8.a}$$

$$\eta^t = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2\,, \tag{8.b}$$

y las derivadas de órdenes superiores se encuentran de manera recursiva empleando la siguiente fórmula

$$\eta^{Jx} = D_x\eta^J + u_{Jx}D_x\xi + u_{Jt}D_x\tau, \tag{8.c}$$

a partir de la cual podemos encontrar la expresión para η^{xxx}, la cual será necesaria posteriormente

$$\begin{aligned}\eta^{xxx} = {} & \eta_{xxx} + u_x(2\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) - u_t\tau_{xxx} + \\ & u_x^2(\eta_{xuu} - 2\xi_{xxu}) - 2u_x u_t\tau_{xxu} - u_x^3\xi_{xuu} - u_x^2 u_t\tau_{xuu} + \\ & u_{xx}(\eta_{xu} - 2\xi_{xx}) - 2u_{xt}\tau_{xx} - 3u_x u_{xx}\xi_{xu} - u_t u_{xx}\tau_{ux} - \\ & 2u_x u_{xt}\tau_{ux} + u_x\eta_{xxu} + u_x^2(2\eta_{xuu} - \xi_{xxu}) - u_x u_t\tau_{xxu} + \\ & u_x^3(\eta_{uuu} - 2\xi_{xuu}) - 2u_x^2 u_t\tau_{xuu} - u_x^4\xi_{uuu} - u_x^3 u_t\tau_{uuu} + \\ & u_x u_{xx}(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - 2u_x u_{xt}\tau_{ux} - 3u_x u_{xx}\xi_{uu} - \\ & u_x u_t u_{xx}\tau_{uu} - 2u_x^2 u_{xt}\tau_{uu} + u_{xx}(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + \\ & 2u_x u_{xx}(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - 2u_{xx}u_t\tau_{xu} - 3u_x^2 u_{xx}\xi_{uu} - \\ & 2u_x u_t u_{xx}\tau_{uu} - 3u_{xx}^2\xi_u - 2u_{xx}u_{xt}\tau_u - u_{xt}\tau_{xx} - \\ & 2u_x u_{xt}\tau_{xu} - u_x^2 u_{xt}\tau_{uu} - u_{xx}u_{xt}\tau_u + u_{xxx}(\eta_u - 2\xi_x) - \\ & 3u_x u_{xxx}\xi_u - u_t u_{xxx}\tau_u - 2u_{xxt}\tau_x - 2u_x u_{xxt}\tau_u - u_{xxx}\xi_x - \\ & u_x u_{xxx}\xi_u - u_{xxt}\tau_x - u_x u_{xxt}\tau_u.\end{aligned} \tag{8.d}$$

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ definido en $M \subset X \times U$ y G un grupo de transformaciones sobre M, se tiene que si

$$pr^{(n)}v\left[\Delta\left(x, u^{(n)}\right)\right] = 0\,, \tag{9}$$

para cada generador infinitesimal v de la acción del grupo G, entonces G es un grupo de simetrías del sistema. A la condición (9) se le conoce como *condición de simetría* [1].

Sea H una colección de campos vectoriales que forman un espacio vectorial y sean v, w campos vectoriales. Se dice que H está en *involución* si $[v, w] \in H$ cuando $v, w \in H$ [6].

Un resultado de gran importancia es el siguiente. Sean $v_1, \ldots, v_r$ campos vectoriales en una variedad diferenciable suave M. El sistema $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es integrable sí y solo si es una involución [5].

Con el fin de hacer más claro el procedimiento, en la siguiente sección se emplean los resultados presentados anteriormente a tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales las cuales han sido ampliamente estudiadas por otros métodos.

IV. Ecuación Korteweg-de vries

La ecuación Korteweg-de Vries (KDV) es una ecuación diferencial parcial no lineal de tercer orden. Físicamente describe la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios no lineales y dispersivos. La formulación de la ecuación surgió como un modelo para describir ondas viajeras en la superficie del agua en canales poco profundos. La solución más conocida de esta ecuación es la solución tipo solitón. Un solitón es un paquete de onda el cual mantiene su forma mientras se desplaza a velocidad constante.

La ecuación KdV, está dada por la siguiente expresión:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{10}$$

y su solución tipo solitón es:

$$u(x,t) = 3c \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - r)\right),$$

donde c y $r = x(0)$ son constantes reales. Para un generador infinitesimal como el propuesto en (5), y aplicando la condición de simetría (9) a la ecuación (10), se tiene entonces que la ecuación KdV genera un grupo uniparamétrico de transformaciones sí y solo si

$$\eta^t + \eta^{xxx} + u\eta^x + u_x\eta = 0\,. \tag{11}$$

El álgebra de Lie $\mathcal{g}$ de las simetrías de la ecuación KdV está generada por los cuatro campos vectoriales v_1, v_2, v_3 y v_4, especificados como:

$v_1 = \partial_x$	Translaciones espaciales,
$v_2 = \partial_t$	Translaciones temporales,
$v_3 = t\partial_x + \partial_u$	Transformación galileana,
$v_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u$	Escalamiento.

El grupo de Lie de simetrías está relacionado con su álgebra de Lie de las simetrías por medio de la expresión (1). Cada campo vectorial v_i genera un grupo uniparamétrico G_i, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} G_1\colon (x,t,u) &\mapsto (x+\epsilon, t, u),\\ G_2\colon (x,t,u) &\mapsto (x, t+\epsilon, u),\\ G_3\colon (x,t,u) &\mapsto (x+\epsilon t, t, u+\epsilon),\\ G_4\colon (x,t,u) &\mapsto (xe^{\epsilon}, te^{3\epsilon}, ue^{-2\epsilon}), \end{aligned}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Así, si $u = f(x,t)$ es solución de la ecuación KdV también lo serán las transformaciones bajo G_i. Por ejemplo, para el grupo uniparamétrico G_4 se tiene que:

$$\tilde{u} = G_4 \cdot u = ue^{-2\epsilon} = e^{-2\epsilon} f(x,t)\,, \tag{12}$$

el cual debe escribirse en términos de

$$(\tilde{x}, \tilde{t}) = G_4 \cdot (x,t) = (xe^{\epsilon}, te^{3\epsilon})\,, \tag{13}$$

por lo tanto

$$\tilde{u} = e^{-2\epsilon} f(\tilde{x}e^{-\epsilon}, \tilde{t}e^{-3\epsilon})\,, \tag{14}$$

es también solución de la ecuación KdV. Las soluciones invariantes bajo cada grupo de simetrías son:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(x-\epsilon, t),\\ u^{(2)} &= f(x, t-\epsilon)\\ u^{(3)} &= f(x-\epsilon t, t) + \epsilon\\ u^{(4)} &= e^{-2\epsilon} f(xe^{-\epsilon}, te^{-3\epsilon}) \end{aligned} \tag{15}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. El grupo uniparamétrico más general se obtiene al considerar una combinación lineal, $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$, de los campos vectoriales con c_1, c_2, c_3 y c_4 constantes. Representando un grupo de transformaciones arbitrario g, como la composición de los subgrupos uniparamétricos $G_1, \cdots, G_4$, se obtiene el grupo de simetrías general para la ecuación KdV. En particular, si el grupo g se encuentra en una vecindad de la identidad, entonces se puede expresar de manera única por:

$$g = \exp(\epsilon_4 v_4) \cdot \exp(\epsilon_3 v_3) \cdot \exp(\epsilon_2 v_2) \cdot \exp(\epsilon_1 v_1). \tag{16}$$

Así, la solución más general que se puede obtener a partir de una solución dada $u = f(x,t)$, por transformaciones de grupos es:

$$u(x,t) = f\left(\left(x - \epsilon_1 - \epsilon_3(t-\epsilon_2)\right)e^{-\epsilon_4}, (t - \epsilon_2)e^{-3\epsilon_4}\right)e^{-2\epsilon_4} + \epsilon_3, \tag{17}$$

donde $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_4$ son constantes reales [6].

V. Ecuación Korteweg-de vries modificada

Otra importante ecuación que tiene solución tipo solitón es la llamada ecuación Korteweg-de Vries modificada (mKdV) y en esta sección se encuentran las soluciones invariantes de dicha ecuación, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x = 0, \tag{18}$$

y cuya solución tipo solitón tiene la forma siguiente

$$u(x,t) = \sqrt{6c}\,\operatorname{sech}\left(\sqrt{c}(x - ct - r)\right),$$

donde c y $r = x(0)$ son constantes reales. Nuevamente se considera un generador infinitesimal como el propuesto en (5), y aplicando la condición de simetría (9) a la ecuación (18), se encuentra que la ecuación mKdV genera un grupo uniparamétrico de transformaciones sí y solo si

$$\eta^t + \eta^{xxx} + 12uu_x\eta + 6u^2\eta^x = 0. \qquad (19)$$

El álgebra de Lie $\mathcal{g}$ de simetrías correspondiente a la ecuación mKdV está generada por tres campos vectoriales w_1, w_2 y w_3, especificados como:

$$\begin{aligned} w_1 &= \partial_x && \text{Translaciones espaciales,}\\ w_2 &= \partial_t && \text{Translaciones temporales,}\\ w_3 &= x\partial_x + 3t\partial_t - u\partial_u && \text{Escalamiento.}\end{aligned}$$

Estos campos vectoriales generan los siguientes subgrupos uniparamétricos:

$$\begin{aligned} G_1\colon (x,t,u) &\mapsto (x+\epsilon, t, u),\\ G_2\colon (x,t,u) &\mapsto (x, t+\epsilon, u),\\ G_3\colon (x,t,u) &\mapsto (xe^{\epsilon}, te^{3\epsilon}, ue^{-\epsilon}),\end{aligned} \qquad (20)$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Las soluciones invariantes bajo cada grupo de simetrías son entonces:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(x-\epsilon, t),\\ u^{(2)} &= f(x, t-\epsilon),\\ u^{(3)} &= e^{-\epsilon} f(e^{-\epsilon}x, e^{-3\epsilon}t),\end{aligned} \qquad (21)$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Así, para un elemento del grupo de transformaciones, $g = \exp(\epsilon_3 w_3)\cdot\exp(\epsilon_2 w_2)\cdot\exp(\epsilon_1 w_1)$, la solución más general que se puede obtener a partir de una solución dada $u = f(x,t)$, por transformaciones de grupos es:

$$u(x,t) = e^{-\epsilon_3} f\big(e^{-\epsilon_3}(x-\epsilon_1), e^{-\epsilon_3}(t-\epsilon_2)\big), \qquad (22)$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ son constantes reales.

VI. Ecuación de Schrödinger no lineal

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) es una variación de la ecuación de Schrödinger. Su aplicación principal se encuentra en la propagación de luz en fibras ópticas no lineales y guías de onda plana, también se encuentra presente en el estudio de condensados de Bose-Einstein, ondas gravitacionales y plasmas, entre otras [7]. La ecuación NLSE es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden y está dada por la siguiente expresión:

$$iu_t = u_{xx} + 2\alpha|u|^2u, \qquad (23)$$

cuya solución tipo solitón es:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{k}(x-ct-r)\right)e^{-ikt},$$

donde c, k y $r = x(0)$ son constantes reales. Para obtener las soluciones invariantes de esta ecuación se supondrá que u y $\bar{u}$ son variables diferentes, donde $\bar{u}$ denota al complejo conjugado de u, por lo que en este caso se considera una ecuación con dos variables independientes x y t y dos variables dependientes u y $\bar{u}$, es decir

$$iu_t - u_{xx} - 2\alpha u^2\bar{u} = 0, \qquad (24)$$

Se puede identificar esta ecuación diferencial con una subvariedad en $M^{(2)}$. En este caso se considerará un generador infinitesimal de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} v = \xi(x,t,u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial t} +\\ \eta(x,t,u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(x,t,u,\bar{u})\frac{\partial}{\partial \bar{u}},\end{aligned} \qquad (25)$$

aplicando la condición de simetría (9) a la ecuación (24), se encuentra que dicha ecuación genera un grupo uniparamétrico de transformaciones sí y solo si

$$i\eta^t - \eta^{xx} - 2\alpha u^2\varphi - 4\alpha u\eta\bar{u} = 0. \qquad (26)$$

El álgebra de Lie $\mathcal{g}$ de simetrías correspondiente a la ecuación NLSE está dada por los siguientes cinco campos vectoriales:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_x && \text{Translaciones espaciales,}\\ v_2 &= \partial_t && \text{Translaciones temporales,}\\ v_3 &= u\partial_u - \bar{u}\partial_{\bar{u}} && \text{Escalamiento}\\ v_4 &= t\partial_x - \tfrac{1}{2}iux\partial_u + \tfrac{1}{2}i\bar{u}x\partial_{\bar{u}} && \text{Transformación galileana,}\\ v_5 &= t\partial_t + \tfrac{1}{2}x\partial_x - \bar{u}\partial_{\bar{u}} && \text{Escalamiento.}\end{aligned}$$

Ahora bien, se ha tomado el complejo conjugado de u como una variable diferente, para recuperar los generadores infinitesimales de la ecuación (23) en términos de una sola variable hace falta tomar los siguientes cambios de variable, $u - i\bar{u} \mapsto u$ y $\partial_{\bar{u}} \mapsto i\partial_u$, de este modo los generadores infinitesimales de la ecuación NLSE son los siguientes:

$$\begin{aligned} w_1 &= \partial_x && \text{Translaciones espaciales,}\\ w_2 &= \partial_t && \text{Translaciones temporales,}\\ w_3 &= u\partial_u && \text{Escalamiento,}\\ w_4 &= t\partial_x - \tfrac{1}{2}iux\partial_u && \text{Transformación galileana.}\end{aligned}$$

El álgebra de Lie de la ecuación NLSE es entonces un álgebra 4-dimensional cuya base son los campos vectoriales w_1, w_2, w_3 y w_4. Se ha omitido el generador v_5 puesto que este generador está relacionado con un escalamiento en la

variable $\bar{u}$, lo cual no tiene interpretación física ya que desde el comienzo se supuso que las variables u y $\bar{u}$ eran independientes entre sí, luego, el generador v_5 es un generador infinitesimal de la ecuación diferencial $iu_t = u_{xx} + 2\alpha u^2 w$, donde u y w son variables dependientes, pero no de la ecuación NLSE.

Los grupos uniparamétricos de la ecuación NLSE asociados a cada generador infinitesimal son entonces:

$$\begin{aligned} G_1\colon (x,t,u) &\mapsto (x+\epsilon,t,u),\\ G_2\colon (x,t,u) &\mapsto (x,t+\epsilon,u),\\ G_3\colon (x,t,u) &\mapsto (x,t,ue^{\epsilon}),\\ G_4\colon (x,t,u) &\mapsto \left(x+\epsilon t,t,ue^{-\frac{1}{2}i(x+\epsilon t)\epsilon}\right), \end{aligned}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Las soluciones invariantes bajo cada grupo de transformaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(x-\epsilon,t),\\ u^{(2)} &= f(x,t-\epsilon),\\ u^{(3)} &= f(x,t)e^{\epsilon},\\ u^{(4)} &= f(x-\epsilon t,t)e^{-\frac{1}{2}i(x-\epsilon t)\epsilon}, \end{aligned} \tag{27}$$

para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Para un elemento del grupo, $g = \exp(\epsilon_4 w_4)\cdot\cdots\cdot\exp(\epsilon_1 v_1)$, la solución más general posible bajo transformaciones de grupos es de la forma siguiente

$$u(x,t) = f(x-\epsilon_1-\epsilon_4(t-\epsilon_2),t-\epsilon_2)e^{-\frac{1}{2}i\left(x-\epsilon_1-\epsilon_4(t-\epsilon_2)\right)\epsilon_4+\epsilon_3}, \tag{28}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y ϵ_4 son constantes reales.

VII. Conclusiones

El concepto de simetría se encuentra presente en la gran mayoría de los fenómenos de la naturaleza y en particular es de gran importancia en física y matemáticas ya que a menudo conocer las simetrías de un problema implica una simplificación en su solución. En el caso de las ecuaciones diferenciales, las simetrías son de gran ayuda en la búsqueda de soluciones exactas, además que proporcionan un punto de vista alternativo con respecto a los métodos tradicionales. Los métodos de simetrías en ecuaciones diferenciales aunque representan una herramienta muy general y poderosa para su tratamiento pueden dar lugar a cálculos muy elaborados. Sin embargo, una de las ventajas de este método es que puede ser aplicado tanto a ecuaciones diferenciales ordinarias como parciales ya sean lineales o no lineales.

En este trabajo se trataron las simetrías de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales KdV, mKdV y NLSE. En estos casos, se construyó para cada una de ellas la solución más general posible obtenida a partir de las transformaciones de simetría.

Por último vale la pena mencionar que debido a que la mayoría de los modelos y teorías que describen a la naturaleza emplean ecuaciones diferenciales (ordinarias, parciales o sistemas de ellas), la generalidad del método de simetrías permite en particular poder aplicarlo prácticamente a todas las áreas de la física por ejemplo, en relatividad general, en fluidos, teorías de norma y sistemas dinámicos entre otras.

Referencias

[1] Applications of Lie Groups to Differential Equatios, Peter J. Olver, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Lie Groups, RossmannWulf, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2002.

[3] Geometrical methods of mathematical physics, B.F.Schutz, Cambridge University Press, 1980.

[4] Symmetry Methods for Differential Equatios, Peter E. Hydon, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2000.

[5] Handbook of Lie groups analysis of differential equations, Vol. 3, Nail H. Ibragimov, CRC, 1995.

[6] Nonlinear differential equations and dynamical systems, Ferdinand Verhulst, Springer Science & Business Media, 2006.

[7] M. I. Rodas-Verde, H. Michinel and V. M. Pérez-García, Controllable soliton emission from a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett., 95 (2005).

[8] Jürgen Fuchsy Christoph Schweigert. Symmetries, Lie algebras and representations: Agraduate course for physicists. Cambridge University Press, 2003.

[9] George W Bluman y Sukeyuki Kumei. Symmetries and differential equations. Vol. 81. Springer Science & BusinessMedia,2013.

[10] Torres del Castillo. Notas sobre variedades diferenciables. Monografía del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (1981).

[11] Abraham Cohen. An Introduction to the Lie Theory of one-parameter groups: With Applications to the solution of Differential Equations. DC Health & Company, 1911.

ISSN: 2594-1011

La función de Wigner en el efecto Aharonov-Bohm

Oscar J. M. Galindo[1], Pablo Paniagua[2] Francisco J. Turrubiates[1]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Adolfo López Mateos, Edificio 9, 07738, Ciudad de México, México.
[2]Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad del Conocimiento y la Cultura, Carretera Pachuca-Actopan km 8.5, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, 42080, México.
E-mail: ozkr_v23@hotmail.com, ppaniagua@ipn.mx, fturrub@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo, se presenta una descripción del efecto Aharonov Bohm en el espacio por medio de la función de Wigner. Usando las funciones del oscilador armónico cuántico, se muestran los elementos que contribuyen al patrón de interferencia y como modifican la fase de la función de Wigner.**

Palabras Clave – **Efecto Aharonov-Bohm, espacio fase, función de Wigner.**

Abstract —**In this paper we present a description of the Aharonov Bohm effect in the phase space by means of the Wigner function. Using the functions of the quantum harmonic oscillator the elements that contribute to the interference pattern and how they modify the phase of the Wigner the function are shown.**

Keywords — **Aharonov-Bohm effect, phase space, Wigner function.**

I. Introducción

En 1959, Yakir Aharonov y David Bohm encontraron que una partícula cargada eléctricamente se ve afectada por un potencial electromagnético $(V, \vec{A})$, a pesar de estar confinada a una región en ausencia de campos electromagnéticos. Desde el punto de vista clásico solo importan los campos electromagnéticos, en tanto que cuánticamente resultan relevantes también los potenciales electromagnéticos, es decir, la mecánica cuántica asigna una realidad física a los potenciales. Es esto lo que da lugar al efecto Aharonov-Bohm (AB), que explica como un electrón en movimiento en el exterior de un solenoide delgado e infinito (en cuyo interior tiene confinado un campo magnético y en cuyo exterior el campo magnético es nulo) detecta el campo confinado en el solenoide, pues siente el potencial vectorial que aparece en la ecuación de Schrödinger, pero debido a la nulidad del campo en el exterior todos los términos en la fuerza de Lorentz son cero y por lo tanto no lo afecta (ver Fig. 1).

El mecanismo subyacente es el acoplamiento del potencial electromagnético con la fase de la función de onda de una partícula cargada, el efecto AB se observa por medio del desplazamiento de líneas en un patrón de interferencia, esto debido a una diferencia de fases. Una característica del efecto AB es el hecho de que es invariante de norma, esto es, hay una infinidad de potenciales magnéticos que generan el mismo campo magnético.

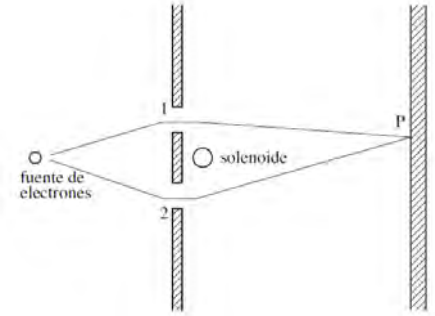


Fig. 1. Representación esquemática del dispositivo usado para generar el efecto Aharonov-Bohm.

El objetico del presente trabajo, es analizar la interpretación del efecto Aharonov-Bohm en el espacio fase mediante el cálculo de la función Wigner, haciendo que las funciones de onda que interfieren sean representadas por las eigenfunciones normalizadas del oscilador armónico cuántico. Siguiendo la interesante propuesta de Dragoman [1]. Este artículo está organizado de la siguiente manera, en el apartado (A) de la sección I, se da una breve revisión del efecto Aharonov-Bohm. En el apartado (B), se presenta la definición de la función de Wigner en términos de las funciones de onda, asimismo como las funciones del oscilador armónico con las que se trabajará en el resto del artículo. En la sección III, se calculan las funciones de Wigner de las representaciones del efecto Aharonov-Bohm para los dos primeros estados del oscilador armónico, así como las funciones de Wigner de estas funciones con una fase añadida. En la sección IV, se analizan los resultados obtenidos en el patrón de interferencia obtenidos en la función de Wigner y finalmente en la sección V se presentan las conclusiones obtenidas.

II. Preliminares

A. Efecto Aharonov-Bohm

El efecto AB es el resultado del análisis del siguiente experimento pensado.

Se considera una partícula cargada dentro de una jaula de Faraday, dicha jaula está conectada a un potencial externo

que provoca una variación en el tiempo en el potencial en la jaula. Esto añade un término $V(x,t)$ al Hamiltoniano, que dentro de la jaula será una función solamente del tiempo, así el Hamiltoniano para la región dentro de la jaula será

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V(t) \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde H_0 es el Hamiltoniano sin el potencial. Si ψ_0 es la solución de H_0 entonces se propone como solución a la función

$$\psi = \psi_0 e^{is/\hbar}. \tag{2}$$

donde *s* está dada por

$$s = \int V(t)dt. \tag{3}$$

Además, al sustituir la solución (2) en la ecuación (1), se tiene que

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial\left(\psi_0 e^{-is/\hbar}\right)}{\partial t} \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}e^{-is/\hbar} + \psi_0\frac{\partial e^{-is/\hbar}}{\partial t}\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}e^{-is/\hbar} + \psi_0 e^{-is/\hbar}\frac{\partial\left(-is/\hbar\right)}{\partial t}\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}e^{-is/\hbar} - \frac{i}{\hbar}\psi_0 e^{-is/\hbar}\frac{\partial\int V(t)dt}{\partial t}\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}e^{-is/\hbar} - \frac{i}{\hbar}\psi_0 e^{-is/\hbar}V(t)\right) \\ &= \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + V(t)\right)\psi_0 e^{-is/\hbar} \\ &= H\psi. \end{aligned} \tag{4}$$

Se concluye entonces que la solución propuesta (2) satisface la ecuación de Schrödinger (1), lo cual nos indica que la solución propuesta difiere de la original en una fase, es decir, el efecto que tiene el potencial es únicamente añadir una fase a la solución original.

Como no hay ningún experimento que pueda medir la fase, debido a que al calcular la densidad de probabilidad ésta siempre se cancela, Aharonov y Bohm optaron por acudir al fenómeno de interferencia.

Para lograrlo era necesario obtener dos patrones y comprarlos. Primero pensaron en un rayo coherente de electrones que se hace dividir en dos, posteriormente cada rayo se hace pasar a través de una región donde no hay campos electromagnéticos ni algún potencial. Al salir de esta zona los rayos se hacen interferir constructivamente, generando un patrón de interferencia. Ahora, para demostrar el efecto se repite el experimento con algunas variaciones, nuevamente se tiene un rayo coherente de electrones que se hace dividir en dos, haciendo que cada rayo pase a través de una región donde cada uno experimenta un potencial variable distinto donde no hay presencia de campos electromagnéticos. Del experimento pensado se tiene que la función de onda de cada rayo al salir de la región se le añadirá una fase S_1 y S_2 respectivamente y después se hacen interferir constructivamente, obteniendo entonces el patrón de interferencia original desfasado por un valor de $(S_1 - S_2)/\hbar$. Es decir, se puede medir la diferencia de fases por medio del fenómeno de interferencia, pero no existe experimento físico que pueda medir una sola fase.

B. La función de Distribución de Wigner

La función de Wigner es una cuasidistribución de probabilidad dependiente de las variables de posición y momento simultáneamente. Fue introducida por Eugene Wigner en 1932 para estudiar correcciones cuánticas a la mecánica estadística clásica, la ventaja que da es que vincula la función de onda que aparece en la ecuación de Schrödinger con una distribución de probabilidad en el espacio fase. Esta característica le permite encontrar conexiones entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica, a partir del hecho de que la cuántica trata con probabilidades mientras que la mecánica clásica trata con trayectorias en el espacio fase.

En términos de la función de onda la distribución de Wigner está definida de la siguiente manera

$$w(x,p) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{py}{\hbar}}\psi\left(x+\frac{y}{2}\right)\psi^*\left(x-\frac{y}{2}\right)dy. \tag{5}$$

donde $\psi(x)$ denota a la función de onda del sistema.

Por simplicidad en este trabajo se usarán las eigenfunciones normalizadas del oscilador armónico cuántico, dadas por

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n\,n!\;x_0}}H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)e^{-\frac{x^2}{2x_0{}^2}}. \tag{6}$$

donde $H_n(x)$ denota a los polinomios de Hermite los cuales están determinados por la relación

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = \left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1. \tag{7}$$

Es importante observar que estas funciones tienen la característica de ser gaussianas y por construcción se tomaran

dos funciones de onda del mismo estado, desplazadas cierta distancia la una de la otra y donde su módulo al cuadrado nos generará un patrón de interferencia, es decir, la facilidad con que dos de ellas puedan interferir.

III. METODOLOGÍA

Como punto de partida, se considera que el efecto Aharonov Bohm es representado por el experimento de la doble rendija, asumiendo que las funciones de onda que viajan a cada rendija son las funciones normalizadas del oscilador armónico cuántico separadas una distancia 2d con una función de onda total dada por

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^n n!\; x_0}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\left(e^{-\frac{(x+d)^2}{2{x_0}^2}} + e^{-\frac{(x-d)^2}{2{x_0}^2}}\right). \quad (8)$$

Así, al sustituir la expresión (8) en la ecuación (5) se encuentra que la función de Wigner correspondiente será

$$\begin{aligned} w_n(x,p) = {} & \frac{e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h\sqrt{\pi}\, 2^n n!\; x_0}\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right) \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right) H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right) e^{-\left(\frac{y}{2x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2} dy \\ & + \frac{e^{-\frac{x^2+d^2}{{x_0}^2}+\left(\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}}{h\sqrt{\pi}\, 2^n n!\; x_0} \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right) H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right) e^{-\left(\frac{y}{2x_0}+\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2} dy \\ & + \frac{e^{-\frac{x^2+d^2}{{x_0}^2}+\left(-\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}}{h\sqrt{\pi}\, 2^n n!\; x_0} \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right) H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right) e^{-\left(\frac{y}{2x_0}-\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2} dy. \quad (9) \end{aligned}$$

Haciendo los siguientes cambios de variable

$$u = \frac{y}{2x_0} + i\frac{px_0}{\hbar}\,;\; v = \frac{y}{2x_0} + \frac{d}{x_0} + i\frac{px_0}{\hbar}\,;\; w = \frac{y}{2x_0} - \frac{d}{x_0} + i\frac{px_0}{\hbar},$$

y sustituyendo en (9), se tiene que

$$\begin{aligned} w_n(x,p) = {} & \frac{e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} n!}\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right) \\ & * \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{x}{x_0} + u - i\frac{px_0}{\hbar}\right) H_n\left(\frac{x}{x_0} - u + i\frac{px_0}{\hbar}\right) e^{-u^2} du \\ & + \frac{e^{-\frac{x^2+d^2}{{x_0}^2}+\left(-\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}}{h\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{x}{x_0} + v + \frac{d}{x_0} - i\frac{px_0}{\hbar}\right) \\ & * H_n\left(\frac{x}{x_0} - v - \frac{d}{x_0} + i\frac{px_0}{\hbar}\right) e^{-w^2} dw. \quad (10) \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos se definen las siguientes funciones

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(a+u-ib)H_n(a-u+ib)e^{-u^2} du, \quad (11)$$

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(a+v-c-ib)H_n(a-v+c+ib)e^{-v^2} dv, \quad (12)$$

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(a+v+c-ib)H_n(a-v-c+ib)e^{-w^2} dw. \quad (13)$$

De estas expresiones se tiene en particular para $n = 0, 1$ y 2 estas tres funciones tienen los valores

$$M_0 = \sqrt{\pi} \quad (14)$$

$$M_1 = 2\sqrt{\pi}(-1 + 2a^2 + 2b^2) \quad (15)$$

$$M_2 = 8\sqrt{\pi}\left(-1 + 4b^2 + 2\left(a^4 + b^4 + 2a^2(-1+b^2)\right)\right) \quad (16)$$

$$N_0 = \sqrt{\pi} \quad (17)$$

$$N_1 = 2\sqrt{\pi}(-1 + 2a^2 + 2(b-ic)^2) \quad (18)$$

$$N_2 = 8\sqrt{\pi}(1 + 2a^4 + 4a^2(b-ic-1)(b-ic+1) + 2(-2+(b-ic)^2)(b-ic)^2) \quad (19)$$

$$P_0 = \sqrt{\pi} \quad (20)$$

$$P_1 = 2\sqrt{\pi}(-1 + 2a^2 + 2(b+ic)^2) \quad (21)$$

$$P_2 = 8\sqrt{\pi}(1 + 2a^4 + 4a^2(b+ic-1)(b+ic+1) + (-4 + 2(b+ic)^2)(b+ic)^2) \quad (22)$$

En términos de las cantidades M_n, N_n y P_n la función de Wigner se puede escribir como

$$\begin{aligned} w_n(x,p) = {} & \frac{e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} n!}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right) M_n \right. \\ & \left. + e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}}\left(e^{2i\frac{pd}{\hbar}} N_n + e^{-2i\frac{pd}{\hbar}} P_n\right)\right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

En particular, la expresión de la función de Wigner para $n = 0$ está dada por

$$\begin{aligned} w_0(x,p) = {} & \frac{2e^{-\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}}}{h}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right) \right. \\ & \left. + 2e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}} cos\left(2\frac{pd}{\hbar}\right)\right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Introduciendo ahora las variables $X=\frac{x}{x_0}$ y $P=\frac{px_0}{\hbar}$, se obtiene que

$$w_0(X,P)=\frac{2e^{-P^2}}{h}\left\{\left(e^{-\left(X+\frac{d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(X-\frac{d}{x_0}\right)^2}\right)+2e^{-X^2}cos\left(2P\frac{d}{x_0}\right)\right\}. \quad (25)$$

Mientras que para el caso con $n=1$, se tiene de (23) que

$$w_1(x,p)=\frac{2e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right)\left(-1+2\frac{x^2}{{x_0}^2}+2\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)+e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}}\left[2cos\left(2\frac{pd}{\hbar}\right)\left(-1+2\frac{x^2}{{x_0}^2}+2\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}-2\frac{d^2}{{x_0}^2}\right)+8\frac{pd}{\hbar}sen\left(2\frac{pd}{\hbar}\right)\right]\right\}. \quad (26)$$

Nuevamente empleando las coordenadas $X=\frac{x}{x_0}$ y $P=\frac{px_0}{\hbar}$, se encuentra entonces que

$$w_1(x,p)=\frac{2e^{-P^2}}{h}\left\{\left(e^{-\left(X+\frac{d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(X-\frac{d}{x_0}\right)^2}\right)*(-1+2X^2+2P^2)+e^{-X^2}\left[2cos\left(2P\frac{d}{x_0}\right)*\left(-1+2X^2+2P^2-2\frac{d^2}{{x_0}^2}\right)+8P\frac{d}{x_0}sen\left(2P\frac{d}{x_0}\right)\right]\right\}. \quad (27)$$

Si ahora se considera que detrás de la doble rendija se encuentra un solenoide que encierra un campo magnético, entonces el campo no afectará al electrón debido a que está encerrado pero el efecto que tiene el potencial sobre las funciones de onda será el de añadir una fase, en este caso con valores de $\frac{\xi}{2}$ y $-\frac{\xi}{2}$, es decir la función de onda resultante para el estado n-ésimo tendrá la forma siguiente

$$\Psi_n{}'(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!\;x_0}}H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\left(e^{-\frac{(x+d)^2}{2{x_0}^2}}e^{i\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{(x-d)^2}{2{x_0}^2}}e^{-i\frac{\xi}{2}}\right). \quad (28)$$

La función de Wigner correspondiente a la función de onda (28), se obtiene sustituyéndola en (5), así

$$W_n{}'(x,p)=\frac{e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h\sqrt{\pi}\,2^n n!\;x_0}\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right)*\int_{-\infty}^{\infty}H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right)H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right)e^{-\left(\frac{y}{2x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}dy+\frac{e^{-\frac{x^2+d^2}{{x_0}^2}+\left(\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2+i\xi}}{h\sqrt{\pi}\,2^n n!\;x_0}*\int_{-\infty}^{\infty}H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right)H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right)e^{-\left(\frac{y}{2x_0}+\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}dy+\frac{e^{-\frac{x^2+d^2}{{x_0}^2}+\left(-\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2-i\xi}}{h\sqrt{\pi}\,2^n n!\;x_0}*\int_{-\infty}^{\infty}H_n\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{x_0}\right)H_n\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{x_0}\right)e^{-\left(\frac{y}{2x_0}-\frac{d}{x_0}+i\frac{px_0}{\hbar}\right)^2}dy. \quad (29)$$

Tomando en cuenta las definiciones las funciones (11), (12) y (13), se obtiene al sustituirlas en (29) la siguiente expresión:

$$w_n{}'(x,p)=\frac{e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h\sqrt{\pi}\,2^{n-1}n!}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right)M_n+e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}}\left(e^{i\left(2\frac{pd}{\hbar}+\xi\right)}N_n+e^{-i\left(2\frac{pd}{\hbar}+\xi\right)}P_n\right)\right\}. \quad (30)$$

La ecuación (29), es la función Wigner resultado de dos funciones que no solo generan un patrón de interferencia, sino que también poseen una fase como resultado del potencial escalar.

Para apreciar sus efectos se consideran ahora las funciones de Wigner para los casos $n=0$ y 1 las cuales son:

$$w_0{}'(x,p)=\frac{2e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right)+2e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}}cos\left(2\frac{pd}{\hbar}+\xi\right)\right\}, \quad (31)$$

y que al realizar los cambios $X=\frac{x}{x_0}$ y $P=\frac{px_0}{\hbar}$ en (31), se reduce a

$$w_0{}'(X,P)=\frac{2e^{-P^2}}{h}\left\{\left(e^{-\left(X+\frac{d}{x_0}\right)^2}+e^{-\left(X-\frac{d}{x_0}\right)^2}\right)+2e^{-X^2}cos\left(2P\frac{d}{x_0}+\xi\right)\right\}. \quad (32)$$

Para el caso de las funciones de Wigner (29) con $n = 1$, se tiene que

$$w_1{}'(x,p) = \frac{2e^{-\left(\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right)}}{h}\left\{\left(e^{-\left(\frac{x+d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{x_0}\right)^2}\right) * \left(-1 + 2\frac{x^2}{{x_0}^2} + 2\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2}\right) + e^{-\frac{x^2}{{x_0}^2}}\left[2cos\left(2\frac{pd}{\hbar} + \xi\right) * \left(-1 + 2\frac{x^2}{{x_0}^2} + 2\frac{p^2{x_0}^2}{\hbar^2} - 2\frac{d^2}{{x_0}^2}\right) + 8\frac{pd}{\hbar}sen\left(2\frac{pd}{\hbar} + \xi\right)\right]\right\}. \quad (33)$$

y que en términos de las variables X y P se escribe como

$$w_1{}'(X,P) = \frac{2e^{-P^2}}{h}\left\{\left(e^{-\left(X+\frac{d}{x_0}\right)^2} + e^{-\left(X-\frac{d}{x_0}\right)^2}\right)(-1 + 2X^2 + 2P^2) + e^{-X^2}\left[2cos\left(2P\frac{d}{x_0} + \xi\right)\left(-1 + 2X^2 + 2P^2 - 2\frac{d^2}{{x_0}^2}\right) + 8P\frac{d}{x_0}sen\left(2P\frac{d}{x_0} + \xi\right)\right]\right\}. \quad (34)$$

A continuación, se muestran las gráficas de las funciones (25) y (27) con $d = 5x_0$ y $h = 1$, Fig. 2 y Fig. 3 respectivamente

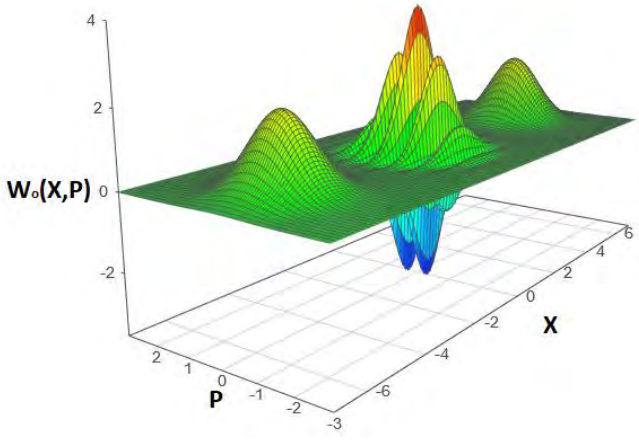


Fig. 2. Función de Wigner $W_0(X,P)$.

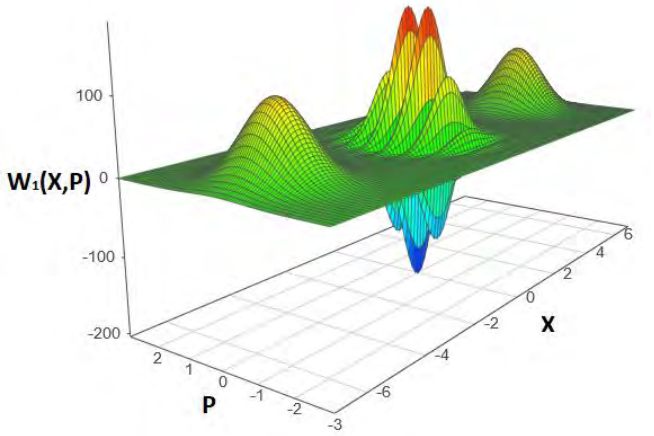


Fig. 3. Función de Wigner $W_1(X,P)$.

En forma similar las gráficas de las funciones (32) y (34) correspondientes al primer estado excitado n=1 con $\xi = 1$, $h = 1$ y $d = 5x_0$, se muestran en las Fig. 4 y Fig. 5.

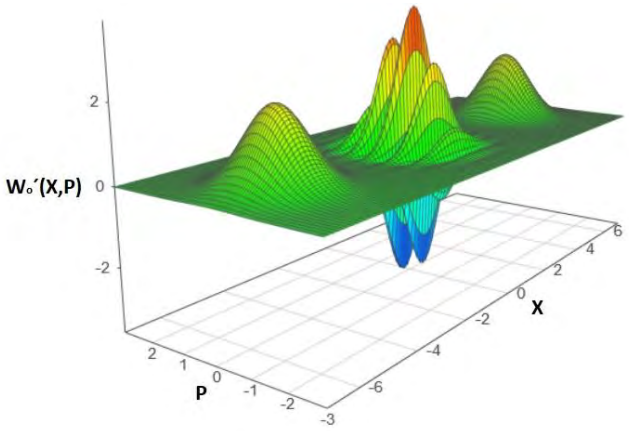


Fig. 4. Función de Wigner $w_0{}'(X,P)$.

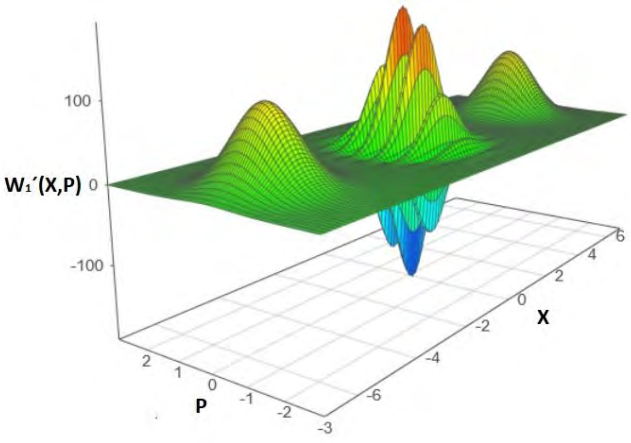


Fig. 5. Función de Wigner $w_1{}'(X,P)$.

IV. Resultados

Las ecuaciones (23) y (30), son respectivamente las funciones de Wigner de las funciones que viajan por cada una de las rendijas con y sin potencial que los afecte, asemejando el experimento de Aharonov y Bohm.

Analizando la ecuación (24), se observa que los términos que corresponden a las dos exponenciales gaussianas desfasadas corresponden a la función de Wigner de la doble rendija, pero el término que posee al coseno corresponde al elemento que genera interferencia, esto debido a la naturaleza oscilatoria de la función.

Haciendo el mismo análisis en (31), se llega a las mismas conclusiones con la diferencia de que la fase añadida únicamente se encuentra en la parte que genera interferencia, es decir, la fase que se obtuvo debido al potencial se añade como un desfasamiento en el argumento del coseno. Un análisis más detallado de esta función se encuentra en [3].

Analizando la ecuación (26), se observa que los términos que corresponden a las dos exponenciales gaussianas desfasadas corresponden a la función de Wigner de la doble rendija, pero los términos que poseen al seno y al coseno corresponden a los elementos que generan interferencia, esto debido a la naturaleza oscilatoria de las funciones.

Haciendo el mismo análisis en (33), se llega a las mismas conclusiones con la diferencia de que la fase añadida únicamente se encuentra en la parte que genera interferencia, es decir, la fase que se obtuvo debido al potencial se añade como un desfasamiento en los argumentos del seno y coseno.

Comparando la Fig. 2 con la Fig. 4, se observa que ambas poseen una estructura semejante, ambas tienen el mismo par de formas gaussianas a sus extremos y la parte central correspondiente a la zona de interferencia difiere en un desplazamiento de franjas.

Ahora, comparando las Fig. 3 y la Fig. 5, se llega a la misma conclusión, poseen el mismo par de gaussianas a sus extremos y en la zona perteneciente al patrón de interferencia se aprecia un ligero desplazamiento de líneas entre ambas.

Para observar el desplazamiento de líneas, se muestran a continuación los gráficos de las líneas de contorno de las funciones de Wigner (25), (27), (32) y (34) usando $X = \frac{x}{x_0}$, $P = \frac{px_0}{\hbar}$, $d = 5x_0$, $h = 1$ y $\xi = 1$, mostradas en las figuras 6, 7, 8 y 9.

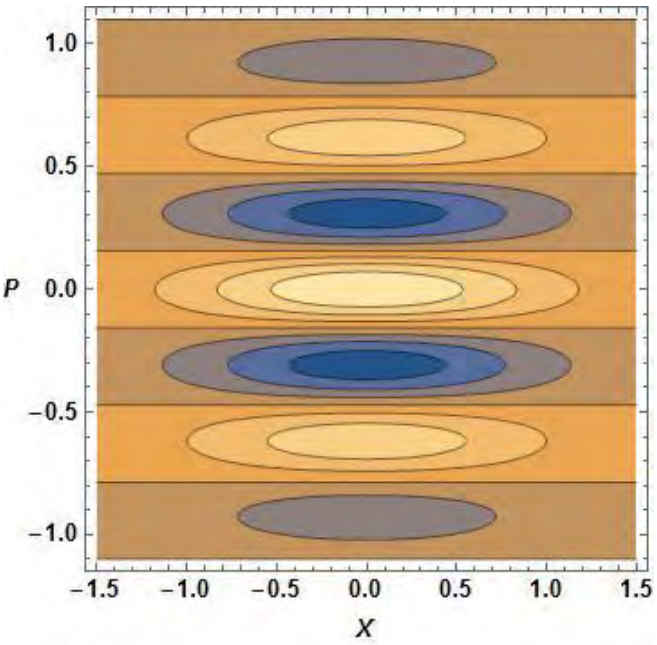


Fig. 6. Líneas de contorno de la función de Wigner $W_0(X, P)$

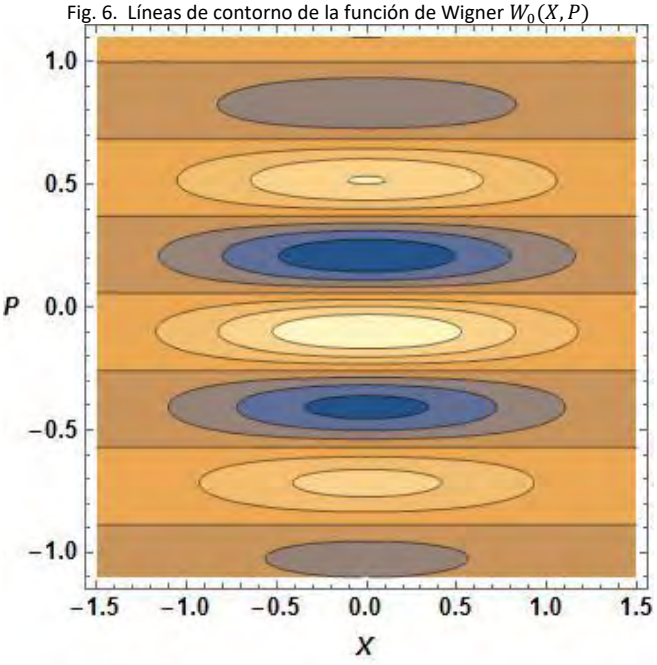


Fig. 7. Líneas de contorno de la función de Wigner $W_0{}'(X, P)$

En estas figuras se puede apreciar que las franjas no se ven afectadas a lo largo de la dirección X, pero si muestran un cambio en la dirección P, este desplazamiento muestra el efecto Aharonov-Bohm en el espacio fase. Es importante observar que la fase que se obtiene se encuentra únicamente en el término de interferencia.

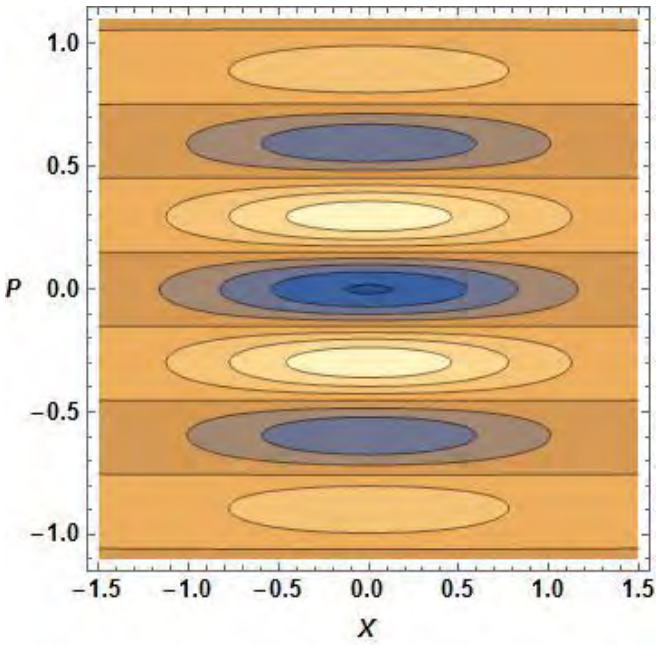


Fig. 8. Líneas de contorno de la función de Wigner $W_1(X, P)$

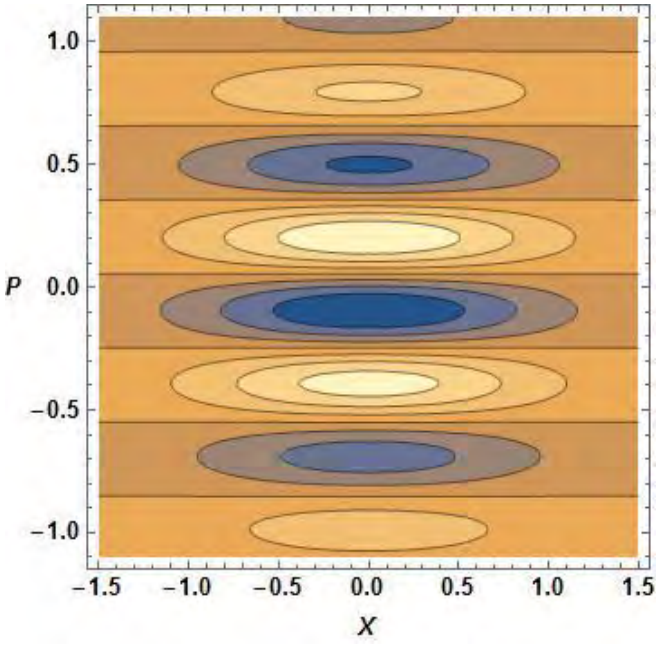


Fig. 9. Líneas de contorno de la función de Wigner $W_1{}'(X, P)$

V. Conclusiones

En este trabajo se empleó a las funciones del oscilador armónico cuántico para estudiar el efecto Aharonov-Bohm en el espacio fase por medio de la función de Wigner. En particular se consideraron los estados base y primer estado excitado de las funciones propuestas. Se analizó el comportamiento de las funciones de Wigner por medio de sus gráficas y se realizó una comparación entre ellos para evidenciar el desplazamiento de líneas como muestra de su existencia. Se mostró cuales elementos contribuyen a la interferencia y se encontró una expresión general para cualquier estado excitado.

Diversos autores han propuesto técnicas para llevar a cabo la medición de la función de Wigner por lo que sería interesante tratar de verificar las predicciones obtenidas por este procedimiento.

Referencias

[1] Dragoman, D. "The Interference Term In The Wigner Distribution Function And The Aharonov–Bohm Effect." Physics Letters A, vol 285, no. 3-4, 2001, pp. 109-114. Elsevier BV, doi:10.1016/s0375-9601(01)00353-x.

[2] Aharonov, Y., and D. Bohm. "Significance Of Electromagnetic Potentials In The Quantum Theory." Physical Review, vol 115, no. 3, 1959, pp. 485-491. American Physical Society (APS), doi:10.1103/physrev.115.485.

[3] Case, William B. "Wigner Functions And Weyl Transforms For Pedestrians." American Journal Of Physics, vol 76, no. 10, 2008, pp. 937-946. American Association Of Physics Teachers (AAPT), doi:10.1119/1.2957889.

[4] Eskin, Gregory. "Aharonov–Bohm Effect Revisited." Reviews In Mathematical Physics, vol 27, no. 02, 2015, p. 1530001. World Scientific Pub Co Pte Lt, doi:10.1142/s0129055x15300010.

[5] Weder, Ricardo. "The Electric Aharonov-Bohm Effect." Journal Of Mathematical Physics, vol 52, no. 5, 2011, p. 052109. AIP Publishing, doi:10.1063/1.3592150.

[6] C. Zachos, D. Fairlie and T. Curtright, Quantum Mechanics In Phase Space, vol. 34, (World Scientific Series in 20th Century Physics) Cambridge University Press, 2005.

ISSN: 2594-1011

El concepto de espín y sus estructuras matemáticas

Moisés Alfonso[1], Pablo Paniagua[2] y Francisco J. Turrubiates[1]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Adolfo López Mateos, Edificio 9, 07738, Ciudad de México, México.
[2]Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo del Instituto Politécnico Nacional, Pachuca: Ciudad del Conocimiento y la Cultura, Carretera Pachuca-Actopan km 1+500, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, México.
E-mail:moises4lfonso@gmail.com, ppaniagua@ipn.mx, fturrub@esfm.ipn.mx

Resumen — **El estudio matemático del concepto de espín inicia con los trabajos de W. Pauli quien formuló una ecuación no relativista para el electrón y más tarde por P.A.M. Dirac que derivó una ecuación de onda consistente con la relatividad especial. Estas ideas dieron lugar al desarrollo de diversas estructuras matemáticas las cuales permiten establecer cuándo un determinado espacio admite o no la existencia de fermiones globalmente. En este trabajo se presenta una revisión de los principales conceptos empleados en la construcción de dichas estructuras tales como las álgebras de Clifford, los haces fibrados, el grupo SO y el grupo espín ($Spin$) que en particular permite definir al operador de Dirac.**

Palabras Clave – **Álgebras de Clifford, Haces Fibrados, Haces Asociados, Haz de Espín, Grupo Espín, Operador de Dirac.**

Abstract — **The mathematical study of the concept of spin begins with the works of W. Pauli who formulated a non-relativistic equation for the electron and later by P.A.M. Dirac that derived a wave equation consistent with special relativity. These ideas gave rise to the development of various mathematical structures which allow to establish when a certain space admits or not the existence of fermions globally. This article presents a review of the main concepts used in the construction of such structures as Clifford algebras, fiber bundles, the SO group and the spin group ($Spin$) which in particular allows to define the Dirac operator.**

Keywords — **Clifford Algebras, Fiber Bundles, Associated Bundles, Spin Bundle, Spin Group, Dirac Operator.**

I. Introducción

La existencia del espín fue confirmada experimentalmente por O. Stern y W. Gerlach en el año de 1922. En el experimento, un haz de átomos de plata se hicieron pasar por un campo magnético inhomogéneo (Fig 1). Clásicamente se espera que sobre la pantalla aparezca una banda continua mientras que, de acuerdo a la ecuación de Schrödinger si los átomos tienen un momento angular orbital l, se espera que el haz se divida en un número discreto impar $2l+1$ de componentes. Sin embargo, experimentalmente el haz no se comporta como la predicción clásica ni de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. En lugar de esto, el haz se divide en dos distintas componentes. Este resultado también se observa para átomos de hidrógeno en su estado base, donde no se esperaba una división. Para resolver este problema, S. Goudsmit y G. Uhlenbeck postularon en el año de 1925 que, en adición a su momento angular orbital, el electrón posee un momento angular intrínseco y que a diferencia del momento angular orbital, este no tiene relación con los grados de libertad espaciales. En analogía con el movimiento rotacional o giro de la tierra alrededor de su propio eje, se puede considerar que el electrón tiene un movimiento rotacional o giro intrínseco. Este grado de libertad fue lo que motivo el nombre de momento angular de espín, sin embargo, el electrón sigue siendo considerado como una particular puntual, es decir sin estructura interna. El concepto de espín es un grado de libertad intrínseco puramente cuántico, es decir no tiene un análogo clásico. En unidades de la constate de Planck los valores que puede tomar el espín de una partícula son valores semi-enteros y enteros. Los fermiones son partículas que, como el electrón, tienen espín semi-enteros y mientras que los bosones son partículas que tienen espín entero, tales como los fotones que tienen espín uno. Los fermiones obedecen el principio de exclusión de Pauli, que establece que dos fermiones idénticos no pueden existir en el mismo estado. El ferromagnetismo es una consecuencia de este principio. Los bosones, por otro lado, tienden a congregarse en el mismo estado, lo que lleva a fenómenos como la superconductividad y al condensado de Bose-Einstein [1].

W. Pauli en el año de 1927 formuló la ecuación de Pauli o también llamada ecuación de Schrödinger-Pauli que es una

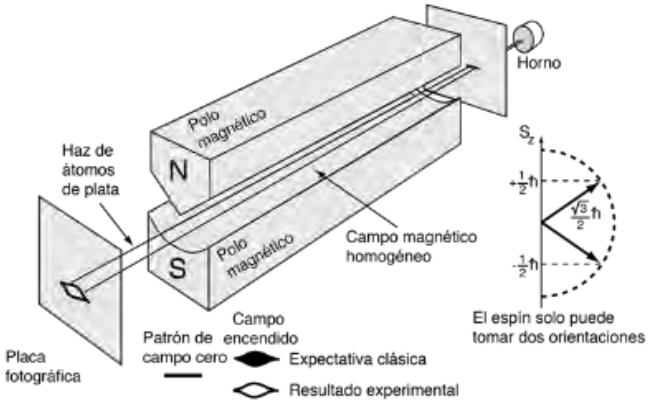


Fig. 1. El haz de átomos de plata de un horno caliente se divide en dos cuando es sometido a un campo magnético no-homogéneo

ecuación no relativista para una partícula de espín ½ (tal como el electrón) que interacciona con un campo electromagnético. En el año de 1928, P. Dirac descubrió la ecuación relativista del electrón al aplicar la raíz cuadrada del operador D´Alembertiano. Dicha ecuación lleva el nombre de Dirac y es, de hecho, una de las piedras angulares de la física teórica moderna. Sus propiedades llevaron a P. Dirac a predecir la existencia de antipartículas. Así, la formulación de la ecuación relativista para una partícula de espín ½ lleva a una de las más fructuosas relaciones entre la física moderna y las matemáticas.

En este trabajo se presenta una breve revisión de la física que describe al electrón y en particular los conceptos matemáticos que fueron empleados para llevar a cabo la descripción de un electrón relativista, esto es, las matemáticas detrás de la ecuación de Dirac. Es importante mencionar que esta área es la intersección de varias ramas de las matemáticas (geometría diferencial, topología diferencial, álgebras de Clifford, análisis matemático, ecuaciones diferenciales) y de la física moderna (mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos). El artículo está organizado de la siguiente forma, en la sección II se introduce la ecuación de Schrödinger-Pauli y la de Dirac como las descripciónes no-relativista y relativista del electrón respectivamente. Posteriormente en la sección III se introducen los primeros conceptos matemáticos empleados, esto es, el álgebra de Clifford, el grupo espín y el concepto de espinor. En la sección IV, se mencionan las principales herramientas para la deducción de la ecuación de Dirac. En la sección V se trata con los aspectos globales de la teoría del operador de Dirac. Finalmente, en la sección VI se presentan nuestras observaciones finales.

II. ECUACIÓN SCHRÖDINGER-PAULI

En términos clásicos, una esfera cargada puede tener un momento magnético si se encuentra girando de tal manera, que la carga en los bordes produzca un bucle de corriente. Este tipo de razonamiento llevó a la utilización del concepto de "espín electrónico", puesto que el electrón es una partícula cargada, el espín del electrón debe dar lugar a un momento magnético $\boldsymbol{s}$ intrínseco o de espín.
Cualquier intento de formular operadores "mecánico-cuántico" para representar el momento angular de espín tropieza con el inconveniente de que no existe el análogo clásico para el espín. Esto no ocurre con el momento angular orbital. De acuerdo con el principio de correspondencia de Bohr, el momento angular orbital se reduce al momento angular orbital clásico cuando el número cuántico asociado al momento angular es muy grande, esto es llamado límite clásico. En cambio, para el momento angular de espín simplemente no se tiene ninguna analogía en el límite clásico. Dada la idea de un momento magnético del electrón, se introduce al espín en la teoría como una nueva variable, denotado por, $\boldsymbol{s}$, a la cual se asigna sentido físico asociando las dos posibles proyecciones del momento magnético intrínseco $\boldsymbol{M_s}$ que se miden en el experimento de Stern-Gerlach.

La ecuación de Schrödinger-Pauli, es una modificación de la ecuación de Schrödinger para describir a las partículas de espín ½, cuando hay una interacción entre el espín y el campo electromagnético. Dicha ecuación se encuentra dada por la siguiente expresión

$$\left[\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A}))^2+e\varphi\right]\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (1)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$, son las matrices de Pauli, $\hat{\boldsymbol{p}}$ es el momento lineal de la partícula, $\hat{\boldsymbol{A}}$ y φ denotan respectivamente al potencial vectorial y el potencial escalar de un campo electromagnético y $(\hat{\boldsymbol{p}}-e\hat{\boldsymbol{A}})$ es el momento conjugado de la partícula. Esta forma del momento canónico es conocida como el *acoplamiento mínimo*, se presenta cuando el acoplamiento entre la partícula y el campo se realiza sólo a través de los potenciales. Está ecuación sin embargo, es una descripción no-relativista, pero que explica la división del haz de átomos en el experimento Stern-Gerlach y los extraños patrones en el efecto Zeeman anómalo [1], [2].

III. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD $Cl_n(V,Q)$ Y EL GRUPO ESPÍN

El objetivo de esta sección es introducir brevemente la noción de álgebra de Clifford y de grupo Espín, ambos conceptos yacen en el corazón de la geometría espín. El álgebra de Clifford es un álgebra natural asociada a un espacio vectorial equipado con una forma cuadrática y un subgrupo distinguido es el grupo espín. Se comienza definiendo formalmente el concepto de álgebra de Clifford. Sea V un espacio vectorial sobre los números reales equipado con una forma cuadrática Q la cual vía una identidad de polarización define una forma bilineal simétrica B como sigue

$$B(v,w)=\frac{1}{2}[Q(v+w)-Q(v-w)].$$

donde $v,w\in V$.

El álgebra de Clifford denotada por $Cl(V,Q)$ es el álgebra tensorial asociativa libremente generada $\mathcal{T}(V)=\sum_{r=0}^{\infty}\otimes^r V$ modulo el ideal en $\mathcal{T}(V)$ denotado por $\mathcal{I}_Q(V)$ y generado por todos los elementos de la forma $v\otimes v+Q(v)1$, donde $v\in V$, asi se tiene que $Cl(V,Q)$ esta dada por

$$Cl(V,Q)\equiv\frac{\mathcal{T}(V)}{\mathcal{I}_Q(V)}. \qquad (2)$$

Es posible demostrar que existe un encajé natural

$$V\hookrightarrow Cl(V,Q), \qquad (3)$$

el cuál se tiene la imagen de $V = \otimes^1 V$ bajo la proyección canónica

$$\pi_Q : \mathcal{T}(V) \longrightarrow Cl(V, Q).$$

De tal manera que en la expresión $v \otimes v + Q(v)1,\ 1 \in Cl(V.Q)$ y el producto tensorial es realmente $\pi_Q(v) \otimes \pi_Q(v)$ el cual abusando de la notación podemos escribir simplemente como $vv = v^2$, al cual nos referiremos como el producto de Clifford.
Note que en $Cl(V, Q)$ si se toma $Q = 0$, se reduce al álgebra de Grassmann $\wedge^* V$, es decir existe un isomorfismo de espacios vectoriales tal que $Cl(V, 0) \cong \wedge^* V$.

Es posible generalizar el concepto de $Cl(V, Q)$ al caso en que el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^{r+s}$ esta equipada con una forma cuadrática no degenerada de signatura (r, s) de la forma

$$q(v) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2, \qquad (6)$$

donde $r + s = n$. En este caso se emplea la notación $Cl(V, Q) = Cl(r, s)$, además note que $Cl(n, 0) = Cl(V, Q)$ y $Cl(0, n) = Cl(V, -Q)$ que corresponden al caso euclidiano definido positivo y negativo respectivamente. Como espacio vectorial es posible definir una base lineal de $Cl(r, s)$ en términos de una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Una base de $Cl(r, s)$ esta dad por la siguiente sucesión de elementos

$$1, e_i, e_i e_j\ (1 \le i < j \le n), \ldots,$$
$$e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\ (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n), k = 1,2, \ldots, n, \qquad (7)$$

donde los elementos e_i cumplen con

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ para } i \neq j, \text{ y } {e_i}^2 = -Q(e_i). \qquad (8)$$

de aquí se sigue que la dimensión de $Cl(r, s)$ es 2^n.

Algunos ejemplos de las álgebras de Clifford son $Cl(0,0) = \mathbb{R}$, $Cl(0,1) = \mathbb{C}$, $Cl(0,2) = \mathbb{H}$ (el álgebra de cuaterniones) y $Cl(0,3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Es posible demostrar que las álgebras, $Cl(0, n)$ con $n = 0,1,2$ son los únicos anillos con división entre las álgebras de Clifford [3].

Por otro lado, es importante resaltar que $Cl(V, Q)$ también es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, proporcionando así un ejemplo de un superalgebra. Es decir, el mapeo $v \longrightarrow -v$ sobre V preserva la forma cuadrática $Q(v)$ y se puede levantar a un automorfismo involutivo $\alpha : Cl(V, Q) \longrightarrow Cl(V, Q)$ tal que $\alpha^2 = id$ y con eingenvalores ± 1; por lo tanto $Cl(V, Q)$ se divide en la suma directa de los espacios

$$Cl(V, Q)^0 = \{\, \varphi \epsilon Cl(V, Q) \mid \alpha(\varphi) = \varphi \}$$

y

$$Cl(V, Q)^1 = \{\, \varphi \epsilon Cl(V, Q) \mid \alpha(\varphi) = -\varphi \},$$

conformados de elementos llamados pares e impares respectivamente, de modo que

$$Cl(V, Q) = Cl(V, Q)^0 \oplus Cl(V, Q)^1. \qquad (9)$$

El subespacio $Cl(V, Q)^0$ es una subálgebra de Clifford del álgebra $Cl(V, Q)$, mientras que $Cl(V, Q)^1$ no lo es.
El caso $n = 3 + 1$ es de particular importancia para la física, el álgebra $Cl(3,1)$ es conocida como el álgebra de matrices γ de Dirac y el subálgebra $Cl(3,1)^0$ contiene los generadores del álgebra de Lie del grupo de Lorentz y es isomorfa como álgebra a $Cl(3,0) \cong Cl(1,2)$, sin embargo, en el último isomorfismo su $\mathbb{Z}_2$-graduación es inequivalente (ver [4],[5]).

Representación compleja de las álgebras de Clifford ($\mathbb{C}l_n$)

Al restringirse a espacios vectoriales complejos $\mathbb{C}^n$ con una forma cuadrática compleja Q, de la forma.

$$Q = {z_1}^2 + {z_2}^2 + \cdots + {z_n}^2, \qquad (10)$$

el álgebra de Clifford generada se denota como $\mathbb{C}l_n$. Estos espacios son la complexificación del álgebra $Cl(V, Q)$

$$\mathbb{C}l_n = Cl(V, Q) \otimes \mathbb{C}. \qquad (11)$$

El estudio de las álgebras de Clifford se puede llevar a cabo mediante el álgebra de matrices a partir del concepto de representación de grupo.

Una representación (compleja) del álgebra de Clifford $\mathbb{C}l_n$ es un homomorfismo de álgebras

$$\rho : \mathbb{C}l_n \rightarrow Hom(W, W), \qquad (12)$$

donde W es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $Hom(W, W)$ es su álgebra de transformaciones lineales. El espacio W es llamado un $\mathbb{C}l_n$-módulo sobre $\mathbb{C}$.

Así las álgebras complejas de Clifford son isomorfas al álgebra de matrices con entradas complejas, es decir

$$\mathbb{C}l_{2m} \cong \mathbb{C}(2^m), \qquad (13.a)$$
$$\mathbb{C}l_{2m+1} \cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \qquad (13.b)$$

donde $\mathbb{C}(m)$ denota al álgebra de matrices $m \times m$ con entradas en $\mathbb{C}$, para mayor detalles, se pueden consultar las siguientes referencias [3-5].

GRUPO ESPÍN Y ROTACIONES

Otro elemento de gran importancia es la existencia de un antihomomorfismo $x \rightarrow x^\dagger$ de $Cl(V, Q)$ llamado la conjugación, para el cual se satisface que

$$v^{\dagger} = -v, \forall\, v \in V$$

y

$$(xy)^{\dagger} = y^{\dagger}x^{\dagger}, \forall\, x, y \in Cl(V).$$

Si se complexifica el álgebra de Clifford es posible extender este antihomomorfismo a una anti involución antilineal, es decir

$$(cx)^{\dagger} = \bar{c}x^{\dagger} \text{ para } c \in \mathbb{C},\ x \in Cl(V, Q).$$

La noción de conjugación permite definir el mapeo

$$N: Cl(V) \to Cl(V),$$

tal que $N(x) = xx^{\dagger}$, el cual es llamado la norma. Para que el producto de vectores en V, $N(x)$ es un escalar y se verificar

$$x = v_1 \dots v_k \quad \rightarrow \quad xx^{\dagger} = (-1)^k Q(v_1) \dots Q(v_k). \quad (14)$$

Ahora se considera el grupo multiplicativo de unidades del álgebra $Cl(V, Q)$, definido por el conjunto de elementos invertibles

$$Cl(V, Q)^{*} =: \{\text{existe } v^{-1} \text{ con } v^{-1}v = vv^{-1} = 1\}.$$

Este grupo contiene los elementos de $v \in V$ tales que $Q(v) \neq 0$. Los elementos inversos de $v \in V$ son de la forma

$$v^{-1} = \frac{-v}{Q(v)}$$

Parece natural emplear la acción adjunta de $Cl(V, Q)^{*}$ sobre V

$$Ad_v(x) = vxv^{-1}, \quad (15)$$

si la acción adjunta se limita al espacio vectorial V, cumple con

$$Ad_v(x) = -w + 2\,\frac{B(v, w)}{q(v)}v, \quad (16)$$

con $v, w \in V$, la cual no es una reflexion (ver Fig. 2) [4][5], para enmendar este hecho se emplea el uso de una representación adjunta torcida

$$\rho_v(w) = \widetilde{Ad}_v(w)|_V = \alpha(v)wv^{-1} \quad (17)$$

y se define el grupo de Clifford $\Gamma_{r,s}$ a través de su acción sobre $V = \mathbb{R}^{r+s}$, como

$$v \in \Gamma_{r,s} \text{ si y solo si } \rho_x: v \mapsto \alpha(x)vx^{-1} \in V, \forall\, v \in V$$

este mapeo preserva la forma $-Q(v) = v^2$. Uno de los resultados más importantes del mapeo es que cada elemento,

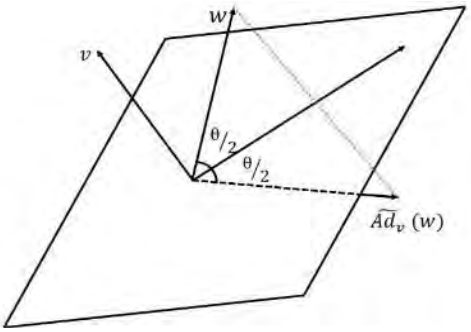


Fig. 2. La acción de la reflexión es el mismo por una rotación alrededor de un eje sobre el hiperplano con un ángulo de θ.

incluyendo reflexiones de $O(r, s)$ es la imagen bajo ρ de algún elemento $x \in \Gamma_{r,s}$, y más aún si x satisface $\alpha(x)v = vx$ para todo $v \in V$, entonces x es un número real veces la unidad en el álgebra $Cl(V, Q)$. Se define el grupo $Pin(r, s)$ como el subgrupo de $\Gamma_{r,s}$ de elementos x para los cuales $N(x) = \pm 1$. La restricción del mapeo ρ a $Pin(r, s)$ da lugar a un homomorfismo dos a uno de $Pin(r, s)$ sobre el grupo ortogonal $O(r, s)$. El grupo espín $Spin(r, s)$ se define como la intersección de $Pin(r, s)$ con el subálgebra par $Cl(V, Q)^0$, es decir

$$Spin(r, s) = Pin(r, s) \cap Cl(V, Q)^0. \quad (18)$$

Es posible dar otra definición de grupo $Spin$ en términos de espacios cubrientes. Se define al grupo $Spin(n)$ como el grupo cubriente universal del grupo $SO(n)$.

Una representación ρ es irreducible si no existen subespacios de W triviales tales que sean invariante bajo ρ, es decir

$$\rho(g): W \to W, \qquad \forall g \in W$$

Sea S una representación irreducible de $\mathbb{C}l_n$. Una representación espín del grupo $Spin(n)$ es un homomorfismo

$$\Delta_n: Spin(n) \to GL_{\mathbb{C}}(S),$$

y se obtiene al restringir una representación compleja irreducible de $\rho: \mathbb{C}l_n \to Hom(W, W)$ al conjunto $Spin(n) \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n$. Cuando n es número natural par, se tiene que el espacio S tiene una descomposición en dos espacios irreducibles, S^{+} y S^{-}, el espacio S es nombrado espacio espín y los elementos de S^{+} y S^{-} son conocidos como espinores derechos e izquierdos de Weyl [4-6].

IV. Ecuación de Dirac

Uno de los primeros desafíos que se dio con la introducción de la Mecánica Cuántica (M.C.) era la incompatibilidad que tenía con la Relatividad Espacial (R.E.). Se puede decir que la R.E. explica que el espacio y el tiempo son dos conceptos que se relacionan en el llamado espacio-tiempo y no hay necesidad de distinguirlos. La idea fundamental era que al

resolver esta incompatibilidad de R.E. y M.C. se siguiera con la Relatividad General y dar una descripción para todos los fenómenos de la naturaleza. Asi el concepto de la estructura espín surgió de dos formas diferentes para intentar describir el comportamiento de los sistemas físicos a pequeña escala. Por una parte la M.C., basada en la ecuación de Schrödinger

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi, \tag{19}$$

y por otro lado la descripción relativista, que consiste en una versión de la ecuación de onda no homogénea

$$\left(\square + \frac{\hbar^2 m^2}{c^2}\right)\psi = 0, \tag{20}$$

esta ecuación es conocida como la ecuación de Klein-Gordon.

A finales de la segunda década del siglo XX el físico inglés Paul Adrien Maurice Dirac obtuvo una forma de unificar las propiedades relativistas de la ecuación de onda con el carácter cuántico de la ecuación de Schrödinger. Dirac observó que la principal característica de la ecuación de Schrödinger era ser de primer orden en tiempo, por lo que teniendo en cuenta una cierta equivalencia entre las coordenadas espaciales y las temporales proporcionada por la teoría de la R.E, Dirac definió una ecuación diferencial de primer orden en todas las variables similar a la de Schrödinger

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = D\psi, \tag{21}$$

donde D es un operador diferencial, llamado el operador de Dirac y es escrita como

$$D\psi = \hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta mc^2\psi \tag{22}$$

Dirac propuso esta forma de la ecuación de Schrödinger que es lineal en las coordenadas espaciales y la temporal, con ayuda de unos factores α_i, β, este operador al aplicarlo dos veces debe regresar de nuevo la ecuación (20)

$$\left(\square + \frac{\hbar^2 m^2}{c^2}\right)\psi = \left(D\psi + i\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2, \tag{23}$$

por lo que se tienen que restringir los posibles valores para los coeficientes α_i y β, obteniendo las siguientes relaciones

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = -2\delta_{ij} \tag{24.a}$$
$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{24.b}$$

Las condiciones dadas en (24) no pueden ser cumplidas con los reales ni los complejos, Dirac tuvo que introducir matrices para satisfacerlas, además que definió las matrices γ^μ, como

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times2} \end{pmatrix};$$
$$\gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \tag{25}$$

estas matrices también cumplen la relación (24.a), además que se sirven para vislumbrar la covarianza exigida por la R.E., asi la ecuación (21) se reescribe como

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi = 0, \tag{26}$$

Un hecho importante de las ecuaciones (1) y (26) es que están relacionadas, la ecuación de Schrödinger-Pauli es caso no relativista de la ecuación de Dirac para un electrón libre. En este caso la modificación introducida en la ecuación (1), la cual es introducida a mano, surge de manera natural por la introducción de los coeficientes γ^μ en (25) para un electrón inmerso en un campo electromagnético.

La estructura del espacio-tiempo necesita de un espacio secundario complejo S, en cada punto del espacio-tiempo que admita a los espinores ψ como una solución de la ecuación de Dirac, dado que las matrices γ^μ actúan en ψ, entonces pertenecen a $Cl(1,3)$, el cual son las transformaciones lineales de este espacio, además que las trasformaciones de Lorentz son generados por el grupo Spin [7-10].

V. Estructura Global del operador de Dirac

En el estudio de la Física se caracteriza por dos tipos de análisis, el local y el global. Los aspectos locales de un sistema, son los que tiene que ver con las perturbaciones en los problemas físicos. Ahora el análisis global se requiere que el sistema tenga cierta estructura para poder definir globalmente cantidades o propiedades físicas, por ejemplo definir globalmente fermiones en el espacio-tiempo requiere conceptos, tales como los haces fibrados y clases características de Stiefel-Whitney.

Un haz fibrado diferenciable (E, π, M, F, G) consiste de los siguientes elementos:

- Una variedad E llamada $Espacio\ Total$.
- Una variedad M llamada $Espacio\ Base$.
- Una variedad F llamada $Fibra$.
- Una función suprayectiva $\pi: E \to M$, llamada $proyección$ tal que $\pi^{-1}(p) = F_p \approx F$ es llamada la fibra en p.
- Un Grupo de Lie G llamado $Grupo\ de\ Estructura$, el cual actúa en F por la izquierda.
- Un difeomorfismos llamada $Trivilización\ Local$ dada por

$$\phi: U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$$

tal que $\pi \circ \phi_i(p,f) = p$.

Un haz vectorial orientado es un haz fibrado en el cual la fibra es un espacio vectorial dotado con una base ortogonal orientada.

Un haz fibrado principal $P_G(E)$ es un haz fibrado en cual su fibra F es idéntica a su grupo estructura G, donde se puede definir una acción por la derecha del grupo estructura G en $\pi^{-1}(U_i)$ como:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(ua) &= (p, g_i a) \\ (ua) &= \phi(p, g_i a), \end{aligned} \tag{27}$$

y el cual conmuta con la acción por la izquierda.

Por otro lado, se define una acción de $g \in G$ en $P \times F$ por

$$(u,f) \to (ug, g^{-1}f)$$

donde $u \in P$ y $f \in F$, entonces se define el haz fibrado asociado (E, π, M, G, F, P) como la clase de equivalencia $P \times F/G$ en el cual los puntos (u,f) y $(ug, g^{-1}f)$ son identificados.
El haz vectorial asociado $P \times_\rho V$ es definido por la identificación de los puntos (u,f) y $(ug, \rho(g)^{-1}f)$ de $P \times V$, donde $u \in P$, $g \in V$ y $v \in V$ [11].

En teoría cuántica de campos, cualquier tipo de partícula es tratada como un campo. Los dos tipos básicos de partículas son los bosones y los fermiones, los primeros pueden ser descritos mediante campos vectoriales o tensoriales mientras que los segundos sólo pueden ser descritos mediante campos espinoriales. Los espacios o variedades necesitan un tipo de estructura global, la estructura espín, para poder definir un campo espinorial sobre ellos, para ello se debe tener en cuenta el homomorfismo entre los grupos SO y $Spin$, lo que implica una relación para sus haces fibrados principales $P_{SO}(E)$ y $P_{Spin}(E)$, donde $P_{SO}(E)$ es el haz de marcos orientados, asi la fibra F_x sobre un punto x es el conjunto de todas las bases ordenadas, para el espacio vectorial E.

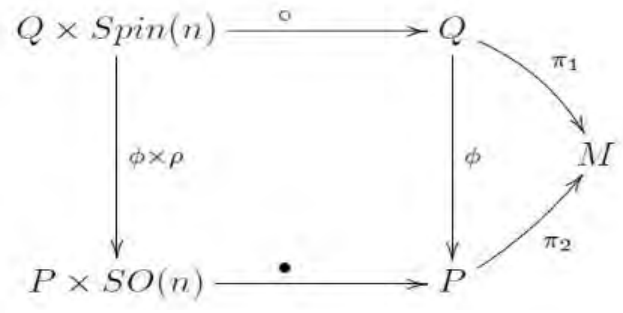


Fig. 3.- Las flechas horizontales son las acciones del Grupo *Espin* y el grupo SO, haciendo que le diagrama conmute.

Sean E un haz vectorial orientado n-dimensional Riemanniano sobre una variedad M, sea $P_{SO}(E)$ el haz de marcos orientados y $\rho: Spin(n) \to SO(n)$ el recubrimiento universal de $SO(n)$.
Una *estructura espín* en E es un fibrado principal con un grupo de estructura $Spin(n)$, junto con un recubrimiento universal de 2 a 1

$$\phi: P_{Spin}(E) \to P_{SO}(E), \tag{28}$$

tal que $\phi(pg) = \phi(p)\rho(g)$ para toda $p \in P_{Spin}(E)$ y toda $g \in Spin(n)$ (Fig.3).

Una variedad espín es una variedad riemanniano orientable para el cual su haz tangente TM admite una estructura Espín.

Sea E un haz vectorial Riemanniano orientado con una estructura espín $\phi: P_{Spin}(E) \to P_{SO}(E)$. Un haz vectorial Espín real (complejo) de E es un haz de la forma

$$S(E) = P_{Spin}(E) \times_\rho M, \tag{29}$$

donde M es un módulo izquierdo (complejo) de $Cl_n(V,Q)$ ($\mathbb{C}l_n$) y donde $\rho: Spin(n) \to SO(n)$ es la representación dada por la multiplicación por los elementos de $Spin(n)$.
Cuando la dimensión n es un número par se tiene una separación en dos subfibrados $(S^+(E), S^-(E))$, a consecuencia de la representación $Spin(n)$ y cumple que

$$S(E) = S^+(E) \oplus S^-(E). \tag{30}$$

Este haz fibrado es llamado haz espín y las secciones de este haz son los campos espinoriales que representan a los fermiones, entonces la ecuación de Dirac debe actuar en las secciones $S(E)$, así puede definir el Operador de Dirac de la siguiente forma [4][12-13]. Sea $\mathbb{R}^{2k}$ el espacio euclidiano, entonces su algebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^{2k}, Q)$ actúa sobre el espacio espín, Sean E_i las trasformaciones lineales correspondientes a e_i, entonces se define el operador de Dirac como un operador diferencial de primer orden en el espacio S por

$$Ds = E_i \frac{\partial}{\partial x_i} s$$

donde $s \in S$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ actúa en $C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S)$, el cual cumple con

$$\begin{aligned} D^2 s = \sum_i E_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j E_j \frac{\partial}{\partial x_j} s = \\ \sum_{i\,j} E_i E_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} s = \sum_i -I \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} s = -I\, \Delta s, \end{aligned} \tag{31}$$

donde $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2k}, S)$, son las funciones suaves definidas en el haz espín.

Una consecuencia importante es que el operador de Dirac intercambia entre los espacios $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2k}, S^{+})$ y $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2k}, S^{-})$ [13].

En particular esta estructura expuesta no se puede extender a todo espacio o variedad, existe una obstrucción topológica, una variedad aceptada una *estructura espín* si y solo si la primera y segunda clase característica de Stiefel-Whitney son nulas [4].

Las clases características son una herramienta que dan una medida de la no trivialidad o torcedura del haz fibrado, aunque en el espacio euclidiano o pseudo-Euclidiano (minkowsky) es posible determinar dichas clases características para dichos espacios. La ecuación de Dirac utiliza toda esta herramienta matemática en la descripción de un electrón relativista [4].

VI. Conclusiones

El concepto de espín, más que solo una característica interna de las partículas subatómicas, es una manifestación de la naturaleza relativista de la materia. El estudio de esta propiedad intrínseca condujo a P. Dirac a descubrir la ecuación de onda que modela a un electrón relativista y su estudio reúne varias ramas de las matemáticas (geometría diferencial, geometría espinorial, topología diferencial, análisis matemático, teoría de representaciones entre otras) y de la física (mecánica cuántica relativista y teoría cuántica de campos). El concepto de espín es tan importante y profundo que se equipara a los conceptos de masa y carga eléctrica en la naturaleza.

En este trabajo se presentó de manera breve la definición de un álgebra de Clifford y más adelante su inclusión natural en la deducción de la ecuación de Dirac. Por último, se mencionan los aspectos globales de la teoría de Dirac en términos del lenguaje de haces fibrados. Estos conceptos pueden ser extendidos a teorías cuánticas de campo que involucran fermiones de espín un medio, tales como la electrodinámica cuántica y la cromodinámica cuántica. Más en general, en teorías que contienen simultáneamente bosones y fermiones las cuales son conocidas como teorías supersimétricas. En estas últimas es importante conocer el llamado índice del operador de Dirac, el cual, relaciona las teorías supersimetricas con el teorema de Atiyah-Singer que es uno de los resultados más sobresalientes de las matemáticas del siglo XX.

Referencias

[1] Quantum Mechanics Concepts and Applications, Nouredine Zettili, John Wiley & Sons (2001).
[2] Introduction to Quantum Mechanics, David J. Griffiths, Prentice Hall (1995).
[3] Matrix Groups, Morton L. Curtis, Springer (1984).
[4] Spin Geometry, Lawson and Michelsohn, Princeton University Press (1989).
[5] The Theory of Spinors, Elie Cartan, Dover Publications (1966).
[6] I. Todorov, Clifford Algebras and Spinors , Bulg. J. Phys., vol. **38**, pag. 3–28
[7] The Dirac Equation, Bernd Thaller, Springer-Verlag (1992).
[8] Penrose R. (1997), The mathematics of the electron's spin, Eur. J. Phys., vol. 18, pag. 164–168.
[9] Dirac P.A.M. 1928 The quantum theory of the electron, Part I. Proc. R. Soc. vol. **A117** pag. 610–24.
[10] Dirac P.A.M. 1928 The quantum theory of the electron, Part II. Proc. R. Soc. vol. **A118** pag. 350-361.
[11] Geometry, Topology and Physics, Mikio Nakahara, Institute of Physics Publishing (2003).
[12] Riemannian Geometry and Geometry Analysis, Jurgen Jost, Springer (2008).
[13] Dirac Operators and Spectral Geometry, Giampiero Esposito, CUP (1998).

ISSN: 2594-1011

Correcciones radiativas a la polarización del muón en decaimientos $K^{\pm}_{\mu_3}$ y la violación de la simetría temporal T

M. Sánchez[1], M. Neri[1], A. Martínez[1], J.J. Torres[2] y D.M. Tun[1]
[1]Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional.
Apartado postal 75-102, C.P. 07738, Ciudad de México, México.
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55038 Fax (55) 5729-55015 E-mail: mayrajsg@esfm.ipn.mx

Resumen — **En este trabajo presentamos fórmulas para la obtención de la contribución de la polarización transversal $\overrightarrow{P_T}$ a la polarización total del muón $\vec{P}$, en los decaimientos semileptónicos de kaones cargados $K^{\pm}_{\mu_3}$ con el muón saliente polarizado. Incluimos las correcciones radiativas de este proceso a nivel de gráfica de Dalitz, pues éstas pueden cambiar la magnitud de la polarización total $\vec{P}$ o de la polarización $\overrightarrow{P_T}$, cuya existencia está ligada íntimamente a la violación de la simetría temporal.**

Palabras Clave – **correcciones radiativas, polarización, decaimiento semileptónico.**

Abstract — **In this paper we present formulas in order to obtain the contribution of the transverse polarization $\overrightarrow{P_T}$ to the total polarization of the muon $\vec{P}$, in semileptonic decays of charged kaons $K^{\pm}_{\mu_3}$ with the polarizated outgoing muon. We include the radiative corrections to this process at Dalitz plot level, since these radiative corrections can change the magnitude of the total polarization $\vec{P}$ or of the polarization $\overrightarrow{P_T}$, whose existence is intimately related to the violation of the temporal simetry.**

Keywords — **polarization, radiative corrections, semileptonic decays.**

I. Introducción

El estudio de los decaimientos semileptónicos de kaones cargados $K^{\pm}_{l_3}$ es importante pues son los procesos de interacción débil más simples que nos dan información acerca de la fuerza débil así como de la interacción fuerte que ocurre a bajas energías en el vértice de interacción.

Es sabido que los procesos de interacción débil violan la simetría de paridad P, la simetría de conjugación de carga C y la simetría conjunta CP [1]. De acuerdo al teorema TCP si CP se viola es necesario que la simetría de inversión temporal T también sea violada, de tal manera que las interacciones débiles sean invariantes ante TCP.

Las mediciones directas de violación de T son muy difíciles de obtener, sin embargo, del estudio de los decaimientos $K^{\pm}_{\mu_3}$ (donde μ representa un muón en el estado final) es posible determinar la violación de T [2], a través de la parte imaginaria del parámetro $\xi(q^2) = {f_-(q^2)}/{f_+(q^2)}$ (donde $f_+(q^2)$ son los factores de forma que visten el vértice de interacción débil) que surge como factor de la componente transversal $\overrightarrow{P_T}$ de la polarización del muón.

Entonces, de la existencia de $Im\xi$ ó de la componente transversal $\overrightarrow{P_T}$ de la polarización $\vec{P}$ del muón, que sea perpendicular al plano del decaimiento, $K^{\pm} \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$ (en el CM del kaón) se puede probar directamente la violación de la simetría temporal T en dicho proceso ($K^{\pm}_{\mu_3}$).

Esta aseveración que ocurre a nivel árbol, puede ser alterada por las correcciones radiativas correspondientes. De hecho, se sabe que el muón está 100% polarizado [3] en cada punto de la gráfica de Dalitz a lo largo de una dirección que depende del parámetro ξ. Las correcciones radiativas alteran este resultado disminuyendo y alterando la orientación de $\vec{P}$ y posiblemente también la de $\overrightarrow{P_T}$ que se tendría a nivel árbol, o incluso haciéndola surgir como efecto de las propias CR.

Se vuelve entonces necesario calcular estas CR a $\vec{P}$ y analizar su efecto globalmente y en particular en la componente perpendicular $\overrightarrow{P_T}$ asociada a la violación de T (CP).

En este trabajo supondremos que los factores de forma son complejos en general y obtendremos fórmulas para las CR que permitan la evaluación del imaginario de ξ en los decaimientos $K^{\pm}_{\mu_3}$, con μ polarizado, a través de un método de Monte-Carlo. La evaluación será presentada en un trabajo posterior.

El trabajo se desarrollará como sigue. En la sección II presentaremos la gráfica de Dalitz a nivel árbol del proceso $K^{\pm}_{\mu_3}$, donde la polarización será definida. También mencionaremos cuales son las convenciones y notación empleados en este trabajo.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20181766.

La sección III será dedica a las CR virtuales que se tomarán de [4] y cuyos resultados hemos recalculado encontrado concordancia entre ellos.

La sección IV se ocupará de las CR bremsstrahlung cuyo formato será el mismo que se presenta en [2], sin embargo, aquí solo haremos enfásis en las CR de la polarización transversal.

En la sección V daremos nuestro resultado final presentando la fórmula final que muestra la conexión del $Im\xi$ con la polarización perpendicular $\overrightarrow{P_T}$.

II. La polarización del muon a orden cero en $K^+_{\mu 3}$

Los decaimientos semileptónicos de kaones cargados a orden cero están dados por la ecuación siguiente[1]

$$K^+(p_1) \to \pi^0(p_2) + \mu^+(l) + \nu_\mu(p_\nu), \tag{1}$$

donde las cantidades entre paréntesis representan los cuadrimomentos de las partículas.

La amplitud de transición de la Ec. (1), está dada de acuerdo a la teoría V-A por

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us} W_\alpha(p_1, p_2) L^\alpha, \tag{2}$$

donde G_F es la constante de Fermi, V_{us} el elemento de matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa involucrado en el cambio de sabor $s \to u$ en la corriente hadrónica, denotada por $W_\alpha(p_1, p_2)$. Y L^α, es la corriente leptónica.

La corriente hadrónica puede escribirse en términos de los cuadrivectores p_1 y p_2 como

$$\begin{aligned} W_\alpha(p_1, p_2) &= f_+(q^2)p_\alpha + f_-(q^2)q_\alpha \\ &= f_+[2p_{1\alpha} + (\xi - 1)q_\alpha] \equiv f_+ \Gamma_\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $f_+(q^2)$ son los factores de forma, con $q = p_1 - p_2$, la cuadritransferencia de momento. Mientras que la corriente leptónica tiene la forma

$$L_\alpha = \bar{u}_\nu O^\alpha v_\mu, \tag{4}$$

[1] Aquí presentaremos el cálculo para el caso del K^+, pero el caso del K^- es totalmente análogo, realizando el cambio del μ^+ por μ^- y su correspondiente neutrino por antineutrino, lo que se refleja en la Ec. (4) haciendo $L_\alpha = \bar{v}_\mu O^\alpha v_\nu$.

donde u_ν y v_μ son las funciones de onda del neutrino y el antimuón, respectivamente[2] y $O^\alpha = \gamma^\alpha(1 - \gamma^5)$.

De la Ec. (2) es posible obtener el cuadrado de la norma al cuadrado de la amplitud de transición, la cual será útil en el cálculo de la gráfica de Dalitz, así que se tiene

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}_0|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 |f_+|^2 \sum_s (\Gamma_\alpha L^\alpha)\overline{(\Gamma_\beta L^\beta)} \\ &= \frac{G_F^2}{2^4 m_\nu m} |V_{us}|^2 |f_+|^2 \Gamma_\alpha \bar{\Gamma}_\beta T' \\ &= \frac{2M_1 G_F^2}{m_\nu m} |V_{us}|^2 |f_+|^2 \\ &\quad \times \{[2M_1 E - m^2 Re(1 - \xi)] E_\nu^0 \\ &\quad - \left[M_1^2 - \frac{m^2}{4}|1 - \xi|^2\right](E_{2,max} - E_2)\} \end{aligned} \tag{5}$$

Para considerar la polarización del muón, en el decaimiento de la Ec. (1) es necesario realizar el cambio

$$v_\mu \to \sum(s) v_\mu, \tag{6}$$

donde $\sum(s)$ es el proyector de espín [5] dado por

$$\sum(s) = \frac{1 - \gamma_5 \gamma_\mu s^\mu}{2}. \tag{7}$$

Debido a la propiedad de idempotencia del proyector de espín la inclusión de la Ec. (7) en la Ec (2) permite escribir la norma al cuadrado de la amplitud de transición a orden cero, con polarización del muón, como una suma de dos contribuciones, una independiente de espín y otra dependiente de espín[3], esto es,

$$\sum_s |\mathcal{M}_0'|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \left(|\mathcal{M}_0|^2 + \left|\mathcal{M}_0^{(s)}\right|^2 \right), \tag{8}$$

con $\sum_s |\mathcal{M}_0|^2$ dado por la Ec. (5) y $\sum_s \left|\mathcal{M}_0^{(s)}\right|^2$

$$\begin{aligned} \sum_s \left|\mathcal{M}_0^{(s)}\right|^2 \propto |f_+|^2 \{ & [2E_\nu^0 \\ & - Re(1 - \xi)(E_{2,max} - E_2)] s \cdot p_1 \\ & + [M_1 - Re(1 - \xi) E \\ & + |1 - \xi|^2 \frac{m^2}{4M_1}] s \cdot p_\nu \\ & + Im\xi (\overrightarrow{p_2} \times \vec{l}) \cdot \vec{s} \}. \end{aligned} \tag{9}$$

Los productos invariantes $s \cdot p_1$, $s \cdot p_\nu$, así como el triple producto $(\overrightarrow{p_2} \times \vec{l}) \cdot \vec{s}$ de la Ec. (9) pueden expresarse mediante la relación siguiente [6]

[2] Las convenciones usadas aquí son las mismas que en [7].

[3] Este comportamiento se presentará también en las CR tanto virtuales como bremsstrahlung.

$$s \cdot a = \widehat{s_R} \cdot \left[\frac{\vec{l}}{m} \left(a_0 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{a}}{E+m} \right) - \vec{a} \right], \tag{10}$$

en términos de la base de polarización del muón, la cual se define como

$$\begin{aligned} \widehat{\epsilon_l} &= \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \hat{l} \quad \textit{dirección longitudinal}, \\ \widehat{\epsilon_T} &= \frac{\overrightarrow{p_2} \times \vec{l}}{|\overrightarrow{p_2} \times \vec{l}|} \quad \textit{dirección transversal}, \\ \widehat{\epsilon_N} &= \widehat{\epsilon_l} \times \widehat{\epsilon_T} \quad \textit{dirección normal}, \end{aligned} \tag{11}$$

por lo que la Ec. (9) adquiere la forma

$$\sum_s \left| \mathcal{M}_0^{(s)} \right|^2 \propto |f_+|^2 \widehat{s_R} \cdot \{ A_l \widehat{\epsilon_l} + A_T \widehat{\epsilon_T} + A_N \widehat{\epsilon_N} \}, \tag{12}$$

donde las componentes A_l, A_T y A_N son funciones que dependen de las energías el pión E_2 y el leptón cargado E además del parámetro ξ. Explícitamente

$$A_T = m|\overrightarrow{p_2}| |\vec{l}| sen\psi \; Im\xi, \tag{13}$$

que es el parámetro que nos interesa conocer en este trabajo.

La polarización $\vec{P}$ se define como

$$\vec{P} = \overrightarrow{a_0^{(s)}} \Big/ a_0', \tag{14}$$

con $\overrightarrow{a_0^{(s)}}$ y a_0' dadas en [4]. De acuerdo a (11),

$$\vec{P} = P_l \widehat{\epsilon_l} + P_T \widehat{\epsilon_T} + P_N \widehat{\epsilon_N}. \tag{15}$$

Es importante señalar que cuando no se considera la polarización del muón, el decaimiento de la Ec. (1) se da en un plano, definido por los los trimomentos del leptón cargado $(\vec{l})$ y el pión $(\overrightarrow{p_2})$, porque en el CM de K^+, $\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$. Con la inclusión de la polarización del muón en el decaimiento se genera una contribución de $\vec{P}$ transversal al plano, definida por el segundo renglón de la Ec. (11). Este comportamiento está relacionado con la violación de T, es por ello que la polarización transversal, así como el $Im\xi$ son medidas de dicha violación como se mencionó anteriormente.

Insertando el resultado de la Ec. (12) en la razón diferencial de decaimiento y realizando la integración sobre las variables del neutrino así como sobre las variables angulares de los leptones se encuentra que la contribución dependiente de espín a orden cero de la gráfica de Dalitz para el decaimiento de la Ec. (1) es

$$d\Gamma_0^{(s)} = d\Omega \sum_s \left| \mathcal{M}_0^{(s)} \right|^2, \tag{16}$$

con

$$d\Omega = C_K^2 G_F^2 \frac{|V_{us}|^2}{32\pi^3} M_1^3 \, dE dE_2. \tag{17}$$

Explícitamente, de la Ec. (16), se tiene que la componente transversal de la gráfica de Dalitz a orden cero es

$$d\Gamma_{0,T}^{(s)} = d\Omega \frac{|f_+|^2}{M_1^2} \left[|\overrightarrow{p_2}| |\vec{l}| sen\psi \; Im\xi \right] \widehat{\epsilon_T} \cdot \widehat{s_R}. \tag{18}$$

III. CR VIRTUALES A LA POLARIZACIÓN DEL MUÓN EN $K_{\mu_3}^{\pm}$

Los resultados para las CR virtuales (CRV) sin polarización del muón para el caso $K_{\mu_3}^+$, ya han sido reportadas en [7]. Como se menciona ahí, las CRV pueden ser separadas en dos partes. La primera, independiente de modelo, es finita en el ultravioleta pero contiene una divergencia infrarroja, la cual se anula con su contraparte en las CR bremsstrahlung, las cuales estudiaremos en la siguiente sección. La segunda es dependiente de modelo, pero ésta puede ser absorbida en los factores de forma, dando origen a nuevos factores de forma

A continuación, reproducimos la amplitud con CRV de transición para el proceso de la Ec. (1)

$$\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_0'' \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \Phi_1(E) \right] + \mathcal{M}_{p_1} \frac{\alpha}{2\pi} \Phi_2(E), \tag{19}$$

donde $\mathcal{M}_0''$ es análogo en forma a $\mathcal{M}_0$, pero con los nuevos factores de forma. $\mathcal{M}_{p_1}$, $\Phi_1(E)$ y $\Phi_2(E)$ son demasiado extensas para incluirse aquí, pero pueden consultarse en [7].

Empleando la Ec. (19) se encuentra que la gráfica de Dalitz para el proceso de la Ec. (1) con CRV es

$$d\Gamma_V = d\Omega \left[A_0' \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \Phi_1 \right) + A_V' \left(\frac{\alpha}{\pi} \Phi_2 \right) \right], \tag{20}$$

donde

$$A_V' = A_1^V |f_+'|^2 + A_2^V Re[f_+' f_-'^*] + A_3^V |f_-'|^2. \tag{21}$$

En analogía con la sección anterior es necesario incluir el proyector de espín en la amplitud de transición, lo que lleva a que el cuadrado de la amplitud de transición con CRV se exprese como

$$\sum_s |\mathcal{M}_V'|^2 = \sum_s |\mathcal{M}_0'|^2 \left(1+\frac{\alpha}{\pi}\Phi\right)^2 + 2Re\sum_s \mathcal{M}_0' \overline{\mathcal{M}_{p1}'} \Phi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right), \tag{22}$$

con $\sum_s |\mathcal{M}_0'|^2$ dado por la Ec. **(5)** y $\sum_s \mathcal{M}_0' \overline{\mathcal{M}_{p1}'}$ dado por

$$\sum_s \mathcal{M}_0' \overline{\mathcal{M}_{p1}'} = \sum_s \mathcal{M}_0 \overline{\mathcal{M}_{p1}} + \sum_s \mathcal{M}_0^{(s)} \overline{\mathcal{M}_{p1}^{(s)}}. \tag{23}$$

El primer término de la ecuación anterior ha sido reportado en [7], mientras que para el segundo se tiene

$$\sum_s \mathcal{M}_0^{(s)} \overline{\mathcal{M}_{p1}^{(s)}} = -\frac{E^2}{m^2}\left(a_0^{(s)} - \beta a_0 \widehat{\epsilon_l}\cdot\widehat{s_R}\right) \tag{24}$$

De la ecuación anterior es claro que la segunda contribución no tendrá componente transversal, sin embargo

$$\vec{a}_0^{(s)} = \frac{|f_+|^2}{M_1^2}\left\{a_{0,l}^{(s)}\widehat{\epsilon_l} + a_{0,T}^{(s)}\widehat{\epsilon_T} + a_{0,N}^{(s)}\widehat{\epsilon_N}\right\} \tag{25}$$

con $a_{0,l}^{(s)}$ y $a_{0,N}^{(s)}$ funciones de E y E_2 así como del $Re\xi$, mientras que

$$a_{0,T}^{(s)} = m|\vec{l}||\overrightarrow{p_2}| Im\xi sen\psi_0. \tag{26}$$

De los resultados anteriores se encuentra que la contribución transversal de la gráfica de Dalitz con CRV es

$$d\Gamma_{V,T}^{(s)} = d\Omega\left[\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\Phi_1\right) + \frac{\alpha}{\pi}\Phi_2\left(\frac{E^2}{m^2}\right)\right] a_{0,T}^{(s)} \times (\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R}). \tag{27}$$

donde Φ_1 contiene la divergencia infrarroja.

IV. CR BREMSSTRAHLUNG A LA POLARIZACIÓN DEL MUÓN EN $K_{\mu 3}^{\pm}$

Las CR bremsstrahlung (CRB) provienen de la emisión de un fotón real, así que la Ec. (1) adquiere la forma

$$K^+(p_1) \to \pi^0(p_2) + \mu^+(l) + \nu_\mu(p_\nu) + \gamma(k), \tag{28}$$

donde γ representa un fotón con cuadrimomento $k = (\omega, \vec{k})$.

Gracias al teorema de Low [8] la amplitud bremsstrahlung, sin polarización del muón, puede escribirse como en [7]

$$\mathcal{M}_B' = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{M}_{Bi}', \tag{29}$$

con

$$\mathcal{M}_{B1}' = -\frac{eG}{\sqrt{2}} W_\lambda \left[\bar{u}_\nu O_\lambda \left(\frac{1-\gamma_5\gamma_\mu s^\mu}{2}\right) v_l\right]\left[\frac{l\cdot\epsilon}{l\cdot k} - \frac{p_1\cdot\epsilon}{p_1\cdot k}\right], \tag{30}$$

$$\mathcal{M}_{B2}' = -\frac{eG}{\sqrt{2}} W_\lambda \bar{u}_\nu O_\lambda \frac{\gamma_\alpha k^\alpha \gamma_\beta \epsilon^\beta}{2l\cdot k}\left(\frac{1-\gamma_5\gamma_\mu s^\mu}{2}\right) v_l, \tag{31}$$

$$\mathcal{M}_{B3}' = -\frac{eG}{\sqrt{2}}(f_+ + f_-) \left[\frac{p_1\cdot\epsilon}{p_1\cdot k}k_\lambda - \epsilon_\lambda\right]\bar{u}_\nu O_\lambda \left(\frac{1-\gamma_5\gamma_\mu s^\mu}{2}\right) v_l, \tag{32}$$

la forma explícita de $\mathcal{M}_{B4}'$ no se incluye aquí ya que contribuye en un orden mayor al que estamos trabajando aquí al obtener la norma al cuadrado de la amplitud de transición.

Al sumar sobre espínes y polarizaciones se encuentra que la norma al cuadrado de la amplitud de transición para las CRB se puede separar en diferentes términos y por lo tanto la razón diferencial de decaimiento bremsstrahlung hereda dicha propiedad y puede escribirse de la siguiente manera

$$d\Gamma_B' = \sum_{i=1}^{5} d\Gamma_{Bi}', \tag{33}$$

donde $d\Gamma_{B1}' \sim \sum|\mathcal{M}_{B1}'|^2$, $d\Gamma_{B2}' \sim \sum\left[|\mathcal{M}_{B2}'|^2 + 2Re\left[\mathcal{M}_{B1}', \mathcal{M}_{B2}'^{\dagger}\right]\right]$, $d\Gamma_{B3}' \sim \sum 2Re\left[\mathcal{M}_{B1}', \mathcal{M}_{B3}'^{\dagger}\right]$, $d\Gamma_{B4}' \sim \sum 2Re\left[\mathcal{M}_{B2}', \mathcal{M}_{B3}'^{\dagger}\right]$ y $d\Gamma_{B5}' \sim \sum|\mathcal{M}_{B3}'|^2$.

Como en el caso del orden cero y de las CRV, debido a las propiedades del proyector de espín, cada una de estas $d\Gamma_{Bi}'$ puede dividirse en una parte independiente de espín y otra dependiente de espín en la forma

$$d\Gamma_{Bi}' = d\Gamma_{Bi} + d\Gamma_{Bi}^{(s)}. \tag{34}$$

La contribución $d\Gamma_{B1}'$ requiere especial cuidado, ya que como consecuencia de la forma que tiene la Ec. (30), esta contribución contiene una divergencia infrarroja. Afortunadamente, como su análogo sin polarización del muón $d\Gamma_{B1}^{(s)}$ puede dividirse en dos partes, una divergente

infrarroja, la cual anula la divergencia que surge en el caso de las CRV, y una parte finita o no divergente:

$$d\Gamma_{B_1}^{(s)} = d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ir} + d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ND}. \tag{35}$$

La contribución que contiene la divergencia infrarroja de la Ec. (35) adquiere la forma

$$d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ir} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega I_0 \overrightarrow{a_0^{(s)}} \cdot \widehat{s_R}. \tag{36}$$

donde la I_0, que contienen la divergencia infrarroja, está dada en [7], mientras que la forma explícita de $\overrightarrow{a_0^{(s)}}$, Ec. (25), está dada por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_0^{(s)}} = \frac{|f_+|^2}{M_i^3}\{&[2E_\nu^0 \\ &-Re(1-\xi)(W_\pi - E_2)]M_1 l\widehat{\epsilon_l} \\ &+m|\vec{l}||\overrightarrow{p_2}|Im\xi sen\psi_0 \widehat{\epsilon_T} \\ &-[M_1 - Re(1-\xi)E \\ &+\frac{m^2}{4M_1}|1-\xi|^2]\,[(l(M_1 - E_2) \\ &+p_2 E cos\psi_0)\widehat{\epsilon_l} \\ &+mp_2 sen\psi_0 \widehat{\epsilon_N}]\}.\end{aligned} \tag{37}$$

así que la $d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ir}$ contribuye a la polarización $\overrightarrow{P_T}$ con

$$d\Gamma_{B_{1,T}}^{(s)\,ir} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega |f_+|^2\, m|\vec{l}|\,|\overrightarrow{p_2}| Im\xi sen\psi_0 I_0. \tag{38}$$

Por otro lado la parte finita de la Ec. (35) adquiere la forma general

$$\begin{aligned}d\Gamma_{B1}^{(s)\,ND} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega\{&\Lambda_{l1}{}^{ND}\widehat{\epsilon_l} + \Lambda_{T1}{}^{ND}\widehat{\epsilon_T} \\ &+\Lambda_{N1}{}^{ND}\widehat{\epsilon_N}\}\cdot\widehat{s_R}\end{aligned} \tag{39}$$

Explícitamente para $d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ND}$ se tiene

$$\begin{aligned}d\Gamma_{B_1}^{(s)\,ND} = &\frac{\alpha}{\pi} d\Omega\left(\frac{lp_2\beta^2}{4\pi M_i^2}\right)|f_+|^2 Im\xi d\Omega_k \\ &\times\left\{\frac{Ep_2}{\beta^2 M_i^2}\left(-2 + D' + \frac{\beta(1-\beta^2)}{D'}\right)\right. \\ &\times\frac{sen\theta_k cos\varphi_k}{D}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\widehat{\epsilon_l}\cdot\widehat{s_R} \\ &\left.+\Lambda_T{}^{ND}\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R}\right\}.\end{aligned} \tag{40}$$

donde se observa que la parte la contribución a la polarización transversal es

$$\begin{aligned}d\Gamma_{B_{1,T}}^{(s)\,ND} = &\frac{\alpha}{\pi} d\Omega|f_+|^2 Im\xi\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R} \\ &\times\left\{-\frac{lp_2}{4\pi}\int_{-1}^{y_0} dy\int_{-1}^{1} dx\int_0^{2\pi} d\phi_k\right\} \\ &\times\left[\frac{1-\beta^2}{D'^2} - \frac{2}{D'} + 1\right] \\ &\times\left[mp_2\left[\frac{sen\psi cos\theta_k}{D} - \frac{cos\psi sen\theta_k sen\phi_k}{D}\right]\right. \\ &\left.+\frac{lp_2}{\omega D}(sen\psi - sen\psi_0)\right].\end{aligned} \tag{41}$$

Para el resto de las $d\Gamma'_{Bi}$, $i = 2,3,4,5$ se tiene una forma similar a la Ec. (39), a saber

$$d\Gamma_{Bi}^{(s)} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega\{\Lambda_{li}\widehat{\epsilon_l} + \Lambda_{Ti}\widehat{\epsilon_T} + \Lambda_{Ni}\widehat{\epsilon_N}\}\cdot\widehat{s_R}. \tag{42}$$

Resulta que las $d\Gamma_{B_i}^{(s)}$, con $i = 2,3,5$ a nivel de gráfica de Dalitz no tienen componente transversal (o $Im\xi$), sin embargo, la contribución con $i = 4$ $\Gamma_{B_4}^{(s)}$ si contiene dicha componente; explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}d\Gamma_{B_4}^{(s)} = &\frac{\alpha}{\pi} d\Omega|f_+|^2 Im\xi\int_{-1}^{1} dy\int d\Omega_k \\ &\times\left\{\frac{p_2}{M_i}\left[-\frac{lE}{m\beta}D' + m\right]\widehat{\epsilon_l}\cdot\widehat{s_R}\right. \\ &+\left[-sen\theta_k cos\phi_k\frac{lp_2}{M_i}\right]\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R} \\ &\left.+\left[-sen\theta_k sen\phi_k\frac{lp_2}{M_i}\right]\widehat{\epsilon_N}\cdot\widehat{s_R}\right\},\end{aligned} \tag{43}$$

de donde apreciamos que la contribución a $\overrightarrow{P_T}$ es

$$\begin{aligned}d\Gamma_{B_{4,T}}^{(s)} = &\frac{\alpha}{\pi} d\Omega|f_+|^2 Im\xi\int_{-1}^{1} dy\int d\Omega_k \\ &\times\left[sen\theta_k cos\phi_k\frac{lp_2}{M_i}\right]\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R}.\end{aligned} \tag{44}$$

V. Las CR a la polarización transversal

En esta sección agruparemos todas las contribuciones a la polarización $\overrightarrow{P_T}$, provenientes del orden cero, las CRV y las CRB de la gráfica de Dalitz del proceso $K^+_{\mu_3}$. Con ello tendremos la expresión completa de las contribuciones a la polarización transversal relacionada con la violación de la simetría temporal. Dichas contribuciones fueron obtenidas e las Ecs. (18), (27), (38), (41) y (44), las cuales reproduciremos a continuación

$$d\Gamma_{0,T}^{(s)} = d\Omega\frac{|f_+|^2}{M_i^3}\left[|\overrightarrow{p_2}||\vec{l}|sen\psi\, Im\xi\right]\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R}. \tag{45}$$

$$d\Gamma_{V,T}^{(s)} = d\Omega\left[\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\Phi_1\right) + \frac{\alpha}{\pi}\Phi_2\left(\frac{E^2}{m^2}\right)\right]a_{0,T}^{(s)} \times(\widehat{\epsilon_T}\cdot\widehat{s_R}). \tag{46}$$

$$d\Gamma_{B_{1,T}}^{(s)\,ir} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega|f_+|^2\, m|\vec{l}|\,|\overrightarrow{p_2}| Im\xi sen\psi_0 I_0. \tag{47}$$

$$d\Gamma^{(s)\ ND}_{B_{1,T}} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega |f_+|^2 Im\xi \widehat{\epsilon_T} \cdot \widehat{s_R} \times \left\{ -\frac{lp_2}{4\pi} \int_{-1}^{y_0} dy \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\pi} d\phi_k \right\} \times \left[\frac{1-\beta^2}{D'^2} - \frac{2}{D'} + 1 \right] \times \left[mp_2 \left[\frac{sen\psi cos\,\theta_k}{D} - \frac{cos\psi sen\,\theta_k sen\,\phi_k}{D} \right] + \frac{lp_2}{\omega D} (sen\psi - sen\psi_0) \right]. \quad (48)$$

$$d\Gamma^{(s)}_{B_{4,T}} = \frac{\alpha}{\pi} d\Omega |f_+|^2 Im\xi \int_{-1}^{1} dy \int d\Omega_k \times (\widehat{\epsilon_T} \cdot \widehat{s_R}). \quad (49)$$

Las Ecs. (45)-(49) representan la contribución de la polarización $\overrightarrow{P_T}$ a la polarización $\vec{P}$ del proceso $K^{\pm}_{\mu_3}$ con CR que son independientes de modelo y de orden $(\alpha/\pi)\left(q/M_1\right)$. Dichas relaciones muestran la correlación entre el $Im\xi$ y $\overrightarrow{P_T}$.

VI. Conclusiones

En las Ecs. (45)-(49) presentamos las componentes $\overrightarrow{P_T}$ del proceso $K^{\pm}_{\mu_3}$ con μ polarizado. Estas son sensibles a la violación de T (o CP) y pueden evaluarse numéricamente en diferentes puntos de la gráfica de Dalitz.

Una evaluación numérica de la polarización del muón, Ecs. (45)-(49), sería útil para realizar un análisis de Monte-Carlo que nos permita obtener información del valor del $Im\xi$ que mejor se ajuste a los vectores experimentales de la polarización.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional por el apoyo recibido para el desarrollo de este trabajo. A. Martínez desea agradecer el apoyo del Sistema Nacional de Investigadores del CONACyT. M. Sánchez agredece el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. J.J. Torres y A. Martínez agradecen el apoyo de la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional.

Referencias

[1] M. Gell-Mann y A. Pais, Phys Rev. **97**, 1387 (1955).
[2] C. Patrignani et al., (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **40**, 100001 (2016).
[3] N. Cabibbo and A. Maksymowicz, Phys. Lett. **9**, 352, (1964); **11**, 360 (E) (1964); **14**, 72 (E) (1964).
[4] J.J. Torres, A. Martínez, M. Neri y Víctor Juárez, *Correcciones Radiativas a la polarización total del muón en decaimientos* $K^{\pm}_{\mu 3}$, Memorias de RNAFM XIX (2014).
[5] J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964.
[6] David Jackson, *Classical Electrodynamics*, Third Edition, John Wiley Sons, New York, 1998.
[7] C. Juárez-León, A. Martínez, M. Neri, J.J. Torres y Rubén Flores-Mendieta, *Radiative corrections to the Dalitz plot of* $K^{\pm}_{l3}$ *decays*, Phys. Rev. D **83**, 054004 (2011).
[8] F.E. Low, *Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions*, Phys. Rev. 110, **974**, (1958).

ISSN: 2594-1011

Implementación de la técnica de anemometría de hilo caliente para determinar los perfiles de velocidad a través de barreras textiles

Isaac Soltero Ochoa[1*], Arturo F. Méndez Sánchez[1], Edith Cortez Martínez[2]
[1]ESFM-Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México.
[2]ESIT-Instituto Politécnico Nacional, Av. Luis Enrique Erro S/N, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México. *isochoa98@gmail.com

Resumen — **En los tejidos de origen textil, una parte del volumen que ocupan es en realidad aire. Debido a ello y a los requerimientos de uso, como lo es el aislamiento térmico, protección contra el viento, o propiedades relacionadas a la comodidad de las prendas de vestir y la transpiración, el estudio de la permeabilidad del aire en los tejidos es de gran interés. En el presente trabajo se implementa un equipo de anemometría de hilo caliente para determinar los perfiles de velocidad del flujo de aire que pasan a través de una probeta de tejido dada, esto con el objetivo de determinar los principales parámetros que influyen en la permeabilidad del aire a través de tejidos textiles. Uno de los resultados encontrados a partir de los perfiles de velocidad muestra que al aumentar el factor de cobertura disminuye la permeabilidad de manera no lineal.**

Palabras Clave – **anemometría de hilo caliente, perfiles de velocidad, textiles**

Abstract — **In fabrics of textile origin, a great part of the volume that is occupied is in reality air. Because of this and due to the requirements of use, such as thermal insulation, wind protection, or properties related to comfort of garments and perspiration, the study of air permeability in fabrics has great interest. In the present work, an equipment of hot wire anemometry is used to determine the velocity profiles of the air flow that passes through a fabric probe, with the purpose of determining the main parameters that influence the air permeability through fabrics. The results found from the velocity profiles show that the coverage factor decreases the permeability in a non-linear way.**

Keywords — **hot wire anemometry, velocity profiles, textile probe**

I. Introducción

A través de los años se han desarrollado diferentes instrumentos para medir la velocidad del aire en túneles de viento, los más conocidos son el manómetro y el tubo de Pitot, ambos fundamentados en la diferencia de presión entre dos puntos dados. La limitación de estos instrumentos es que ambos sirven únicamente para calcular la velocidad promedio en una sección transversal particular, por lo que se necesitan instrumentos con diferentes características para determinar la velocidad en un punto dado.

El aire es un fluido con una viscosidad muy baja, por lo que conocer la velocidad de este en un punto dado en un instante dado no es suficiente para hacer inferencias acerca del perfil de flujo que se tiene debido a que se crean turbulencias desde velocidades sumamente bajas. Es necesario mantener un monitoreo de las fluctuaciones de la velocidad y poder establecer un rango de valores para diferentes puntos en la sección transversal.

Uno de los instrumentos que se utiliza para mediciones de esta naturaleza es el anemómetro de hilo caliente. Este instrumento es de baja intrusión con el cual se pueden establecer características de la intensidad de turbulencia a temperatura constante. El anemómetro de hilo caliente se ha vuelto muy popular los últimos años debido a su efectividad y a su bajo costo.

El presente trabajo implementa la técnica de anemometría de hilo caliente con la finalidad de determinar los perfiles de velocidad y de ahí poder evaluar parámetros relevantes en los textiles tales como la permeabilidad en aire y agua, ya que este tipo de parámetros tienen interés de aplicación tecnológico para entender primeramente la dinámica de flujo en cuestiones de confort y aislamiento, como el térmico o de protección en situaciones de mojado o viento. Este tipo de textiles tiene aplicación en filtros para eliminar las partículas no deseadas en el flujo de aire empleado en la combustión. Particularmente en este trabajo se implementa la técnica para evaluar la permeabilidad en aire de textiles.

II. Teoría

El anemómetro de hilo caliente consta de un filamento calentado el cual se expone a un flujo. El filamento está conectado a un circuito el cual monitorea el cambio en la resistencia eléctrico, lo cual está directamente relacionado con el flujo. De esta manera se tiene que el principio básico de funcionamiento es la relación entre la velocidad del flujo y los cambios en la resistencia observados en el filamento. Se administra una corriente que calienta el filamento la cual varía de acuerdo con la velocidad del flujo con el objetivo de mantener la resistencia constante, es decir, para mantener constante la temperatura.

La sonda del anemómetro está constituida por un sensor, comúnmente un filamento, y un soporte conformado por dos pequeñas extensiones metálicas. El soporte además de sujetar al filamento, se encarga de conducir la corriente del circuito hacia el filamento. El filamento puede ser de diferentes materiales, pero entre los más comunes se encuentran el tungsteno y el platino. Existen diferentes clases de soportes, varían de acuerdo al número de filamentos que se exponen al flujo simultáneamente y a la inclinación que tiene cada uno de estos. Algunos ejemplos de los diferentes tipos de soportes se muestran en la Fig. 1.

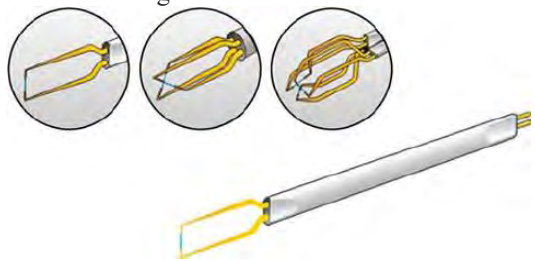


Fig. 1. Ilustración de algunos tipos de soportes [1].

Como el principio fundamental del anemómetro es la variación de la corriente en el filamento con el objetivo de mantener la resistencia constante al ser expuesto a un flujo. Se emplea un lazo de control que mantiene constante la temperatura en el sensor cuando está en presencia del flujo, la potencia que se consume para mantener el sensor calentado es proporcional a la velocidad del flujo del aire en el punto dado.

El circuito utilizado para evaluar y mantener la resistencia eléctrica en el filamento es el puente de Wheatstone, el cual se muestra en la Fig. 2 [2], y está compuesto por cuatro resistencias eléctricas en forma de cuadrilátero, donde se tienen dos fijas R_1 y R_2, una como referencia R_3y la última es el sensor ($R_L + R_w$ con R_w la resistencia del filamento).

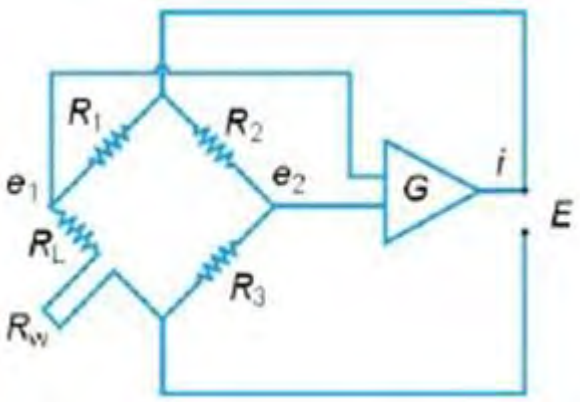


FIG. 2. Configuración del circuito para el anemómetro de hilo caliente a temperatura constante.

El circuito en la Fig. 2 es responsable de mantener constante la resistencia en el sensor, es decir, produce la corriente necesaria para balancear el puente de Wheatstone, esto es posible debido a que el filamento posee un coeficiente térmico de resistividad positivo, lo que significa que cuando la temperatura varía ocurre lo mismo con la resistencia. La temperatura a la que se mantiene comúnmente el filamento es 215 ºC. Cuando el filamento alcanza esta temperatura se dice que está en equilibrio, y al exponerse al flujo éste baja su temperatura, lo que implica un desbalance en el puente de Wheatstone. La respuesta inmediata es un aumento en la corriente para aumentar la temperatura en el sensor y recuperar la estabilidad inicial. La diferencia de tensión entre los extremos del puente es proporcional a la velocidad del flujo.

Para poder manipular los valores de la velocidad de flujo digitalmente, la señal que representa la variación de la corriente es convertida y almacenada en una computadora a través de un dispositivo de adquisición de datos (convertidor analógico a digital). Con los valores de corriente digitalizados se obtiene una curva de calibración que crea una relación entre la tensión (E) y la velocidad del flujo (U).

B. Pre-calibración

Una vez que el circuito y filamento han sido construidos, es necesario realizar el siguiente procedimiento para asegurar que los datos obtenidos en las mediciones sean confiables. Primero se tiene que someter el filamento a las condiciones máximas de acuerdo al experimento que se realizará, es decir, al máximo de presión y temperatura que se esperan alcanzar. Esto se realiza con el objetivo de alcanzar los valores límite de tensión en el filamento, y así no crear esfuerzos adicionales durante las mediciones que puedan afectar la resistencia. Además, para medir flujos con valores altos de presión deben utilizarse soportes con una menor tensión en el filamento, esto con la finalidad de eliminar esfuerzos adicionales en el sensor. Si el esfuerzo en el filamento es significativo éste se debe cambiar.

Durante la pre-calibración cabe la posibilidad de que los filamentos se desprendan o fallen, esto es debido a defectos de fábrica o condiciones de flujo, pero es mejor que fallen en pruebas preliminares a que afecten las mediciones.

Una vez que el anemómetro se somete a las pruebas preliminares, se pueden realizar las pruebas de calibración para obtener monitoreo y promedios de flujo en los rangos de velocidad apropiados.

D. Adquisición de datos

En presencia de un flujo la corriente de salida mantiene una señal continua y analógica, para poder tratar esta señal de manera digital es necesario establecer una cantidad de muestreo en un intervalo de tiempo dado. Los parámetros que definen la adquisición de datos son los siguientes:

- Tasa de muestreo (f): Determina el intervalo de tiempo entre muestras consecutivas.
- Número de muestras (N): Número de mediciones en el intervalo de tiempo establecido.

Estos dos parámetros determinan el intervalo de tiempo de adquisición de datos mediante la siguiente fórmula:

$$\Delta t = \frac{N}{f} \quad (1)$$

E. Corrección por temperatura

La temperatura del flujo cambia con la posición en el túnel como con el tiempo en que se realiza la medición, por lo que la señal de salida se ve afectada por estos dos parámetros. Esto hace necesario la medición simultánea de la velocidad y de la temperatura. Se tiene la siguiente expresión para realizar la corrección de la corriente de salida debido a la temperatura:

$$E_{corr} = E\left(\frac{T_W - T_0}{T_W - T_a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Donde

- E_{corr}: Tensión corregida.
- E: Tensión inicial obtenida.
- T_W: Temperatura del filamento.
- T_0: Temperatura ambiente de referencia, registrada previamente a las mediciones.
- T_a: Temperatura ambiente durante la medición

F. Calibración

La ecuación que relaciona la tensión registrada y la velocidad del flujo es conocida como la Ley de King y se expresa a través de la siguiente función exponencial [3]:

$$E^2 = A + BU^n \quad (3)$$

Donde

- E: Tensión de salida del anemómetro.
- U: Velocidad del flujo.
- A, B: Constante determinadas en el proceso de calibración.

G. Permeabilidad de tejidos textiles

Las características estructurales de los tejidos determinan en gran parte su propósito y comportamiento durante el uso. En realidad, la densidad de hilos, torsión y características anisotrópicas hacen complicado simular y predecir el comportamiento mecánico de los tejidos.

Un tejido puede entenderse como una superficie plana y elástica resultante del entrelazamiento de hilos. Los materiales textiles que se emplean como barreras permeables en general están divididos en tres categorías principales dependiendo de la manera que entrelazan los hilos o fibras que los constituyen.

Existen los tejidos de calada, los cuales están conformados por hilos dispuestos en dirección longitudinal y otros tantos en dirección perpendicular (ver Fig. 3 izquierda); los tejidos de punto o de malla, los cuales están formados mediante bucles de hilos entrelazados entre sí (Fig. 3 derecha). Estos bucles atribuyen elasticidad y extensibilidad a las telas o mallas. Asimismo, también existen los textiles no tejidos, los cuales son constituidos en una lámina textil cohesionada de fibras o filamentos adheridos mediante tratamientos químicos, mecánicos o térmicos [4].

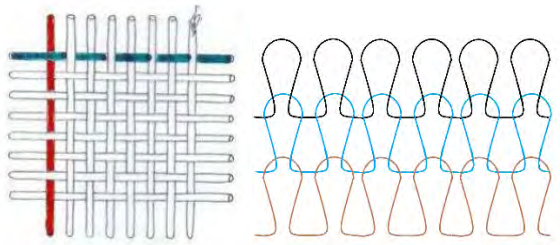


FIG. 3. Tipos de tejido, izquierda: Tejido de calada. Derecha tejido de punto.

En los tejidos de origen textil, una parte del volumen que ocupan es en realidad aire. Por ello, y a los requerimientos de uso, como lo son el aislamiento térmico, protección contra el viento, o propiedades relacionadas a la comodidad de las prendas de vestir y la transpiración, el estudio de la permeabilidad del aire en los tejidos es de gran interés. De ahí que resulta la importancia de la permeabilidad del aire en los textiles.

Se entiende por permeabilidad del aire la velocidad del flujo que pasa perpendicularmente a través de una probeta. El equipo convencional que se utiliza para mediciones de esta naturaleza mide el caudal del flujo de aire que pasa perpendicularmente a través de la superficie de ensayo, con una diferencia de presión definida y un tiempo establecido regulados por norma [5]. Se pone en marcha un ventilador de aspiración para forzar el paso de aire a través de la probeta y se regula para obtener la diferencia de presión establecida.

La permeabilidad bajo estas condiciones está dada por:

$$\mathrm{R} = \frac{\bar{\mathrm{q}}\mathrm{v}}{\mathrm{A}} \quad (4)$$

Donde

- $\bar{\mathrm{q}}\mathrm{v}$: Media aritmética del caudal de flujo de aire.
- A: Área del tejido ensayado.

La permeabilidad al aire depende en su mayoría por el factor de cobertura de los tejidos, cuanto más abierto sea el tejido mayor permeabilidad tendrá.

III. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

El anemómetro de hilo caliente empleado es marca Dantec modelo Mini CTA. El cual consiste en un sistema de adquisición analógico digital NI de cuatro canales a una frecuencia de 10kHz en aire. Las dimensiones del hilo caliente son de 1.25mm de largo por 5µm de grosor. La probeta de medición o hilo caliente es el modelo 54P11. Además, el anemómetro posee el software StreamWare Basic

que permite evaluar la velocidad a lo largo de una línea de acción obteniendo el perfil de velocidades. En la Fig. 4 se esquematiza el sistema. El túnel empleado es de geometría circular con un diámetro 0.04614m. En éste se implementó una malla metálica próxima a la entrada del sistema de extracción de aire con el fin uniformizar el flujo de aire y eliminar partículas. Se realizó la obtención del perfil de velocidades sin la presencia de barrera y se obtuvo el promedio de la velocidad en 21 puntos diferentes con separación de 2 mm a través del diámetro del tubo.

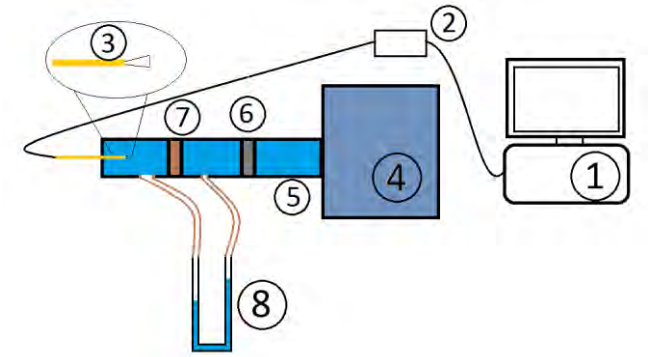


FIG. 4. Dispositivo experimental: 1) PC, 2) interfase del anemómetro, 3) punta de hilo caliente 54P11, 4) extractor de aire, 5) túnel circular, 6) malla metálica, 7) probeta y 8) manómetro.

Los materiales analizados fueron, primeramente un no tejido, este material se emplea para la elaboración de cubre bocas en cirugía. En segundo término, se empleó mezclilla que es un tejido plano, Finalmente, se analizó un tejido de punto del tipo Jacquard. Este tejido particularmente se utilizó como referencia para evaluar la permeabilidad en especímenes de diferentes factores de cobertura.

Asimismo, se tomaron registro del tipo del textil mediante microscopía óptica de baja resolución. La permeabilidad del aire se evaluó considerando los parámetros principales que especifica la norma ISO 9237:1995, en donde se mide el caudal de flujo que pasa perpendicularmente a través de la superficie de ensayo. En este estudio se empleó una superficie de ensayo de 20cm^2 como lo sugiere la norma y para la fijación de la probeta, se utilizó un anillo de blocaje. Además, se requiere determinar la caída de presión en la superficie de ensayo, la cual deberá estar en el intervalo 50-500Pa. En este estudio se utilizó una presión de 500Pa.

Mientras que el medidor de flujo fue sustituido por el anemómetro de hilo caliente, ya que al poder determinar el perfil de velocidades, es posible integrar dicho perfil para determinar la velocidad media y conociendo la sección trasversal, es posible evaluar el caudal de flujo de aire. Para lo cual se hacen las siguientes suposiciones: a) la velocidad en la pared del tubo es nula, esto es la condición de no deslizamiento y b) el perfil de velocidades se desarrolla de manera continua. Bajo estas consideraciones la velocidad media está dada por,

$$\langle v \rangle = \frac{1}{D}\int_{-R}^{R} V(r)dr \qquad (5)$$

Donde R es el radio del tubo y $V(r)$ es el perfil de velocidades.

IV. Resultados y análisis

En la Fig. 5, se muestran los imágenes de microscopía óptica para cada una de las muestras estudiadas. En éstas se puede ver las características propias de cada uno de los textiles.

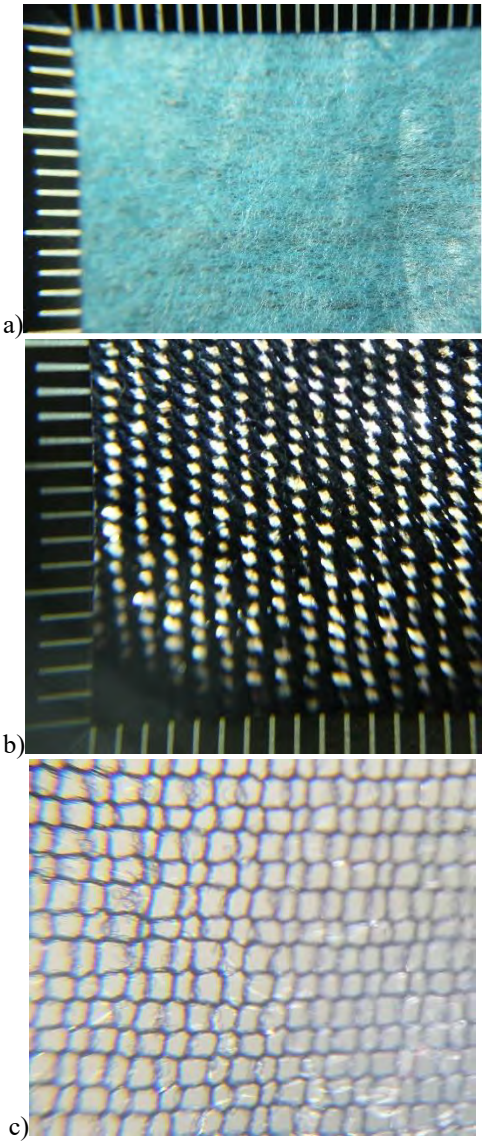


FIG. 5. Imágenes en mm de microscopía óptica para las probetas. a) no tejido, b) tejido plano y c) tejido de punto.

En la Fig. 6, se muestran los perfiles de velocidad obtenidos, para las probetas de tipo no textil, de tejido plano y tejido de punto, respectivamente. En éstos se puede ver el

comportamiento de velocidades sobre una línea trasversal del tubo. Como puede verse, el tejido plano debido a que presenta una cobertura mayor, la velocidad es baja, seguido por el no tejido cuyas velocidades son mayores, mientras que el tejido de punto es que obtiene mayores velocidades ya que su porcentaje de cobertura es menor respecto a las anteriores probetas. Cabe mencionar que en la gráfica de tejido de punto se incluye una serie de perfiles para diferentes grados de cobertura, cuyos valores están registrados en la tabla II. Una vez que fueron obtenidos cada uno de los perfiles, se integraron numéricamente para evaluar la velocidad media y poder obtener su permeabilidad.

Una vez que se obtuvo la velocidad media, se calculó la permeabilidad del aire para estas probetas estudiadas. En la Tabla I se muestran los resultados obtenidos.

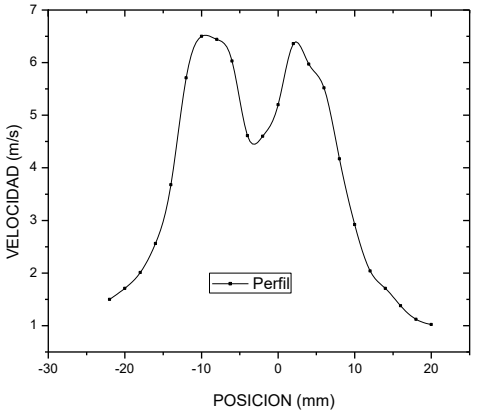
TABLA I.
EVALUACIÓN DE LA PERMEABILIDAD

Probeta	Perfil	Permeabilidad del aire (m/s)
No tejido	Único	3.532
Tejido plano	Único	1.624
Tejido de punto	1	6.045
	2	5.654
	3	5.005
	4	4.686

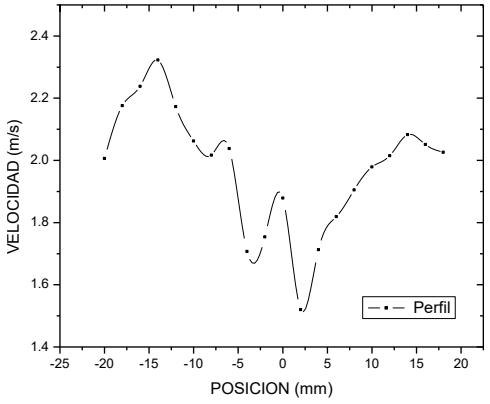
A partir de la serie de perfiles de velocidad para el tejido de punto cambiando el factor de cobertura, puede verse que, conforme aumenta el factor de cobertura, la permeabilidad disminuye.

TABLA II.
FACTOR DE COBERTURA Y VELOCIDAD PROMEDIO OBTENIDA POR INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Perfil	Velocidad (m/s)	Porcentaje de cobertura (%)
0 (sin cobertura)	6.99	0
1	6.04	12.56
2	5.65	27.45
3	5	43.04
4	4.68	54.19



a)



b)

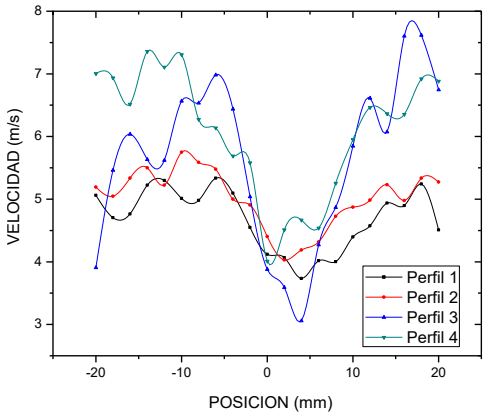


FIG. 6. Perfiles de velocidad para las probetas. a) no tejido, b) tejido plano perfil con barrera y sin barrera y c) tejido de punto para distintas condiciones de cobertura.

La figura 7 ilustra el comportamiento de la permeabilidad del aire respecto a los factores de cobertura. En ésta, se puede ver un comportamiento no lineal decreciente de la permeabilidad conforme se incrementa el factor de cobertura.

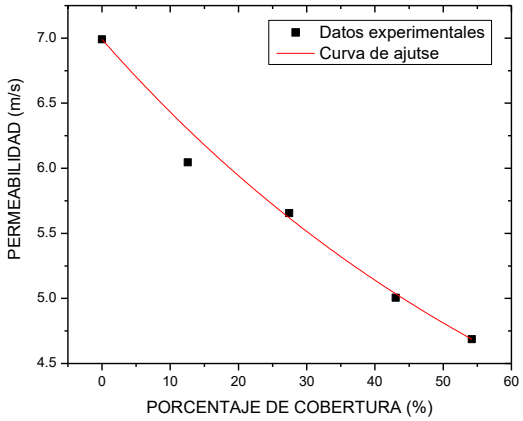


FIG. 7. Comportamiento de la permeabilidad del aire en función del factor de cobertura para la muestras de tejido de punto.

IV. CONCLUSIONES

Se implementó la técnica de anemometría de hilo caliente para la determinación de los perfiles de velocidad en probetas de origen textil.

Se mostró que esta metodología permite evaluar la permeabilidad del aire en textiles y se analizó éste parámetro conforme varía el factor de cobertura. Se encontró que al aumentar el factor de cobertura disminuye la permeabilidad de manera no lineal. Lo cual está en buen acuerdo con mediciones macroscópicas.

Se considera que este método será de mayor utilidad para estudiar el comportamiento de la permeabilidad en aire para materiales textiles compósitos.

AGRADECIMIENTOS

A. F. Méndez Autor es becario COFAA y EDD.

REFERENCIAS

[1] Dantec Dynamics (2009) http://www.dantecdynamics.com/Default.aspx?ID=1057.

[2] F. E. Jørgensen, “How to measure turbulence with hot-wire anemometers -a practical guide,” Dantec Dynamics, 2002.

[3] I. Da Riva de la Cavada ,D. R. Manzano, L. P. Bernal , et al., “comportamiento aerodinámico de barreras cortavientos 1,” Ingenería Aeronáutica yAstronáutica, No 116, Noviembre, pp 1-15, 1970.

[4] F. E. Lockuán Lavado, Las industria textil y su control de calidad II. Fibras textiles, referencia electrónica https://archive.org/details/II.LITYSCDC_201305, fecha de consulta noviembre de 2015

[5] E. Carrera, “Caracterización de Tejidos. Principales ensayos físicos para evaluar la calidad de los tejidos textiles,” Universitad Politécnica de Catalunya. 1ª edición, julio, Edit. Terrassa pp 238, 2015.

ISSN: 2594-1011

Implementación de retroalimentación automática para matemáticas en un sistema dinámico de evaluación

Ricardo López Bautista, Georgina Pulido Rodríguez,
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
CDMX, México.
Teléfono (55) 5318-9000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: galoisenlinea@azc.uam.mx

Resumen — **En este trabajo presentamos la mecánica para implementar retroalimentación general y específica para ejercicios de matemáticas en un ambiente virtual disponible para los usuarios 24x7. Para obtener la retroalimentación utilizamos algunos sistemas algebraicos computacionales tales como Symbolab, Maxima, SageMath, Pari, Mathematica, Maple, Matlab y GAP. Este trabajo lo hemos realizado para cursos de matemáticas en carreras de Ingeniería, sin embargo, se puede extrapolar en particular, la retroalimentación específica a cursos de matemáticas en escuelas de ciencias a todos los niveles. Los bancos de preguntas para los exámenes se elaboran sobre la plataforma Moodle. Los autores hemos construido un Centro de Evaluación en Línea para Matemáticas, localizado en** http://galois.azc.uam.mx. **En este Centro de Evaluación hemos logrado la implementación de este trabajo en principio para los cursos de Cálculo Diferencial, Introducción al Álgebra Lineal, Criptografía, Matemáticas Discretas y Complementos de Matemáticas, que se ofrecen en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.**

Palabras Clave – **Retroalimentación automática, moodle, ejercicios de matemáticas, galoisenlinea**

Abstract − **In this paper we present the mechanics to implement general and specific feedback for mathematics exercises in a virtual environment available to 24x7. To obtain the feedback we use some computational algebraic systems such as Symbolab, Maxima, SageMath, Pari, Mathematica, Maple, Matlab and GAP. We have done this work for math courses in Engineering careers, however, the work can be extrapolated particulary, specific feedback to mathematics courses in science schools at all levels. The question banks for the exams are built on the Moodle platform. The authors have built an Online Assessment Center for Mathematics, located at http://galois.azc.uam.mx. We have achieved the implementation of this work in principle for the courses of Differential Calculus, Introduction to Linear Algebra, Cryptography, Discrete Mathematics and Mathematics Complements, offered at the Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.**

Keywords − **Automatic feedback, moodle, math exercises, galoisenlinea**

I. Introducción

Tradicionalmente, muchos profesores consideran que en ejercicios de matemáticas, el hecho de dar al alumno la respuesta de un ejercicio es más que suficiente para apoyar a un alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje. Los autores de este trabajo consideramos que eso solo es una parte de la retroalimentación que el alumno debiera recibir y muchas veces puede no ser de utilidad pues el alumno está más interesado en saber el procedimiento detallado para resolver el ejercicio [3]. La retroalimentación que los profesores proporcionamos a los alumnos consiste en información para una mejor comprensión. Por otro lado, los alumnos consideran invaluable el procedimiento de solución paso a paso para evaluar la corrección de una respuesta. Con el fin de dar una solución al problema de retroalimentación para ejercicios de matemáticas, los autores de este trabajo proporcionamos en línea para cada ejercicio de matemáticas propuesto al alumno la correspondiente retroalimentación; no solo la respuesta del mismo, sino el procedimiento detallado que muestre paso a paso como construir la solución del problema. Este proceso lo potenciamos cuando el alumno busca la revisión de su ejercicio para saber en qué puntos ha cometido un error y así subsanar estos errores. Kulhavy [3]. Los autores consideran crítico establecer un puente entre las experiencias, conocimientos y habilidades escolares que posee un alumno sobre un tema específico y entre los requerimientos y habilidades necesarias para resolver problemas del curso; dicho puente lo constituye la retroalimentación, según Sadler [7].

II. Metodología

A. El sistema galoisenlinea: un sistema dinámico de evaluación

Los autores de este trabajo hemos creado en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (UAM-A) un centro de matemáticas llamado sistema galoisenlinea (http://galois.azc.uam.mx). Dicho portal usa como soporte la plataforma Moodle para construcción de aulas virtuales con materiales de enseñanza-aprendizaje dinámicos e interactivos disponibles 24x7. Implementamos sobre galoisenlinea una serie de recursos para el proceso de enseñanza aprendizaje, en especial bancos de autoevaluaciones con intentos ilimitados para diversos cursos de matemáticas, esencial para el alumno es que al terminar cualquiera de las autoevaluaciones, el sistema galoisenlinea inicia un proceso de retroalimentación instantánea y automática para ejercicios de matemáticas, en cursos como cálculo diferencial, álgebra lineal, criptografía,

matemáticas discretas. Realizamos la construcción de bancos de reactivos con miles de modelos e instancias diferentes como apoyo a alumnos y recursos disponibles 24x7 a la comunidad de la UAM-A, con el fin de incidir sobre la problemática del alto índice de reprobación en matemáticas.

B. Oportunidad de aprendizaje en el error

El hecho de que un alumno cometa un error al realizar los ejercicios de autoevaluaciones permite que la retroalimentación que el sistema brinda tenga un mayor impacto positivo sobre la adquisición y retención en el aprendizaje del alumno. Siguiendo a Winne and Butler [5], podemos decir que el proceso cognitivo que se lleva a cabo en el sistema galoisenlinea permite al alumno que, en cada intento de autoevaluación, pueda confirmar si es correcta o no su respuesta; el sistema le indica cuál es la respuesta correcta, además el sistema proporciona al alumno una serie de recursos como descarga de libros y banco de videos. En este trabajo puntualizamos como una de las formas de retroalimentación para el alumno, el procedimiento paso a paso para obtener la respuesta de cada uno de los ejercicios propuestos. Los bancos de preguntas que hemos implementado en galoisenlinea están estructurados con las siguientes características: por ejemplo, para el curso de Cálculo Diferencial, para el tema de derivación implícita, el banco de reactivos consta de 50 modelos de ejercicios diferentes entre sí. Como en la programación para cada ejercicio se establece la generación de datos aleatorios con cotas adecuadas, acordes con el ejercicio, entonces se producen miles de instancias de problemas diferentes entre sí, todos ellos con el desarrollo paso a paso. Se usan LaTeX, XML, Mathematica y utilerías de programación para completar el proceso.

Siguiendo a Kluger & DeNisi [6] hemos implementado en galoisenlinea una dinámica de trabajo que obliga a los alumnos a preparar sus autoevaluaciones resolviendo ejercicios que requieren el que dominen la parte teórica y tengan mayor destreza en el desarrollo algebraico. Los exámenes están restringidos a que para poder presentar el examen i+1 se requiere haber aprobado el examen i, la parte que motiva al alumno a aumentar su esfuerzo es el hecho de que ellos pueden presentar en una sesión más de un examen de los 10 programados para terminar el curso.

En la Fig. 1, presentamos un ejercicio tipo en el banco de reactivos del sistema galoisenlinea. La Fig. 1 nos muestra el enunciado del ejercicio, esta pantalla es lo único que ve el alumno al momento de iniciar su ejercicio. Posteriormente, cuando el alumno acaba el ejercicio y lo envía para obtener su calificación, el sistema galoisenlinea le da la calificación obtenida y puede ver la respuesta correcta. En este punto el sistema le entrega la retroalimentación, ésta se puede ver en las Fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En la Fig. 3, aparece la solución paso a paso para este ejercicio particular. Esta solución paso a paso los autores la construyen específicamente para este ejercicio.

En la Fig. 4, utilizaremos un motor de búsqueda semántico basado en un algoritmo de aprendizaje automático, dicho motor es externo a galoisenlinea, para poder interactuar con el mismo, el sistema le da al alumno el pseudocódigo donde aparece el comando a ejecutar, así como los datos del problema. El alumno únicamente copiará dicho pseudocódigo y pegará en ventana del programa Symbolab. Al ejecutarlo aparece el desarrollo paso a paso dado por este motor de búsqueda. Una de las ventajas al usar este motor, es que el alumno puede empezar a variar datos de su problema y para cada variación obtendrá el desarrollo paso a paso de su nuevo ejercicio.

C. Retroalimentación general y específica para un ejercicio tipo en banco de preguntas en galoisenlinea

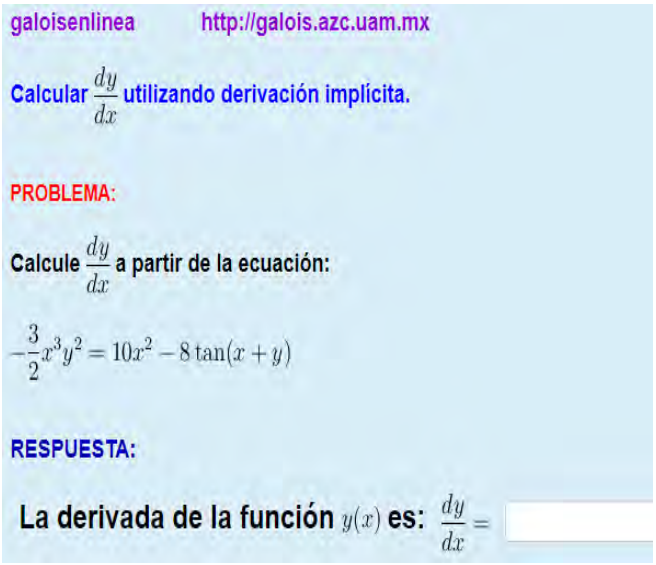


Fig. 1. Ejercicio del banco de reactivos tomado de galoisenlinea, utilizado en exámenes.

RECURSOS:

(Click.... Recursos relacionados a este ejercicio.

TEXTO: Consulta la sección 3.7, páginas 149-155 del libro:

THOMAS CALCULO. Una variable. Decimosegunda edición.

SOLUCIONARIO AL TEXTO: Consulta el libro:

THOMAS' CALCULUS, Solution Manual, Twelfth Edition.

Derivación implícita.

1.Debe de derivar con respecto a x en ambos lados de la ecuación considerando que $y(x)$ es función derivable de x.

2. Agrupará los términos que tengan dy/dx de un lado de la ecuación y despejar dy/dx.

Fig. 2. Retroalimentación para el ejercicio en Fig. 1 Consistente en tutoriales, libros y capsulas de teoría

PROBLEMA:

Calcule $\frac{dy}{dx}$ a partir de la ecuación:

$$-\frac{3}{2}x^3y^2 = 10x^2 - 8\tan(x+y)$$

SOLUCIÓN:

Consideremos la ecuación:

$$-\frac{3}{2}x^3y^2 = 10x^2 - y\tan(x+y)$$

Derivamos a ambos lados de la ecuación con respecto a la variable independiente x:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x^3y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(10x^2 - y\tan(x+y)\right)$$

$$-\frac{9x^2y^2}{2} - 3x^3yy' = 20x - 8\sec^2(x+y)\,(1+y')$$

Despejamos y' de la ecuación anterior, obteniendo

$$-\frac{9x^2y^2}{2} - 3x^3yy' = 20x - 8\sec^2(x+y) - 8\sec^2(x+y)y'$$

$$-3x^3yy' = 20x - 8\sec^2(x+y) - 8\sec^2(x+y)y' + \frac{9x^2y^2}{2}$$

$$-3x^3yy' + 8\sec^2(x+y)y' = 20x - 8\sec^2(x+y) + \frac{9x^2y^2}{2}$$

Factorizando y' del lado izquierdo, obtenemos

$$y'\left(-3x^3y + 8\sec^2(x+y)\right) = 20x - 8\sec^2(x+y) + \frac{9x^2y^2}{2}$$

Finalmente obtenemos:

$$y' = \frac{20x - 8\sec^2(x+y) + \frac{9x^2y^2}{2}}{(-3x^3y + 8\sec^2(x+y)}$$

■ galoisenlinea

http://galois.azc.uam.mx

Fig. 3. Retroalimentación automática proporcionada por galoisenlinea, consistente en el desarrollo paso a paso para obtener la respuesta del ejercicio mostrado en la Fig. 1.

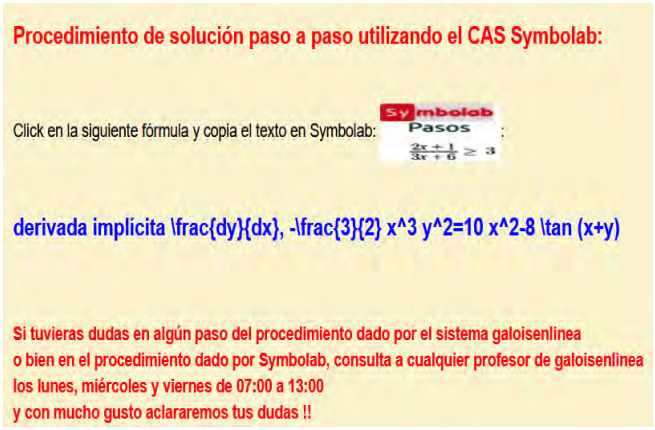


Fig. 4. Retroalimentación automática proporcionada por Symbolab, consistente en el desarrollo paso a paso para obtener la respuesta del ejercicio en la Fig. 1

.

Symbolab

Fig. 5. El motor de búsqueda semántico utilizado en galoisenlinea para retroalimentación automática dinámica para obtener la respuesta del ejercicio en la Fig. 1

Hemos configurado Moodle para que en la retroalimentación dada por galoisenlinea el alumno únicamente copie el siguiente texto:

```
derivada implícita \frac{dy}{dx}, -\frac{3}{2} x^3 y^2=10 x^2-8 \tan (x+y)
```

Finalmente, el alumno lo pega en ventana de Symbolab.

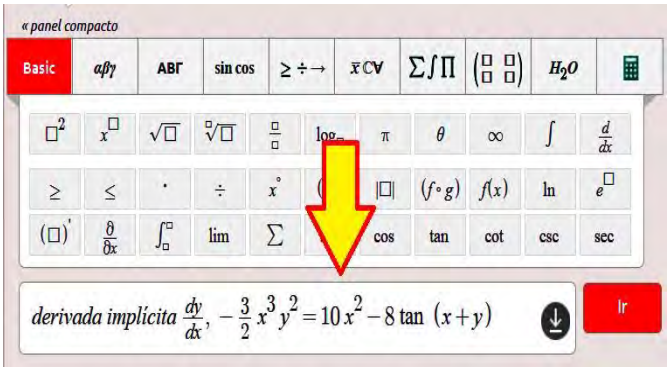


Fig. 6. Pasando la información que galoisenlinea proporciona del ejercicio en Fig. 1 hacia Symbolab

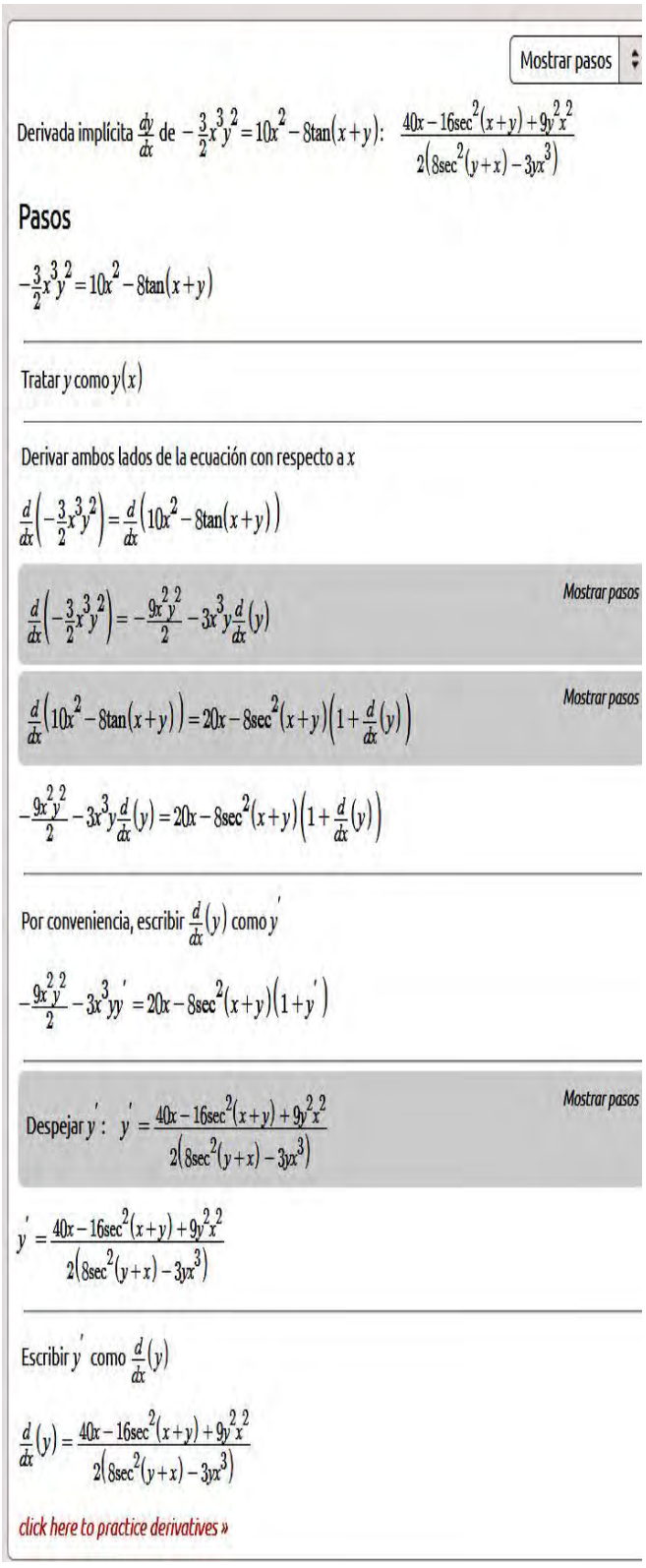


Fig. 7. Symbolab da el procedimiento de solución del ejercicio en Fig. 1

III. Resultados

a) **Construimos la retroalimentación paso a paso, específica y automática para el banco de preguntas en http://galois.azc.uam.mx**. En el sistema galoisenlinea, hemos construido diversos bancos de preguntas para los cursos: cálculo diferencial, álgebra lineal, criptografía, matemáticas discretas. Los bancos de ejercicios constan de miles de preguntas, incluyendo números, símbolos y gráficas. Lo más importante, cada ejercicio viene acompañada con una serie de recursos en especial la solución paso a paso. Para hacer esto hacemos uso de algunos Sistemas algebraicos Computacionales.

b) **Usamos en galoisenlinea un motor de búsqueda semántico con algoritmo de aprendizaje automático.** Hemos integrado en Moodle, en el sitio galoisenlinea el uso de Symbolab. Este sistema algebraico computacional es un motor de búsqueda semántico, enfocado a problemas y ejercicios en matemáticas. Symbolab utiliza un algoritmo de aprendizaje automático

Además de la solución específica del ejercicio, los alumnos reciben un pseudocódigo con la expresión del ejercicio, así como las operaciones a realizar escrito con las características propias de LaTeX y de los operandos del sistema; el alumno copia el pseudocódigo y lo pasa a la ventana de ingreso de Symbolab. Esta calculadora ofrece al alumno el desarrollo paso a paso del ejercicio en otra posible versión. El alumno puede alterar las entradas dadas por el pseudocódigo y empezar a tener variantes de ejercicios con solución nuevamente paso a paso.

c) **Resultados de grupos con recursos de retroalimentación general y con retroalimentación específica**. La Fig. 8 nos muestra porcentajes de aprobación en UAM-A en un curso de matemáticas impartido en los trimestres 18-I y 18-P. Se muestran los resultados de utilizar retroalimentación general en el trimestre 18I y retroalimentación específica en el 18-P.

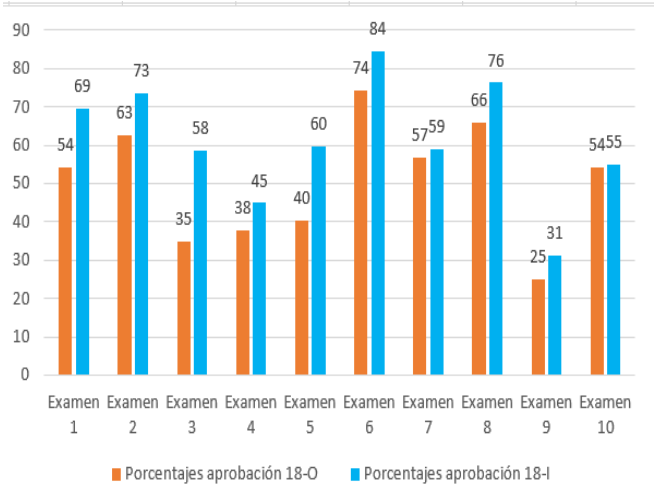


Fig. 8. Resultados de grupos en los trimestres 18-O con recursos de retroalimentación general y 18-I con retroalimentación específica.

IV. Discusión

En ejercicios de matemáticas, la retroalimentación que el profesor proporciona a sus alumnos de ingeniería debería ser parte crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin embargo, para algunos profesores su retroalimentación consiste únicamente en dar la respuesta del ejercicio al alumno y éste deberá trabajar para intentar llegar a dicha solución. En caso de que no lo logre, el profesor podría atribuirlo al alumno, sin más; por otro lado, puede ocurrir que el profesor en clase sólo dio algunas indicaciones para llegar a la solución, pero nunca se dio a la tarea de completar en detalle un ejercicio. Los autores consideramos que esto puede deberse a varios factores: entre ellos, podría ser una falta de compromiso del profesor con su práctica docente; quizá en su formación profesional requiere de tomar cursos de pedagogía, de didáctica, de evaluación o de temáticas afines.

Consideramos que los alumnos tienen dificultades para responder preguntas acerca de ejercicios en el pizarrón o en libros donde aparece la respuesta al ejercicio, sin más preámbulo: ¿cuál fue el procedimiento que se siguió para llegar a tal respuesta?

Los autores de este trabajo, consideramos que las experiencias, recursos y la creación del sistema dinámico de evaluación aporta un esfuerzo a la solución de este problema.

V. Conclusiones

¿Qué hacer ante el problema de que a los alumnos de Ingeniería cada vez se les dificultan los cursos de matemáticas, ya sea por deficiencias previas en su formación, ya sea por la forma en que reciben sus clases de parte de sus profesores de matemáticas, o bien la combinación de otros factores? Consideramos que los profesores de matemáticas están obligados a considerar nuevas formas de conducir el proceso de enseñanza – aprendizaje y a replantear la evaluación.

Los autores de este trabajo, hemos implementado sobre la plataforma Moodle una serie de herramientas que proporcionan retroalimentación automática, tanto para ejercicios con datos fijos, como para ejercicios con datos que el alumno puede cambiar. A lo largo de dos trimestres, hemos implementado esta dinámica en el sistema galoisenlinea y de acuerdo con las estadísticas obtenidas, consideramos que esta técnica didáctica y de evaluación está dando resultados favorables. Finalmente, los recursos que hemos creado en el sistema galoisenlinea para integrar la retroalimentación general o especifica en los bancos de reactivos ha sido posible gracias a algunas librerías y paquetes computacionales de código abierto, tales como Symbolab, Maxima, SageMath, Pari, GAP, Magma y a algunos paquetes comerciales como Mathematica, Maple, Matlab.

REFERENCIAS

[1] Heeren, B., & Jeuring, J. (2014). Feedback services for stepwise exercises. *Science of Computer Programming*, *88*, 110-129.

[2] Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, *77*(1), 81-1

[3] Kulhavy, R. W., & Stock, W. A. (1989). Feedback in written instruction: The place of response certitude. *Educational Psychology Review*, *1*(4), 279–308.

[4] Jorge Gaona, Catherine Hardy, (2014) Un ejemplo de nivelación en matemáticas: la evaluación dinámica como motor de aprendizaje incorporando wiris en moodle. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnolog a, Innovaci n y Educaci n, OEI, Buenos Aires pp1-14

[5] Butler, D. L., & Winne, P. H. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of educational research*, *65*(3), 245-281.

[6] Kluger, A. N., & DeNisi, A. (1998). Feedback interventions: Toward the understanding of a double-edged sword. *Current Directions in Psychological Science*.

[7] Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional science*, *18*(2), 119-144.

[8] Sagemath: http://www.sagemath.org/download-windows.html

[9] Pari: https://pari.math.u-bordeaux.fr/

[10] Maple: http://www.maplesoft.com/

[11] Matlab: https://www.mathworks.com/

[12] Gap: https://www.gap-system.org/

[13] Symbolab: https://es.symbolab.com

[14] Mathematica: http://www.wolfram.com/mathematica/

[15] vxMaxima: http://maxima.sourceforge.net/es/

[16] Octave: http://www.gnu.org/software/octave/

[17] Wiris: http://www.wiris.com/

[18] Lidia: http://www.swmath.org/software/518

[19] Magma: http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/

ISSN: 2594-1011

Modelo Matemático de difusión en la nefrona: problemas de valores en la frontera con impacto Biológico

O.A. Sanvicente[1], R. Zamorano[1]
[1]Laboratorio de Mediciones Magnéticas y Biofísica, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: j.autor@esfm.ipn.mx

Resumen — **Las nefronas son la unidad fundamental de los riñones, y estos son la parte más importante del aparato urinario pues en ellos se llevan a cabo todas las tareas de este sistema: mediar el PH sanguíneo, regular presión arterial y glucosa sanguínea además de la excreción. Las nefronas son capilares en donde toma lugar la filtración glomerular, la cual se lleva a cabo por fenestración. Dado que se trata de un capilar su geometría es muy próxima a un cilindro, por lo tanto es factible modelar la filtración como un fenómeno de difusión en coordenadas cilíndricas. Modelamos la nefrona y resolvemos por el método de separación de variables hallamos 3 soluciones espaciales y una temporal, empleamos condiciones a la frontera para determinar la solución particular de este sistema. Las soluciones del modelo son: funciones Bessel, funciones periódicas y una solución decreciente exponencial, la importancia de la solución temporal radica en que esta gobierna el tiempo en que se lleva a cabo el filtrado, en la familia de soluciones podemos interpretar patologías como lo son la hidronefrosis y la insuficiencia renal, por otra parte la solución Bessel de orden cero nos modela el comportamiento de la concentración de solutos.**

Palabras Clave – **Nefrona, Condiciones de frontera, nefrología, modelo matemático.**

Abstract — **The present format provides basic guidelines for preparing papers for the Memorias de la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas. This document is a template for Microsoft Word, so you can download the electronic file from the Reunión website to prepare your manuscript. This abstract does not have to exceed 200 words and must state the principal objectives of the investigation, describe the methodology employed, summarize the results and state the principal conclusions. Please include appropriate key words in your abstract, in alphabetical order, separated by commas.**

Keywords — **Fonts, margins, tables**

I. Introducción

Los riñones son la parte más importante del aparato urinario. Este último está compuesto por las venas renales, las arterias renales, los riñones, los ureteros, la vejiga urinaria y la uretra. Por otra parte, los riñones se componen de las nefronas, las cuales son la unidad fundamental del filtrado. Es aquí donde se llevan a cabo las distintas tareas que tiene este sistema, pues los ureteros, la vejiga y la uretra son casi conductos de paso una vez realizado el trabajo. Para producir la orina las nefronas y los tubulos colectores desarrollan 3 procesos básicos: filtración, reabsorción y secreción.

En este trabajo nos centraremos en la filtración glomerular.
La filtración glomerular: Es el primer paso en la producción de la orina. El agua y la mayor parte de los solutos atraviesan la pared de los capilares glomerulares, donde se filtran e ingresan en la capsula de Bowman, esto se hace por osmosis (la osmosis consiste en una pared semipermeable la cual deja pasar ciertos compuestos) y luego pasa por el túbulo renal. (figura 3)

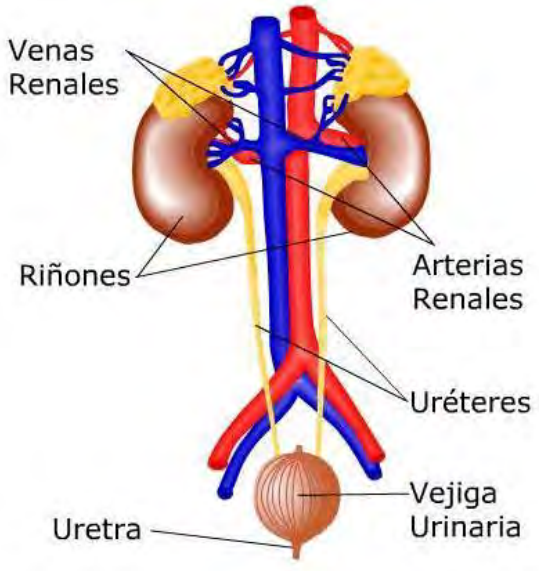


Fig. 1 Aparato Urinario

ISSN: 2594-1011

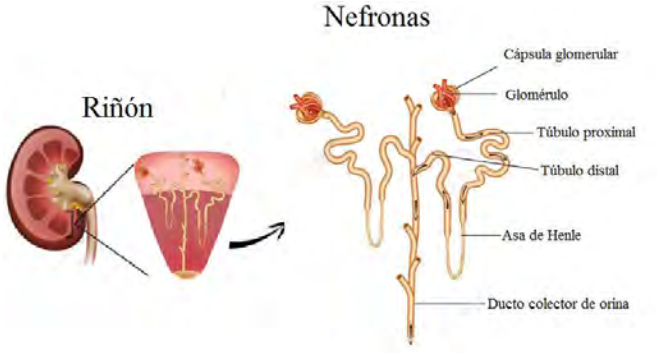


Ilustración 2 Las nefronas en conjunto son las encargadas de la filtración y estas mismas son las que conforman el riñón

El principio de filtración, es el uso de presión para obligar a los líquidos y los solutos a que atraviesen una membrana, es el mismo en los capilares glomerulares que en el resto de los capilares del cuerpo sin embargo, el volumen de líquido filtrado por el corpúsculo renal (ilustración 3)es mucho mayor que en otros capilares, debido a tres razones:

1. Los **capilares glomerulares** tienen una gran superficie para la filtración porque son largos y extensos **30-40 mm** y su radio es variable correspondiente a cada sección.

2. La membrana de filtración es delgada y porosa. A pesar de tener varias capas, su espesor es solo de 0,1 μm. Los capilares glomerulares también son 50 veces más permeables que los capilares de la mayor parte de los tejidos, principalmente, debido a sus grandes

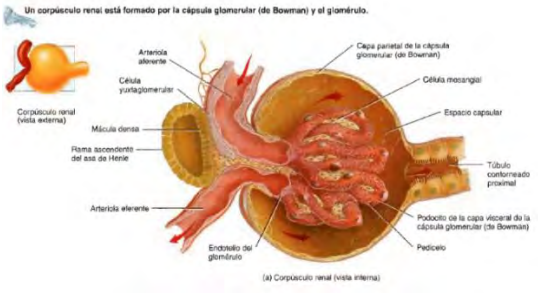


Fig 3 Capsula de Bowman, aquí es donde por medio de la osmosis los liquidos con solutos pasan al tubulo renal.

3. fenestraciones.

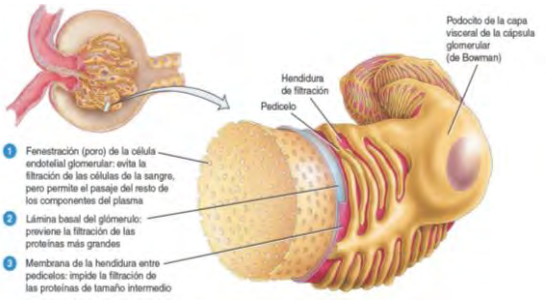


Fig 3 Tubulo renal, exponiendo las capas del mismo

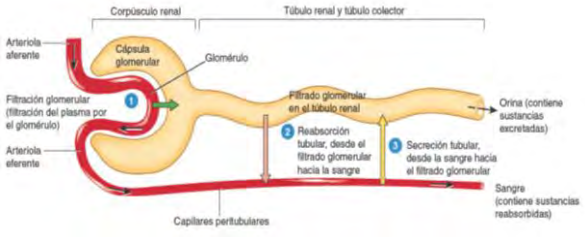


Fig 4 Proceso de filtracion

4. La presión en el capilar glomerular es alta. Debido a que el diámetro de la arteriola eferente es menor que el de la arteriola aferente, la resistencia al flujo sanguíneo fuera del glomérulo es elevada (Ilustración 5). Como resultado, la presión sanguínea en los capilares glomerulares es bastante más alta que en los capilares de cualquier otro sitio del cuerpo.

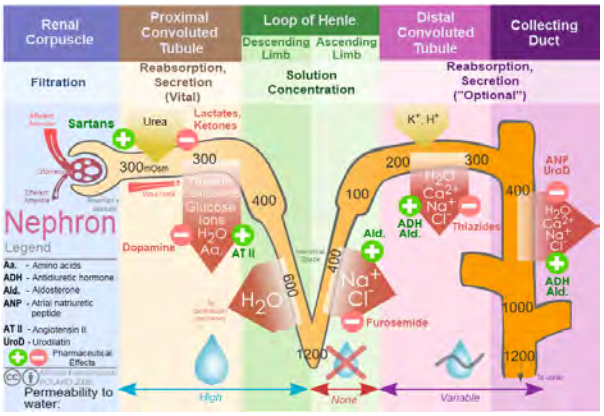


Fig 5 Trayecto en el túbulo renal haciendo énfasis en las distintas propiedades de todo el túbulo renal (como cambio de permeabilidad, cambio del ancho de los poros, etc)

II. METODOLOGÍA

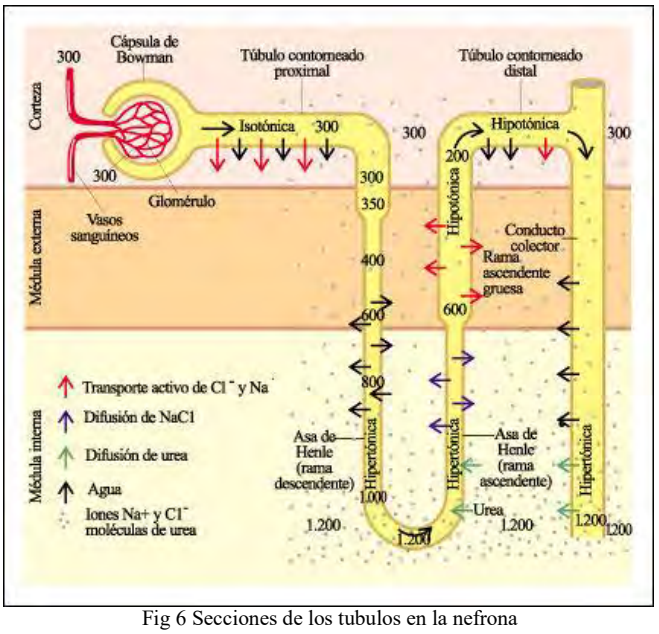


Fig 6 Secciones de los tubulos en la nefrona

El problema de la filtración en el túbulo proximal podemos abordarlo mediante la ecuación de difusión, bajo este enfoque tenemos la ecuación que modela la difusión, la cual es:

$$\nabla^2\phi(r,\theta,z,t) = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\phi(r,\theta,z,t) \qquad (1)$$

Ilustración 7Esquema de las partes de la nefrona, en este caso nosotros trabajaremos la difusión en el túbulo contorneado proximal, debido a que esta sección es un capilar, su geometría es muy próxima a la de un cilindro.

Ahora para expresar el operador laplaciano ∇^2 expresado en coordenadas cilíndricas aplicado a ϕ es:

$$\nabla^2\phi(r,\theta,z,t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi \qquad (2)$$

Y la ecuación diferencial parcial toma la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\phi(r,\theta,z,t) \quad (3)$$

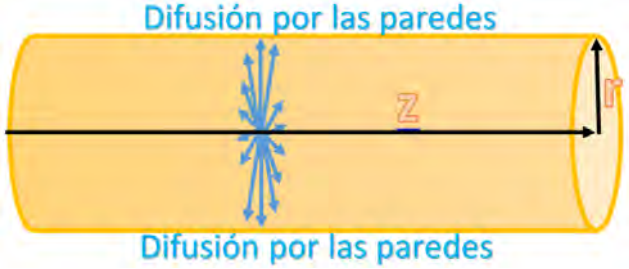


Fig 8 Esquema de una sección de túbulo proximal. La difusión ocurre en las paredes del túbulo proximal y la concentracion de Iones (Ka^+ y Cl^+) decrece

Ahora "visualizando" el problema la concentración en la dirección z será diferente al inicio y al final.

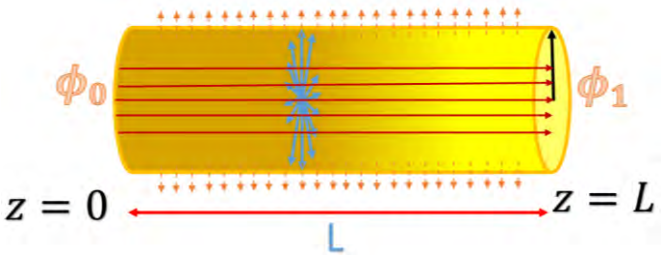


Fig. 9 La filtración en el túbulo proximal contorneado se da en las paredes, la dirección del flujo es hacia la derecha y con el degradado hacemos notar que la concentración de iones va disminuyendo gradualmente, al final del proceso lo último que quedara seráorina y quedara depositada en la vejiga para su excreción del cuerpo.

Pero esto matemáticamente nos da un problema muy grande, debido a que las condiciones del problema las soluciones de nuestras ecuaciones no nos darían mucha información, sin embargo, podemos dividir el problema en 2 sub problemas:

1. Una sección del túbulo proximal contorneado en el cual la concentración NO cambie en los extremos
2. Una sección del túbulo proximal contorneado en el cual la concentración SI cambie en los extremos

Sabemos que fisiológicamente hablando esto no es posible, sin embargo, matemáticamente es posible, a esto se le conoce como el problema de Dirichlet. Y se hace mediante el cambio de variable:

$$\phi(r,\theta,z,t) = v(r,\theta,z,t) + \psi(z)$$

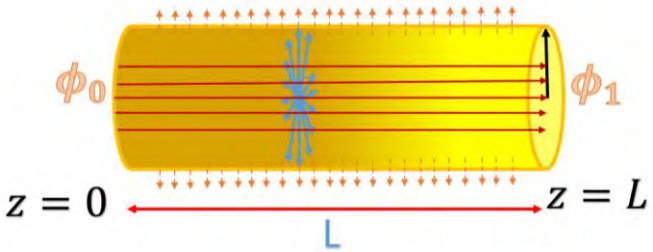


Fig 10 Problema completo de Dirichlet, tambien sirve para ejemplificar que mientras Z crece la concentración de solutos disminuye, dejando al final solo la orina que va a ir depositada a la vejiga.

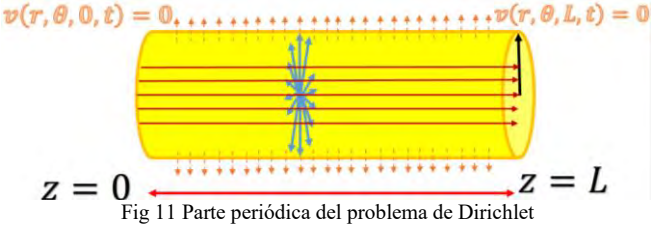


Fig 11 Parte periódica del problema de Dirichlet

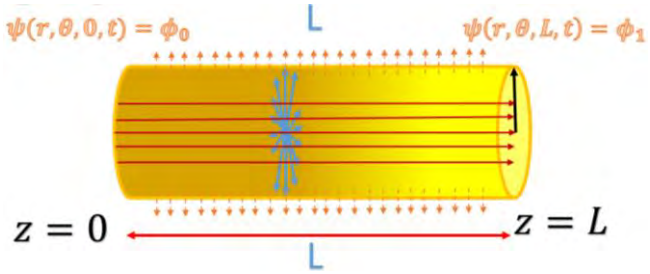


Fig 12 Parte no periódica en el problema de Dirichlet

Aplicando la ecuación de difusión a nuestro modelo:

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi \quad (4)$$

Aplicando nuestro cambio de variable

$$\nabla^2\big(v(r,\theta,z,t)+\psi(z)\big)=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\,\big(v(r,\theta,z,t)+\psi(z)\big) \quad (5)$$

$$\nabla^2\big(v(r,\theta,z,t)\big)+\nabla^2\psi(z)=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\,\big(v(r,\theta,z,t)\big)+\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\psi(z) \quad (6)$$

Distribuyendo estos dos términos

$$\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(z)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi(z)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial t}+\frac{1}{D}\frac{\partial\psi(z)}{\partial t} \quad (7)$$

Debido a que la función $\psi=\psi(z)$, es decir únicamente depende de z, todas las parciales que no tengan que ver con z, serán cero, así tendríamos:

$$\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial t} \quad (8)$$

Así ahora tenemos básicamente 2 problemas:

1. $\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v(r,\theta,z,t)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial v(r,\theta,z,t)}{\partial t}$ (9)
2. $\frac{\partial^2\psi(z)}{\partial z^2}=0$ (10)

Para resolver el problema 1 debemos aplicar el método de separación de variables, asi que proponemos que $v(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)$, asi que sustituyendo esto tenemos:

$$\frac{\Theta(\theta)Z(z)T(t)\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\Theta(\theta)Z(z)T(t)\partial R(r)}{\partial r}+\frac{R(r)Z(z)T(t)}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{R(r)\Theta(\theta)T(t)\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=\frac{R(r)\Theta(\theta)Z(z)}{D}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (11)$$

Dividiendo por $v(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (12)$$

Para la parte temporal o la variable t:

Sabemos que 2 ecuaciones diferenciales son iguales si y solo si, son iguales a una constante. Por lo tanto:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=-k_t \quad (14)$$

y tenemos como resultado la ecuación:

$$\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-k_t \quad (15)$$

Llevandola a la forma de una ecuación diferencial ordinaria se tiene:

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-Dk_tT(t) \quad (16)$$

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t}+Dk_tT(t)=0 \quad (17)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria y se resuelve por el método de separación de variables y tiene como solución:

$$T(t)=C_0e^{-k_tD} \quad (18)$$

Ahora para la parte en z tenemos:

De la ecuación original

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (19)$$

Despejamos la variable z

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=-\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (20)$$

$$-\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-k_z^2 \quad (21)$$

Por lo que toma la forma:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=-k_z^2 \quad (22)$$

Nuevamente la llevamos a la forma de una ecuación diferencial ordinaria y tenemos:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=-k_z^2\,Z(z) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}+k_z^2\,Z(z)=0 \quad (24)$$

Y esta vez es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y tiene como solución:

$$Z(z)=C_1\cos(k_z z)+C_2 sen(k_z z) \quad (25)$$

Para la parte radial o la variable r se tiene:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (26)$$

En esta parte es conveniente factorizar del siguiente modo:

$$\frac{1}{R(r)r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (27)$$

Hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}=-\nu^2=-k_\theta^2 \quad (28)$$

También por otra parte recordemos que cada uno de los términos es igual a su contraparte constante, es decir:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=-k_z^2 \quad \& \quad \frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-k_t \quad (29)$$

Asi la ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{1}{R(r)r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]-\frac{1}{r^2}\nu^2-k_z^2=-k_t^2 \quad (30)$$

$$\frac{1}{R(r)r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]-\frac{1}{r^2}\nu^2+k_t^2-k_z^2=0 \quad (31)$$

Multiplicando por r^2 se tiene:

$$\frac{r}{R(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+(r^2(k_t^2-k_z^2)-\nu^2)=0 \quad (32)$$

Ahora multiplicamos por $R(r)$

$$r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+(r^2(k_t^2-k_z^2)-\nu^2)R(r)=0 \quad (33)$$

Desarrollando el término que contiene a la derivada se tiene:

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+(r^2(k_t^2-k_z^2)-\nu^2)\,R(r)=0 \quad (34)$$

La cual es la ecuación modificada de Bessel y tiene como solución:

$$R(r)=C_3\,J_\nu(k_r r)+C_4\,Y_\nu(k_r r) \quad (35)$$

Ahora para la variable angular θ

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (36)$$

Multiplicamos por r^2 y tenemos:

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{r^2}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{r^2}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{r^2}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (37)$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{r^2}{r}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{r^2}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{r^2}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (38)$$

Despejamos

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}-\frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\frac{r^2}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}+\frac{r^2}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (39)$$

Haciendo el cambio de variable

$$-\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}-\frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\frac{r^2}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}+\frac{r^2}{D}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-k_\theta^2 \quad (40)$$

Asi tenemos:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}=-k_\theta^2 \quad (41)$$

Que reescribimos como la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\Theta^2}+k_\theta^2\Theta=0 \quad (42)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y su solución es:

$$\Theta(\theta)=C_5\cos(k_\theta\theta)+C_6 sen(k_\theta\theta) \quad (43)$$

Asi hemos completado la solución general que será el producto de todas las soluciones:

$$T(t)=C_0 e^{-k_t D} \quad (44)$$

$$Z(z)=C_1\cos(k_z z)+C_2 sen(k_z z) \quad (45)$$

$$R(r)=C_3\,J_\nu(k_r r)+C_4\,Y_\nu(k_r r) \quad (46)$$

$$\Theta(\theta)=C_5\cos(k_\theta\theta)+C_6 sen(k_\theta\theta) \quad (47)$$

Con lo que hemos obtenido la función $v(r,\theta,z,t)$

$$v(r,\theta,z,t)=T(t)\,Z(z)\,R(r)\,\Theta(\theta) \quad (48)$$

$$v(r,\theta,z,t)=C_0 e^{-k_t D}[C_1\cos(k_z z)+C_2 sen(k_z z)][C_3\,J_\nu(k_r r)+C_4\,Y_\nu(k_r r)][C_5\cos(k_\theta\theta)+C_6 sen(k_\theta\theta)] \quad (49)$$

Ahora como hemos elegido por medio del problema de Dirichlet las condiciones de frontera para este problema serán:

$$v(r,\theta,0,t)=0 \quad \& \quad v(r,\theta,L,t)=0$$

Por lo que aplicando estas condiciones al problema tenemos:

$$v(r,\theta,0,t) = C_0 e^{-k_t D}[C_1 \cos(k_z 0) + C_2 sen(k_z 0)][C_3 J_\nu(k_r r) + C_4 Y_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta)] \quad (50)$$

Con lo que tenemos:

$$v(r,\theta,0,t) = C_0 e^{-k_t Dt}[C_1 * 1 + C_2 * 0][C_3 J_\nu(k_r r) + C_4 Y_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta)] \quad (51)$$

Para que la solución sea cero basta que:

$$C_1 \cos(k_z 0) + C_2 sen(k_z 0) = 0 \quad (52)$$

Dado que $sen(0) = 0$ & $\cos(0) = 1$ tendremos que:

$$C_1 + C_2 * 0 = 0 \quad \therefore \quad C_1 = 0 \quad (52)$$

Con lo que hemos reducido la solución general a:

$$v(r,\theta,z,t) = C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r) + C_4 Y_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta)] \quad (53)$$

Ahora analizamos la solución radial, ya que el comportamiento de la solución $Y_\nu(k_r r)$ se comporta tal que:

$$Y_\nu(k_r r) \to \infty, \qquad si\ k_r r \to 0$$

Y la concentración de iones pese a que pudiera ser grande en $r = 0$ no es infinita, asi que $C_4 = 0$, con lo que hemos reducido aún más la solución general, de acuerdo a nuestras condiciones de frontera, y tenemos:

$$v(r,\theta,z,t) = C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta)] \quad (54)$$

Veamos ahora la condición de frontera de simetría azimutal.

$$v(r,\theta,z,t) = v(r,\theta + n\pi,z,t)$$

Tendremos:

$$C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta)] = C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r)][C_5 \cos(k_\theta(\theta + n\pi)) + C_6 sen(k_\theta(\theta + n\pi))] \quad (55)$$

Centrándonos en la solución angular tendremos:

$$C_5 \cos(k_\theta \theta) + C_6 sen(k_\theta \theta) = C_5[\cos(k_\theta \theta)\cos(k_\theta n\pi) - sen(k_\theta \theta) sen(k_\theta n\pi)] + C_6[sen(k_\theta \theta)\cos(k_\theta n\pi) + sen(k_\theta n\pi)\cos(k_\theta \theta)] \quad (56)$$

Para que esta igualdad sea válida, deberemos tomar $k_\theta = 0$, recordemos que la simetría azimutal consiste en que desde el ángulo que lo veamos, la función debe ser la misma.

Con lo que la solución queda como:

$$v(r,\theta,z,t) = C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r)][C_5] \quad (57)$$

III. Resultados

La función que hemos obtenido como resultado es la ec (57):

$$v(r,\theta,z,t) = C_0 e^{-k_t Dt}[C_2 sen(k_z z)][C_3 J_\nu(k_r r)][C_5]$$

Sin embargo, podemos analizar esta solución en la parte longitudinal, la parte radial y la temporal.

La solución temporal nos lleva a una familia de soluciones de la forma:

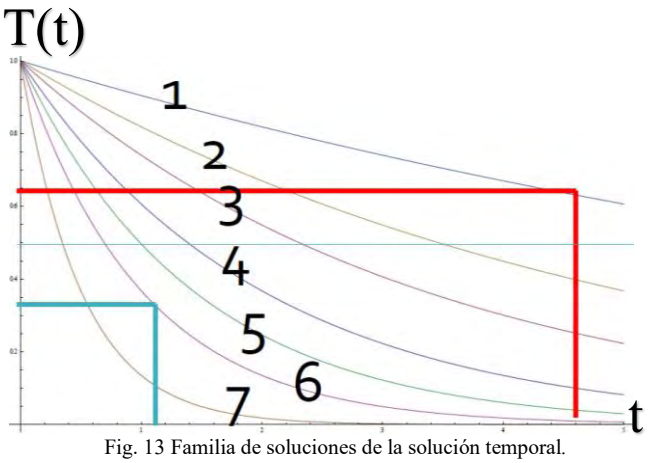


Fig. 13 Familia de soluciones de la solución temporal.

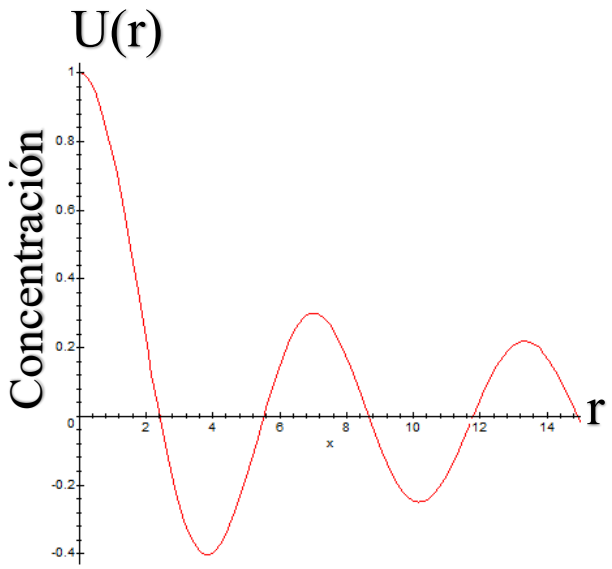
La solución temporal es: $T(t) = C_0 e^{-k_t Dt}$

En esta solución podemos apreciar la "rapidez" con la que ocurre la filtración en la nefrona, inclusive en esta familia de soluciones podemos apreciar ciertas patologías, las curvas 6 y 7 son valores de filtración muy lentos, o saturados, con lo que estaríamos modelando de cierto modo patologías como la hidronefrosis y la disfunción renal.

Para la función 1 la filtración ocurre tan rápido que podemos pensar que en esta nefrona no se están absorbiendo los solutos necesarios, por lo que habrá pérdida de sales y algunos nutrientes, pudiendo visualizar esto como deshidratación.

En cuanto a las curvas 3, 4 y 5 lo que tenemos es un funcionamiento en promedio normal, con lo que estaríamos hablando de nefronas que están sanas.

La solución radial es una función Bessel de orden cero



Esta función la interpretamos como que la cantidad de solutos es mayor en el centro del cilindro y conforme se aproxima a las paredes esta concentración decrece, lo cual tiene sentido

pensando en que es en las paredes que es donde se absorben los solutos.

IV. Discusión

Este modelo nos ha permitido observar que un modelo matemático con ciertas idealizaciones puede aproximarnos a un comportamiento biológico real.
La parte radial da un comportamiento muy adecuado y en cierto modo muy próximo a la biología.
Esperamos que este modelo sirva para el desarrollo de la nefrología como ciencia y que ayude en el área de diagnóstico.

V. Conclusiones

- La solución temporal nos sugiere que mediante la determinación correcta de la constante de separación, podremos visualizar patologías de alguna nefrona o un conjunto de nefronas, lo cual indicaría algún tipo de padecimiento muy específico.
- La solución radial nos está indicando que la concentración es mayor en el centro del túbulo renal, esto se debe a que la concentración de solutos se va perdiendo conforme se aproximan a las paredes, pues estas absorben dichos solutos y lo que queda en el túbulo es orina que va a la vejiga.
- Este modelo nos permite observar ciertos comportamientos en la nefrona, lo que podría ser útil en un futuro, para desarrollar mejores técnicas de diagnóstico en la especialidad de nefrología.

Referencias

[1] D.G. Zill , M.R. Cullen (2006) Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. International Thomson.
[2] G.J. Tortora, B. Derrickson (2013) Principios de anatomía y Fisiologia 13ª Ed. Editorial Medica Panamericana Sa de.

ISSN: 2594-1011

Entendiendo la relatividad con un nuevo enfoque mediante las transformaciones de Lorentz. Las implicaciones del cuervo relativista de Einstein

O. A. Sanvicente, R. Zamorano
[1]Laboratorio de Mediciones Magneticas y Biofisica , ESFM-IPN, México, Ciudad de México.
E-mail: omicronst@hotmail.com

Resumen — **En 1916 A. Einstein escribió "Relativity: The Special and General Theory" donde el proporciona una idea mucho más clara y con un enfoque accesible para todo público de la relatividad especial desarrollada por el mismo y publicada en 1905. En él hace referencia a un Cuervo que 2 observadores miran desde diferentes sistemas de referencia (uno en movimiento y otro en reposo). Sin embargo este da a entender que en ambos casos la trayectoria de vuelo que los 2 observadores en sus respectivos sistemas ven es una recta. Dicho resultado no parece trivial de entender, debido a las consecuencias físicas que tiene la relatividad especial. En este trabajo hemos desarrollado una perspectiva la cual se enfoca en las Transformaciones de Lorentz-Einstein para entender mediante el álgebra y dichas Transformaciones las implicaciones relativistas que se experimentan a velocidades relativistas y ultra-relativistas. Con base en este enfoque mostramos que con el "simple" algebra de bachillerato e identificando adecuadamente las coordenadas espacio temporales, podemos ser capaces de dar a entender todas las implicaciones de la relatividad especial de Einstein, incluidos al cuervo relativista de Einstein, todo esto únicamente con los resultados de las operaciones con la Transformada de Lorentz-Einstein.**

Palabras Clave – **Nuevo enfoque, Relatividad, Transformación de Lorentz.**

Abstract – **In 1916 A. Einstein wrote "Relativity: The Special and General Theory" where he provides a much clearer idea and with an accessible approach for all public of the special relativity developed by him and published in 1905. In it he refers to a Raven that 2 observers look at from different reference systems (one in motion and one at rest). However, this implies that in both cases the flight path that the 2 observers in their respective systems see is a straight line. This result does not seem trivial to understand, due to the physical consequences of special relativity. In this paper we have developed a perspective which focuses on the Lorentz-Einstein Transformations to understand, through algebra and such transformations, the relativistic implications that are experienced at relativistic and ultra-relativistic speeds. Based on this approach we show that with the "simple" high school algebra and properly identifying the temporal space coordinates, we may be able to imply all the implications of Einstein's special relativity, including Einstein's relativist crow, all this only with the results of operations with the Lorentz-Einstein Transform.**

Keywords —***Relativity*, Lorentz transformation, New Point of view**

I. INTRODUCCIÓN

La teoría de la relatividad en cierto modo parece ser solo un conjunto de pensamientos paradójicos entre si, sin embargo esta teoría se ha vuelto una piedra angular dentro de la física, pues ella nos ha permitido adentrarnos en la materia, mediante los colisionadores de partículas. Sin embargo es un área de difícil entendimiento debido a las matemáticas que conlleva el estudiarla de modo riguroso, esto hace que en apariencia solo los físicos puedan entender esta área de la física, sin embargo nosotros pensamos que no es así, debido a que las nociones principales se pueden entender, apoyadas por un desarrollo matemático "sencillo" con solo algebra de bachillerato, esto nos llevara a entender las consecuencias de la relatividad, verificar que en efecto es una teoría física consistente la cual es independiente de nuestros deseos y gustos llevándonos mas cerca de la realidad tal y como es, rompiendo nociones que para nosotros son reales.

Albert Einstein en 1916 escribió "The theory of relativity the special and general theory", libro que escribió debido a que se lo pidieron debido a la popularidad de su teoría, sin embargo está dirigido a un público en general, con esto en mente. El dirige ejemplos muy simples, como: El cuervo relativista. Sin embargo este es un ejemplo que el da por hecho que todos pueden entender.

Aquí damos un enfoque mucho más algebraico a la teoría de la relatividad, sin embargo este enfoque lo puede entender cualquiera que haya tenido un curso de algebra básica, lo que permite entender el ejemplo de Einstein y poner de manifiesto que las cantidades que varían con la Transformación de Lorentz son únicamente las que tienen que ver con la dirección del movimiento (x, y o z). Como consecuencia directa de las Transformaciones de Lorentz.

Más aún podemos ser capaces de entender y construir todo en relatividad mediante únicamente estas trasformaciones.
Mediante un enfoque puramente algebraico, podemos lograr una comprensión más clara y profunda de la relatividad mediante únicamente el uso de las transformaciones de Lorentz, sobre las cuales descansa toda la relatividad especial
Usando el formalismo de las transformaciones de Lorentz verificamos que Einstein tiene razón al decir en su libro "Relativity the special and general theory". Al citar el ejemplo del cuervo que se observa por alguien que va en un tren que dicho cuervo se vera con una velocidad relativa igual, sin embargo en otra dirección. Esto es consecuencia del empleo de las transformaciones de Lorentz.

TEORÍA
Usando los dos postulados de Einstein encontremos una transformación entre marcos de referencia inerciales, tales que se cumplan las leyes de Newton y las leyes de Maxwell
Este problema básicamente es el problema al que se enfrentó Einstein y que publico en 1905 "On the electrodynamics of moving bodies".
Usaremos un sistema fijo K y un sistema en movimiento K'

En el instante t=t^'=0 ambos ejes están alineados, es decir coinciden. De acuerdo al segundo postulado "la velocidad de la luz será la misma en todos los sistemas de referencia inerciales". Imaginemos que un destello de luz se emite en ese momento, el frente de onda vendrá dado por:

En el sistema K
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,t^2 \quad (1)$$
En el sistema K'
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2\,t'^2 \quad (2)$$

Asumamos que $t \neq t'$. Esto quiere decir que cada sistema tiene su propio reloj.
Como los sistemas solo se mueven en la dirección de x, tendremos que:
$$y = y' \quad (3)$$
$$z = z' \quad (4)$$

Buscamos una transformación para encontrar el valor de la posición en el sistema en movimiento. Sabemos que en este caso la transformación galileana $x' = x - vt$ es incorrecta, por lo tanto agreguemos un término de proporcionalidad, que convenientemente llamaremos γ

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (4)$$

Puesto que esta transformación debe ser lineal, no puede depender de x, ni de t. Otra cosa que debemos notar es que el parámetro γ debe ser muy próximo a 1, para que las leyes de la mecánica de Newton sean válidas.
Ahora desde el punto de vista de un observador en el sistema K' queremos obtener la posición en el sistema en reposo. Por lo que del mismo modo, proponemos un factor de proporcionalidad γ'

$$x = \gamma'(x' + vt') \quad (5)$$

Debido a que desde un sistema con respecto al otro cambia la dirección de la velocidad cuando hacemos el cambio de sistema lo único que se verá afectado será la dirección de la misma.
Debido a que las leyes de la física deben ser las mismas en todo sistema de referencia inercial.
$$\gamma = \gamma' \quad (6)$$

De acuerdo al segundo postulado la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, por lo que:

$$ct' = \gamma(ct - vt) \quad (7)$$

$$ct = \gamma(ct' + vt') \quad (8)$$
Dividiendo por c estas ecuaciones tenemos:

$$t' = \gamma\left(t - \left(\frac{v}{c}\right)t\right) \quad (9)$$

$$t = \gamma\left(t' + \left(\frac{v}{c}\right)t'\right) \quad (10)$$

Factorizando t y t':

$$t' = \gamma t\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (11)$$

$$t = \gamma t'\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (12)$$

Sustituimos el valor de t en la ecuación de t' y tenemos:

$$t' = \gamma\left(\gamma t'\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right) \quad (13)$$

A partir de esta relación podemos eliminar t' y expresamos la diferencia de cuadrados.
$$1 = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (14)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16)$$

Así la expresión para calcular la posición en el sistema en reposo con respecto al sistema en movimiento será:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

Y el tiempo, lo deducimos de las expresiones usadas para encontrar el valor de γ

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c}t\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18)$$

Como $c = x/t$ tenemos tambien que $t = x/c$, sustituyendo esta expresión tendremos:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19)$$

Y para el caso contrario es decir x, t tendremos:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (20)$$

Y

$$t = \frac{t' + \frac{vc}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21)$$

Con lo que tendremos que las transformaciones entre sistemas en movimiento serán:
Para hacer cálculos de la posición espacio temporal desde un sistema en movimiento

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (22)$$

$$y' = y \quad (23)$$

$$z' = z \quad (24)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (25)$$

Y para hacer cálculos de la posición espacio temporal desde un sistema en reposo que observa a un sistema en movimiento.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (26)$$

$$y = y' \quad (27)$$

$$z = z' \quad (28)$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (29)$$

A esto se le llaman las Transformaciones de Lorentz.

II. METODOLOGÍA

Para probar la aseveración de Einstein debemos primero visualizar el vuelo del ave como una trayectoria con puntos coordenados (x,y) en un tren a velocidades no relativistas

Fig1 Cuervo en vuelo dibujando una trayectoria.

Ahora agreguemos un observador en movimiento en un MEGA Hyper Loop, el cual se estará moviendo a velocidades relativistas.

Fig 2 Cuervo en vuelo siendo observado por una persona dentro del tren a 0,7 c

Dicho observador medira puntos distintos (x',y'), debido a los efectos relativistas que se dan al estar moviéndose a velocidades comparables con la velocidad de la luz. Para verificar esto hagamos las transformaciones de Lorentz pertinentes a este caso.
Usando las ecuaciones:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (22)$$

$$y' = y \quad (23)$$

$$z' = z \quad (24)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (25)$$

Recordemos que solo estamos visualizando la trayectoria del cuervo, con esto podemos asociar a ese movimiento una ecuación de la recta, para este caso tomemos:

$$y = -x \quad (30)$$

Que es la ecuación de la recta que pasa por el origen a exactamente 45°. Con lo que generaremos el conjunto de puntos:

$t[\mu s]$	$x[m]$	$y[m]$
0	0	0
1	-10	10
2	-20	20
3	-30	30
4	-40	40
5	-50	50
6	-60	60
7	-70	70

Tabla 1 Se exhiben en esta tabla los valores obtenidos para el vuelo del cuervo.

Ahora a estos puntos les aplicaremos la Transformada de Lorentz, para obtener las coordenadas que observaría una persona dentro del tren que viaja a $0,7c$ En este caso solo hacemos uso de las transformaciones en (x,y,t)
Es decir, tomaremos cada uno de los puntos y los transformaremos como:

$$x \to x'$$
$$y \to y'$$
$$t \to t'$$

III. Resultados

Una vez aplicadas las Transformaciones de Lorentz, lo que obtenemos es:

$t' = [\mu s]$	$x'[m]$	$y'[m]$
1.4327	-308	10
2.8653	-616	20
4.298	-924	30
5.7307	-1232	40
7.1633	-1540	50
8.596	-1848	60
1.0029	-2156	70

Tabla 2 Conjunto de puntos creados a partir de la Transformación de Lorentz

Donde vemos un cambio significativo en el tiempo, aproximadamente un cuarenta por ciento más lento pasa para este observador en el tren, mientras que vemos un cambio dramático en la posición x', cambiando en un factor multiplicativo y un orden de magnitud mayor. Por otro lado también observamos que en la coordenada y el cambio es imperceptible, en otras palabras no hay cambio alguno.
Mientras que la ecuación de la recta que describe el movimiento del cuervo para el observador en el tren, será:

$$y = -0,0108x + 6,67$$

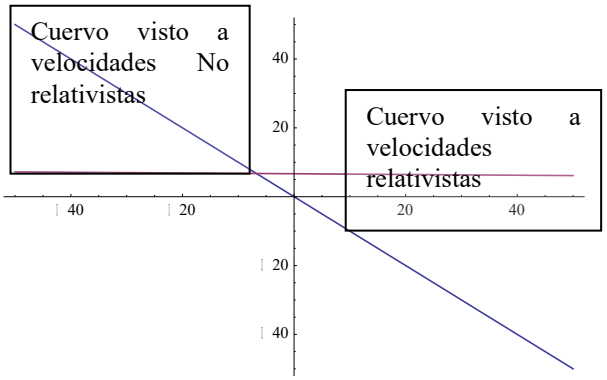


Fig 3 Comparación de las trayectorias del cuervo, en azul se observa desde un sistema en reposo y en morado se observa desde un tren que viaja a una velocidad de 0,7 c

IV. Discusión

En efecto solo con las Transformaciones de Lorentz somos capaces de abordar problemas que no son evidentes. Sin embargo, este nuevo enfoque de transformar punto a punto nos permite aproximarnos de una manera mas amigable a la relaividad, puesto que usa nuestro conocimiento en distintas áreas, haciendo que estas converjan en el aprendizaje de esta nada evidente teoría.

.

V. Conclusiones

- El poder visualizar que el cuervo cambia de dirección es una consecuencia fuerte de la relatividad, debido a que cambia de dirección según desde donde se le esté mirando, esto va en contra de toda intuición "natural" es decir con nuestra experiencia en el día a día.

- Podemos verificar que únicamente con las transformaciones de Lorentz podemos saber todas las consecuencias de la relatividad, en otras palabras, es ahí donde se encuentra el núcleo central de la relatividad especial y por tanto es lo único que realmente necesitamos aprender, para poder visualizar sus consecuencias
- Mediante este tipo de análisis, reduciendo todo a las transformaciones de Lorentz, es más fácil comprender la consecuencia de la relatividad.
- Este análisis también permite verificar mediante gráficas y un poco de geometría analítica las consecuencias de la relatividad especial.
- En efecto se verifica lo que Einstein dijo en su libro: "Encontraremos que el movimiento del cuervo será uno diferente, con velocidad y dirección diferentes, pero aun será uniforme y en una línea recta"
- Un análisis sencillo con solo operaciones algebraicas nos permite observar las dramáticas consecuencias de la teoría de la relatividad especial.

REFERENCIAS

[1]. A. Einstein "On the electrodynamics of moving bodies", Annalen Phys. 17 (1905) 891-921.

[2] A. Einstein "Relativity: The Special and General Theory" Methuen & Co. (1920)

[3] Shahen Hacyan. (2013). Relatividad para estudiantes de física. México: Fondo de Cultura Económica.

[4] R. Zamorano (2018). Notas para el curso de "Relatividad Especial"

[5] Landau L. Rumer Y. ¿Qué es la teoría de la relatividad?

ISSN: 2594-1011

Emission varying at aging in ambient air of ZnO:Ag nanocrystals obtained by ultrasonic spray pyrolysis

Erick Velázquez Lozada[1], Tetyana. Torchynska[2]
[1]SEPI – ESIME-IPN, Ciudad de México, México
[2]ESFM – IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 54804 E-mail: evlozada5@yahoo.com.mx

Resumen — **Microscopía electrónica de barrido (SEM), difracción de rayos X (XRD) y fotoluminiscencia (PL) se han aplicado al estudio de las propiedades estructurales y ópticas de los nanorods de ZnO:Ag crecidas mediante el método de pirólisis por pulverización ultrasónica (USP). La variación de temperatura y tiempo en el crecimiento de las películas de ZnO:Ag permiten modificar la fase del ZnO del amorfo al cristalino, cambiar el tamaño de los nanorods de ZnO:Ag y variar sus espectros de fotoluminiscencia. Al aumentar la duración del proceso a 10 minutos, la recristalización de ZnO y la oxidación adicional tienen lugar a la temperatura de crecimiento, que es más efectiva, a 450^0 C que a 400^0 C. XRD muestra que la fase cristalina apareció es wurzita con los parámetros de red cristalina hexagonal igual a a = 3.2498 Å y c = 5.2066 Å. El tamaño de los nanocristales de ZnO se estimó sobre la base de los resultados de SEM. Este tamaño es igual a 50 - 150 nm en la dependencia de la duración de la cristalización. Los espectros de PL de nanorods de ZnO:Ag son complejos y pueden representarse como una superposición de bandas PL elementales con los picos en los rangos espectrales: 2.90 - 3.25 eV (I), 2.10 - 2.80 eV (II) y 1.45 - 1.61 eV (III).**

Palabras Clave – ***ZnO:Ag, Nanorods, USP, Fotoluminiscencia***

Abstract — **Scanning electronic microscopy (SEM), X ray diffraction (XRD) and photoluminescence (PL) methods have been applied to the study the structural and optical properties of ZnO:Ag nanorods prepared by the ultrasonic spray pyrolysis (USP) method. The temperature and time variation at the growth of ZnO:Ag films permits modifying the ZnO phase from the amorphous to crystalline, to change the size of ZnO:Ag nanorods as well as to vary their photoluminescence spectra. With increasing the process duration to 10 min the ZnO re-crystallization and additional oxidation take place at the growth temperature, which is more effective at 450 ºC than at 400 ºC. XRD show that crystal phase appeared is wurzite with the parameters of hexagonal crystal lattice equal to a = 3.2498 Å and c = 5.2066 Å. The size of ZnO nanocrystalls was estimated on the base of SEM results. This size was equal to 50 – 150 nm in the dependence on crystallization duration. PL spectra of ZnO:Ag nanorods are complex and can be represented as a superposition of elementary PL bands with the peaks in the spectral ranges: 2.90 – 3.25 eV (I), 2.10 – 2.80 eV (II) and 1.45 – 1.61 eV (III).**

Keywords — ***ZnO:Ag Nanorods, USP, Fotoluminescence***

I. Introducción

Zinc oxide (ZnO) nanocrystals (NCs) with wide band gap energy (3.37 eV) have attracted great attention due to exceptional exciton properties (high exciton binding energy equal to 60 meV at 300K) and a number of deep levels that emit in the whole visible range and, hence, can provide intrinsic "white" light emission. ZnO NCs are promising candidates for the different optoelectronic applications such as light emitting diodes [2-7]. The control of the ZnO defect structure in these nanostructures is a necessary step in order to improve the device quality. Since the structural imperfection and defects generally deteriorate the exciton related recombination process, it is necessary to grow the high quality films for efficient light-emitting applications. The ultrasonic spray pyrolysis (USP) method is a simple, inexpensive, non-vacuum and a low temperature technique for the film synthesis [8]. It will be interesting to study the optical emission of the USP produced ZnO nanostructures doped with Ag versus temperature in order to identify the best regimes for obtaining bright emitting NCs and the nature of optical transitions.

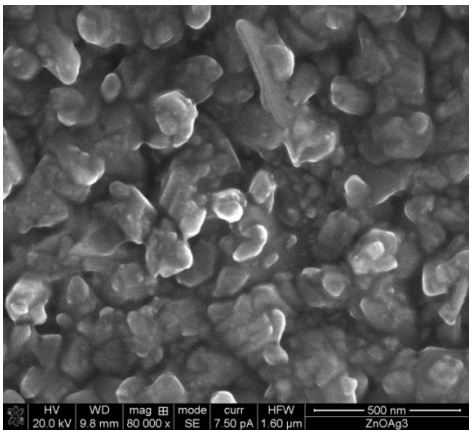
II. Experimental details

ZnO:Ag thin solid films were prepared by the USP technique on the surface of soda-lime glass substrate for the substrate temperatures 400^0 C and different deposition times of 3, 5 and 10 min. Using this technique the nanoparticle's size can be easily controlled by changing a concentration of starting solution and the atomization parameters. The deposition system includes a piezoelectric transducer operating at variable frequencies up to 1.2 MHz and the ultrasonic power of 120 W. ZnO:Ag thin solid films were deposited from a 0.4 M solution of zinc (II) acetate [Zn(O2CCH3)2] (Alfa), dissolved in a mix of deionized water, acetic acid [CH3CO2H] (Baker), and methanol [CH3OH] (Baker) (100:100:800 volume proportion). Separately, a 0.2 M solution of silver nitrate [Ag(NO3)] (Baker) dissolved in a mix of deionized water and acetic acid [CH3CO2H] (Baker) (1:1 volume proportion) was prepared, in order to be used as doping source. A constant [Ag]/[Zn] ratio of 2 at. % was applied at the ZnO Ag film preparation. The morphology of ZnO:Ag films has been studied using the scanning electron microscopy (SEM) Dual

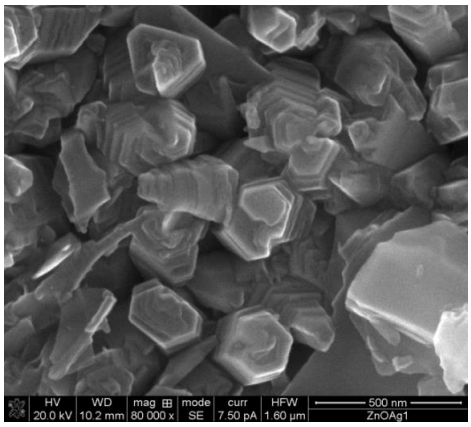
Beam, FEI brand, model Quanta 3D FEG with field emission gun. PL spectra were measured in the temperature range 10-300K at the excitation by a He-Cd laser with a wavelength of 325 nm and a beam power of 20 mW at 300K using a PL setup on a base of spectrometer SPEX500 described in [9-11].

III. Experimental Results and Discussion

SEM images of the typical ZnO:Ag nanorods (NRs) obtained at the deposition times of 3 and 10 min and the substrate temperatures 400^0 C are presented in figure 1. It is clear that the ZnO nanoroads have the hexagonal cross section and the road orientation along the c axis. The cross section size of ZnO nanoroads increases with the duration of UPS process from 50-70 nm (for the duration of 3min), 100-150 nm (at 5min) and 150-200 nm (at 10 min). PL spectra of ZnO:Ag NRs are shown in figure 2 for all studied samples.



(a)



(b)

FIGURE 1. SEM images of the samples prepared at the substrate temperatures 4000 C and the durations of 3 (a) and 10 (b) min.

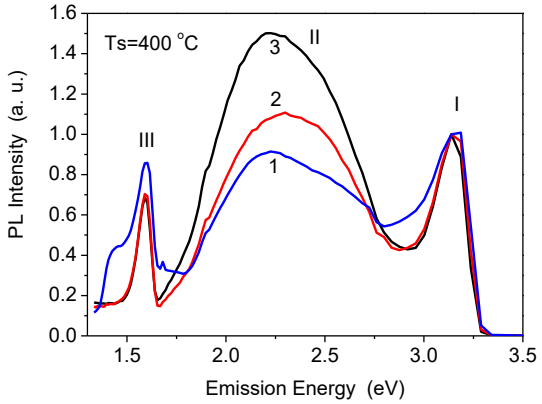


FIGURE 2. PL spectra of samples prepared on the substrate with T = 400° C at the deposition times: 1-3 min, 2-5 min, 3-10 min

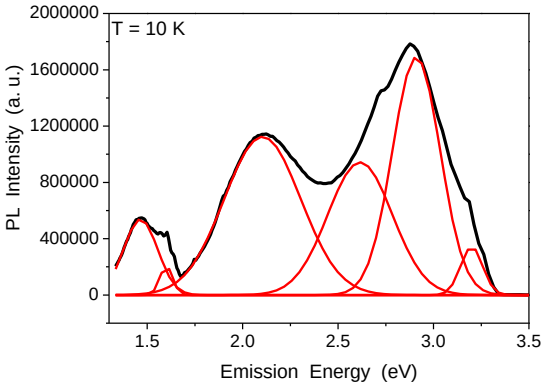


FIGURE 3. PL spectrum deconvolution on six elementary PL bands for the film obtained at 4000 C at the duration 3 min.

It is clear that the PL spectra are complex and can be represented as a superposition of elementary PL bands with the peaks in the spectral ranges: 2.90-3.25 eV (I, II), 2.00-2.50 eV (III, IV) and 1.45-1.61 eV (V,VI). The deconvolution procedure has been applied to the PL spectra with the aim to separate the elementary PL bands (Fig.3). The analysis of figures 3 permits to distinguish six elementary PL bands with the peaks at: 3.25 (1), 2.92 (2), 2.75 (3), 2.10 (4), 1.62 (5) and 1.46 (6) eV at 10K (Fig.3). It well known that the UV-visible PL bands (I) in ZnO are near-band-edge (NBE) or exciton emissions [12]. The PL band in the spectral range 2.00-2.50 eV related to the defect emission [12] and the nature of IR PL bands has to be clarified. With increasing the USP duration the intensity of defect (II) related PL bands rose mainly in comparison with the intensity of NBE PL bands (Fig.2). PL spectra of ZnO:Ag NRs measured at different temperature in the range of 10-300K are shown in Fig.4. The same rates of the

variation of PL peak intensities versus temperature have been revealed for the PL bands 1 and 7, as well as for the emission bands 2 and 8 (Fig.4). This fact, as well as the PL peak positions, permits to assign the IR PL bands 7 and 8 to the second order diffraction of the NBE PL bands 1 and 2, respectively [13]. A great variety of luminescence bands in the UV and visible spectral ranges have been detected in ZnO crystals [12]. The near-band-edge (NBE) emission at 3.0-3.37 eV is attributed to the free (FE) or bound (BE) excitons, their LO phonon replicas, such as FE-1LO or FE-2LO, to optical transition between the free to bound states, such as the shallow donor and valence band, or to donor-acceptor pairs [14]. However, the position of the near-band-edge emission at room temperature can vary significantly due to the variation of relative contributions of free exciton emission and phonon replicas [15]. The defect related green PL band in the spectral range 2.40-2.70 eV in ZnO is assigned ordinary to oxygen vacancies [16], Cu impurities [17] or surface defects [18]. The orange PL band with the peak at 2.02-2.10 eV was attributed earlier to oxygen interstitial atoms (2.02 eV) [19] or to the hydroxyl group (2.10eV) [20, 21]. Taking into account that the PL intensity of this PL band increased with raising the USP duration (Fig.2) the assumption that the corresponding defects are related to oxygen interstitial atoms (or to the hydroxyl group) looks very reliable. Finally, we need to discuss the nature of the near-band-edge PL bands at 2.92 and 3.25 eV. Studied ZnO films were doped by Ag and, therefore, have the acceptor type defects, Ag_{Zn}, which were formed when the Ag atoms substitute Zn atoms in the ZnO crystal lattice. The intensity of 2.92 eV PL band decreases essentially with temperature and this PL band and its IR second-order diffraction peak (1.46eV) disappeared completely at 200K (Fig.4).

Thus it is possible to assume that this PL band (2.92 eV) owes to emission of the acceptor bound excitons (ABE), involving the acceptor Ag_{Zn}, or its complexes such as donor-acceptor pairs, in the ZnO:Ag nanorods. The thermal decay of the 2.92 eV PL intensity is assigned to the thermal dissociation of ABE to free exciton. In this case the 3.25 eV PL band, which dominates in the room temperature PL spectrum (Fig.4) can be attributed to the LO phonon replica of FE emission.

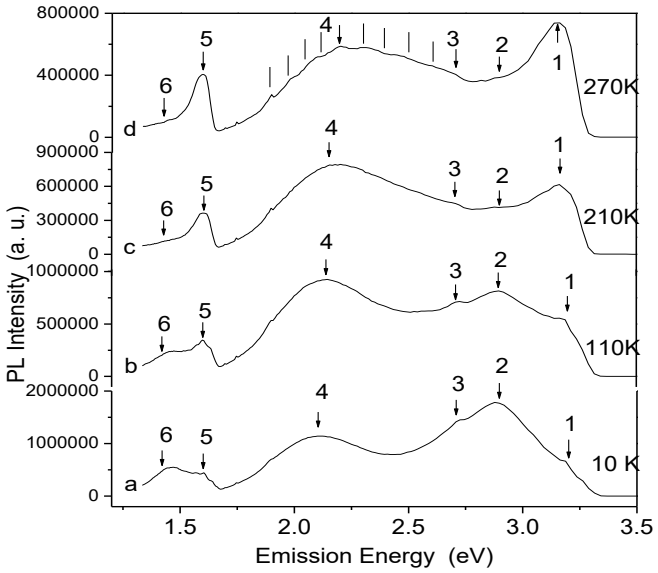


FIGURE 4. PL spectrum variation with temperature for the simple prepared at the duration 5 min.

IV. CONCLUSIONS

ZnO:Ag nanorods with hexagonal structures have been successfully synthesized by the USP method. The PL spectra of the ZnO:Ag NRs over the temperature range from 10 K to 300 K have been investigated. Temperature-dependent PL spectra show that the IR emissions correspond to the second-order diffraction of the NBE emissions. The study of NBE PL temperature dependences reveals that ABE and its second-order diffraction peak disappeared when the temperature higher than 200 K. The attenuation of the ABE peak intensity is ascribed to the thermal dissociation of ABE to free exciton. The PL bands, related to the LO phonon replica of free exciton and its second-order diffraction, dominate in the PL spectra at room temperature that testifies on the high quality of the ZnO:Ag films prepared by USP.

REFERENCES

[1] S.J. Pearton, D.P. Norton, K. Ip, Y.W. Heo, T. Steiner, Prog. Mater. Sci. 50, 293 (2005).
[2] M.H. Koch, P.Y. Timbrell, R.N. Lamb, Semicond. Sci. Technol. 10, 1523 (1995).
[3] K. Vanheusden, C.H. Seager, W.L. Wareen, D.R. Tallant, J. Caruso, M.J. Hampden-Smith, T.T. Kodas, J. Lumin.75 , 11 (1997).
[4] R. Scheer, T. Walter, H.W. Schock, M.L. Fearheiley, H.J. Lewerenz, Appl. Phys. Lett. 63, 3294 (1993).
[5] Y. Chen, D.M. Baghall, H. Koh, K. Park, K. Hiraga, Z. Zhu, T. Yao, J. Appl. Phys. 84, 3912 (1998).
[6] Y.B. Li, Y. Bando, D. Golberg, Appl. Phys. Lett. 84 , 3603 (2004).
[7] J. Ding, T.J. McAvoy, R.E. Cavicchi, S. Semancik, Sens. Actuat. B 77 , 597 (2001).
[8] W. Tang, D.C. Cameron, Thin Solid Films 238, 83 (1994).

[9] M. Dybic, S. Ostapenko, T.V. Torchynska, E. Velazquez Lozada, Appl. Phys. Lett. 84 (25), 5165 (2004)
[10] T. V. Torchynska, A.I. Diaz Cano, M. Dybic, S. Ostapenko, M. Mynbaeva, Physica B, Condensed Matter, 376-377, 367 (2006)
[11] T.V. Torchynska, J. Palacios Gomez, G.P. Polupan, F.G. Becerril Espinoza, A. Garcia Borquez, N.E. Korsunskaya, L.Yu. Khomenkova, Appl. Surf. Science, 167, 197-204 (2000).
[12] A. B. Djuris, A.M.C. Ng, X.Y. Chen. Progress in Quantum Electronics 34. 191-259 (2010).
[13] J. Lv, Ch. Liu, W. Gong, Zh. Zi, X. Chen, K. Huang,T. Wang, G. He, Sh. Shi, X. Song, Zh. Sun, Optical Materials, 34, 1917 (2012).
[14] T. Mahalingam, K.M. Lee, K.H. Park, S. Lee, Y. Ahn, J.Y. Park, K.H. Koh, Nanotechnology 18 , 035606 (2007).
[15] T. Voss, C. Bekeny, L. Wischmeier, H. Gafsi, S. Borner, W. Schade, A.C. Mofor, A. Bakin and A. Waag, Appl. Phys. Lett. 89, 182107 (2006).
[16] M.K. Patra, K. Manzoor, M. Manoth, S.P. Vadera, N. Kumar, J. Lumin. 128 (2) 267–272 (2008).
[17] N.Y. Garces, L. Wang, L. Bai, N.C. Giles, L.E. Halliburton, G. Cantwell, Appl. Phys. Lett. 81 (4) 622–624 (2002).
[18] A.B. Djurišic, W.C.H. Choy, V.A.L. Roy, Y.H. Leung, C.Y. Kwong. K.W. Cheah, T.K. Gundu Rao, W.K. Chan, H.F. Lui, C. Surya, Adv. Funct. Mater. 14 856-864 (2004).
[19] X. Liu, X. Wu, H. Cao, R.P.H. Chang, J. Appl. Phys. 95 (6) 3141–3147 (2004).
[20] J. Qiu, X. Li, W. He, S.-J. Park, H.-K. Kim, Y.-H. Hwang, J.-H. Lee, Y.-D. Kim, Nanotechnology 20 155603 (2009).
[21] T.V. Torchinskaya, N.E. Korsunskaya, B. Dzumaev, B.M. Bulakh, O.D. Smiyan, A.L. Kapitanchuk, S.O. Antonov, Semiconductors, 30, 792-796 (1996).

ISSN: 2594-1011

Caracterización de los coeficientes de fricción en tela acrílica elaborada mediante tejido de punto

José Alberto Cortés Martínez[1,*], Edith Cortez Martínez [2], Arturo Fidencio Méndez Sánchez[3], Beatriz Ruiz Santiago[1]

[1]Departamento de Tejidos, ESIT, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[2]Departamento de Ciencias Básicas, ESIT, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[3]Departamento de Física, ESFM, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
[*]E-mail:ecm261078@hotmail.com

Resumen — **Las características estructurales del tejido de punto por recogida o trama, condiciona de forma muy notable su comportamiento durante el uso. De hecho los tejidos de punto por recogida o trama son unos materiales bastante singulares, ello explica el motivo por el cual los tejidos son materiales anisotrópicos, es decir, que sus propiedades son distintas si se determina un tejido de punto por su recogida. Esta particularidad de anisotropía, explica la razón por el cual es tan difícil simular y prever el comportamiento mecánico de los tejidos de punto por recogida.**

En este trabajo de investigación, se determinaron los coeficientes de fricción estática de telas elaboradas mediante tejido de punto a partir de hilos de acrilán adquiridos de dos proveedores mexicanos y sus interacciones con distintos materiales, a saber, tela-tela, tela-madera, tela-aluminio, tela granito y tela-acrílico. Para ello se elaboró el tejido usando una máquina tejedora rectilínea manual galga 12 para obtener las telas a analizar. El interés particular reside en que dos proveedores de hilo pueden presentar variaciones en la calidad del hilo, lo cual se ve reflejado en la calidad del tejido, densidad del tejido y porcentaje de contracción, así como en el buen funcionamiento de la maquinaria textil que se emplea en la producción industrial. Asimismo, se realiza una caracterización primaria para estudios posteriores.

Palabras Clave – **galga, anisótropos, dinamómetro y acrílico**

Abstract −− **The structural characteristics of the knit fabric by collection or weft, conditions very significantly its behavior during use. In fact the knits by collection or weft are quite unique materials, this explains the reason why the fabrics are anisotropic materials, that is to say, that their properties are different if a knitted fabric is determined by its collection. This particularity of anisotropy explains the reason why it is so difficult to simulate and predict the mechanical behavior of knitted fabrics by collection.**

In this research work, the coefficients of static friction of fabrics made by knitting were determined from acrylic yarns acquired from two Mexican suppliers and their interactions with different materials, namely fabric-cloth, wood-cloth, fabric-aluminum, granite-fabric and acrylic-fabric. To this end, the fabric was made using a 12-gauge manual straight weaving machine to obtain the fabrics to be analyzed. The particular interest is that two yarn suppliers can present variations in yarn quality, which is reflected in the quality of the fabric, density of the fabric and percentage of shrinkage, as well as in the good functioning of the textile machinery that is employed in industrial production. Likewise, a primary characterization is made for later studies.

Keywords — **gauge, anisotropic, dynamometer and acrylic**

I. Introducción

La fabricación de ropa de tejido de punto, está clasificada como una actividad económica dedicada principalmente a la fabricación de ropa exterior, como suéteres, blusas, chalecos, faldas, pantalones, corbatas, guantes, gorras, pasamontañas y bufandas. Este tejido utiliza en su mayoría el hilo acrílico 100%, fibra sintética que en cuestiones textiles no es de uso reciente. Pero es de gran importancia debido a la cantidad de prendas que se elaboran en la actualidad. En la encuesta mensual de la industria manufacturera del INEGI [1-2]. Se puede ver que en promedio se elaboraron 93,110 prendas de tejido de punto por mes durante los años 2007-2018 (Véase Fig. 1).

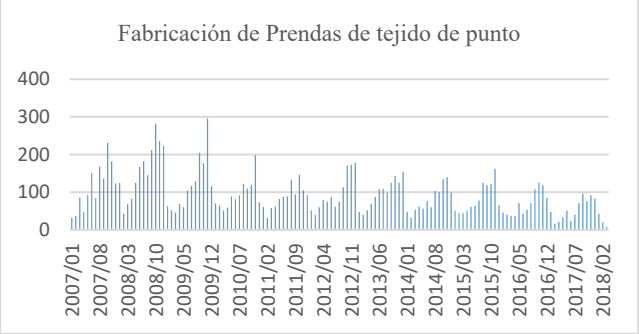


Fig. 1. Encuesta mensual de la industria manufacturera (INEGI) [1-2].

Particularmente, este material se utiliza debido a sus excelentes propiedades como el aislamiento térmico. Asimismo, debido a su geometría, poseen una mejor razón de superficie/volumen, lo que proporciona mayor cobertura con menos fibra y esto favorece que las prendas sean más ligeras. Otro punto importante es la sensación de sequedad lo que es muy útil en la fabricación de medias y calcetines [3]. Además, los acrílicos son muy parecidos a la lana pero son más suaves, los tejidos confeccionados con acrílico pueden plancharse y potencialmente pueden encogerse como la lana. Pero las fibras acrílicas requieren un menor cuidado que la lana. El costo de las telas acrílicas es semejante al de la lana, pero la ventaja de las telas acrílicas es que disminuyen el riesgo de alergias. [4]

Dentro de sus propiedades físicas de los hilos y las telas acrílicas, se puede comentar que posee buena resistencia a la

abrasión y al pilling, así como las propiedades de tenacidad y resilencia que poseen. Por ello, se hacen ideales para el tejido de punto y debido al uso de termoseccionadoras y distintos grado de estiramiento, se pueden generar diversos hilados con distintas características físicas. Lo que evita la necesidad de mezclar las fibras acrílicas con otras fibras artificiales o naturales.

Algunos de los inconvenientes más importantes de las fibras de acrílico, es que puede incendiarse muy fácilmente pues las características de combustión son muy similares a las de los acetatos, esto es, las fibras se reblandecen, se incendian y arden libremente. Además, las telas pueden cargarse electrostáticamente con gran facilidad, lo que propicia que presente gran afinidad a la adherencia de polvo y partículas. Este tipo de problemas se empeora durante el maquinado y elaboración de prendas en donde la tela se ve adherida a las máquinas dificultando la movilidad. [5-9]

En el presente trabajo se realiza un estudio en tejidos de punto fabricado con hilos de acrílico obtenidos de dos distintos proveedores mexicanos. Con la finalidad de obtener los coeficientes de fricción de referencia que servirán para estudios posteriores de cuantificación de la generación de carga triboeléctrica, así como el estudio de la degradación por radiación en este tipo de telas acrílicas.

II. TEORÍA

A. Conceptos de fricción

A la fuerza de fricción que experimentan dos superficies en contacto en movimiento relativo se le conoce como fuerza de fricción dinámica y a la fuerza que se opone al inicio del deslizamiento se llama fuerza de fricción estática. La fuerza de fricción se debe a las imperfecciones entre las superficies en contacto [10], inclusive a nivel atómico y molecular, de ahí que la fuerza electromagnética tome relevancia por lo que es común que efectos triboeléctricos tengan origen durante las pruebas de fricción.

Si se considera un bloque en reposo sobre una superficie horizontal, donde existe una fuerza de tensión (F_s), una fuerza normal (N) y que en este caso es igual al peso (W) del objeto ya que el sistema está en equilibrio (Ver Fig. 1), se conoce que,

$$F_s \leq \mu_s \cdot N \quad (1)$$

Donde μ_s corresponde al coeficiente de fricción estática. Particularmente, la igualdad se cumple cuando la fuerza de fricción alcanza su valor máximo ($F_{s,max}$), en el punto antes de iniciar el movimiento. Esta situación se representa por la ecuación (2),

$$F_{s,max} = \mu_s \cdot N \quad (2)$$

Esta expresión es la que se tomará en cuenta para determinar los coeficientes de fricción en el presente trabajo.

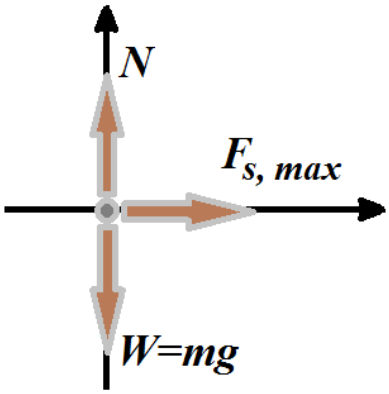


Fig 2. Diagrama de cuerpo libre de un objeto de masa m en reposo bajo la acción de una fuerza de tensión.

Es de mencionar que el coeficiente de fricción dinámica cobra interés ya que el movimiento relativo entre dos superficies en un proceso que ocurre durante la manufactura textil que en este caso es el tejido de punto por recogida o trama 1-1, ya que éste está continuamente en movimiento y rozan contra varios tipos de superficies metálicas como la hebilla, las agujas que son de metal y las fonturas. La complejidad de estos procesos que influyen y que resaltan la importancia de conocer los coeficientes de fricción.

B. Conceptos de elaboración de tejido [11]

Tejido de punto por recogida o trama

Un tejido de punto es aquél, que tiene mallas de derecho en cada uno de sus lados o caras, a diferencia del de una sola cara, que solamente la tiene en uno. Los tejidos de doble cara, por el contrario, deben ser fabricados en máquinas de dos fonturas. Las agujas de una de ellas harán las mallas que aparecerán en una cara, y las de la otra harán las que van a aparecer en la opuesta.
Las mallas tienen su haz (derecho) y su envés (revés), pero cuando se habla de mallas de derecho se hace referencia siempre a las que presentan su haz en la cara observada. Las mallas, vistas por el haz tienen el aspecto de V, y por el envés, el de tejas en corte.

Instrucciones de mando para la fabricación de tejidos

1. Desplazamiento del carro porta levas

La posición de partida del carro porta levas normalmente es de derecha a izquierda (1), ya que se encuentra en posición el carro porta levas.
Se debe revisar si la posición de las fonturas delantera y trasera, en posición “Rib” para poder mover el carro porta

levas de derecha a izquierda, sin que las agujas de las fontura delantera y trasera se encuentren de frente, con la formación de mallas en ambas fonturas (liso a dos fonturas). Ya hecho lo anterior, toca poner las agujas en trabajo y las que van anuladas, este es el momento para hacerlo, las horquillas se suben a su posición de trabajo y se anulan bajando la aguja ayudándose con el talón de la misma, en cuanto las agujas se encuentran en la posición deseada ya se procede a pasar el carro porta levas para rectificar la bajada de la aguja (el punto) ver figura 3.

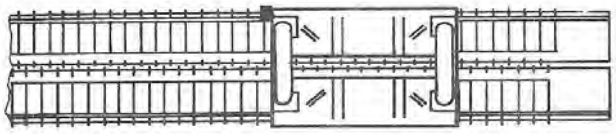


Fig 3. Máquina de tejido, con carro a la derecha.

2. Posición de las fonturas

Para poder empezar un tejido se debe revisar que las fonturas se encuentren en posición "rib" (1) y no en la posición media o interlock (2) para que las agujas no se encuentren de frente y se atore el carro porta levas (Véase Fig. 4), normalmente todas las Máquina tejedoras rectilíneas tienen la capacidad de variar hasta 6 agujas si se va realizar un tejido variado o raqueado que ocupe todos sus pasos del variador, se debe tomar en cuenta la primera aguja del lado derecho de la fontura delantera como el inicio del tejido variado o raqueado.

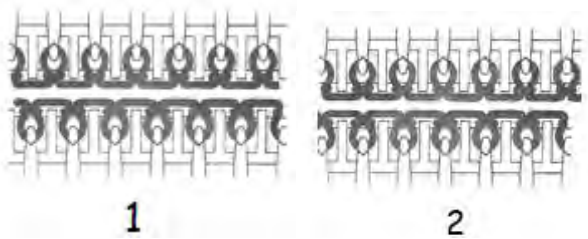


Fig. 4. Posición de las fonturas, la izquierda posición "rib" para iniciar el tejido. Derecha, posición interlock si se inicia el tejido en esta posición se atora el carro.

3. Ensartado del material (hilo)

Para iniciar un tejido en una máquina rectilínea se tiene que ensartar el hilo en forma en la que al alimentar a las agujas se desenvuelva del cono sin que se atore o enrede el hilo (Ver Fig. 5), primero tiene que pasar por las barras (1) y luego por la tensión (2), ya de ahí a l guía-hilo (1a), pasa por un ojillo de porcelana (2a) y la siguiente es la nuez o flecha (3).

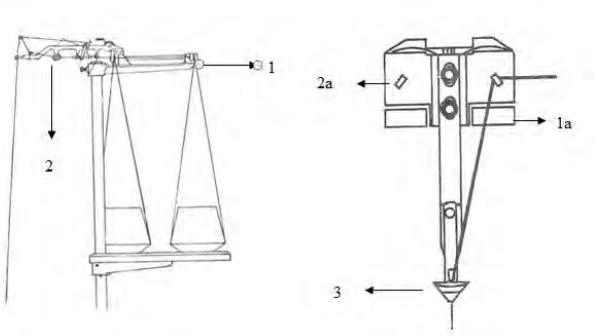


Fig. 5. Ensartado del hilo para alimentar a las agujas.

4. Ajuste de las levas de bajada

Para el ajuste de las levas de bajada se debe de guiar por la regla de graduación (1). Siempre hay que tomar la mitad del total de la graduación, ya ajustando las cuatro levas que se van a utilizar se pasa el carro porta levas sin tela para poder ver el bajón de las agujas, ya que se tiene el punto deseado, se puede montar tejido. La figura 6, muestra un tejido 1-1 (1a) con las cuatro levas parejas al punto 9 ¼ indicado con el número (2) en la regla de la Fig. 6.

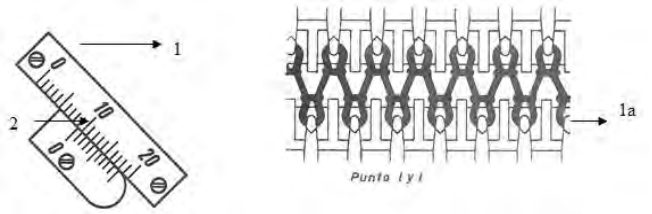


Fig. 6. Ajuste de levas de bajada, izquierda la regla de graduación, derecha, tejido 1-1 (1a) cuatro levas parejas al punto 9 ¼ de la regla de graduación.

5. Montar el tejido

Para iniciar el tejido, se tiene que montar tejido primero en las máquinas rectilíneas manuales y se necesita montar con un peine enhebrado (1). El cual debe de tener las siguientes características (Ver Fig. 7). Debe de ser de la misma galga y del mismo ancho útil de la máquina. Al montar el tejido en la máquina primero, se tiene que determinar el ancho que se va tejer suponiendo que la máquina es de 120 cm de ancho útil y solo se requiere de 90 cm. Se reparte los 30 cm de agujas en ambos lados de las fonturas. Hecho lo anterior, el peine se coloca por la parte inferior del caballete entre las dos fonturas, hasta llegar a la superficie y llegar al final de la nuez o flecha (2). Hecho lo anterior se pasa el carro porta levas, con el punto un poco flojo y con el tejido liso 1-1, al finalizar esto, se colocan los ganchos (3) con el peso adecuado. Una vez realizado todos los pasos mencionados, se tiene listo el montado del tejido.

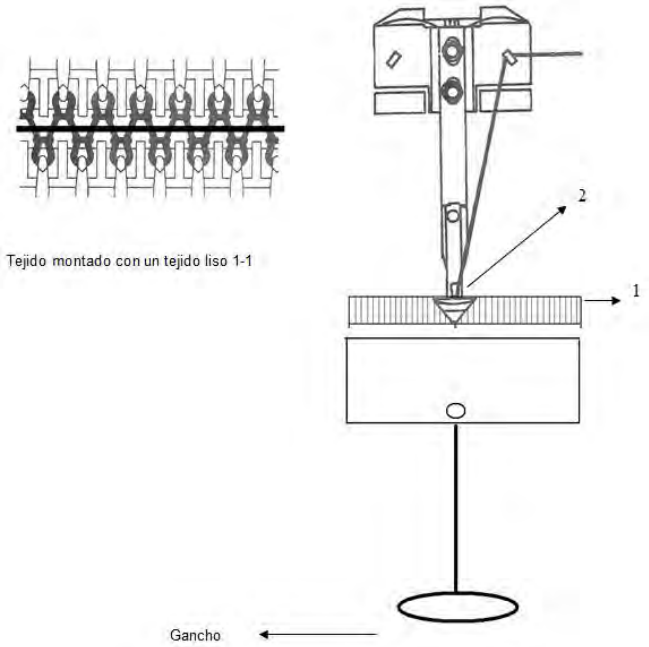


Fig. 7. Montaje del tejido, izquierda, tejido liso 1-1 montado. Derecha montaje con el peine, flecha y pesos inferiores.

Asimismo, en la figura 8 se hace una representación esquemática del trabajo de los cerrojos en una máquina rectilínea, para obtener un tejido de punto liso 1-1.

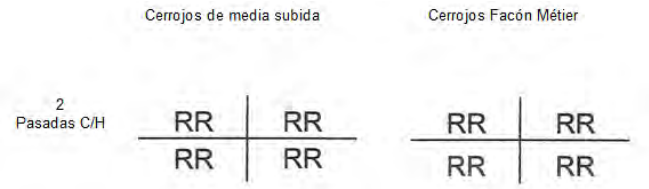


Fig. 8. Representación esquemática del trabajo de cerrojos para un tejido de punto liso 1-1.

Finalmente, en la figura 9 se muestra una representación esquemática del trabajo de las agujas para obtener un tejido de punto liso 1-1.

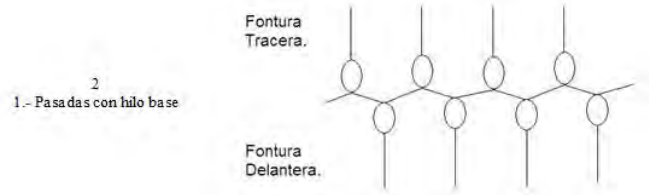


Fig. 9. Representación esquemática del trabajo de las agujas para un tejido de punto liso 1-1.

III. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Para la identificación elemental de los hilos a tejer, primeramente, se eligieron dos marcas comerciales, a saber hilo 100% acrílico 2/30 marca Colomer, color gris Oxford y un segundo hilo 100% acrílico 2/30 color rosa palo, marca Prat. Para ambos materiales se fue determinado el título Nm, empleando la siguiente relación

$$Nm = \frac{K\,L}{P} \tag{3}$$

Donde K es la cantidad de gramos por metro o densidad lineal, L es la longitud medida cuyo valor corresponde a 10mts y P corresponde al peso de hilo de longitud L. la masa se evaluó empleando una balanza digital Explorer Pro cuya resolución es de hasta diezmilésimas de gramo.

Se insertó material 100% acrílico 2/30 color gris Oxford, marca Colomer a la máquina rectilínea modelo Diaman de galga 12 (Ver Fig. 10). El contenido fue de 70 agujas en el telar y se insertó en las agujas. Posteriormente, se realizaron dos pasadas para iniciar el tejido liso 1-1. El tejido se realizó con una serie de valores de pasadas que se muestran en la tabla I.

Figura 10. Máquina manual rectilínea Diaman galga 12.

Al finalizar la última pasada se cortó el material desde la máquina rectilínea, en seguida se midió la longitud de cada pasada en centímetros que corresponde a la columna recién tejida. La columna de datos en reposo de la tabla I, fueron obtenidos dejando la tela extendida durante 24 horas, ya transcurrido el tiempo se toma de nuevo las medidas para observar el cambio que tuvo la tela después del proceso de fabricación.

TABLA I.
RELACIÓN DE PASADAS, TIEMPO Y LONGITUD

Gris Oxford			
Marca: Colomer		RECIEN TEJIDA	EN REPOSO
PASADAS	TIEMPO (seg.)	LONGITUD (cm)	
40	30.44	5.5	5.1
45	31.06	6	5.8
50	35.87	6.5	6.5
55	35.82	7.3	6.9
60	38.36	7.8	7.7
65	40.92	9	8.2
70	49.94	9.8	9.4
75	50.34	10	9.4
80	51.51	11	10
85	56.27	11.3	10.3
90	57.38	12	11.4
95	75.22	13	11.5

Del mismo modo, se insertó el material 100% acrílico 2/30 color rosa palo, marca Prat a la máquina rectilínea Diaman de galga 12 de contenido 50 agujas en el telar y se insertó en las agujas; teniendo listo esto se procedió a realizar dos pasadas para dar iniciar el tejido. El tejido se realizó con una serie de valores de pasadas que se muestra en la tabla II.

TABLA II.
RELACIÓN DE PASADAS, TIEMPO Y LONGITUD

Rosa Palo			
Marca: Prat		RECIEN TEJIDA	EN REPOSO
PASADAS	TIEMPO (seg.)	LONGITUD (cm)	
20	14.1	2.3	2.6
30	20.14	4.8	4.3
40	25.92	6.3	5.7
50	31.64	8	7.1
60	36.28	9.5	8.7
70	43.4	10.9	10.2
80	47.99	12	11.5
90	52.9	13.5	12.7
100	61.6	16	14.8
110	73.55	18.4	17.2
120	67.32	19	17.4
130	77.02	20.3	18.8
140	80.64	22	20.1
150	84.65	23	21.6

Después de la última pasada se cortó el material desde la máquina rectilínea, en seguida se midió la longitud de cada pasada en cm que corresponde a la columna recién tejida. En la columna de datos etiquetada como "en reposo" se obtuvo dejando la tela extendida durante 24 horas, ya transcurrido el tiempo se determinaron las medidas para observar el cambio que tuvo la tela después del proceso. Una vez realizado esto, se determinó la densidad para este tipo de telas, los resultados se detallan en la tabla III.

Finalmente, una vez que se tiene las nuestras de telas elaboradas, se realizaron los experimentos fricción. Para ello, se tomó un trozo de cada tela con medida de aproximadamente 19cm y se colocaron en un soporte para lijas. Una vez insertadas las telas se determinó su masa inicial del soporte y la tela empleando la báscula digital. Ya obtenida la masa inicial del sistema, con ayuda de un dinamómetro de 10 N y Masas de 100 gr, se empezó a medir la fuerza máxima que se necesita antes de que inicie el movimiento. La figura 7 ilustra la realización del experimento. Las muestras se friccionaron en la dirección columna-columna y columna-material. El material se fue cambiando por las superficies de madera, aluminio, acrílico sólido y granito.

Figura 11. Realización del experimento de fricción.

IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la tabla III se presentan las características principales del tejido y del hilo, como el título y la densidad para cada uno de los materiales estudiados. Como se puede observar los títulos evaluados no corresponden a los dados por el proveedor (15), esto trae consigo dificultades al proceso de fabricación del tejido, ya que un valor superior a 15 puede generar el rompimiento de las agujas por que el grosor del hilo es mayor.

TABLA III.
PROPIEDADES DEL HILO Y DE LA TELA

Tipo de acrilán	Características		
	Titulo comercial	Titulo evaluado	Densidad tejido liso 1-1
Colomer	2/30	14.81	7 columnas x 1 pulgada 9 pasadas x 1 pulgada
Prat	2/30	15.15	6 columnas x 1 pulgada 8 pasadas x 1 pulgada

En las gráficas 1-4 se grafica la longitud de tejido como variable dependiente "y" en función del tiempo "x" requerido para la elaboración. Las situaciones que se

consideraron fueron, recién tejida (gráficas 1 y 3), y después del reposo (gráficas 2 y 4). Para esta última etapa se marcaron las longitudes recién tejidas y se volvieron a medir éstas después del reposo. Como se puede ver el comportamiento observado es lineal, por lo que se procedió a realizar los ajustes correspondientes en cada caso. Es de comentar que las máquinas empleadas son manuales por lo que la pendiente corresponde a la velocidad de tejido y esta puede variar respecto a la persona que elabora el tejido. En la tabla IV se resumen estas velocidades de tejido. Como puede verse, las velocidades en reposo son menores que las obtenidas recién tejidas, lo cual se explica por la recuperación o encogimiento de la tela ya que se tejen en mallas.

TABLA IV.
VELOCIDADES DE TEJIDO

Tipo de acrilán	Velocidad de tejido (m/s)	
	Recién tejida	En reposo
Colomer	0.1802	0.1531
Prat	0.2825	0.2614

En las gráficas 5-8, se presentan los resultados de las pruebas de fricción para el material del proveedor Colomer, color gris Oxford. Como era de esperarse aunque se cambian las superficies que se friccionen, el comportamiento es lineal por lo que cada una de estas gráficas se ajustó a una ecuación lineal, la cual se incluye en cada una de las gráficas anteriormente mencionadas. Del mismo modo, en las gráficas 9-12, se presentan los resultados de las pruebas de fricción para el material del proveedor Prat. Las ecuaciones obtenidas con los diferentes materiales se listan en las tablas V y VI. En dichas ecuaciones de ajuste, la pendiente corresponde al coeficiente de fricción en cada caso.

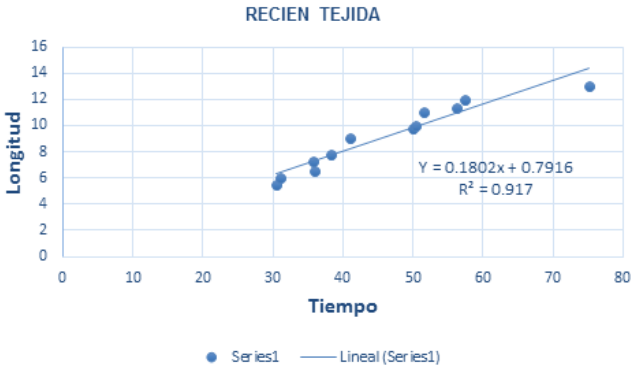
TABLA V.
PRUEBA DE FRICCIÓN DEL TEJIDO DE PUNTO, PROVEEDOR COLOMER, GRIS OXFORD

PRUEBA DE FRICCION	
Tela – Tela	F = 0.4694x + 1.2301
Tela – Madera	F = 0.3967x + 0.0987
Tela – Aluminio	F = 0.3393x - 0.3559
Tela - Acrílico	F = 0.405x - 0.1193

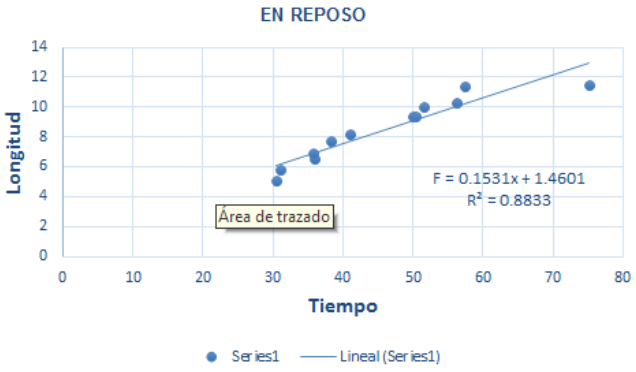
TABLA VI.
PRUEBA DE FRICCIÓN DEL TEJIDO DE PUNTO, PROVEEDOR PRAT, ROSA PALO

PRUEBA DE FRICCION	
Tela – Tela	F = 0.365 N + 0.2857
Tela – Madera	F = 0.3145 N + 0.4148
Tela – Aluminio	F = 0.365 N + 0.2857
Tela - Acrílico	F = 0.4489N - 0.1931

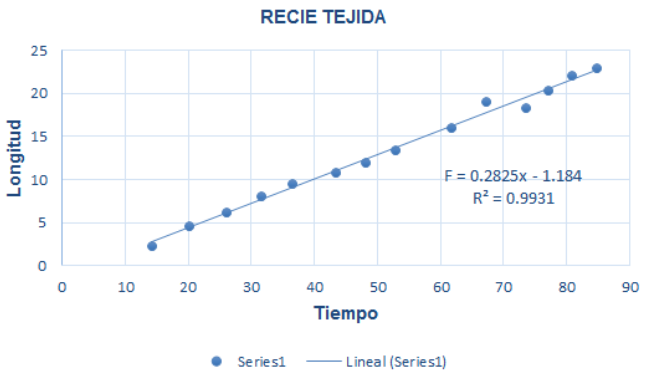
Como puede verse en estas tablas, los coeficientes de fricción son similares para cada caso, lo cual se atribuye al origen del hilo y sus características particulares de elaboración que realiza cada proveedor.



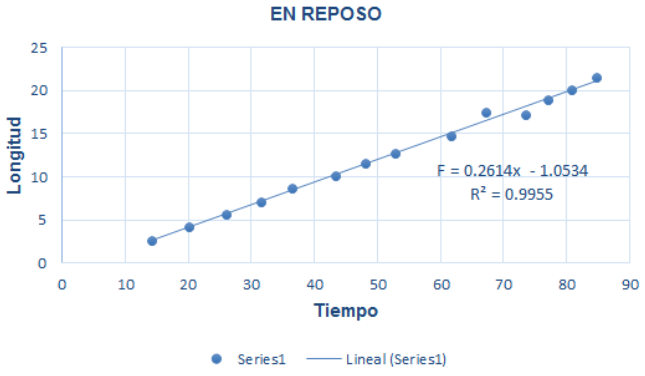
Gráfica 1. Tela tejida de punto color gris Oxford recién tejida



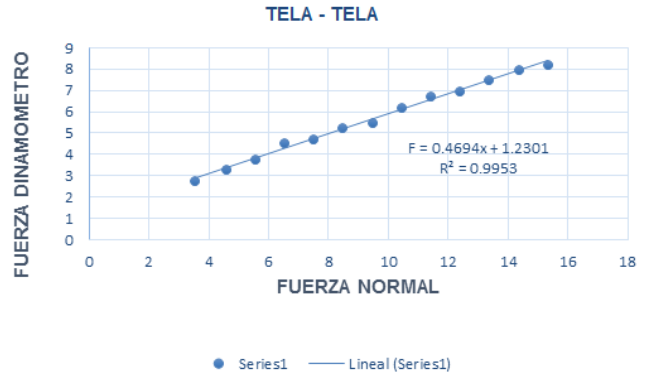
Gráfica 2. Tela tejida de punto color gris Oxford en reposo.



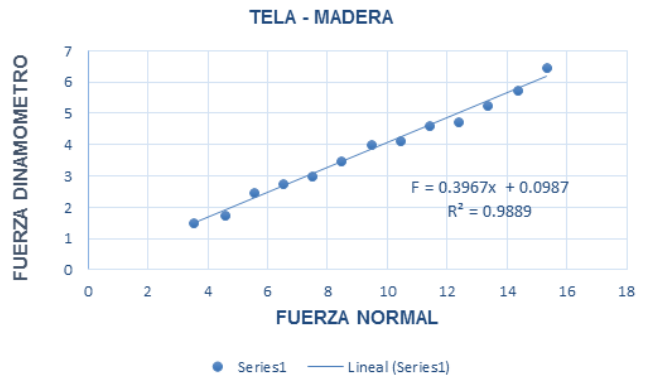
Gráfica 3. Tela tejida de punto color rosa palo recién tejida.



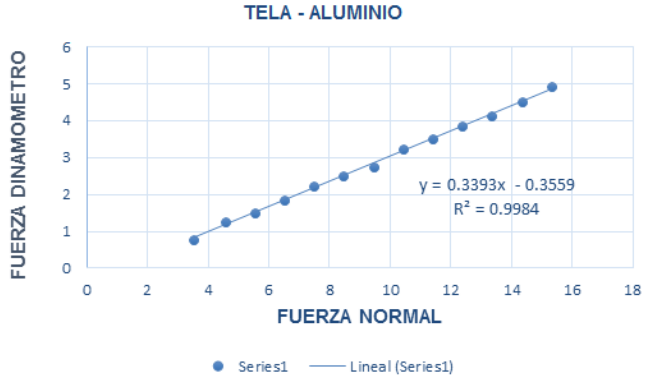
Gráfica 4. Tela tejida de punto color rosa palo en reposo.



Gráfica 5. Tela tejida de punto color gris Oxford.
Prueba de fricción tela- tela.

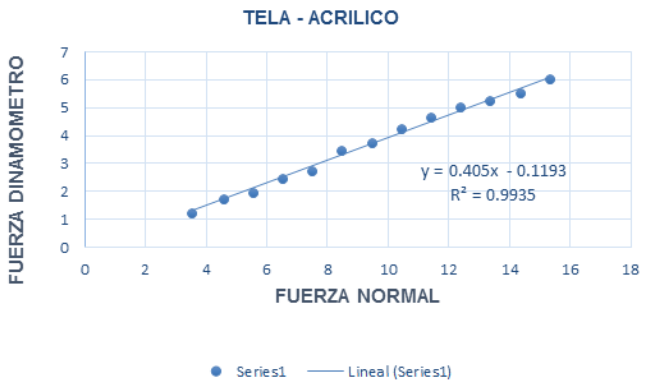


Gráfica 6. Tela tejida de punto color gris Oxford.
Prueba de fricción tela- madera.

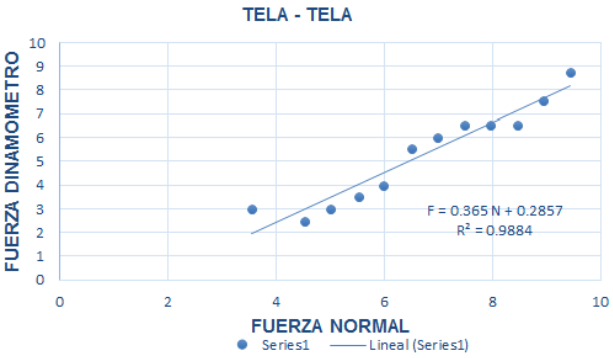


Gráfica 7. Tela tejida de punto color gris Oxford.
Prueba de fricción tela- aluminio.

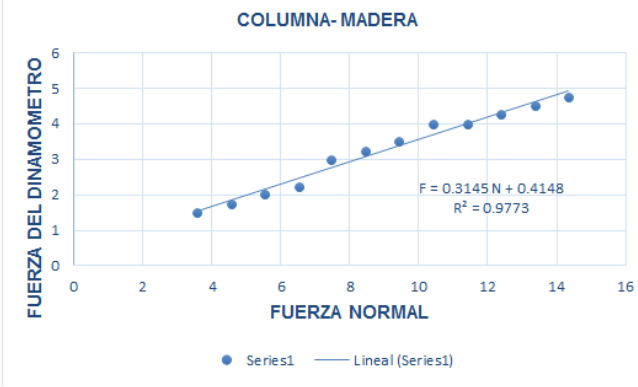
Las pruebas de fricción en la tela de tejido de punto de Prat, color rosa palo, mostraron en sus gráficas ligeras diferencias al comportamiento lineal, esto significa que la tela presenta ciertas dificultades para alcanzar la fuerza máxima antes del movimiento, lo que también se atribuye a la naturaleza de los hilos. Particularmente, con el material acrílico (gráficas 8 y 12) se ven más marcadas este tipo de fenómenos lo que se a tribuye a que por ser el mismo material acrílico la tela y el hilo, se sugiere que es posible que se presenten fenómenos de adherencia entre los materiales que se friccionan.



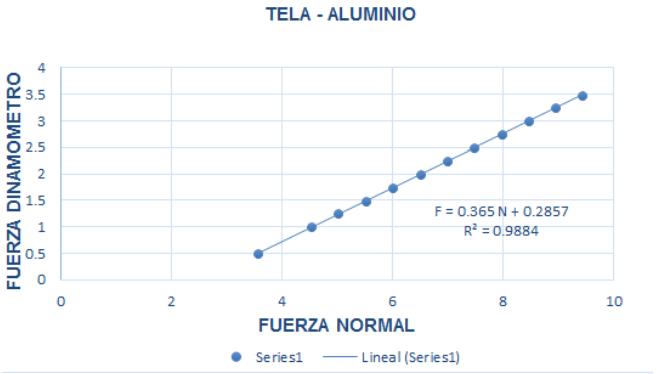
Gráfica 8. Tela tejida de punto color gris Oxford.
Prueba de fricción tela- acrílico.



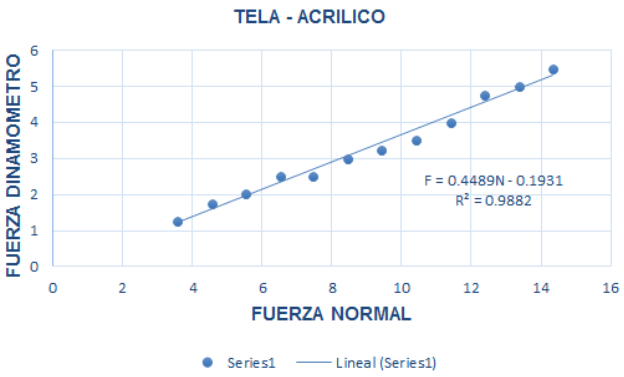
Gráfica 9. Tela tejida de punto color rosa palo.
Prueba de fricción tela- tela.



Gráfica 10. Tela tejida de punto color rosa palo.
Prueba de fricción tela- madera.



Gráfica 11. Tela tejida de punto color rosa palo.
Prueba de fricción tela- aluminio.



Gráfica 12. Tela tejida de punto color rosa palo.
Prueba de fricción tela- acrílico.

IV. CONCLUSIONES

Se realizaron pruebas de fricción para dos tejidos de acrilán partiendo desde el hilo hasta el tejido empleando una máquina tejedora rectilínea. Particularmente se analizaron los tejidos elaborados a partir de dos hilos adquiridos de distintos proveedores.

Se caracterizaron los hilos y se encontraron diferencias que pueden ser importantes durante el proceso de fabricación y manufactura de los tejidos.

En las pruebas de fricción se observó que en algún momento la tela se llegaba a pegar en el material acrílico lo que se sugiere que se debe a posibles fenómenos de adherencia, lo que se ve magnificado por las características de gran flexibilidad del tejido, lo cual se debe a su estructura o conformación de mallas, aunque más investigación se necesita para confirmar dicha hipótesis.

REFERENCIAS

[1] Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Sistema de Clasificación Industrial de América del Norte, México SCAN 2013

[2] INEGI, Encuesta Mensual de la Industria Manufacturera, referencia electrónica: http://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/?idserPadre=104001000142011000200030 fecha de consulta mayo de 2018.

[3] 1A B. Flores de la Cruz, "Fibras sintéticas: acrílico," referencia electrónica http://fdbfibras.blogspot.com/p/acrilico.html fecha de consulta febrero de 2018.

[4] Barretto, D. (s.f.). *FADU UBA*. Obtenido de Técnicas de Indumentaria I: http://cursos.fadu.uba.ar/apuntes/Indumentaria%20I/unidad%20practica%20n%20%201/4%20b-%20Tejido%20de%20punto%20a%20maquina-%20galga%20y%20fontura-%20Titulacion.pdf fecha de consulta mayo de 2018.

[5] Fernandez, G. N. (s.f.). *capitulo i - Repositorio UTE*. Obtenido de repositorio.ute.edu.ec/bitstream/123456789/4389/1/59024_1.pdf

[6] Gallissá, E. C. (2015). Caracterización de tejidos. En E. C. Gallissà, *Principales ensayos físicos para evaluar* (pág. 238). Universitat Politècnica de Catalunya: Terrassa

[7] García, M. E. (07 de Abril de 2013). *FIBRAS SINTÉTICAS Y ESPECIALES.* Obtenido de: http://todosobrelasfibrassinteticas.blogspot.mx/2013/04/acrilico.htm

[8] Aguilar, J. M. (Enero de 2002). *fibras textiles - UNAM*. Obtenido de FIBRAS TEXTILES: http://asesorias.cuautitlan2.unam.mx/organica/directorio/jaime/fibras%20textiles.pd fecha de consulta mayo de 2018.

[9] Moncunill, F. M. (2008). *Relación entre las densidades de urdimbre y trama – UPComm.* Obtenido de RELACIÓN ENTRE LAS DENSIDADES: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/.../6_relacion_de_densidades.pdf fecha de consulta mayo de 2018.

[10] David Halliday y Robert Resnick, Física 5ª Edición Volumen 1. Editorial CECSA ISBN-10: 9702402573

[11] Cortés Martínez J. A., (2011), "Fundamentos de tejido de punto en máquina rectilínea," tesis de licenciatura, Instituto Politécnico Nacional, ESIT

ISSN: 2594-1011

El efecto Doppler y los cambios de coloración en los semáforos

Daniela Ocampo Salgado [1], José. M. Rivera Rebolledo [1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55320 Fax (55) 5729-55015 E-mail: jrivera @esfm.ipn.mx

Resumen — **El problema de la luz emitida por los semáforos se aborda aquí cuando un viajero se desplaza con diferentes velocidades relativas a un semáforo. Evidentemente, el efecto Doppler será apreciable cuando tales velocidades sean muy grandes, encontrándose entonces un cambio de coloración proveniente por las velocidades en cuestión. En este trabajo estudiamos el caso en que la apariencia de la luz verde sea la de la luz roja, encontrando que la velocidad del viajero debe ser de alejamiento con poco más de un décimo de la velocidad de la luz, el cual es un efecto netamente relativista. Además, se dan los resultados para otros eventos, como lo son las combinaciones verde-amarillo, el hipotético verde-azul, etc.**

Palabras Clave – **Ondas, Doppler, semáforos**

Abstract —**Here we deal with the situation of the emitted light from a traffic light when a traveler is going through different relative velocities. Of course, the Doppler effect becomes relevant for large velocities, then finding different colors which arises from such velocities. In this work we study the case when the green light appears as a red one, thus finding that the traveler velocity must be a backward velocity and a bit more than the light velocity, which is a definite relativistic effect. Further, we give the results for events such as the green-yellow, the hypothetical green-blue, etc.**

Keywords —**Dopler, traffic light**

I. Introducción

En diferentes situaciones de la vida cotidiana se nos presentan casos en las cuales podemos aplicar de manera directa nuestros conocimientos de física para resolver algún eventual dilema, como podría ser el detectar la variación o transición de una coloración a otra. Aunque el evento a tratar pueda rebasar las condiciones a la que estamos acostumbrados, es posible extrapolar las variables físicas de lo que estamos percibiendo para así obtener una respuesta que, aunque en principio es de corte académico, bien pudiera caer en el orden quasipráctico, siempre y cuando no abandonemos la región física en la que estamos ubicados, aquí esencialmente relatvista. Ésta es la motivación que nos anima a desarrollar el problema dado a continuación.

II. Metodología

Aquí nos planteamos la situación en que un conductor o viajero viaja a determinada velocidad constante, en línea recta hacia un semáforo el cual en ese momento tiene la luz verde. Nos preguntamos cuál debería ser la velocidad apropiada para que dicha luz aparezca al conductor u observador como luz roja. Esto cambia radicalmente las condiciones puesto que ahora en vez de continuar su recorrido normal, deberá primero frenar y después invertir su velocidad.

La pregunta es la siguiente: ¿Podría usted ir a través de la luz verde tal que esta tuviera apariencia de luz roja? O, equivalentemente, con qué velocidad vería usted acercarse o alejarse la fuente de una luz verde, por ejemplo un semáforo en ese color, para que ahora lo vea como rojo.

Los datos que utilizaremos para las longitudes de onda asociadas a la luz roja (r) y verde (v), denotados con los subíndices respectivos r y v, son, :

$$\lambda_r = 6{,}200\ A^0, \qquad \lambda_v = 5{,}400\ A^0, \quad (1)$$

$$c = 3x\ 10^{-10}\frac{m}{s} = 3\,A^0\ ,\ 1\,A^0 = 10^{-10}m \quad (2)$$

En el contexto de nuestro problema la luz es una onda, y la ecuación para su velocidad expresada por c es

$$c = \nu\lambda \ \ o \ \ \nu = \frac{c}{\lambda} \quad (3)$$

Las ecuaciones desglosadas del efecto Doppler para un objeto aproximándose a o alejándose de la fuente de la onda están dadas respectivamente por

$$\nu' = (1+x)\nu, \quad \nu' > \nu \qquad (4)$$

$$\nu' = (1-x)\nu, \ \nu' < \nu, \ (5)$$

Aquí,

$$x = \frac{v_0}{v}, \ x' = \frac{v_0'}{v}, \ (6)$$

Este trabajo está patrocinado en parte por Sistema Nacional de Investigadores SNI, Comisión de Fomento a las Actividades Académicas, COFAA-IPN, Programa de Estímulo al Desempeño Docente, PEDD-IPN

donde v_0 (v_0') es la velocidad del observador (de la fuente) respecto al sistema de referencia de laboratorio o fijo a tierra., ver. Fig. 1.

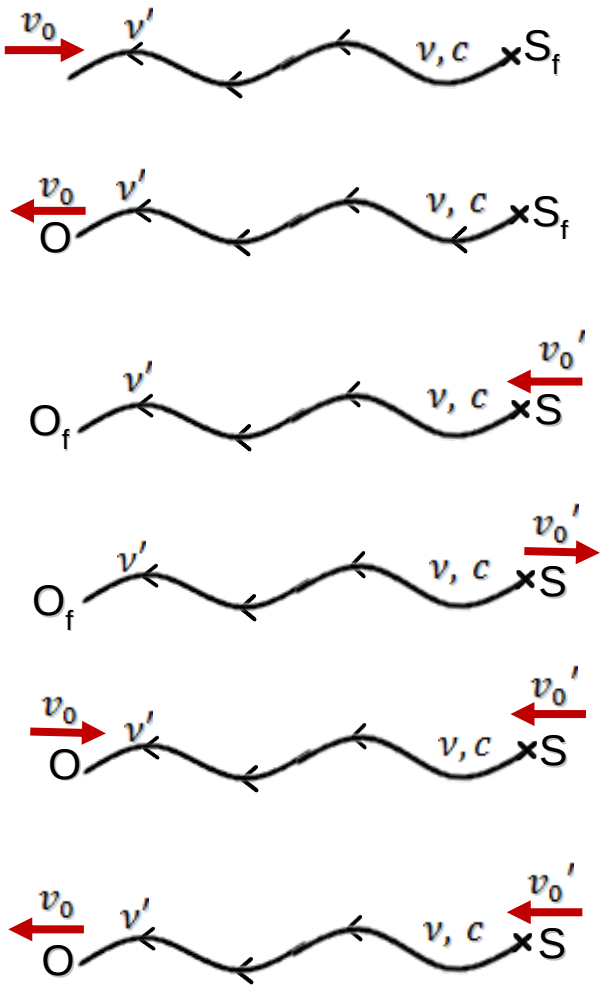


Fig. 1 Diferentes situaciones de movimientos relativos observador O-fuente S.

Si la fuente (S) se acerca o se aleja del observador (O) se tiene ahora, de manera respectiva:

$$v' = \frac{1}{1-x'}v, \quad v' > v, \text{ (7)}$$

$$v' = \frac{1}{1+x'}v, v' < v, \quad (8)$$

Finalmente, la combinación de movimientos nos dan:

$$v'' = \frac{1+x'}{1-x'}v, \quad v' > v, \quad (9)$$

$$v'' = \frac{1-x'}{1+x'}v, \quad v' < v, \quad (10)$$

con S y O acercándose, ec. (9), o alejándose, ec. (10), mutuamente.

De (3) tenemos:

$$v = \frac{c}{\lambda_v} \text{ y } v' = \frac{c}{\lambda_r} \quad (11)$$

La ecuación que debemos de utilizar es la (4), donde el observador se acerca a la fuente (semáforo), esto es

$$v' = (1+x)v$$

que por (3) se convierte en

$$\frac{1}{\lambda'} = (1+x)\frac{1}{\lambda}, \text{ o } \lambda' = \frac{1}{1+x}\lambda \ , \ (12)$$

o bien utilizando (1):

$$1+x = \frac{54}{62} = 0.87 \ \therefore \ x = -0.13, \quad (14)$$

$$\text{o} \quad v_0 = -0.13c, \quad (15)$$

lo que significa que el observador debe viajar con una velocidad de $0.13c$ en sentido opuesto a la ubicación del semáforo. Esto es de esperarse físicamente, ya que la luz verde tiene una longitud de onda menor, o es más corta, que la roja.

III. Resultados

En las ecuaciones que hemos trabajado arriba, hemos encontrado que cuando se da el caso de un observador viajando hacia un semáforo que se encuentra encendido en luz verde, con una velocidad que en principio por supuesto debería ser la que se maneja comúnmente en el tráfico automovilístico citadino, por ejemplo del orden de los cien kilómetros por hora, una velocidad netamente no relativista, el observador tendrá que viajar a una velocidad de algo más de $\frac{1}{10}c$, y además en sentido contrario a la ubicación del semáforo. Esto para que la luz emitida por dicha fuente sea percibida por el viajero con la coloración roja. Claro que en este punto hay que aclarar que el conductor tendría que maniobrar en reversa, es decir, con su vista viendo hacia el semáforo para que pueda ver el nuevo color que sele presenta.

Referencias

[1] Physics, Volume one, Fifth Edition, Robert Resnick, David Halliday and Kenneth S. Krane, John Wiley.
[2] "Elements of Physics for Students of Science and Engineering", Third ed., George Shortley y Dudley Williams, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J.
[3] "Física para la ciencia y la tecnología", 6ª ed., V. 1, Paul A. Tipler y Gane Mosca Ed. Reverté.

ISSN: 2594-1011

El poder y la profundidad de los invariantes en Relatividad Especial

Ojeda Castillo. Grecia[1], Zamorano Ulloa. Rafael[2]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: grecia.ojeda.c@outlook.com

Resumen — **Considerando que la invariancia significa de manera general que al aplicarle a algo un conjunto de transformaciones esto no cambia, enfocando esta definición a la física y al ser este artículo de carácter *ilustrativo*, se realiza una exposición más amplia sobre su concepto y trata de explicar la importancia de la invariancia en la física siendo una de las metas de este artículo. Tomando en cuenta su relevancia desde la física clásica hasta la física relativista: siendo específicos a leyes de la física se les aplicará en este caso transformaciones de Lorentz, esto con objetivo de poder comprender de manera específica lo vital que es en el área relativista, aunado a la descripción de ciertas características en el texto para tener un panorama del alcance de la invariancia. Exponiendo un problema de electrodinámica relativista y considerando el comportamiento de un choque de protones y antiprotones, es decir retomaremos una de las primeras aniquilaciones de un antiprotón observado en el Bevatron. Finalmente facilita la comprensión de que sin utilizar la invariancia en el análisis matemático el procedimiento sería extenso, para facilitar estos cálculos surge el requerimiento de la invariancia, siendo esta una herramienta poderosa.**

Palabras Clave – **Invariante, relatividad especial.**

Abstract — **Considering that invariance means in a general way that when we apply a set of transformations to something this does not change, focusing on this definition on physics and since this article is *illustrative *, a broader exposition is made about its concept and it deals with explain the importance of invariance in physics being one of the goals of this article. Taking into account its relevance from classical physics to relativistic physics: being specific to the laws of physics, Lorentz transformations will be applied in this case, with the aim of being able to understand in a specific way how visual it is in the relativistic area, combined to the description of certain characteristics in the text to have an overview of the scope of invariance. Exposing a problem of relativistic electrodynamics and considering the behavior of a shock of protons and antiprotons, that is, we will return to one of the first annihilations of an antiproton observed in Bevatron. Finally it facilitates the understanding that without using the invariance in the mathematical analysis the procedure would be extensive, to facilitate these calculations the requirement of invariance arises, this being a powerful tool.**

Keywords — **Invariant, Special Relativity**

I. Introducción

Para la física es de gran importancia la invariancia, desde un punto de vista científico constantemente nos enfrentamos a una dificultad especial en tanto se tengan que usar marcos de referencia, se espera que las relaciones y leyes sean independientes de diferencias espacio-temporales, como solución de manera específica se busca que se puedan expresar principios y leyes en ecuaciones matemáticas que permanezcan invariables bajo ciertas transformaciones de los marcos de referencia, es decir, se desea asegurar la formulación de una teoría física en la que las leyes que aparecen en la teoría sean las mismas para todos los observadores independientemente de cualquier movimiento. Por tanto en virtud del principio de equivalencia, es de esperar que la expresión matemática de los principios y leyes de la física sea invariante en la medida en que las ecuaciones de transformación sean funciones continuas variables reales.

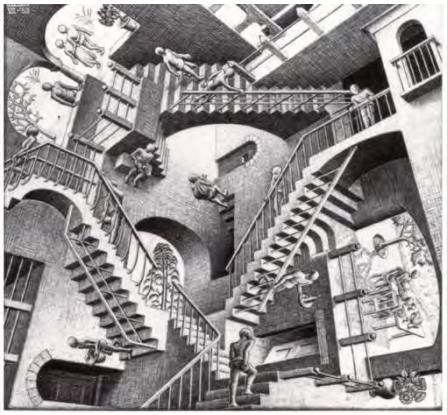


Fig.1. Sin importar desde que punto de la escalera se vean, siguen siendo escaleras.

Las expresiones se llaman invariantes si, al ser empleadas en cualquier lugar o en cualquier tiempo, representan la misma proposición [1]

Dado que la transformación es un cambio de una ubicación espacio-temporal a otra, y cuando las expresiones no cambian su significado en virtud de tales cambios, entonces, las expresiones son invariables y el fundamento de

esa invariancia está en que las expresiones representan proposiciones abstractas y generales válidas.
Se puede establecer un principio de invariancia y emplear luego ese postulado como una norma heurística al determinar que expresiones pueden representar principios y leyes de la física.

II. Metodología

Emmy Noether nos enseñó una nueva forma de entender nuestro universo. ella nos mostró que detrás de "las leyes" físicas, los principios de conservación y las propias interacciones existe una profunda y hermosa, al ser ella especialista en álgebra e invariantes le permitió escribir su artículo "Invariant Variation Problems", que nos permite entender más sobre la invariancia, expresaremos un ejemplo burdo a continuación,

Tome en cuenta el siguiente cuadrado:

Fig. 2

Rotando el cuadrado 90º alrededor del punto donde se cruzan las mediatrices de sus lados tendriamos lo siguiente:

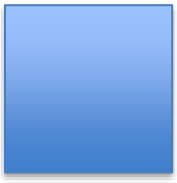


Fig. 3

Claramente es díficil saber si se ha rotado o no si no se da esta explicación antes, ya que el cuadrado es exactamente el mismo, por lo tanto esta es una simetría del cuadrado. Es evidente que si lo rotamos cualquier otro ángulo diferente a un múltiplo de 90º será más fácil que percibamos este movimiento.

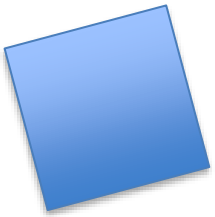


Fig. 4

A este ejemplo podríamos verlo desde diferentes puntos de vista e incluso escribir expresiones matemáticas, sin embargo el punto de este caso es entender que a pesar de que aunque lo movamos, el cuadrado sigue siendo un cuadrado, por tanto, deja es invariante.

Emmy Noether nos ayudó a extenderlo a la física, un ejemplo claro es sobre la energía y su conservación, puede no ser tan claro, pero gracias a es más fácil entender:

> "Leyes de conservación. El formalismo lagrangiano es particularmente apropiado para obtener leyes de conservación físicas. En general, cada vez que el lagrangiano de un sistema es invariante frente a una cierta transformación, se tiene una cantidad conservada (teorema de Emmy Noether). Así, la invariancia frente a traslaciones en el tiempo implica que la energía se conserva. Del mismo modo, la invariancia frente a traslaciones en el espacio implica la conservación del momento"
>
> Hacyan, 1995 [2]

Los fenómenos físicos no van a cambiar, es decir, van a ser los mismos, hoy mañana e incluso fueron así ayer, entre otras opciones. Lo que queremos dar a entender es que las leyes físicas, fórmulas, son invariantes frente a cambios en el origen de tiempos que se lleguen a escoger para estudiarlos. Tomando en cuenta esto, Emmy Noether nos dice que aparece una cantidad que se conserva, ni cambia con el tiempo: ENERGIA.

Suena simple conceptualmente hablando, pero es increíblemente profundo, de gran valor y hermoso para nuestro estudio como veremos adelante.

Debemos tomar en cuenta las trasformaciones que permiten la invariancia en la física clásica

TABLA II.
TRANSFORMACIONES EN FÍSICA CLÁSICA

TRANS-FORMA-CIONES $R \to R'$	Parametros y ejemplos de las transformaciones	Leyes covariantes y simétricas
Translaciones temporales	Δt $t' = t + \Delta t$	Todas las leyes de la física clásica que no dependen explícitamente de t
Translaciones espaciales	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ $x' = x + \Delta x$ $y' = y + \Delta y$ $z' = z + \Delta z$	Todas las leyes de la física clásica que no dependen explícitamente de x,y,z
Rotaciones	$\theta x, \theta y, \theta z$ $x' = x$ $y' = cos(\theta_x)y -$ $z' = sen(\theta_x)y +$	Todas las leyes de la física clásica que se expresen en forma vectorial
Transformaci o-nes de Galileo	$v_{R'/R}$ $x' = x - v_x t$ $y' = y - v_y t$ $z' = z - v_z t$ $t' = t$	DInámica Física Clásica
	*Las ecuaciones de Maxwell son modificadas, y es el momento de introducir la invariania en relatividad.	

III. INVARIANCIA EN RELATIVIDAD ESPECIAL

Es de vital importancia la noción de invariancia relativista que se deriva de la teoría especial de la relatividad. Éstos son los dos principios básicos:

1) El principio de la relatividad, que dice que la física debe ser la misma en todos los sistemas inerciales.

2) El principio de constancia de la velocidad de la luz, que implica que la velocidad de la luz es isótropa y de igual magnitud en todos los sistemas inerciales.

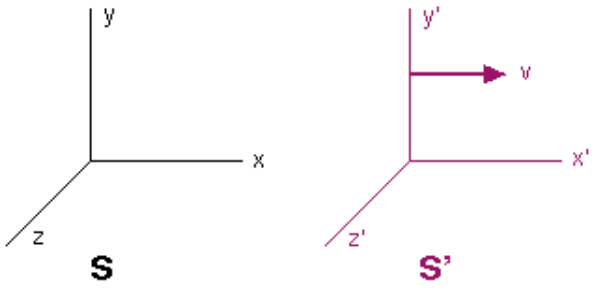


Fig.5. Noción de invariancia relativista que se deriva de la teoría especial de la relatividad

Las leyes de la física están expresadas en forma matemática; uno de los requisitos fundamentales de estas expresiones es que tengan la misma forma para todos los observadores inerciales. Este requisito como lo mencionamos anteriormente, conocido como invarianza de forma o covarianza, se satisface cuando las ecuaciones se escriben en forma tensorial.

Los vectores son tensores de primer orden y por lo tanto una ecuación escrita en forma vectorial satisface el requisito de invarianza de forma. Como una aplicación en este trabajo se muestra cómo el uso de cuadrivectores en el espacio-tiempo, conduce a una evidente manifestación de la unificación de los campos eléctrico y magnético, mostrándolos como aspectos diferentes de una entidad única: el campo electromagnético. [3]

A pesar de que las ecuaciones de Maxwell logran unir los campos eléctrico y magnético, su análisis en la física clásica ante transformaciones galileanas como mencionamos en la tabla 2 sufren cambios, que se evitan cuando analizamos los fenómenos en el espacio-tiempo. En este espacio de cuatro dimensiones se manifiesta de manera clara la estructura de la teoría electromagnética, poniendo en evidencia que la electricidad y el magnetismo son sólo aspectos diferentes de los fenómenos producidos por las cargas eléctricas y que el hecho de que se manifieste uno, el otro o los dos, depende solamente del observador.

Estudiando los fenómenos en el espacio-tiempo se logra observar también que el magnetismo es de hecho un efecto relativista. Esto significa que el magnetismo puede obtenerse como resultado de exigir que se cumpla el segundo postulado de la relatividad especial, es decir, la invariancia de las leyes de la física ante transformaciones de Lorentz.

La invariancia relativista implica que las ecuaciones físicas deben ser independientes del sistema de referencia utilizado. Por ello, si se conocen las leyes físicas que gobiernan un sistema físico, ha de saberse cómo transformar sus observables dependiendo del sistema de referencia desde el que se observe. Esto quiere decir que las leyes de la física deben ser tales que después de una transformación de Lorentz, la nueva forma de las leyes se vea igual que la forma anterior. La invariancia Lorentz, coloca en el mismo plano al tiempo y el espacio. Existe invariancia por translación y hay invariancia por rotación.

TABLA I.
Transformadas de Lorentz

DIRECTAS	INVERSAS
$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$y'=y$	y=y'
$z'=z$	z=z'
$t' = \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$t = \frac{t' + v/c^2 x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

El hecho de que una relación física pueda expresarse como una ecuación vectorial nos asegura que la relación no se modifica por una mera rotación del sistema de coordenadas. Esa es la razón por la cual los vectores son tan útiles en física, es decir la forma de describir matemáticamente la invariancia de la física con respecto a las rotaciones es escribir nuestras ecuaciones en términos de vectores.

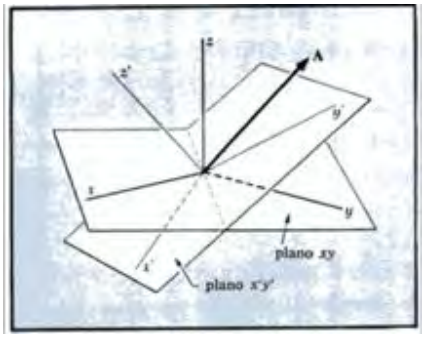


FIg.6 El vector a puede describirse en coordenadas xyz o en coordenadas x'y'z' obtenidas a partir de las anteriores mediante una rotación arbitraria decimos que A^2 es una forma invariante respecto a la rotación.

IV. EJEMPLO

El siguiente desarrollo se sigue en gran parte de lo expuesto en las lecturas de Feynman dada la facilidad de explicación al lector y resolución del problema

Mostrando ahora una ilustración de la utilidad de los producto punto de cuadrivectores. Antiprotones ($\bar{P}$) se producen en grandes aceleradores de la reacción de

$$P + P \rightarrow P + P + P + \bar{P}. \qquad (1)$$

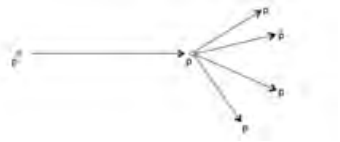


Fig. 4. ejemplo visual de la reacción.

Es decir, un protón energético colisiona con un protón en reposo (por ejemplo, en un objetivo de hidrógeno colocado en el haz), y si el protón incidente tiene suficiente energía, se puede producir un par protón-antiprotón, además de los dos originales protones.* La pregunta es: ¿cuánta energía se le debe dar al protón incidente para hacer esta reacción energéticamente posible?

La forma más fácil de obtener la respuesta es considerar cómo se ve la reacción en el sistema del centro de masa (CM) Llamando al protón incidente α y a su cuadrimomento p_μ^α. Del mismo modo, llamaremos al protón objetivo b y a su cuadrimomento p_μ^b. Si el protón incidente tiene *apenas la* energía suficiente para hacer que la reacción continúe, el estado final (la situación después de la colisión) consistirá en una masa globular que contiene tres protones y un antiprotón en reposo en el sistema CM. Si la energía incidente fuera un poco más alta, las partículas de estado final tendrían algo de energía cinética y se separarían; si la energía incidente fuera ligeramente menor, no habría suficiente energía para formar las cuatro partículas.

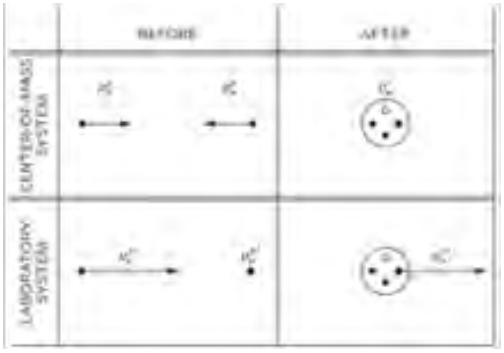


Fig. 5. La reacción $P + P \rightarrow 3P + \bar{P}$ visto en los sistemas de laboratorio y CM. Se supone que el protón incidente apenas tiene suficiente energía para hacer que la reacción inicie. Los protones son denotados por círculos sólidos; antiprotones por círculos abiertos.

3) Surge la pregunta: ¿por qué no se toma en cuenta las reacciones $P + P \rightarrow P + P + \bar{P}$ o incluso $P + P \rightarrow P + \bar{P}$ las cuales claramente requieren menos energía? La respuesta es un principio llamado *Conservacion de Bariones* que

nos dice que la cantidad de "número de protones menos el número de anti-protones" no puede cambiar. Esta cantidad es 2 del lado izquierdo de nuestra reacción. Aún más, si queremos un anti-protón del lado derecho, debemos tener también tres protones (u otros bariones).

Si llamamos p_μ^c al cuadrimomento total de todo el globo en el estado final, la conservación de la energía y el momento nos dice que

$$p^\alpha + p^b = p^c. \qquad (2)$$

y

$$E^\alpha + E^b = E^c\,. \qquad (3)$$

Combinando estas dos ecuaciones, podemos escribir

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c. \qquad (4)$$

Ahora lo importante es que esta es una ecuación entre cuadrivectores, y es, por lo tanto, verdadera en cualquier marco inercial. Podemos usar este hecho para simplificar nuestros cálculos. Comenzamos tomando la "longitud" de cada lado de la ecuación $p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c$; son, por supuesto, también iguales. Obtenemos

$$(p_\mu^\alpha + p_\mu^b)(p_\mu^\alpha + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c. \qquad (5)$$

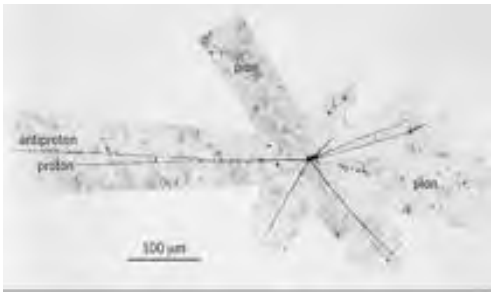


Fig. 6. Una de las primeras aniquilaciones de un antiprotón observado en el Bevatron con una emulsión fotográfica. El antiprotón ingresa desde la izquierda. Las pistas gordas son de protones lentos o fragmentos nucleares, las pistas débiles de pions rápidos. Chamberlain et al. 1956

Dado que $p_\mu^c p_\mu^c$ es invariante, podemos evaluarlo en cualquier sistema de coordenadas. En el sistema CM, el componente de tiempo de p_μ^c es la energía de reposo de cuatro protones, llamada 4M, y la parte del espacio $\mathbf{p}$ es cero; entonces $p_\mu^c = (4M,0)$. Hemos utilizado el hecho de que la masa en reposo de un anti-protón equivale a la masa en reposo de un protón, y hemos llamado a esta masa común M.

Por lo tanto,, $(p_\mu^\alpha + p_\mu^b)(p_\mu^\alpha + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c$. ,se convierte en

$$p_\mu^\alpha p_\mu^\alpha + 2p_\mu^\alpha p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2\,. \qquad (6)$$

Ahora $p_\mu^\alpha p_\mu^\alpha$ y $p_\mu^b p_\mu^b$ son muy faciles, dado que la "longitud" del momento del cuadrivector de cualquier partícula es solo la masa de la partícula al cuadrado:

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2\,. \qquad (7)$$

Esto puede mostrarse mediante cálculo directo o, de manera más inteligente, al observar que para una partícula *en reposo* $p_\mu = (M,0)$, entonces $p_\mu p_\mu = M^2$. Pero como es un invariante, es igual a M^2 en *cualquier* marco. Usando estos resultados en $p_\mu^\alpha p_\mu^\alpha + 2p_\mu^\alpha p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2$, tenemos

$$2p_\mu^\alpha p_\mu^b = 14M^2\,. \qquad (8)$$

o

$$p_\mu^\alpha p_\mu^b = 7M^2\,. \qquad (9)$$

Fig. 7. En 1955, el Bevatron recién puesto en servicio fue el acelerador de partículas más poderoso del mundo, capaz de impulsar protones a energías de alrededor de 6.2 GeV.

Ahora también podemos evaluar $p_\mu^\alpha p_\mu^b$ en el sistema de laboratorio. El cuadrivector p_μ^α puede escribirse como $(E^\alpha, \mathbf{p}^\alpha)$ mientras $p_\mu^b = (M,0)$, ya que describe un protón en

reposo. Por lo tanto, $p^{\alpha}_{\mu} p^{b}_{\mu}$ también debe ser igual a ME^{α}; y dado que sabemos que el producto escalar es un invariante, este debe ser numéricamente el mismo que el que encontramos en $p^{\alpha}_{\mu} p^{b}_{\mu} = 7M^2$. Entonces tenemos que

$$E^{\alpha} = 7M, . \qquad (10)$$

que es el resultado que estábamos buscando. La energía *total* del protón inicial debe ser de al menos 7M (alrededor de 6.6 GeV dado M=938MeV) o, restando la masa en reposo M, la energía *cinética* debe ser de al menos 6M (alrededor de 5.6 GeV). El acelerador Bevatron en Berkeley fue diseñado para proporcionar aproximadamente 6.2 GeV de energía cinética a los protones acelerados, para poder hacer anti-protones.

Como los productos escalares son invariantes, siempre son interesantes de evaluar. ¿Qué pasa con la "longitud" de las cuadrivelocidades $u_{\mu}u_{\mu}$?

$$u_{\mu}u_{\mu} = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1\,. \qquad (11)$$

En principio, todos los problemas pueden resolverse sin el uso de cuadrivectores e incluso sin invarincia, sin embargo es mucho más fácil utilizandolos, dado que es lo mismo en todos los marcos de referencia, así que permite escoger la metodología, esta facilidad es muy poderosa.

V. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo se ha puesto de manifiesto que el uso de la invariancia, definida matemáticamente y físicamente satisface ciertas propiedades de transformación, garantizando que su inclusión en leyes de la naturaleza, no cambiará durante las transformaciones. El significado físico atribuido a una transformación es que ésta es equivalente a cambiar de observador. Que la ecuación sea invariante de forma significará que ambos observadores llegan a las mismas conclusiones físicas sobre el comportamiento del sistema observado, por lo tanto
Para elaborar un modelo que represente una ley de la naturaleza, se debe recurrir a una estructura matemática que garantice el cumplimiento de ciertas simetrías que suponemos válidas para el espacio y el tiempo. En principio, todos los problemas pueden resolverse sin el uso de cuadrivectores e incluso sin invarincia, sin embargo es mucho más fácil utilizandolos, dado que es lo mismo en todos los marcos de referencia, así que permite escoger la metodología, esta facilidad es muy poderosa.

Agradecimientos

Se agradece a la Escuela Superior de Física y Matemáticas por el apoyo.

Referencias

[1] J.F: Lonergan, "I**nsight:** estudio sobre la comprensión humana" Universidad Iberoamericana,1999, ch. 5.
[2]
[3] W.S.C.Williams ",IntroducingSpecialRelativity," Ed. Taylor and Francis, 2002.
[4] http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_25.html
[5] C. Saint-Blanquet. Th´eorie de la relativit´e. Universit´e de Nantes, ch. 2-3, pp. 23–26 et 35–43.

ISSN: 2594-1011

Estudio de la región de formación estelar en Hubble X a través de diferentes técnicas de espectroscopía bidimensional

Héctor O. Castañeda[1], Héctor J. Uriarte Rivera[1], Hernando Caicedo-Ortiz[2,3]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Popayán, Colombia
[3]Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Anahuac Norte, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: hocastaneda@gmail.com

Resumen — **Estudiamos la región gigante de formación estelar Hubble X en la galaxia irregular NGC 6822 con dos diferentes técnicas de espectroscopia bidimensional. Nuestro objetivo es comprobar la validez de nuestros resultados aplicando diferentes técnicas observacionales. Estudiamos, en particular, el diagrama de dispersión de velocidades / intensidad de la línea de emisión.**

Palabras Clave – **Regiones HII, espectrocopia bidimensional, NGC 6822, Hubble X.**

Abstract — **We study the giant star formation region Hubble X in the irregular galaxy NGC 6822, with the use of two different techniques of bidimensional spectroscopy. Our objective is to test the validity of observational results using different observational methods. We study, in particular, the diagram velocity dispersion / line intensity.**

Keywords — **HII regions, bidimensional spectroscopy, NGC 6822, Hubble X.**

I. Introducción

Las regiones HII son zonas de formación estelar activa. El estudio de las regiones relativamente cercanas, dentro de un radio de 1 Mpc de nuestra galaxia, puede servir como herramienta para comprender no solo los procesos de formación estelar masiva sino también estudiar indirectamente la naturaleza de la importante clase de objetos conocidos como galaxias compactas azules [1].

El estudio de la dinámica y cinemática del gas ionizado en regiones HII gigantes puede aumentar nuestro conocimiento sobre los mecanismos que inician la formación estelar y los procesos que influyen la evolución química. Una de las propiedades que definen estos objetos es el movimiento supersónico del gas, que está caracterizada por velocidades cuadráticas medias por encima de 10 km/s [2]. Inmediatamente después del descubrimiento de estas características de la velocidad, se encontró que existía una relación entre la luminosidad y el σ. El σ (en km/s) se obtiene a partir de ancho de la línea de emisión (por ejemplo, el ancho a media altura), realizando un ajuste gaussiano para el espectro global del objeto. La luminosidad (en erg/s) mide el brillo total de la región para una línea en particular, por ejemplo, Hα o Hβ, a partir de espectrofotometría de apertura, y luego de corregir por extinción.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de los proyectos SIP-2016-1743, SIP-2017-1070 y SIP-2018-1906.

La espectroscopía bidimensional de imagen es una herramienta ideal para estos estudios, pues combina la alta resolución espectral con la cobertura espacial que permite cubrir completamente un objeto de estudio. Nuestro objetivo en este trabajo es presentar los resultados obtenidos por dos diferentes técnicas observacionales y comprobar que los resultados son compatibles, analizando luego sus implicaciones.

El objeto elegido para el estudio es la región HII Hubble X, en la galaxia irregular NGC 6822. Es la región más grande (en tamaño lineal equivalente a 143 parsecs) y la segunda más luminosa dentro de la galaxia. Hubble X coindice con una zona de alta densidad en hidrógeno neutro (HI) en la galaxia. Tiene una forma aproximadamente circular con un diámetro angular de 70 segundos de arco. Estudios en detalle con el Telescopio Espacial Hubble revelan que la región tiene dos zonas de alto brillo (núcleos) rodeados por un halo de brillo más débil. El núcleo más brillante, también de forma circular, tiene un diámetro del orden de 14 segundos de arco, con un cúmulo estelar joven en el medio. El otro núcleo solo tiene un tamaño de un segundo de arco y está rodeado por una cascara elíptica de diámetro medio de 40 segundos de arco. El objeto es 15 veces más brillante que la Nebulosa de Orión, pero 100 veces menos luminoso que la región HII gigante 30 Dorado. Se estima que la región es ópticamente gruesa, lo cual significa que su luminosidad permite inferir directamente la tasa de formación estelar en el objeto. Los datos indican que la nebulosa se encuentra en una posición intermedia entre un objeto típicamente galáctico y una región HII extragaláctica gigante. Existen pocos estudios sobre la cinemática de la región reportados en la literatura [3,4], por lo cual es relevante el presente trabajo.

II. Metodología

Para estudiar el campo bidimensional de velocidades se han utilizado dos metodologías diferentes: la construcción del mapa de velocidad radial a través de múltiples espectros de rendija, con separación constante, y la espectroscopia bidimensional con un Fabry-Perot. Nuestra intención es comparar los resultados cuantitativos de ambos métodos.

En el caso de espectroscopia de rendija larga, las observaciones se realizaron utilizando la técnica de espectroscopía de rendija larga, tomando exposiciones sucesivas para diferentes posiciones de la rendija sobre un objeto astronómico. Los espectros empleados en este trabajo fueron obtenidos del Centro de Datos adscrito *al Cambridge Astronomical Survey Unit* (CASU) en el Instituto de Astronomía de la Universidad de Cambridge. Las observaciones empleadas en este trabajo fueron realizadas entre el 18 y 19 de agosto de 1992, con el espectrógrafo ISIS del telescopio William Herchel del Observatorio de Roque de los Muchachos, en Islas Canarias, España, usando la técnica de espectroscopía bidimensional de rendija larga [3]. El espectro para Hubble X fue obtenido en 8 posiciones diferentes, todas ellas a P.A. de 90 grados (es decir, con la rendija orientada en la dirección Este-Oeste) con un ancho efectivo para cada una de 1" y una separación de 2" entre los centros de cada dos posiciones consecutivas de la rendija. Los espectros extraídos individualmente que corresponden a la resolución espacial de la noche fueron ajustados con gaussianas. Los mapas se producen a partir de las líneas de emisión de Hubble X y se obtiene una red rectangular espaciada de forma regular En la dirección horizontal, cada punto que contiene la información del espectro presenta una separación entre punto y punto de 1.33" (1.36") para el brazo rojo (azul), mientras que la separación vertical es de 2 segundos de arco para todos los datos. Se usa como método de interpolación bidimensional el propuesto por Renka y Cline [5]. Mayores detalles del tratamiento de los datos están disponibles en [3].

La espectroscopia bidimensional moderna tiene como objetivo generar un cubo de datos, donde dos dimensiones corresponden a las coordenadas espaciales y la tercera es la longitud de onda del espectro. Uno de los instrumentos clásicos es el espectrógrafo Fabry-Perot. Nuestros datos fueron obtenidos con el espectrógrafo TAURUS-2, construido para operar como un interferómetro Fabry-Perot de campo amplio y para realizar imágenes en dos dimensiones, y fue utilizado en el Telescopio William Herschel, en el Observatorio de La Palma. Está diseñado para obtener espectros en un campo de 9 minutos de arco como mínimo. Las observaciones se realizaron en las líneas de Hα y OIIIλ5007. Se utilizó un etalon con un espaciado entre placas de 125 micras. El cubo de datos fue creado con una integración de 3600 segundos, conteniendo 100 planos de un tamaño físico de 256 x 256 pixeles, con cada pixel de tamaño de 0.26 segundos de arco. El detector IPCS se utilizó como detector; aunque tiene menos eficiencia cuántica que un CCD, tiene como ventaja que permite un barrido rápido de un cubo de datos, con lo cual se logra promediar variaciones en la transparencia de la atmósfera durante las observaciones.
Un cubo de calibración se obtuvo al comienzo de la noche, observando una línea de emisión de la lámpara de calibración que estuviera cercana al rango espectral observado. Este cubo permite obtener el valor exacto del rango espectral libre, así como también el espacio de placas real del étalon. Para controlar la existencia de deformaciones mecánicas en el étalon y para verificar la estabilidad óptica del sistema un anillo de calibración se obtuvo al comienzo y al final de cada observación. Los datos en bruto se corrigieron en fase usando el paquete de calibración TAUCAL. El producto final de la observación es, por lo tanto, un cubo calibrado, donde dos ejes son coordenadas espaciales, y el tercer eje es la dimensión de longitud de onda. En el transcurso de la reducción se corrigió por la distorsión espacial causada por el IPCS.

Una vez obtenido el cubo de datos calibrado, se analizó su contenido con el programa TAUFITS, que realiza un ajuste automático del cubo. Realizamos un ajuste de líneas punto a punto con una función gaussiana, seleccionado el tamaño del "bin" y las áreas de análisis. Para el ajuste seleccionamos los puntos donde las líneas tienen mayor ancho que el ancho de la línea instrumental. El resultado final contiene la información sobre la intensidad de la línea, la velocidad radial, y su ancho.

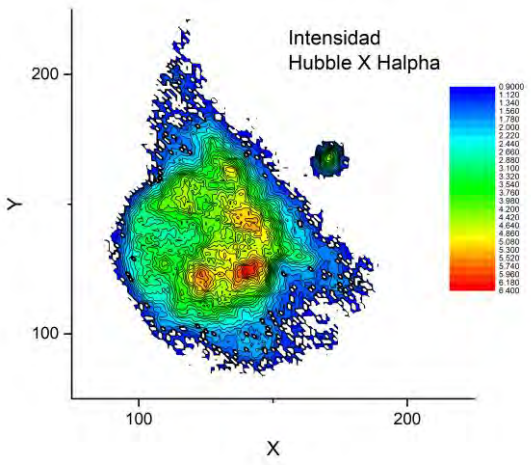


Figura 1: Mapa de intensidad de la región Hubble X, con el uso de técnicas de espectroscopía Fabry-Perot.

III. Discusion

Gracias al uso de espectroscopía bidimensional ha sido posible en las últimas décadas la creación de mapas de velocidades radiales sobre la superficie proyectada de un objeto tridimensional como lo es una nebulosa. Esto permite el uso de un método muy eficiente para identificar patrones dentro de la cinemática de regiones HII gigantes, detectar el efecto de los cúmulos estelares y su efecto en el medio interestelar, a través del análisis de los diagramas de

Intensidad–σ (I–σ). El diagrama de σ versus I se ha utilizado para regiones HII gigantes en galaxias cercanas, dentro de un radio de 1 Mpc, y se ha extendido su uso para el estudio de galaxias compactas azules, donde se ha demostrado un comportamiento similar.

En estos diagramas, la intensidad puede ser el pico del ajuste gaussiano de un perfil de la línea de emisión elegida, o bien el flujo total de la línea; σ es la dispersión cuadrática media de la velocidad radial o dispersión de velocidades a lo largo de la línea de visión de la posición observada en la nebulosa. También es posible obtener la longitud de onda central del ajuste (el centroide de la velocidad).

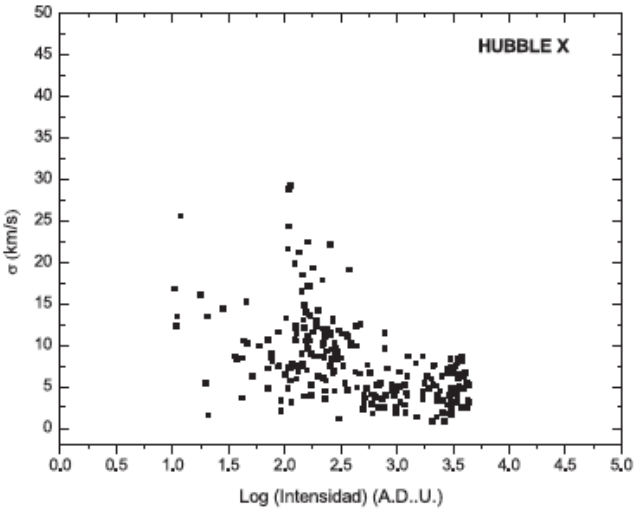


Figura 2: Diagrama Intensidad–σ Hubble X (rendija larga)

El diagrama de σ vs. intensidad puede ayudar a entender el mecanismo que da origen al movimiento turbulento del gas. La radiación proveniente de las estrellas ionizantes generaría gradientes de presión y movimientos típicamente asociados a la expansión de un gas, pero estas perturbaciones se deben propagar a la velocidad del sonido, por lo que no pueden producir el fenómeno de turbulencia supersónica.

Por otro lado, los vientos estelares que producen las estrellas masivas, con velocidades terminales del orden de 1000 km/s, tienen suficiente energía mecánica para mover el gas, y podrían ser responsables, por ejemplo, de las alas que a veces se observan en las líneas de emisión. La gravedad parece ser otro mecanismo, donde las nubes de gas neutro e ionizado, junto con las estrellas, se mueven en el pozo de potencial creado por todo el sistema. El teorema del virial podría explicar las correlaciones observadas entre luminosidad, tamaño y dispersión de velocidades.

Es posible que la gravedad, debido fundamentalmente a estrellas de baja masa, domine la cinemática de gas para las regiones jóvenes, mientras que el efecto de las estrellas masivas se manifestara para objetos evolucionados.

En ese caso, el efecto de los vientos estelares, que generan cascaras, se debería de ver en el diagrama de σ vs. Intensidad. Interesa entonces saber si el diagrama indica patrones que pueden ser identificados para dar una pista sobre los procesos físicos que ocurren en las nebulosas. Esos patrones pueden ser debidos a mecanismos que pueden tener una explicación relativamente simple [6].

Cuando analizamos el diagrama, vemos que las regiones de baja intensidad (hacia la izquierda del diagrama) tienen los valores más grandes de σ, y a medida que aumenta la intensidad la dispersión de los valores de σ va decayendo, hasta llegar a una banda más estrecha para las intensidades más grandes.

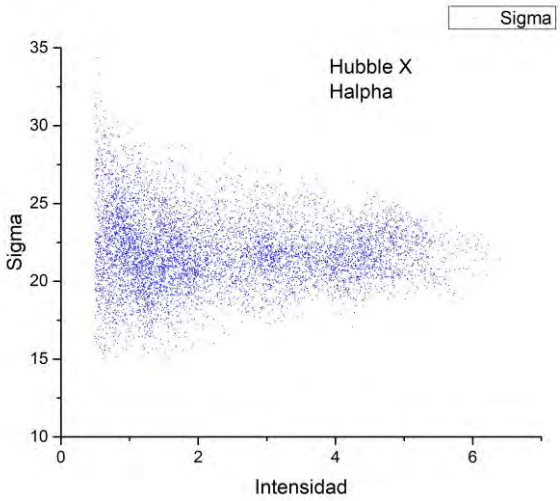


Figura 3: Diagrama Intensidad–σ Hubble X (Fabry-Perot).

Para algunas regiones se observa claramente una región donde la dispersión de velocidades es supersónica, y luego una región donde las intensidades de la línea ajustada son bajas pero una mayor dispersión de velocidades, alcanzando valores supersónicos.

Por ejemplo, un modelo simple propuesto [7] sugiere que una cascara en expansión (por ejemplo, debido a la presión del viento estelar por una o varias estrellas masivas) debería verse como una banda en el diagrama, donde el ancho de la línea de emisión se debe al desdoblamiento debido al movimiento de la cascara, máximo cuando vemos hacia su centro y mínimo hacia su borde. El comportamiento inverso se debería registrar en la intensidad de la línea. El resultado final es una banda inclinada en el diagrama. Por supuesto, la detección de esos efectos estará afectada por la resolución espectral y espacial de los datos obtenidos, así como también por el campo total que se está observando.

Este modelo también predice que las cascaras se van desacelerando a medida que su edad aumenta, con lo que las cascaras que son jóvenes y se mueven rápidamente deben tener intensidades más bajas y mayores valores de σ que las más viejas.

En nuestros resultados, observamos varias peculiaridades. Para altas intensidades se observa un comportamiento disperso, sin una dispersión bien definida. Además, vemos que una fracción apreciable de los puntos tiene velocidades subsónicas, tal como lo indicaría el espectro global de la región.

IV. Conclusiones

Los diferentes métodos observacionales utilizados para estudiar el comportamiento cinemático de la región producen resultados compatibles. El diagrama Intensidad–σ no muestra un comportamiento asintótico en la dispersión de velocidades a alta intensidad, como así ocurre en otras regiones estudiadas. Una posible razón es la ausencia de un núcleo definido en la morfología del objeto.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo el apoyo de los proyectos de Investigación SIP-2016-1743, SIP-2017-1070 y SIP-2018-1906 del Instituto Politécnico Nacional.

Referencias

[1] Shields, G.A., "*Extragalactic HII regions*", ARAA, vol. 28, pp. 525-560, 1990..

[2] Smith, M. G. Weedman, D. W. "*Internal Motions in Galactic and Extragalactic H II Regions*", ApJ , vol. 161, p. 33, 1970.

[3] Tesis de Maestría. H.E. Caicedo-Ortiz. ESFM-IPN, 2011.

[4] Tomita, A., Ohta, A, and Saito, M., "*H-alpha velocity fields of giant HII regions in four nearby dwarf irregular galaxies*", PASJ, vol. 45, pp. 693-705, 1993.

[5] Cline, A.K., and Renka, R.L., "*A storage-efficient method for construction of a thiessen triangulation*", J. Math, vol. 14, pp. 119-123, 198.

[6] Castañeda, H. O. "*Supersonic turbulence in giant extragalactic HII regions*", Ap&SS, vol. 216, pp 285–289, 1994.

[7] Muñoz-Tuñon, C., Tenorio-Tagle, G., Castañeda, H. O. y Terlevich, R. "*Supersonic Line Broadening and the Gas Dynamical Evolution of Giant HII Regions*", AJ , vol. 112, p. 1636, 1996.

ISSN: 2594-1011

Estudio de la dinámica del gas ionizado en la región gigante de formación estelar NGC 595

Javier García Vazquez[1], Héctor O. Castañeda[1]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55319 Fax (55) 5729-55015 E-mail: castaneda@esfm.ipn.mx

Resumen — **Los diagramas de diagnóstico de Dispersión de Velocidades vs. Intensidad de la línea de emisión permiten estudiar la variación espacial de la dispersión de velocidades a partir del ancho de línea en regiones de formación estelar. Estudiamos el comportamiento de ese diagrama en la región gigante NGC 595.**

Palabras Clave – **regiones HII, cinemática**

Abstract — **The diagnostic diagrams of velocity dispersion vs. intensity of the emission line allow to study the spatial variation of the velocity dispersion from the line width in star formation regions. We study the diagram of the giant HII region NGC 595.**.

Keywords — **HII regions, kinematics**

I. Introducción

Las regiones de formación estelar activa conocidas como regiones HII gigantes extragalácticas están formadas por masa de gas ionizado (fundamentalmente hidrógeno) del orden de $10^3 - 10^6$ masas solares . Los fotones ionizantes que provienen de estrellas muy calientes, se generan a una razón de $10^{51} - 10^{52}$ s^{-1} , ionizando entonces el gas de baja densidad (10–100 cm^{-3}) lo cual genera complejas estructuras de tamaño del orden de 100 − 1000 pc, con temperaturas electrónicas típicas para el gas ionizado de 10^4 K [1]. La fuente de ionización principal son los cúmulos de cientos de estrellas OBS. La observación y el estudio de este tipo de nebulosas permiten entender los procesos físicos asociados a estrellas masivas en diferentes etapas evolutivas y su interacción con el medio gaseoso que las ve nacer y morir, además de ser objetos ideales para el estudio de formación y evolución estelar.

Un aspecto particular de interés en el estudio de regiones HII es el campo de velocidades, que muestra un patrón que puede considerarse como una manifestación de la turbulencia hidrodinámica. En el caso de regiones HII gigantes extragalácticas (en lo sucesivo GEHRs, por su definición en inglés, Giant Extragalactic HII Regions), que contienen diferentes episodios de formación estelar produciendo un caso turbulencia supersónica.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyectos SIP-20161743 y SIP-20171070.

Las líneas de emisión integradas en regiones HII extragalácticas presentan velocidades de dispersión (velocidades de turbulencia) para el gas nebular del orden de 25 km s^{-1}, mas grande que la velocidad del sonido (10 km s^1). Las líneas espectrales son más anchas que su componente térmica, implicando un estado de turbulencia a lo largo de la línea de visión, que en primera aproximación se puede modelar como isotrópica, homogénea e incompresible, en la versión clásica de la teoría de Kolmogorov. Dada la naturaleza disipativa del fenómeno del fenómeno, se requiere una fuente continua de energía mecánica al medio ionizado [2].

Como ejemplo del estudio de la dinámica del gas, presentamos los resultados obtenidos sobre la investigación del comportamiento del gas en la región NGC 595.

NGC 595 es la segunda región más luminosa de la galaxia M33, donde lo localiza en su noroeste. Tiene un diámetro de 425 pc. La temperatura electrónica del gas ionizado es de (7670 ± 116) K. Se estima que las masas totales de HI y HII en la nebulosa son, para el hidrógeno neutro (HI) 1,2 × 10^6 M y y para el hidrógeno ionizado (HII) = 4,6 × 10^5 M . La edad de todo el complejo de estrellas y gas se calcula en 4-6 millones de años.

En el interior de la región se encuentran del orden de 250 estrellas del tipo OB, 13 Supergigantes y 9 WR, diez WR confirmadas con espectroscopía, nueve del tipo WN y una WC, estas localizadas cerca del núcleo brillante de la región. Integrando la función inicial de masa se obtiene una masa estelar total de de 7,35 × 10^3 masas solares. La luminosidad ionizante del cúmulo estelar está estimada en 5 × 10^{50} $ergs^{-1}$.

II. Observaciones y reducción

Las observaciones se realizaron utilizando la técnica de espectroscopía de rendija larga con exposiciones para diferentes posiciones espaciales sobre un objeto astronómico. De esta manera es posible obtener información sobre la variación de parámetros físicos en el espacio de dos dimensiones proyectado por el objeto sobre el plano de la esfera celeste. Para nuestro estudio se escogieron de datos de archivo con observaciones de las region gigante NGC 595, en la galaxia espiral M33. Información detallada sobre el análisis y la reducción de los datos espectroscópicos se encuentran disponibles [3].

ISSN: 2594-1011

III. Morfología

En primer lugar procedemos a estudiar la estructura morfológica de la región. Vemos que NGC 595 (Figura 1) presenta su parte de mayor emisión o núcleo en forma de "L" rodeada de una zona difusa de baja emisión (400-5000 A.D.U.). Se observa lo que parece ser un pilar vertical (P1) que tiene una longitud de 20 segundos de arco. En la parte superior notamos un nodo brillante que denotamos con el nombre de N1, y en la parte media de la columna aparece otro nodo (N2) de menor brillo superficial. El segundo componente de la zona central de la región es una barra horizontal (P2), que también cuenta con un nodo de alta emisión deformado, N3. La región difusa presenta una gran cavidad de ~50 pc de diámetro, nombrada C1 y un nodo de emisión media, en, en la parte más externa, que no aparece en la figura que usamos como ilustración.

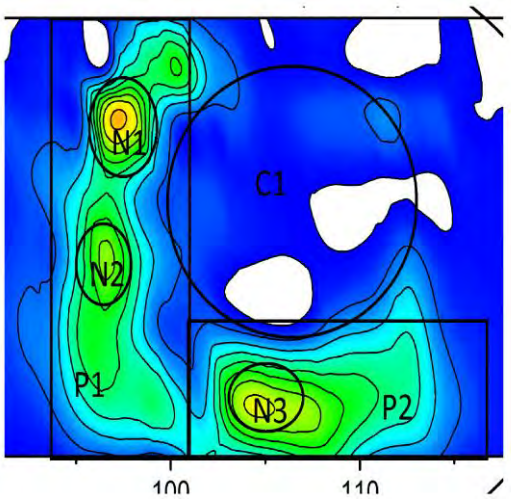


Figura 1: morfología de la región central de NGC 595

NGC 595 tiene un borde brillante de emisión en forma de arco que alberga algunas estrellas tipo WR cerca de las orillas y forma por los pilares mencionados (P1 y P2). Las estructuras tipo cascarón no son obvias y como tal solo detectamos C1 en la figura. Esa cavidad parece tener su origen de la acción de estrellas Wolf-Rayet.

Dado que NGC 595 encuentra al borde una nube de hidrógeno neutro (HI), es razonable asumir que estamos viendo una zona de formación estelar dinámica y una parte menos perturbada. El núcleo N1 coincide con la estrella WR1 mientras que los demás carecen de una fuente puntual estelar que podamos asociar a esa posición. La estructura asimétrica que presenta la región puede ser el resultado de inhomogeneidades de densidad en la nube molecular madre y por la fuga de material ionizado en direcciones preferenciales.

IV. Ancho de la línea de emisión

Para determinar la velocidad de dispersión del gas a lo largo de la línea de visión, es necesario calcular tres parámetros: el ancho instrumental, el ancho observado y el ancho térmico. El ancho instrumental asociado a cada línea de emisión se calcula a partir las líneas de emisión observadas en el espectro de calibración asociado a cada brazo del espectrógrafo (rojo y azul) y para cada objeto observado. El ancho instrumental a media altura asociado a cada línea de emisión es el ancho a media altura promedio de las dos líneas de emisión sobre el espectro de calibración que la limitan en el rango superior e inferior del espectro. Con este criterio se minimizan los errores que aparecerían al considerar únicamente un solo ancho instrumental para todas las líneas de emisión observadas en un brazo del espectrógrafo.

La dispersión de velocidad asociada al ancho instrumental se expresa como $\sigma_{inst} = (0.6006\ FWHM_{inst})/1.414$, donde $FWHM_{inst}$ es el ancho instrumental a media altura expresado en unidades de velocidad. La velocidad asociada al ancho observado en la línea de emisión se expresa como $\sigma_{obs} = (0.6006\ FWHM_{obs})/1.414$, con $FWHM_{obs}$, como el ancho observado (en unidades de velocidad). La componente térmica depende de la temperatura electrónica a la que se encuentra el gas ionizado y a la masa del ion emitida en las líneas de emisión, a través de la relación $\sigma_{term} = (166.3\ t\ /m\ 1.414)$, donde $t = (T_e \times 10^{-4})$, donde T_e es la temperatura del gas, igual a la temperatura electrónica, y m que es la masa atómica del ion asociado a la línea de emisión.

Esta ecuación nos dice cuál es la mínima velocidad asociada al ancho de la línea de emisión que puede ser observada, es $(\sigma_{inst}^2 + \sigma_{term}^2)^{0.5} = \sigma_{obs}$. El $\sigma_{obs\text{-}min}$ representa el mínimo valor que se puede medir en σ_{obs}. Cuando $\sigma_{obs} < \sigma_{inst}$ se dice que no es posible resolver el ancho de la linea de emisión. Una vez obtenidos los diferentes parámetros citados, se procede a la substracción cuadrática para obtener el verdadero ancho de la línea observada.

V. Los mapas de dispersión de velocidad

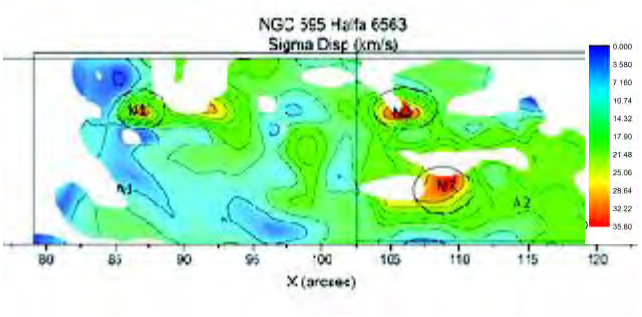


Figura 2: Mapa de dispersión de velocidades de NGC 595 (la escala de colores se encuentra a la derecha).

El mapa bidimensional de σ para NGC 595, que están ilustrados en la Figura 2 presentan 3 zonas de altos valores (>30 km s−1) marcadas como N1 (84,15), N2 (107,15) y N3 (110, 7). N1 parece estar más una zona extendida que un núcleo como tal. Esto quiere decir que la interpretación de esta zona en particular deberá realizarse con precaución. La misma idea aplica a los otros dos zonas. Para su estudio dividimos la zona en A1 y A2 que muestran diferentes rangos de velocidad. En A1 se considera como frontera Oeste y contiene la estructura P1. La zona A2 considera una mayor cantidad de estrellas y es la zona más dinámica, que incluye la estructura C1 y la zona de tipo blíster C2. Al combinar la información que presenta este mapa con el de velocidad radial llegamos a formar la imagen de una nube con capas externas menos perturbadas y las capas interiores con movimiento complejo por la interacción viento con el medio interestelar.

Al no introducir una máscara en los puntos donde podrían existir desdoblamientos de las líneas de emisión (debido a su ausencia en nuestras observaciones) las zonas de altos valores aparecen de manera puntuales y poco extendidas. N2 y N3 se muestran en la parte Norte y Sur del cúmulo de estrellas principales. Estas zonas se consideran que existe escape de material ionizado y se atribuyen a la estructura C1. Mientras que N2 es una combinación de C1 y la estructura blíster que llamamos C2. Este flujo de material proveniente del Oeste interactúa con el borde P1 creando gradientes intensos de velocidad que muestra G2 del lado Oeste.

La zona de interacción entre el borde y el material proveniente de las estrellas se muestra con poca complejidad debido a una cantidad menor de estrellas ionizantes. Esta interacción se vuelve más complicada entre C1 y N3 al norte de P2. N1 aparece como estructura de explicación mas difícil sobre su origen, esto debido a la falta de coincidencia con alguna estrella WR o cúmulo de estrellas OB. Esta zona no presenta gradientes intensos de velocidad. Consideramos la región como representativa del escape de gas ionizado hacia el medio interestelar en dirección Este.

En general lo que vemos son zonas de flujo supersónico impulsada por cúmulos estelares y otras zonas de baja actividad estelar que está siendo perturbada. La zona de altos valores de σ se considera limitada a posiciones puntuales y su origen probable son cavidades internas y túneles, como el efecto del tipo *blowout*, que presenta la nube. Es complicado llegar a conclusiones definitivas, pero con base en la distribución de densidad electrónica medida partir del cociente de las lineas de azufre, si las estructuras cercanas a estos núcleos son frágiles o presentan gradientes intensos de densidad, estas regiones marcan la zona de nacimiento de flujos de champaña. Al evolucionar la región habrá una disrupción de la nube y estas zonas de flujo caótico se extenderán a las estructuras principales que las rodean [4].

VI. Diagramas de intensidad-dispersión

El análisis de la variación del ancho de línea sobre la superficie de la nebulosa permite el uso de un método muy eficiente para identificar patrones dentro de la cinemática de regiones HII gigantes, detectar el efecto de los cúmulos estelares y su efecto en el medio interestelar, a través de los diagramas de Intensidad–σ (I–σ) [5].

Observamos en el diagrama que la velocidad máxima de dispersión es de 35 km s^{-1} por lo que el ajuste corresponde a una gaussiana de una línea de emisión y no un desdoblamiento. Las zonas de altos valores de σ corresponden a las zonas de flujo complejo, estando cerca las estrellas ionizantes de NGC 595 .

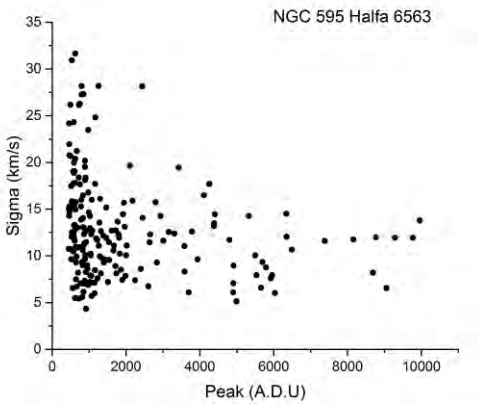


Figura 3: Diagrama de dispersión vs. σ para NGC 595.

Comparando con la información del mapa bidimensional de dispersión, encontramos que N1 representa una estructura joven al igual que N2 y siendo N3 la más evolucionada. Tanto N1 como N2 muestran una expansión en la dispersión vs I. Esto coincide con el modelo clásico dónde en N1 y N2 no son zonas lo suficiente evolucionadas para ser dominadas por vientos estelares. Estas zonas se confirman como zonas de fugas o efectos *blowout*, donde se tienen flujos supersónicos de manera caótica provenientes de burbujas de estrellas calientes que rompen la nube y presentan fugas en direcciones no privilegiadas. La idea es que el gas en lugar de energizar una estructura escapa y fluye debido a morfología no homogénea dentro la nube.

Para NGC 595 no podemos ver estructuras de bandas inclinadas en los diagramas σ vs I. El diagrama de diagnóstico de σ vs V radial se muestra complejo a interpretar, aunque parece presentar una cierta correlación entre los dos parámetros. Esta dependencia es interpretada como movimientos de gas en zonas particulares que afectan toda la región. Dentro de la nube existen direcciones privilegiada por las cavidades internas en una expansión uniforme. Una interpretación de este comportamiento es que, en realidad a pesar de tener un cúmulo de estrellas en la parte central, existen otras estrellas distribuidas en la zona de mayor emisión distribuyendo la energía en la región. En este caso el cúmulo solo tendría la ventaja de la mayor

inyección de energía, más no de determinar en verdad de qué manera se expande la región, sugiriendo que la región a pesar de estar compuesta por estructuras individuales, evoluciona como un todo.

VII. Conclusiones

En NGC 595 encontramos una estructura tipo cascarón que denotamos como C1 que presenta un flujo de champaña, y con un análisis cinemático encontramos otra estructura tipo blíster de nombre C2, que se encuentra en el borde de la nube molecular. La comparación con mapas de la distribución de la población estelar confirma para esta región el modelo clásico de burbuja de viento estelar, donde una estrella central potencia la región entera.Por medio de los diagramas σ vs I es posible ubicar y confirmar cascarones expandiéndose dentro de la región y las zonas donde el flujo es turbulento y complejo.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo el apoyo de los proyectos de investigación SIP-20161743 y SIP-20171070 del Instituto Politécnico Nacional.

Referencias

.

[1] Shields, G.A., "*Extragalactic HII regiones*", ARAA, Vol. 28, pp. 525-560, 1990.

[2] Smith, M. G. Weedman, D. W. "*Internal Motions in Galactic and Extragalactic H II Regions*", ApJ , vol. 161, p. 33, 1970.

[3] Tesis de Maestría. J. Perez-Oregón. ESFM-IPN, 2013.

[4] Muñoz-Tuñon, C., Tenorio-Tagle, G., Castañeda, H. O. y Terlevich, R. "*Supersonic Line Broadening and the Gas Dynamical Evolution of Giant HII Regions*", AJ , vol. 112, p. 1636, 1996.

[5] Muñoz-Tuñon, C., Tenorio-Tagle, G. & Castañeda, H.O., "*Supersonic line broadening and gas dynamical evolution of giant HII regions*", AJ, vol. 112, 1636, 1996.

ISSN: 2594-1011

Confrontación de efecto gravitatorio y velocidad del sonido

Juan C. Ahuactzin Díaz[1], José M. Rivera Rebolledo[1]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55320 Fax (55) 5729-55015 E-mail: jrivera@esfm.ipn.mx

Resumen — **Cuando se tiene el evento de una piedra que es arrojada a un pozo con profundad h, hacemos la confrontación de su velocidad inicial con la que lleva el sonido asociado a un grito emitido por el observador en el momento del impacto de la piedra con el final del pozo si se pide que ambas ondas sonoras regresen al punto de partida simultáneamente. Como consecuencia se obtiene que la velocidad inicial en cuestión es parecida a la sonora cuando h es de cien metros. Con el mismo procedimiento, ahora se encuentra la altura cuando la velocidad inicial es dada. Lo anterior nos permite hacer una comparación ilustrativa entre los efectos gravitatorio terrestre-velocidad del sonido.**

Palabras Clave – **Enseñanza, gravedad, sonido**

Abstract — **When a stone is thrown inside a well of depth h, we compare the initial velocity of the stone with that of the sound followed to a shout coming from the observer just at the moment when the stone collides the bottom of the well, if it is required that both sound waves back simultaneously to the starting point. As a consequence, it is obtained that the stone initial velocity is a little less than the sound velocity when h is a hundred meters. Similarly, the depth h is found for a given initial velocity. In this way, one can compare the earth gravity effect on a stone with the sound itself.**

Keywords — **Learning, gravity, sound**

I. Introducción

Durante el proceso enseñanza-aprendizaje aparecen determinado tipo de problemas cuya resolución ilustra y aporta una mejor comprensión de la física. En el presente trabajo nos hemos basado en los libros de texto básicos cuyas referencias se dan al final de este escrito. Lo que hacemos propiamente es tomar uno de esos problemas y, aparte del desarrollo normal del mismo, realizar alguna adición que represente un ingrediente extra que ayude a redondear la o las ideas que se desprendan de su resolución. A continuación se desarrolla la metodología esencial y posteriormente se comentan de manera sucinta los resultados.

II. Metodología

En el presente problema [1], ver figs. 1 y 2, un objeto es lanzado con velocidad inicial v_0 desde una altura h igual a la profundidad de un pozo, verticalmente hacia abajo, y en el instante que impacta el final del pozo, el que la lanzó emite un grito.
Aquí, para fig. 1 y fig. 2, respectivamente,

$$\Delta t_p = t_{f1} + t_{f2}, \quad (1)$$

donde t_{f1} es el tiempo total que le toma a la piedra en caer, y t_{f2} es el de la onda viajera del sonido que emite su impacto final hasta su percepción por el observador.
Para segundo evento, el tiempo de ida y vuelta al punto inicial que le toma al grito se escribe como:

$$\Delta t_s = t_{f3} + t_{f2} = 2t_{f2} \quad (2)$$

$$h = 100\ m$$

y [3],

$$v_s = 346\ \frac{m}{s} \quad (2\text{ a-b})$$

con $\Delta t_p = \Delta t_s$, lo cual nos da:

$$t_{f1} + t_{f2} = 2t_{f2}, \quad \text{o} \quad t_{f2} = t_{f1}, \quad (3)$$

Aquí, para, el evento de la piedra, el tiempo t_{f1} empleado en llegar al fondo del pozo está dado por [1 − 2]:

$$t_{f1} > 0 \Rightarrow y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

$$h = v_0 t_{f1} + 4.9\, {t_{f1}}^2 \quad (5)$$

Fig. 1. Magnetización en función del campo aplicado
Note como el título es centrado en la columna

mientras que el tiempo del grito asociado a la onda sonora se expresa por,

$$t_{f2} = \frac{h}{v_s} \quad (6)$$

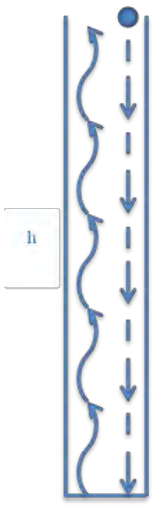


Fig. 1. Piedra que es arrojada con v_0 y onda sonora asociada a su impacto.

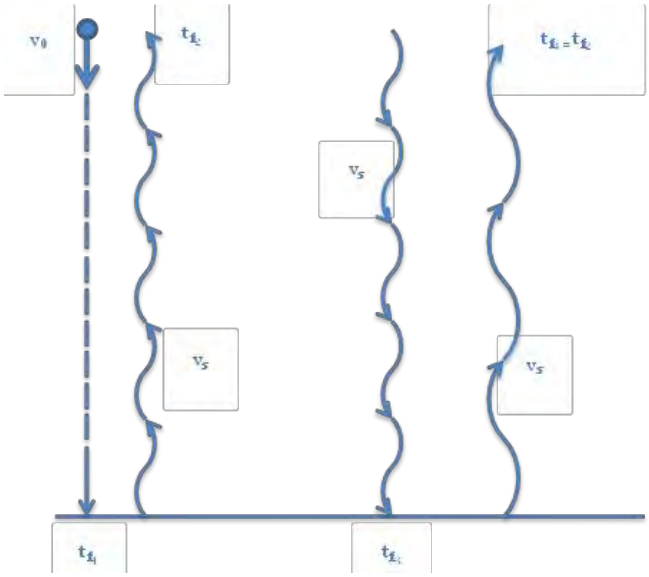


Fig. 2. A la izquierda como en fig. 1, y a la derecha ondas sonoras asociadas al grito emitido por el observador.

De (5-6),

$$h = v_0 \frac{h}{v_s} + 4.9 \frac{h^2}{v_s^2}$$

$$1 = \frac{v_0}{v_s} + \frac{4.9}{v_s^2} h$$

$$\frac{v_0}{v_s} = 1 - \frac{490}{v_s^2}, \quad v_0 = v_s - \frac{490}{v_s} = 346 - \frac{490}{346} = 344.6$$

$$v_0 = 344.6 \frac{m}{s} \approx v_s, \quad h = 100\ m \qquad (7)$$

Inversamente, si la altura es desconocida pero con una velocidad inicial de

$$v_0 = 10 \frac{m}{s} \approx \frac{1}{33} v_s \qquad (8)$$

de la ec. (6 a) se obtiene:

$$v_s^2 = v_0 v_s + 4.9\ h, \quad 4.9\ h = (v_s - v_0) v_s = 11{,}625$$

$$\therefore \ h \approx 23.725\ km \qquad (9)$$

Esto es, la profundidad resultante del pozo es bastante apreciable incluso cuando la velocidad de lanzamiento sigue siendo suficientemente alta.

III. Resultados

De lo anterior se concluye que la velocidad de lanzamiento debe ser muy grande, prácticamente la de la velocidad del sonido en el aire en condiciones normales, si queremos que sean iguales los tiempos de ida y vuelta de ambos sucesos. Por otra parte, si lo que se quiere es conocer la profundidad para que con una velocidad inicial dada de $10 \frac{m}{s}$ nuevamente se tengan eventos finales simultáneos, el resultado que se encuentra es bastante apreciable, esto es de unos 24 kilómetros, unas dos veces la profundidad máxima de los océanos o equivalentemente una profundidad típica de algunos hipocentros.

A. Referencias

[1] G. Shortley y D. Williams, "Elements of Physics for Students of Science and Engineering", Third ed., Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J.

[2] R. Resnick, D. Halliday and K. S. Krane, Physics, Volume one, Fifth Edition, , John Wiley.

[3] F. W. Sears, "Mecánica, movimiento ondulatorio y calor", ed. Aguilar, 1ª ed. 1973.

ISSN: 2594-1011

Principios físicos de la microscopia confocal

C. Nicolás Hernández[1], R. Zamorano Ulloa[2]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 50050 E-mail: cnh.prep@gmail.com

Resumen —**La microscopia confocal se han convertido en una poderosa técnica de elección para investigadores de cualquier área, ya que, están interesados en obtener imágenes con una mejor resolución óptica y contraste en 2D (cortes transversales de una muestra) con el fin de poder construir imágenes en 3D, es aquí donde nos preguntamos: ¿Cómo es posible todo esto?, sabemos que hay física en todo lo que nos rodea, ¿Cuáles son los principios físicos del microscopio confocal de fluorescencia?; En este escrito se tiene como objetivo mostrar y explicar a estudiantes de nivel superior el principio de funcionamiento de esta técnica y el impacto que ha tenido en las diferentes áreas de investigación e industria.**

Palabras Clave – **pinhole, microscopia confocal, filtros fluorocromos, laser.**

Abstract — **The confocal microscopy has become a powerful technique of choice for researchers of any area, since they are interested in obtaining images with better optical resolution and contrast in 2D (cross sections of a sample) to build 3D images, this is where we ask ourselves: How is all this possible? We know that there is physics in everything that surrounds us, what are the physical principles of the fluorescence confocal microscope? This paper aims to show and explain to bachelor students the working principle of this wonderful technique and the impact it has had in the different areas of research and industry.**

Keywords — **pinhole, confocal microscopy, fluorochrome filters, laser.**

I. INTRODUCCIÓN

En 1965 la célula fue descubierta por Robert Hooke haciendo uso de un microscopio óptico que el mismo construyó, utilizando una técnica no común en esa época, la cual consistía en teñir la muestra, para poder observarla a través del tinte [9]. Con el paso de los años se han desarrollado numerosas técnicas para mejorar el contraste y la calidad de las imágenes obtenidas por los diferentes tipos de microscopios ópticos, por ejemplo, aproximadamente hace 10 años investigadores observaban embriones de C.elegans, realizando inmunofluorescencia, observaron que la mayoría de la fluorescencia estaba desenfocada, sin importar cuanto ajustaran el foco, sin embargo, se dieron cuenta de la llamada técnica de imágenes confocales, la cual fue propuesta por primer vez por el ingeniero e inventor alemán Nipkow (1860-1940) y en 1975 el concepto de microscopio confocal fue patentado por el científico estadounidense Marvin Minsky (1927-2016) cuyo interés fue mejorar el contraste y la calidad de las imágenes obtenidas por un microscopio óptico, sin embargo, en esa época se carecía de tecnología, la cual no permitía producir imágenes útiles, no fue hasta 1986-1987, que se pudo construir un microscopio confocal que cumplía con las expectativas deseadas, combinando tecnologías de láser, computadora y microelectrónica [1], siendo la mejor opción para observar a los embriones de C. elegans.

II. PRINCIPIO CONFOCAL Y DISEÑO DEL MICROSOCPIO

Por "confocal" se refiere a la luz eliminada de arriba y debajo del plano de enfoque de la muestra en la imagen final, ya que, presenta toda la información enfocada debido a un pequeño agujero que compensa "la perdida de luz". En los microscopios modernos se han incorporado dos componentes. Primero, los láseres se usan como fuentes de luz, porque es extremadamente brillante a longitudes de onda especificas comparada con la lámpara de mercurio o xenón, en segundo lugar, los fotomultiplicadores (PMT), ya que, son altamente sensibles para captar la señal reducida. Una tercera tecnología es un microprocesador, se usa para controlar los espejos del escáner del microscopio y el manejo de enfoque, así como recolección, el análisis y almacenamiento de datos [1].

De acuerdo a la Fig. 1 el microscopio confocal de fluorescencia a primera vista tiene el mismo aspecto que cualquier otro, ya que, tiene oculares, lentes objetivos, fuente de luz visible, etc., como un microscopio óptico normal, sin embargo, no lo es, además de contar con todo lo anterior tiene una fuente de iluminación (en la mayoría de estas herramientas se utiliza una fuente de mercurio o xenon) [2] o láser, una unidad de escaneo (Fig 2), hardware, software, pero, lo que realmente lo hace diferente a los demás instrumentos es su óptica y el que sea no invasivo (para tejidos fijos o vivos), además la calidad de imágenes que nos ofrece, debido a su configuración ya mencionada.

Figura 1 Microscopio confocal láser (de fluorescencia)**, Olympus FV1000**, Componentes básicos de un microscopio de escaneo láser confocal. Un láser (o lámpara luminosa) y un cabezal de escaneo están conectados a una base de microscopio óptico convencional. Se usa un fotodetector como un tubo fotomultiplicador (PMT) para detectar la luz enfocada. Todos los componentes están diseñados para funcionar bien con el sistema confocal y una computadora que se utiliza para controlar no solo el escaneo y la detección de la imagen, sino también las funciones de captura de imágenes y procesamiento. Las imágenes almacenadas pueden ser impresas para su difusión. Obtenida de https://histoptica.com/microscopio-confocal-o-laser-de-barrido/

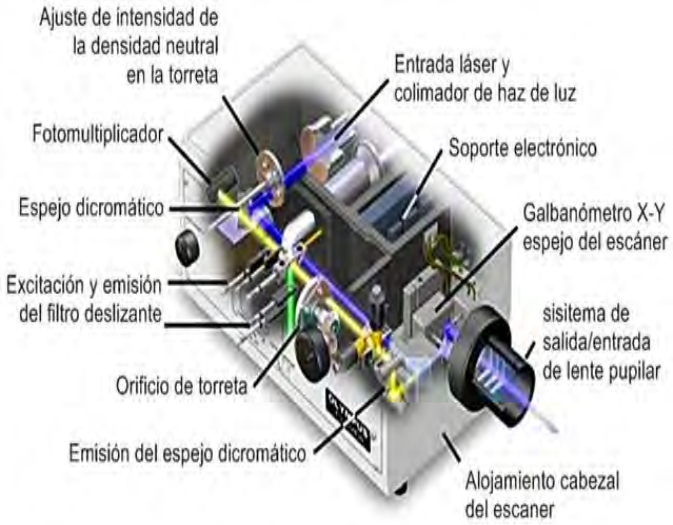


Figura 2 Unidad de escaneo para microscopio confocal laser, Olympus FV1000. En este diagrama se muestra la estructura interna del cabezal además de mostrar un poco la óptica compleja de dicho instrumento, obervando que es un sistema reciente de microscopía confocal puesto que es más compacto que las versiones anteriores [1]. Obtenida de https://histoptica.com/microscopio-confocal-o-laser-de-barrido/

Configuración óptica y su funcionamiento

El microscopio confocal de fluorescencia, posee una óptica compleja (Fig 3), la cual va incrustada dentro de la unidad de escaneo.

De acuerdo a la Fig. 3 dos pequeños orificios (pinholes) se colocan en posiciones confocales, una frente al fotomultiplicador y la otra delante de la fuente de luz. Sin olvidar que se cuenta con una fuente de iluminación, es decir, una fuente que nos ofrece toda una gama de colores en el visible, por lo que es de uso necesario el manejar filtros especiales, ya que, con estos se escoge el tipo de luz que se requiera utilizar. Existen filtros de buena y mala calidad, los que son "muy finos" (buena calidad) solo dejan pasar los colores más intensos (como sabemos en el espectro visible los colores se sobreponen Fig 4) y los que no, se observarían dos tipos de luz una de menor intensidad que la otra (Fig 5), cabe mencionar que el filtro de excitación es el más utilizado en esta técnica. Después de haber escogido un tipo de luz, se enfoca y atraviesa en una pequeña parte de la muestra, que llego a ser teñida o no (dependerá de la auto-fluorescencia) con fluorocromos (moléculas que son fluorescentes). Si hay fluorocromos allí, estos emitirán luz con una longitud de onda menor a la incidida (física que se explicara más adelante).

Luego, la fluorescencia secundaria será filtrada por el espejo dicromático y el filtro del segundo orificio, si estos no estuvieran, la cantidad de emisión de fluorescencia estaría fuera de foco provocando la formación de discos de Airy (mancha central de luz en el patrón de difracción de una fuente de luz puntual) [9], observando imágenes borrosas. Debido al filtro y pinhole, una pequeña fracción de emisión de fluorescencia fuera de foco, no es detectada por el fotomultiplicador y no contribuye a la imagen resultante, ya que, solo se seleccionó la luz proveniente del punto objetivo de la muestra (Fig 6).

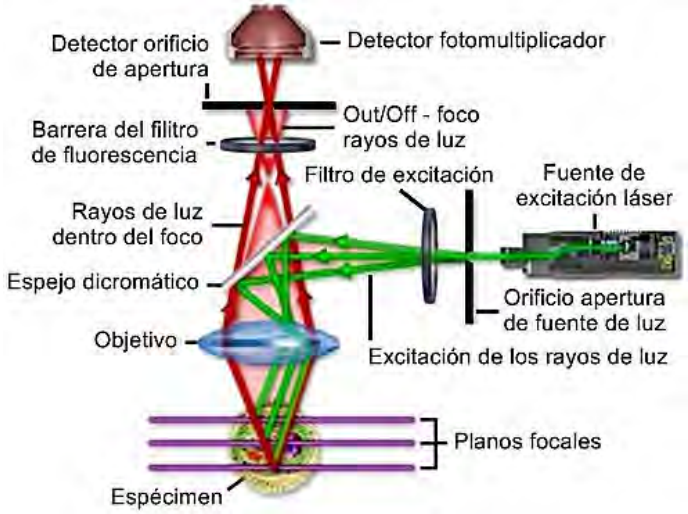


Figura 3 Configuración y funcionamiento láser en un microscopio confocal. Obtenida de https://www.olympus-lifescience.com/en/microscope-resource/primer/techniques/confocal/confocalintro/

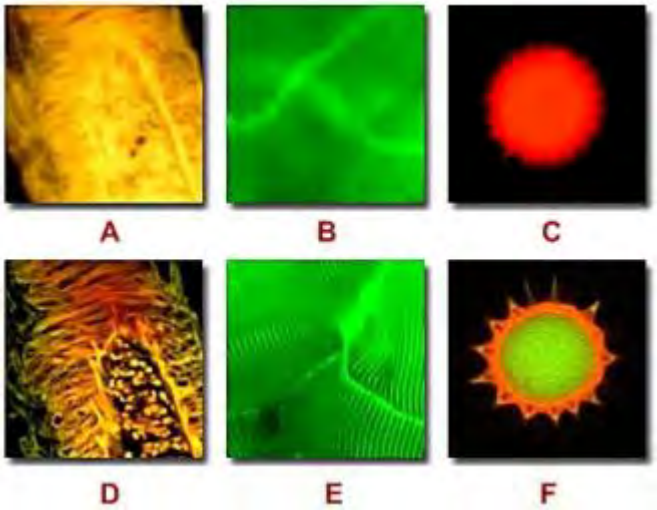


Figura 5 Microscopía confocal de fluorescencia de exploración por láser.
A: Sección gruesa de médula humana manchada de fluorescencia en un microscopio de fluorescencia de campo ancho, muestra una gran cantidad de reflejo de estructuras fluorescentes por encima y por debajo del plano focal.
D,E: Se visualiza con un microscopio confocal de barrido láser, la sección gruesa del bulbo revela un grado significativo de detalle estructural.
B: Imagen de fluorescencia de campo ancho de fibras musculares de conejo enteras y teñidas con fluoresceína, producen imágenes borrosas que carecen de detalle.
C: La auto-fluorescencia en un grano de polen de girasol produce un contorno diferente de la morfología externa básica, pero no aporta información de la estructura interna.
F: Por el contrario, una leve sección óptica del mismo grano conseguida con técnicas confocales, muestra una diferencia nefasta entre el núcleo de partícula y la envoltura circundante. Obtenida de https://histoptica.com/microscopio-confocal-o-laser-de-barrido/

La superficie de la muestra se escanea moviendo la muestra o el haz de luz, esto permite reconstruir una imagen en 2D a una altura determinada, luego se puede mover verticalmente para obtener imágenes a diferentes alturas, una imagen de volumen de la muestra puede ser reconstruida usando software adecuado, microscopios confocales permiten detectar moléculas fluorescentes en 3D con una buena resolución espacial.

Por otro lado, una de las características de la radiación es su capacidad de penetrar la materia e interaccionar con ella, en este artefacto se utiliza luz visible (un tipo de radiación) que penetra en la muestra (tejido fijo o vivo, material sólido, etc.), así que, el cómo interacciona con el sistema molecular de las muestras es el de mayor interés.

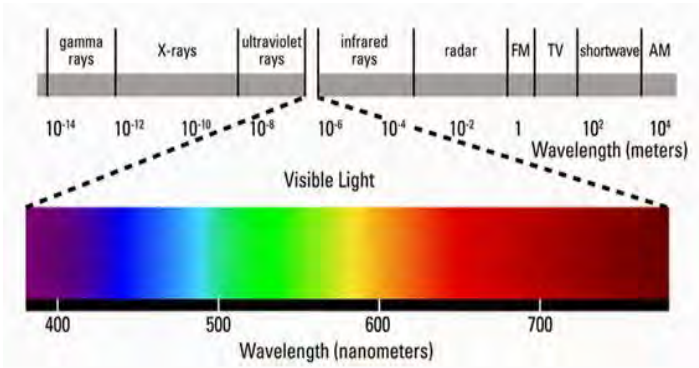


Figura 4 Espectro visible electromagnético. Se muestra las diferentes longitudes de onda observando cómo se "empalman" los diferentes colores. Obtenida de https://www.rockthispussy.webcam/S/prisma-dispersi%C3%B3n-de-la-luz-refracci%C3%B3n

La interacción resulta en la absorción de radiación por la molécula, para que esto ocurra, la energía de la radiación debe coincidir con la diferencia entre los niveles de energía que corresponden a diferentes estados de la molécula. De acuerdo con el modelo del átomo de hidrogeno de Niels Bohr (1885-1962), los electrones se encuentran en niveles de energía y para que estos pasen de un nivel a otro, por ejemplo, el electrón situado en el nivel más bajo, salta a un nivel alto, necesita una energía igual a la diferencia de energía entre los niveles. Si la diferencia de energía entre dos de estos estados está representada por

$$\Delta E = hc/\lambda \qquad (1)$$

Donde h es la constante de Planck, 6.623 x 10^{-34} Joule segundo por molécula, c la velocidad de la luz en m/s, obteniendo para ΔE las unidades de Joule por molécula. En (1) relaciona los modelos ondulatorio y corpuscular para la radiación. La absorción de un cuanto de energía, hc/λ, elevará una molécula al estado de mayor energía [4]. Como se indica en (1), para diferentes formas de radiación

electromagnética (es decir, diferentes λ) se obtendrán diferentes valores de energía.

Para el caso contrario, en el que el electrón situado en el nivel más alto pase al nivel más bajo, un fotón será emitido, con una energía ΔE, siendo la diferencia de energía entre estos dos niveles Fig (7).

A la absorción y emisión de fotones en un átomo también se le llama excitación y des excitación respectivamente.

Por otro lado, la fluorescencia es el resultado de un proceso que ocurre cuando ciertas moléculas llamadas fluoróforos, fluorocromos o tintes fluorescentes absorben la luz. La absorción de luz por estas moléculas eleva su nivel de energía a un breve estado de excitación. A medida que se des excitan de este estado, emiten luz fluorescente (Fig 8). Cuando un fotón, suministrado por una fuente externa como una lámpara o un láser, es absorbido por un fluoróforo, crea un estado excitado e inestable (S1). Este proceso distingue la fluorescencia de la bioluminiscencia, en la que el estado excitado se crea mediante una reacción química. El estado excitado de un fluoróforo se caracteriza por una vida media muy corta, generalmente del orden de unos nanosegundos. Durante este breve período, las moléculas excitadas generalmente se relajan hacia el nivel de energía más bajo dentro del estado excitado. Es a partir del estado excitado del singulete (S1) que origina la emisión de fluorescencia [5]. Cuando una molécula de fluorocromo cae del estado excitado al estado fundamental, se le denomina conversión interna y no da como resultado la generación de un fotón, Es importante destacar que solo la des excitación de S1 al estado fundamental es capaz de producir fluorescencia [2].

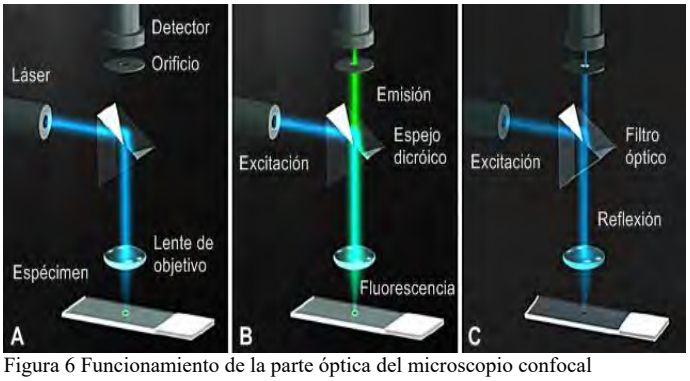


Figura 6 Funcionamiento de la parte óptica del microscopio confocal
A: Representaciones de barrido láser confocal para visualizar los tintes de fluorescencia y propiedades de reflexión del tejido aislado de la retina.
B: Se lanza un rayo láser a través de un espejo dicroico y un objetivo para excitar el tinte fluorescente en el espécimen.
C: La luz fluorescente emitida se conduce hacia atrás y a través del objetivo y un espejo dicroico (trabajado como un filtro de luz) hacia el detector de luz. Obtenida de https://histoptica.com/microscopio-confocal-o-laser-de-barrido/

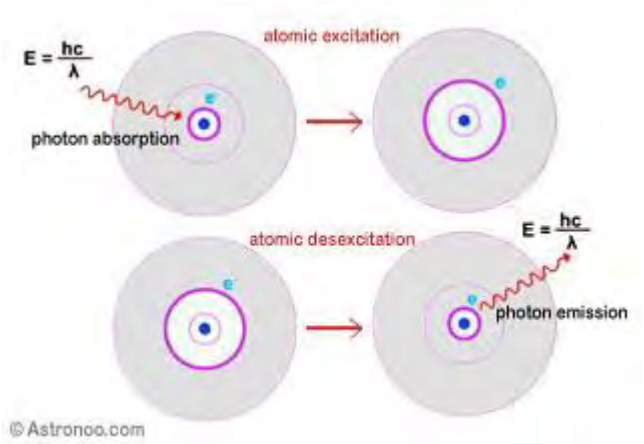


Figura 7 Absorción y emisión de un fotón.
De un nivel superior el electrón pasa a un nivel inferior adquiriendo energía (absorción) y viceversa (emisión). Obtenida de http://www.astronoo.com/es/articulos/principio-absorcion-emision-atomica.html

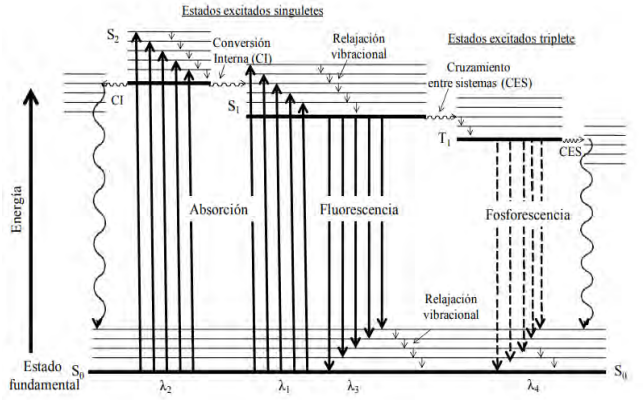


Figura 8 Diagrama de excitación y fluorescencia.
En este diagrama, se representa el aumento de energía a lo largo del eje vertical, de abajo hacia arriba y el tiempo se representa a lo largo del eje X de izquierda a derecha. A temperatura ambiente, la mayoría de los fluorocromos solo tendrán energía suficiente para existir en el estado de energía más bajo (S0). Sin embargo, la absorción de un fotón por un fluorocromo transfiere la energía del fotón al fluorocromo y eleva el estado de excitación del fluorocromo a un estado superior, generalmente el estado S1 (primer estado singulete excitado), aunque también son posibles estados de singulete superiores (por ejemplo, S2). La absorción ocurre dentro de los femtosegundos. Dentro de cada estado (S0, S1, … , Sn), existen varios subniveles vibratorios y la transición puede ser a cualquiera de los posibles subniveles, dependiendo de la energía absorbida. Poco después de la absorción (~ picosegundos), la energía del fluorocromo se relaja al nivel vibratorio más bajo [2]. Obtenida de https://www.jic.ac.uk/microscopy/more/T5_7.htm

III. MICROSCOPIA CONFOCAL Y PREMIO NOBEL 2014

Como se ha dicho los microscopios confocales pueden cortar secciones ópticas delgadas y muy claras a partir de especímenes fluorescentes gruesos (aproximadamente 2 µm) [8], además de poder obsérvalos en cualquier ángulo, por ejemplo, en planos inclinados e incluso paralelos a la línea de visión, debido a la penetración profunda en la muestra, y así obtener imágenes tridimensionales (3D) a una muy alta resolución [10].

Esta técnica permite obtener imágenes con alta resolución y ha seguido evolucionando, sin embargo, solo permite estudiar una capa delgada en la superficie de las muestras lo que limita su uso, es por eso que, en 2014 el premio nobel en química fue entregado a la invención de técnicas de super-resolución, ya que, fue la primera vez en obtener imágenes con una resolución de 10 nm [6] de sistemas biológicos vivos, y que incluso el poder reconstruir las estructuras finas de las células en 3D.

IV. CONCLUSIONES

Los microscopios confocales son relativamente fáciles de operar y se han convertido en una herramienta esencial en varias áreas de la investigación, ya que, las imágenes son producidas por el escaneo de la muestra, siendo un método no invasivo en la obtención de imágenes. La técnica de microscopia confocal que se utiliza, sigue evolucionando debido a las nuevas dificultades que aparecen, siendo un campo abierto para la investigación a futuro, por ejemplo, la resolución, la cual ha impulsado a investigadores para mejorarla, tal es el caso del premio nobel ya mencionado.

REFERENCIAS

[1] Disponible en: www.gonda.ucla.edu/ebri_core/confocal.htm
[2] R. L. Price, W. G. Jerome, “Basic Confocal Microscopy”, Ed, Springer, 2011, ch 2, pp. 17 – 28.
[3] Disponible en: https://iie.fing.edu.uy/investigacion/grupos/gti/timag/trabajos/2007/proteus/confocal.html
[4] R. S. Drago, “Physical Methods for Chemists”, Ed Surfside, 1992, ch 4, pp. 90 – 95.
[5] Disponible en: https://www.jic.ac.uk/microscopy/more/T5_7.htm
[6] Disponible en: https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/index.html
[7] B. Matsumoto, “Methods in cell Biology”, Ed Elsevier, 2002, ch 1, pp. 2 – 81.
[8] S. W. Paddock, “Confocal Microscopy, Methods and Protocols”, Ed Humana press, Ch 1, pp. 1 – 32.
[9] N. Gray (2009, octubre). Knowing the limit. Nature online. Nature milestones light microscopy.
[10] J. B. Pawley, “Handbook of biological confocal microscopy”, Ed Springer, 2006, Ch 1, pp. 1-7.

ISSN: 2594-1011

Introducción a la Teoría de Categorías

J. Cárdenas[1] E. Sarmiento[2]
[1]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, CDMX, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: dk_55@live.com.mx

Resumen — **Se dará la definición de categoría para luego mostrar ejemplos clásicos de estas y como se construyen algunos funtores entre distintas categorías.**

Palabras Clave – **categorías, ejemplos, funtores.**

Abstract — **We give you the definition of category, then we show some classical examples and finish this work with the construction of functors between different categories.**

Keywords — **Categories, examples, functors.**

I. Introducción

La teoría de categorías surge en la década de los 40´s introducida por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane esta probo ser de gran utilidad cuando en la década de los 50´s Grothendiek la usara con gran éxito para reescribir en este leguaje la Geometría Algebraica.

Definición: una categoría C consta de la siguiente información:

1. Una clase de objetos $Ob(C)$: $A, B, C, \ldots$
2. Una clase de morfismos $Hom(C)$: $f, g, h, \ldots$
3. Para cada morfismo f existen A, B en $Ob(C)$, llamados el dominio y contradominio de f respectivamente y se denotara como:
$$f: A \longrightarrow B$$
4. Dados morfismos $f: A \longrightarrow B,\ g: B \longrightarrow C$, existe un morfismo $g \circ f: A \longrightarrow C$ lo llamado la composición de f con g.
5. Para cada objetos A en $Ob(C)$ existe un morfismo $1_A: A \longrightarrow A$.

Además satisfacen las siguientes reglas:

6. Dado $f: A \longrightarrow B$ un morfismo se cumple que:
$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$
7. Dados f, g, h morfismos se cumple que:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Observación: Sean A, B objetos de una categoría C denotamos por $Hom(A, B)$ a la colección de todos los objetos de A en B[1].

Dada la definición anterior es necesario saber cómo relacionar diferentes categorías lo cual inspira las siguientes definiciones.

Definición: Sean C, D categorías, un funtor covariante $\mathcal{F}: C \longrightarrow D$ es una asignación de objetos de C en objetos de D, y de morfismos de C en morfismos de D, tal que:

1. $\mathcal{F}(f: A \longrightarrow B) = \mathcal{F}(f): \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$
2. $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$
3. $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$[1].

Definición: Sean C, D categorías, un funtor contravariante $\mathcal{F}: C \longrightarrow D$ es una asignación de objetos de C en objetos de D, y de morfismos de C en morfismos de D, tal que:

1. $\mathcal{F}(f: A \longrightarrow B) = \mathcal{F}(f): \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$
2. $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$
3. $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$[1].

También es necesario poder clasificar de alunas manera las categorías por ello se dan las siguientes definiciones.

Definición: Sea C una categoría, decimos que C es:

1. Pequeña si $Ob(C)$ y $Hom(C)$ son conjuntos.
2. Grande si no es pequeña, es decir si $Ob(C)$ u $Hom(C)$ no es un conjunto.
3. Localmente pequeña si para todos A, B objetos, $Hom(A, B)$ es un conjunto [1].

Nota: Se considerará que se tiene las nociones básicas de teoría de grupos, anillos, espacios vectoriales, conjuntos ordenados, espacios topológicos y teoría de grafos.

II. Metodología

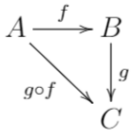
Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-XXX-08

Con las definiciones anteriores se procederá a dar ejemplos clásicos de categoría, este trabajo se terminara con la construcción de un funtor entre la categoría de los preordenes y la categoría de los grafos.

Construcción i: Considere como objetos a conjuntos, como morfismos funciones entre ellos y como composición a la composición de funciones.

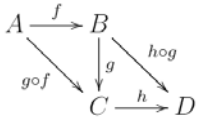
Sean A, B, C, D conjuntos, $f: A \longrightarrow B,\ g: B \longrightarrow C,$ $h: C \longrightarrow D$, funciones entre ellos.

Se puede definir $g \circ f: A \longrightarrow C$ la cual se conoce como la composición de f con g como sigue $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para toda $a \in A$.



Se tiene que para cualquier conjunto A podemos definir la función $1_A: A \longrightarrow A$ como sigue $1_A(a) = a$ para toda $a \in A$.

Además la composición en asociativa pues para toda $a \in A$ tenemos que $\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h(g\big(f(a)\big) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = ((h \circ g) \circ f)(a)$, por lo tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, así se cumple el siguiente diagrama.



Y para cualquier función $f: A \longrightarrow B$ se cumple que $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Lo anterior muestra que en efecto es un categoría y la denotaremos como **Sets.**

Observación: Si en la construcción se reemplaza los conjuntos por conjunto con alguna estructura como grupos [2], [6], anillos [2], [6], espacios vectoriales [5], grafos [3], espacios topológicos [7] o conjuntos preordenados [4], y a las funciones con funciones que son compatibles con la estructura como homomorfismos de grupos, homomorfismos de anillos, transformaciones lineales, homomorfismos de grafos, funciones continuas o funciones monótonas respectivamente, se tiene de nuevo categorías denotadas por **Grps, Rings, Vec, Grphs, Tops** y **PrO**.

Construcción ii: Sea $(P, \leq)$ un conjunto preodenado, considere como objetos a los elementos de P, se define un único morfismo de la siguiente manera si $a \longrightarrow b \iff a \leq b$.

Dado que $\leq$ es reflexivo y transitivo se tiene que existe la identidad y que la composición está bien definida, así tenemos que $(P, \leq)$ es un categoría.

Un ejemplo concreto es el siguiente: Considere (X, τ) un espacio topológico y como relación a la inclusión $\subseteq$, diremos que $U, V \in \tau$ están relacionados si y solo si $U \subseteq V$, note que para todo $U \in \tau$ se tiene que $U \subseteq U$ es decir la contención es reflexiva y además si $U \subseteq V$ y $V \subseteq W$, entonces $U \subseteq W$, así la contención es transitiva, por la tanto la inclusión es un preorden y por lo tanto $((X, \tau), \subseteq)$ es un conjunto preordenado y por la construcción anterior una categoría la cual denotaremos por **Top**.

Construcción iii: Sea (X, τ), $U \in \tau$, denote por $\mathcal{O}(U) = \{ f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \; es \; continua\}$, como la suma de funciones y multiplicación de esta definida puntualmente se tiene que $\mathcal{O}(U)$ es un anillo, y por lo tanto se puede definir un funtor $\mathcal{F}: \boldsymbol{Top} \longrightarrow \boldsymbol{Rings}$ de la siguiente manera (se denotara a la inclusión por la letra h):

1. Si $U \in \tau$ entonces $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}(U)$
2. Cada que $h: U \longrightarrow V$, entonces $\mathcal{F}(h): \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$, donde $\mathcal{F}(h)$ denota la restricción de la funciones continuas de V a U.

Por lo anterior se tiene que $\mathcal{F}: \boldsymbol{Top} \longrightarrow \boldsymbol{Rings}$ es un funtor contravariante.

Construcción iv: Lema: Sean **PrO**, **Grps,** las categorías de preordenes y la de grafos respectivamente, entonces existe un funtor covariante $\mathcal{M}: \boldsymbol{Pro} \longrightarrow \boldsymbol{Grps}$.

Demostración: Sea $(A, \leq)$ un conjunto preodenado, se procederá a construir un grafo dirigido (V_A, E_A) con vértices en A, sea $V_A = A$, como $\leq \subseteq A \times A$ para todo $(a, b) \in \leq$ se asignara la arista $\{a, b\}$, así sea $E_A = \{ \{a, b\} | \, (a, b) \in \leq \}$ dado la anterior (V_A, E_A) es un grafo, para que este sea dirigido es necesario dotarlo de dos funciones int, ter.

Sea $i: E_A \longrightarrow A \times A$, la función definida de la siguiente manera:

$$\{a, b\} \mapsto (a, b)$$

Considere las funciones proyección:

$$\pi_1: A \times A \longrightarrow A = V_A$$
$$(a, b) \mapsto a$$
$$\pi_2: A \times A \longrightarrow A = V_A$$
$$(a, b) \mapsto b$$

Entonces definimos:

$$int = \pi_1 \circ i : E_A \longrightarrow V_A$$
$$ter = \pi_2 \circ i : E_A \longrightarrow V_A$$

De lo anterior tenemos que (V_A, E_A) es un grafo dirigido.

Sean $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ preordenes, $m: (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$, una función monótona, y (V_A, E_A), (V_B, E_B) los graos generados por $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ respectivamente, entonces dado que m es monótona, es decir preserva el orden se puede definir $\tilde{m}: (V_A, E_A) \longrightarrow (V_B, E_B)$ como sigue:

$$\{a,b\} \mapsto \{m(a),m(b)\}$$

Y está bien defina pues si $\{a,b\} \in E_A$ significa que $(a,b) \in \leq_A$ por lo que bajo m se tiene que $\big(m(a),m(b)\big) \in \leq_B$ y por lo tanto $\{m(a),m(b)\} \in E_B$, por lo tanto $\tilde{m}$ es un homomorfismo de grafos.

Además dado que la función identidad es monótona y la composición de funciones monótonas también lo es por lo anterior inducen homomorfismos de grafos.

Dada la discusión anterior se puede entonces definir $\mathcal{M}: \boldsymbol{Pro} \longrightarrow \boldsymbol{Grps}$ como sigue:

1. $\mathcal{M}\big((A,\leq_A)\big) = (V_A,E_A)$ para todo objeto en $Ob(\boldsymbol{PrO})$.
2. Dado $m:(A,\leq_A) \longrightarrow (B,\leq_B)$ morfismo en $Hom(\boldsymbol{PrO})$, $\mathcal{M}\big(m:(A,\leq_A) \longrightarrow (B,\leq_B)\big) = \tilde{m}:(V_A,E_A) \longrightarrow (V_B,E_B)$.

Por lo tanto $\mathcal{M}$ es un funtor covariente entre la categoría de los preordenes **PrO** y la categoría de los grafos **Grps** ■.

III. Conclusiones

Se considera necesario la enseñanza de esta teoría (nociones básicas como las expuestas en este texto) a nivel licenciatura pues es un lenguaje común en las matemáticas.

El alcance de la Teoría de Categorías es muy amplio y se aplica a muchas áreas de las matemáticas, por lo que su estudio es necesario para la comprensión de muchos de los textos modernos, por mencionar Geometría Algebraica, Topología Algebraica, entre otros.

Referencias

[1] Awodey S., "Category Theory", *Oxford University Press*, 2010.
[2] Burton M., " A First Course in Rings and Ideals", *Addison-Wesley Publishing Company* , 1970.
[3] Diestel R., "Graph Theory" in *Springer -Velag*, 2000.
[4] Hernández Hernández F., "Teoría de Conjuntos", *Sociedad Matemática Mexicana*, 1998.
[5] Hoffman K., "Linear Algebra", *Prentice-Hall Inc.*, 1961.
[6] Hungerford W., "Abstract Algebra an Introduction", *Saunders College Publishing* , 1996.
[7] Munkres J., "Topology A First Couse" *Prentice-Hall Inc.*, 1975.

ISSN: 2594-1011

Algunas distribuciones BT clásicas

José M. Rocha Martínez[1]
[1]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55011 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rocha@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presentan aplicaciones de un criterio, basado en algunas propiedades de la función de densidad de una distribución de vida, el cual permite concluir si dicha distribución es o no de clase BT (bathtub shape) o UBT (upside-down bathtub shape), a algunas distribuciones de vida clásicas, como son una generalización de las densidades gama y normal truncada, la normal logarítmica, la gaussiana invertida y la familia de exponenciales cúbicas.**

Palabras Clave – **Distribuciones BT y UBT, función tasa de falla, distribuciones de vida continuas.**

Abstract — **Some applications of a criteria, based on the properties of the density function of a lifetime distribution function, which allow us to conclude whether or not a distribution is of class BT (bathtub shape) or UBT (upside-down bathtub shape), to some classical lifetime distributions like a generalization of the gamma and truncated normal, the log-normal, inverted gaussian and a family of cubic exponentials, are presented.**

Keywords — **BT and UBT distributions, failure rate function, continuous lifetime distributions.**

I. Introducción

La función tasa de falla de una distribución de vida modela la noción de envejecimiento. Más precisamente, el valor de la función tasa de falla del tiempo de vida de un objeto en cada tiempo $t > 0$ indica aproximadamente la fracción de objetos que fallan al tiempo t de entre aquellos que han sobrevivido hasta justo antes del tiempo t por unidad de tiempo. Para el caso de algunos objetos u organismos vivos, se observa que, en general, la correspondiente función tasa de falla exhibe un periodo de mortandad infantil durante el cual la función tasa de falla va decreciendo (este tipo de fallas puede ocurrir por defectos de diseño, herencia, etc. y su impacto disminuye con el paso del tiempo), seguida de un periodo de vida útil durante el cual la tasa de falla se mantiene esencialmente constante (este tipo de fallas ocurre por eventos accidentales, aparición de enfermedades, etc.) y concluye con un periodo de desgaste o de envejecimiento durante el cual la tasa de falla va creciendo (este tipo de fallas ocurren por acumulación natural de los efectos negativos del uso). A tasas de falla que presentan este patrón de comportamiento se les denomina tasas de falla en forma de bañera (bathtub shape), abreviado BT. La clase dual respectiva está formada por distribuciones con tasas de falla en forma de bañera invertida (upside-down bathtub), abreviado UBT. A pesar de la importancia que tienen estas distribuciones, en la literatura se cuenta con pocos modelos de distribuciones BT y UBT (c.f. [1] y [3]). En este trabajo veremos un procedimiento que permite concluir si la función de densidad de una distribución de vida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en P es o no de clase BT (UBT) el cual será aplicado a algunas distribuciones clásicas.

[1]Este trabajo está patrocinado en parte por la COFAA y el SIBE del IPN.

II. Resultados

En lo sucesivo se considera una distribución de vida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en P, cuya función de densidad f es dos veces diferenciable en $(0, \infty)$ y satisface

$$f(t) > 0, \ \forall t > 0, \quad \text{y} \quad \int_0^\infty f(t)dt = 1. \quad (1)$$

La función **tasa de falla** de una variable aleatoria X absolutamente continua con soporte contenido en $(0, \infty)$ se define como

$$r_X(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{d}{dt}[-\log \bar{F}_X(t)] \quad \text{si } \bar{F}_X(t) > 0, \quad (2)$$

y ∞ de otra forma, por convención, luego se supondrá que la función tasa de falla r_X es también dos veces diferenciable en $(0, \infty)$. Observe que entonces

$$\bar{F}_X(t) = e^{\int_0^t r_X(x)dx}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Por ejemplo, se sabe la distribución exponencial es la única distribución absolutamente continua con tasa de falla constante.

En lo que sigue, se denotará por:

(I) la familia de distribuciones que tienen una tasa de falla estrictamente creciente.

(D) la familia de distribuciones con tasa de falla estrictamente decreciente.

(B) el siguiente caso especial de BT: existe $t^* > 0$ tal que $r'(t) < 0, \ \forall t \in (0, t^*); \ r'(t^*) = 0;$ y $r'(t) > 0, \ \forall t \in (t^*, \infty);$

(U) al siguiente caso especial de UBT: existe $t^* > 0$ tal que $r'(t) > 0, \ \forall t \in (0, t^*); \ r'(t^*) = 0;$ y $r'(t) < 0, \ \forall t \in (t^*, \infty).$

Se definen las funciones

$$g(t) = \frac{1}{r(t)} = \frac{\bar{F}(t)}{f(t)}, \quad \forall t > 0, \tag{4}$$

$$\eta(t) = \frac{d}{dt}[-\log f(t)], \quad \forall t > 0, \tag{5}$$

Note que g es positiva y es también dos veces diferenciable en $(0, \infty)$. Se verifica de directamente el resultado siguiente.

1. Proposición. *Se tiene*

$$g'(t) = g(t)\eta(t) - 1, \quad \forall t > 0. \tag{6}$$

La función g' puede ser reescrita alternativamente como sigue.

2. Proposición. *Se tiene*

$$g'(t) = \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}[\eta(t) - \eta(y)]dy. \tag{7}$$

Demostración. Se sigue de (6) y (4),

$$g'(t) = g(t)\eta(t) - 1 = \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}\eta(t)dy - 1$$
$$= \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}[\eta(t) - \eta(y)]dy + \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}\eta(y)dy - 1. \tag{8}$$

Pero por (5),

$$\int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}\eta(y)dy = \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}\left[-\frac{f'(y)}{f(y)}\right]dy = -\frac{1}{f(t)}\int_t^\infty f'(y)dy.$$

Por el teorema fundamental del cálculo para funciones de clase C^1 no negativas sobre intervalos abiertos de P, existe $f(\infty) = \lim_{y\to\infty} f(y)$, el cual debe ser 0, por ser f integrable en $(0, \infty)$, y se cumple $\int_t^\infty f'(y)dy = f(\infty) - f(y)$. Así pues, $\int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)}\eta(y)dy = 1$. Sustituyendo en (8) se obtiene (7). ∎

Los dos resultados fundamentales siguientes (cuyas demostraciones se pueden ver en [2]) proporcionan un procedimiento basado en la función de densidad de una distribución de vida para decidir si la distribución correspondiente pertenece a alguna de las clases (I), (D), (B) o (U).

3. Teorema. *Se cumplen las afirmaciones siguientes.*

i. *Si* $\eta'(t) > 0, \forall t > 0$, *entonces* r *es (I).*

ii. *Si* $\eta'(t) < 0, \forall t > 0$, *entonces* r *es (D).*

iii. *Suponiendo que existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$\eta'(t) < 0, \quad 0 < t < t_0, \quad \eta'(t_0) = 0, \quad \eta'(t) > 0, \quad t > t_0, \tag{9}$$

se cumplen:

(a) *Si existe* $y_0 > 0$ *tal que* $g'(y_0) = 0$, *entonces* r *es (B).*

(b) *Si no existe* $y_0 > 0$ *tal que* $g'(y_0) = 0$, *entonces* r *es (I).*

iv. *Suponiendo que existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$\eta'(t) > 0, \quad 0 < t < t_0, \quad \eta'(t_0) = 0, \quad \eta'(t) < 0, \quad t > t_0, \tag{10}$$

se cumplen:

(a) *Si existe* $y_0 > 0$ *tal que* $g'(y_0) = 0$, *entonces* r *es (U).*

(b) *Si no existe* $y_0 > 0$ *tal que* $g'(y_0) = 0$, *entonces* r *es (D).*

Con el propósito de aplicar el Teorema 3 de un modo más eficiente conviene probar primero el siguiente resultado, el cual facilita la comprobación de la existencia o no existencia de un $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$ al suponer que se cumple (9) o (10).

4. Teorema. Suponga que en el Teorema 3 se cumple alguna de las condiciones (9) o (10).

i. Suponga también que existe el límite

$$\varepsilon = \lim_{t\downarrow 0} f(t)$$

el cual puede ser igual a 0 o ∞.

(a) Si $\varepsilon = \infty$ y se cumple (9), entonces r es (B).
(b) Si $\varepsilon = 0$ y se cumple (9), entonces r es (I).
(c) Si $\varepsilon = 0$ y se cumple (10), entonces r es (U).
(d) Si $\varepsilon = \infty$ y se cumple (10), entonces r es (D).

ii. Suponga ahora que existe el límite

$$\delta = \lim_{t\downarrow 0} g(t)\eta(t)$$

el cual puede ser igual a $-\infty$ o ∞.

(a) Si $\delta > 1$ y se cumple (9), entonces r es (B).
(b) Si $\delta < 1$ y se cumple (9), entonces r es (I).
(c) Si $\delta < 1$ y se cumple (10), entonces r es (U).
(d) Si $\delta > 1$ y se cumple (10), entonces r es (D).

III. Aplicaciones

En esta sección se analizan algunas familias de distribuciones clásicas que ilustran la aplicabilidad de los Teoremas 3 y 4 por medio de las respectivas funciones con densidad. En el proceso se introducirán algunos nuevos modelos con función tasa de falla (B). Por brevedad se omitirá el argumento θ en las funciones $f,\ f_j,\ \eta,\ \eta',\ \xi,\ U_j,\ r,\ r_j,\ h,\ h_j$ y $\bar{F}_j$ que serán consideradas.

FAMILIA EXPONENCIAL.

Se aplicará el Teorema 3 a la familia de distribuciones con funciones de densidad del tipo exponencial, es decir, funciones de densidad de la forma

$$f(t, \theta) = C(\theta)e^{\sum_{i=1}^k U_i(t,\theta)}, \quad \forall t > 0, \tag{12}$$

donde, para cada i, $U_i(i, \theta)$ es una función dos veces diferenciable con respecto a t en $(0, \infty)$ y θ es un vector constante.

5. Proposición. *Si una distribución tiene función de densidad de la forma (12), entonces*

$$\eta(t,\theta) = -\sum_{i=1}^{k} U_i'(t,\theta), \quad \forall t > 0, \tag{13}$$

$$\eta'(t,\theta) = -\sum_{i=1}^{k} U_i''(t,\theta), \quad \forall t > 0. \tag{14}$$

Demostración. Se tiene

$$f'(t,\theta) = C(\theta)e^{\sum_{i=1}^{k} U_i(t,\theta)} \sum_{i=1}^{k} U_i'(t,\theta), \quad \forall t > 0.$$

Luego, por (5), se debe tener

$$\eta(t,\theta) = -\frac{f'(t,\theta)}{f(t,\theta)} = -\frac{C(\theta)e^{\sum_{i=1}^{k} U_i(t,\theta)} \sum_{i=1}^{k} U_i'(t,\theta)}{C(\theta)e^{\sum_{i=1}^{k} U_i(i,\theta)}}, \quad \forall t > 0,$$

de donde resulta (13). Derivando (13) se obtiene de inmediato (14). ∎

Es importante hacer notar que cualquier función de densidad absolutamente continua puede ser reescrita en la forma (12). En efecto, basta escribir $f(t,\theta) = e^{h(t,\theta)}$, $\forall t > 0$, donde $h(t,\theta) = \log f(t,\theta)$, $\forall t > 0$. Del mismo modo, si

$$f(t,\theta) = C(\theta)q(t,\theta)e^{\sum_{i=1}^{k} U_i(t,\theta)}, \quad \forall t > 0,$$

entonces

$$f(t,\theta) = C(\theta)q(t,\theta)e^{\sum_{i=1}^{k} U_i^*(t,\theta)}, \quad \forall t > 0,$$

donde $U_i^*(t,\theta) = U_i(t,\theta)$, $i = 1, K, , k$, y $U_{k+1}^*(t,\theta) = \log q(t,\theta)$.

A continuación se consideran algunos casos particulares de la familia exponencial.

Densidades gama y normal truncada generalizadas.

Considere la familia de densidades exponenciales de la forma

$$f(t) = C(\alpha,\beta,\gamma)e^{-\alpha t - \beta t^2 + \gamma \log t}, \quad \forall t > 0,$$

donde el dominio natural de los parámetros es el conjunto de (α,β,γ) tales que $-\infty < \alpha < \infty, \beta > 0, \gamma > -1$ o $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma > -1$. Observe que en el caso particular de que $\beta = 0$, f se reduce a la densidad gamma, incluyendo la exponencial cuando también $\gamma = 0$; y si $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, f se reduce a la densidad normal truncada.

Note que f es de la forma (12), donde $k = 3, \theta = (\alpha,\beta,\gamma)$ y

$$\big(U_1(t), U_2(t), U_3(t)\big) = (-\alpha t, -\beta t^2, \gamma \log t).$$

Entonces, por (13) y (14), se debe tener

$$\eta(t) = \alpha + 2\beta t - \frac{\gamma}{t}, \quad \eta'(t) = 2\beta + \frac{\gamma}{t^2}, \quad \forall t > 0. \tag{15}$$

Caso 1: $\boldsymbol{\beta > 0}$.

(a) Si $\gamma \geq 0$, entonces $\eta'(t) \geq 0$, $\forall t > 0$, por (15). De acuerdo con la parte (i) del Teorema 3, r debe ser (I). Note que el caso $\beta > 0$ y $\gamma = 0$ se reduce a la densidad normal truncada.

(b) Si $\gamma < 0$, entonces se cumple (9) con $t_0 = (-\gamma/2\beta)^{1/2}$. Para decidir si existe o no $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$ aplicaremos el Teorema 4. Ya que

$$\varepsilon = \lim_{t \downarrow 0} C(\alpha,\beta,\gamma)e^{-\alpha t - \beta t^2 + \gamma \log t} = \infty$$

la parte (i.a) del Teorema 4 implica que r debe ser (B).

Caso 2: $\boldsymbol{\beta = 0}$.

En este caso (15) se reduce a

$$\eta'(t) = \frac{\gamma}{t^2}, \quad \forall t > 0.$$

(a) Si $\gamma > 0$, entonces $\eta'(t) > 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (i) del Teorema 3, r debe ser (I).

(b) Si $\gamma < 0$, entonces $\eta'(t) < 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (ii) del Teorema 3, r debe ser (D).

(c) Si $\gamma = 0$, f se reduce a una densidad exponencial con parámetro $\alpha > 0$. Así pues, r es de clase IFR, DFR, BT y UBT. ◄

Otra generalización de la densidad gama.

La familia de densidades gama generalizada con parámetros (α,β,γ) se define como

$$f(t) = \frac{\gamma t^{\gamma\alpha - 1}}{\beta^{\gamma\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-(t/\beta)^{\gamma}}, \quad \forall t > 0,$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\gamma > 0$. Observe que esta familia incluye a la distribución de Weibull cuando $\alpha = 1$; a la distribución gama cuando $\gamma = 1$; y la parte positiva de la distribución normal, cuando $\alpha = 1/2$ y $\gamma = 2$. Se tiene

$$f(t) = C(\alpha,\beta,\gamma)e^{(\gamma\alpha - 1)\log t - (t/\beta)^{\gamma}}, \quad \forall t > 0,$$

donde $C(\alpha,\beta,\gamma) = \gamma/[\beta^{\gamma\alpha}\Gamma(\alpha)]$. En este caso se tiene: $k = 2$, $\theta = (\alpha,\beta,\gamma)$ y

$$\big(U_1(t), U_2(t)\big) = \big((\gamma\alpha - 1)\log t\,, -(t/\beta)^{\gamma}\big).$$

Se sigue de (13) y (14) que

$$\eta(t) = \frac{-(\gamma\alpha - 1)}{t} + \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\gamma};$$

$$\eta'(t) = t^{-2}\left[(\gamma\alpha - 1) + \gamma(\gamma - 1)\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\gamma}\right], \quad \forall t > 0. \tag{16}$$

Note que si $\gamma > 0$ y $\beta > 0$, entonces la función $t \mapsto (t/\beta)^{\gamma}$ es creciente en $(0,\infty)$.

Caso 1: $\boldsymbol{\gamma\alpha - 1 < 0}$.

(a) Si $0 < \gamma \leq 1$, entonces $\gamma(\gamma - 1) < 0$. Luego $\gamma(\gamma - 1)(t/\beta)^{\gamma} < 0$, de donde $\eta'(t) < 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (ii) del Teorema 3, r debe ser (D).

(b) Si $\gamma > 1$, entonces $[(1 - \gamma\alpha)\beta^{\gamma}]/[\gamma(\gamma - 1)] > 0$. En este caso se cumple (9) con

$$t_0 = \sqrt[\gamma]{\frac{(1 - \gamma\alpha)\beta^{\gamma}}{\gamma(\gamma - 1)}}.$$

Para decidir si existe o no $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$ aplicaremos el Teorema 4. Ya que

$$\varepsilon = \lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\gamma}{\beta^{\gamma\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{(\gamma\alpha - 1)\log t - (t/\beta)^{\gamma}} = \infty,$$

por ser $\gamma\alpha - 1 < 0$ y $\gamma > 1 > 0$. La parte (i.a) del Teorema 4 implica que r debe ser (B).

Caso 2: $\gamma\alpha - 1 > 0$.
(a) Si $\gamma \geq 1$, entonces $\eta'(t) > 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (i) del Teorema 3, r debe ser (I).
(b) Si $0 < \gamma < 1$ entonces $[(1-\gamma\alpha)\beta^{\gamma}]/[\gamma(\gamma-1)] > 0$. En este caso $\eta'(t_0) = 0$ donde

$$t_0 = \sqrt[\gamma]{\frac{(1-\gamma\alpha)\beta^{\gamma}}{\gamma(\gamma-1)}}.$$

Así pues, se cumple (10). Ya que

$$\varepsilon = \lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\gamma}{\beta^{\gamma\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{(\gamma\alpha-1)\log t-(t/\beta)^{\gamma}} = 0,$$

por ser $\gamma\alpha - 1 > 0$ y $\gamma > 0$. La parte (i.c) del Teorema 4 implica que r debe ser (U).

Caso (3): $\gamma\alpha - 1 = 0$.
(a) Si $\gamma = 1$, entonces también $\alpha = 1$. Así pues f se reduce a una densidad exponencial, luego tiene tasa de falla constante. Por lo tanto r debe ser IFR, DFR, BT y UBT.
(b) Si $\gamma < 1$, entonces $\eta'(t) < 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (ii) del Teorema 3, r debe ser (D).
(c) Si $\gamma > 1$ entonces $\eta'(t) > 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (i) del Teorema 3, r debe ser (I). ◄

Densidad normal logarítmica.

La densidad normal logarítmica con parámetros (μ, σ^2), donde $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$, se define como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-(\log t-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad \forall t > 0.$$

Para caracterizar la respectiva tasa de falla es conveniente reescribir esta función de densidad en la forma (12). Se tiene

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\log t-[(\log t-\mu)^2/(2\sigma^2)]}, \quad \forall t > 0,$$

es decir,

$$f(t) = C(\mu,\sigma)e^{-\log t-[(\log t-\mu)^2/(2\sigma^2)]}, \quad \forall t > 0,$$

donde $C(\mu,\sigma) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$. En este caso se tiene: $k = 2, \theta = (\mu,\sigma)$ y

$$\big(U_1(t), U_2(t)\big) = \left(-\frac{(\log t-\mu)^2}{2\sigma^2}, -\log t\right).$$

Se sigue de (13) y (14) que

$$\eta(t) = \frac{\log t-\mu}{t} + \frac{1}{t};$$

$$\eta'(t) = \left(\frac{1}{t\sigma}\right)^2 [1 - \log t + \mu - \sigma^2], \quad \forall t > 0.$$

Es claro que la función η' es estrictamente decreciente en $(0,\infty)$ y $\eta'(t_0) = 0$ donde $t_0 = e^{1+\mu-\sigma^2}$, entonces se cumple (10). Para decidir si existe o no $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$ aplicaremos el Teorema 4. Se tiene

$$\varepsilon = \lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log t-\mu)^2/(2\sigma^2)-\log t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\log t)^2/(2\sigma^2)-\log t} = 0,$$

ya que

$$\lim_{t\downarrow 0} -\frac{(\log t)^2}{2\sigma^2} - \log t = (\log t)^2\left[\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{\log t}\right] = -\infty.$$

La parte (i.c) del Teorema 4 implica que r debe ser (U). ◄

Densidad gaussiana invertida.

La densidad gaussiana invertida con parámetros (μ,λ), donde $\mu > 0$ y $\lambda > 0$, se define como

$$f(t) = \left(\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right)^{1/2} e^{-\lambda(t-\mu)^2/(2\mu^2 t)}, \quad \forall t > 0.$$

Reescribiendo esta función de densidad en la forma (12), resulta

$$f(t) = C(\mu,\lambda)e^{-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t} - \frac{3\log t}{2}}, \quad \forall t > 0,$$

donde $C(\mu,\lambda) = (\lambda/(2\pi))^{1/2}$. En este caso se tiene: $k = 2$, $\theta = (\mu,\lambda)$ y

$$\big(U_1(t), U_2(t)\big) = \left(-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}, -\frac{3\log t}{2}\right).$$

Se sigue de (13) y (14) que

$$\eta(t) = \frac{\lambda}{2\mu^2} - \frac{\lambda}{2t^2} + \frac{3}{2t}; \quad \eta'(t) = \frac{2\lambda - 3t}{2t^3}, \quad \forall t > 0.$$

Es claro que se cumple (10) con $t_0 = 2\lambda/3 > 0$. Para decidir si existe o no $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$, aplicaremos el Teorema 4. Se tiene

$$\varepsilon = \lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right)^{1/2} e^{-\lambda(t-\mu)^2/(2\mu^2 t)}.$$

Ya que $\lim_{t\downarrow 0} t\log t = 0$, se debe tener

$$\lim_{t\downarrow 0}\left[-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t} - \frac{3\log t}{2}\right] = \lim_{t\downarrow 0}\left[-\frac{\lambda(t-\mu)^2 - 3\mu t\log t}{2\mu^2 t}\right] = -\infty,$$

pues $\mu > 0$. Por lo tanto $\varepsilon = 0$. La parte (i.c) del Teorema 4 implica que r debe ser (U). ◄

Familia de exponenciales cubicas.

Como ya se ha visto en los ejemplos anteriores, la mejor forma de crear distribuciones de clase BT o UBT es que se cumpla (9) o (10) y que η' sea lineal. Esto ocurre con la familia de densidades de la forma

$$f(t) = C(\alpha,\beta,\gamma)e^{-\alpha t-\beta t^2+\gamma t^3}, \quad \forall t > 0,$$

donde el dominio natural de los parámetros es la unión de los conjuntos

$$\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha,\beta \in \mathrm{P}; \gamma > 0\}, \{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha \in \mathrm{P}; \beta,\gamma > 0\} \text{ y } \{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha > 0; \beta = \gamma = 0\}.$$

En este caso, se tiene $k = 3$, $\theta = (\alpha,\beta,\gamma)$ y

$$\big(U_1(t), U_2(t), U_3(t)\big) = (-\alpha t, -\beta t^2, \gamma t^3).$$

Se sigue de (13) y (14) que

$$\eta(t) = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2; \quad \eta'(t) = 2\beta + 6\gamma t, \ \forall t > 0.$$

Caso (1): $\beta \geq 0$ y $\gamma > 0$ o $\beta > 0$ y $\gamma \geq 0$. En este caso $\eta'(t) > 0$, $\forall t > 0$. De acuerdo con la parte (i) del Teorema 4 r debe ser (I).

Caso (2): $\boldsymbol{\beta = \gamma = 0}$. En este caso f es una densidad exponencial con parámetro $\alpha > 0$. Luego r es IFR, DFR, BT y UBT.

Caso (3): $\boldsymbol{\beta < 0}$. En este caso se cumple (9) con $t_0 = -\beta/(3\gamma)$. Para decidir si existe o no $y_0 > 0$ tal que $g'(y_0) = 0$, aplicaremos la parte (ii) del Teorema 4 (la parte (i) no es aplicable en este caso por ser $\varepsilon \neq 0, \infty$). Se tiene

$$\begin{aligned}\delta &= \lim_{t\downarrow 0} g(t)\eta(t)\\ &= \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2}{e^{-\alpha t-\beta t^2+\gamma t^3}}\right)\int_t^\infty e^{-\alpha u-\beta u^2+\gamma u^3}du\\ &= \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2}{e^{-\alpha t-\beta t^2+\gamma t^3}}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha(y-t)-\beta(y-t)^2+\gamma(y-t)^3}dy\\ &= \lim_{t\downarrow 0}\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha y-\beta y^2+\gamma y^3}dy,\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se obtiene haciendo un cambio de variable y la quinta igualdad se cumple por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Siendo $\int_0^\infty e^{-\alpha y-\beta y^2+\gamma y^3}dy > 0$, podemos concluir lo siguiente.

Si $\alpha \leq 0$, entonces $\delta \leq 0 < 1$, luego la parte (ii.b) del Teorema 4 implica que r es (I).

Si $\alpha > 0$ y $\delta < 1$, entonces la parte (ii.b) del Teorema 4 implica que r es (I).

Si $\alpha > 0$ y $\delta > 1$, entonces la parte (ii.a) del Teorema 4 implica que r es (B). ◄

IV. Conclusiones

Se ha aplicado un procedimiento para determinar si una distribución de vida, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en P es o no de clase BT (UBT) el cual está basado en la función de densidad respectiva, a algunas distribuciones clásicas de la literatura. Es posible que este mismo procedimiento, con algunas modificaciones, pueda también ser aplicado a algunas mezclas de distribuciones. Esperamos hacer esto en un futuro próximo.

Referencias

[1] R. E. Barlow and and F. Proschan , *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, To begin with, 1981.

[2] R. E. Glaser, "Bathtub and Related Failure Rate Characterizations", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 75, Number 371, 667-672, 1980, Theory and Methods Section.

[3] J. H. K. Kao, "A graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life-Testing of Electron Tubes", *Technometrics*, Vol. 1, No. 4, 1959.

ISSN: 2594-1011

Una visión en perspectiva de la contaminación por ruido en la Ciudad de México

José Antonio Peralta
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

Resumen — **Se presenta en este trabajo una visión de cómo el ruido en las avenidas principales de la ciudad de México ha evolucionado en los últimos años. Se analiza también el ruido en los ambientes laborales, en las fiestas, y en el uso de los reproductores portátiles. Se describen sus efectos dañinos y se destacan los niveles riesgosos en que los jóvenes escuchan la música en estos reproductores. El estudio se basa en medidas desarrolladas con el uso de un dosímetro de ruido, que es un dispositivo que sigue al individuo que se expone al ruido, guardando en memoria cada segundo los niveles registrados para, al final de una jornada de exposición, vaciarlos en una computadora para realizar diversos tipos de análisis estadísticos.**

Palabras Clave – **Medidas de ruido, tráfico, daños**

Abstract — **This paper presents a vision of how noise in the main avenues of Mexico City has evolved in recent years. Noise is also analyzed in work environments, at parties, and in the use of portable players. Its harmful effects are described and the risky levels in which young people listen to music in these players are highlighted. The study is based on measures developed with the use of a noise dosimeter, which is a device that follows the individual who is exposed to noise, keeping in memory every second the levels recorded for, at the end of a day of exposure, empty them in a computer to perform various types of statistical analysis.**

Keywords — **Noise measures, car traffic, harmful effects**

I. Introducción

El uso excesivo de la energía se apoderó de nuestras vidas a partir de la Revolución Industrial [1], sobre todo con el uso de la máquina de vapor la cual producía trabajo a partir del consumo de combustible; pero con el uso excesivo de los combustibles también hizo aparición uno de sus efectos nocivos: la invasión del medio ambiente de la energía de desecho, la basura energética, la energía desordenada, ya en forma de calor o también de ruido, hecho inevitable como lo indica la segunda ley de la termodinámica. Al principio el calor y el ruido solo asolaban el interior de los centros de trabajo y los obreros fueron los primeros en sufrir sus dañinos efectos, uno de ellos la sordera [2], pero cuando fue posible construir máquinas que hicieran andar no solo a los telares sino a las locomotoras, a los barcos, y finalmente a los automóviles de uso particular, el ruido se salió de sus confinamientos fabriles iniciales para inundar los espacios públicos, y finalmente hasta los mismos espacios domésticos con toda variedad de electrodomésticos o aparatos de sonido.

II. Historia y legislación

Como fue lógico, los primeros en quejarse de los efectos nocivos del ruido fueron los trabajadores, por ello la primera legislación sobre los niveles permitidos del ruido permitidos se refirieron específicamente a los centros de trabajo. En la tabla 1 se muestran los niveles permitidos de exposición dentro de estos ámbitos laborales; se observa que el nivel de ruido medido en decibeles (dB) comienza a ser riesgoso a partir de los 90 dB; a este nivel de ruido solo se permite a un trabajador estar expuesto 8 horas, cada vez que el nivel sube 3 dB el tiempo de exposición permitido se reduce a la mitad, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1
Tiempos permitidos de exposición a ruido

Nivel sonoro (dB)	Tiempo de exposición
90	8 hr
93	4 hr
96	2 hr
99	1 hr
102	30 min
105	15 min
120	0 mil

Esta legislación también rige para nuestro país, pero hay que hacer algunos comentarios al respecto. Originalmente esta tabla de valores permitidos comenzaba a los 80 dB, pero la presión de los empresarios logró subirla hasta 90 [2], por tanto, la tabla de exposiciones no fue establecida en función de criterios exclusivos de salud sino también de economía empresarial; por otra parte esta tabla supone de forma implícita que el trabajador, luego de estar sometido a ciertos niveles de ruido se dirige hacia su hogar en donde encontrará tiempo y forma de escapar del ruido para que mediante el descanso, el sueño, el ambiente silencioso, así como de una buena alimentación logre recuperar los umbrales normales de percepción, es decir que se cure de la

sordera pasajera inducida por una jornada ruidosa en el trabajo así como se repone de su fatiga. Pero es claro que estos supuestos no se cumplen en una ciudad como la nuestra ya que dada la lejanía usual entre los centros de trabajo y las viviendas de los trabajadores, en el transporte de ida o de vuelta sigue siendo sometido, durante 2 a 4 horas, a altos niveles de ruido, ya en las avenidas como dentro de los camiones, microbuses o el metro. Por otra parte, en su vivienda misma, ya sea en una vecindad o en un edificio de departamentos, tiene que sufrir los ruidos de los hogares vecinos.

Estos puntos los veremos en los apartados siguientes.

III. El ruido en los espacios laborales

Los estudios de los efectos del ruido sobre la eficiencia o sobre la fisiología de quienes desarrollan una actividad parecen ser contradictorios; en la ESFM una prueba específica en que se hizo un conteo sobre los números de aciertos y número de errores en una prueba de habilidad manual en condiciones de silencio y condiciones de ruido mostró que los efectos del ruido parecen ser pocos sobre las actividades que requieren un fino control manual; asimismo no hubo efectos aparentes sobre el ritmo cardiaco [3,4]. En otros estudios, sin embargo, hay indicios claros de los efectos del ruido sobre el funcionamiento del cuerpo humano [5,6]. De acuerdo a las estadísticas de IMSS en 1993 el primer lugar en enfermedades fueron las enfermedades del oído y la sordera traumática,, siguiéndole después la neumoconiosis y la dermatosis [7]. Algunos estudios de casos aislados encontraron en la ciudad de México que en una industria había trabajadores expuestos simultáneamente a ruidos que fluctuaban entre los 86 y 106.5 dB y respirando además disolventes orgánicos [4]. Otra investigación realizada en la ciudad de Monterrey detectó en una fábrica de producción y ensamble de partes automotrices niveles entre 70 y 100 dB. Finalmente, un amplio estudio efectuado en seis empresas de Chihuahua reportó que la fábrica con menor nivel de ruido presentaba un nivel promedio de 98 dB, mientras en la más ruidosa había 115 dB [4].

IV. El ruido en los espacios públicos

En general se propone que en una ciudad, a mayor cantidad de vehículos mayores niveles promedio de ruido [8]. En 1960 circulaban en la ciudad 192 mil automotores, en 2010 había 4 millones de autos circulando en la zona metropolitana, en la actualidad ya son más de 5 millones. Para encontrar la forma como los niveles de ruido dependen del número de autos en diferentes años hemos realizado mediciones en la avenidas con mayor afluencia de tráfico en 1996, 2003 y 2014 [9].

El monitoreo se realizó con un dosímetro de ruido que es un dispositivo portátil que mide cada segundo el nivel de intensidad sonora y guarda la información en una memoria; como otro tipo de dosímetros éste acompaña al individuo durante toda una jornada de exposición, al final los datos se vacían en una computadora para una revisión de su historial y para hacer distintos análisis estadísticos tales como medidas de promedio, niveles máximos, histogramas, etc. Las medidas se han hecho en la escala A del sonómetro, la cual reproduce la curva de filtrado de las frecuencias que hace el oído humano, en adelante no se denotará a estos registros como dBA, sino simplemente como dB. Las medidas que se han hecho en diferentes avenidas han sido recorriendo en auto con las ventanas abiertas, un trayecto determinado durante una hora y en horas hábiles; se han hecho en diferentes años para mostrar la evolución del ruido en función del tráfico creciente en la ciudad, del tipo de automóviles, así como también de las remodelaciones hechas en las avenidas (ver tabla 2).

TABLA 2.
NIVELES DE RUIDO PARA DIFERENTES AÑOS EN DIFERENTES VÍAS DE COMUNICACIÓN DE LA CDMX

AVENIDA	1996	2003	2014
ZARAGOZA	91.2	85	70.5
ERMITA	80.2	79.0	78.0
EJE CENTRAL	79.0	78.0	86.0
POLITECNICO	78.2	77.0	79.0
INSURGENTES	83.0	80.0	81.4
CONSULADO	83.8	80.0	81.1
V. MORELOS	83.0	83.0	83.0

Para visualizar cómo aún fuera de sus centros de trabajo los obreros siguen sometidos a altos niveles de ruido, se han hecho recorridos típicos de un trabajador, por ejemplo, partiendo de la la Unidad Profesional Adolfo López Mateos, en Zacatenco, luego tomando la ruta Ticomán, Insurgentes, Villa Morelos hacia Ecatepec y finalmente regresando por la misma ruta al Politécnico. El promedio de exposición fue de 81 dB, con máximos de 89 dB. La distribución estadística de los niveles de exposición se muestra en la figura 1.

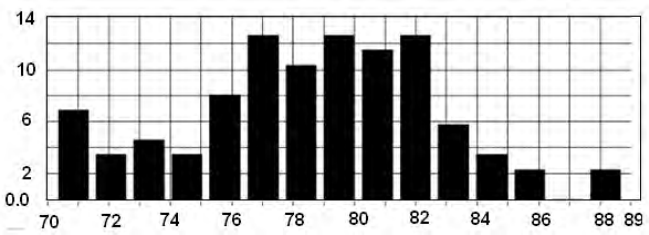


Figura 1. Histograma de tiempos de exposición en minutos para diferentes niveles de ruido en dBA

Por otra parte, un registro típico de los niveles de ruido en función del tiempo, tal como lo experimenta un individuo a la orilla de una avenida con mucho tráfico pesado, como

ocurre en el norte de la ciudad, muestra que los niveles son azarosos, muy cambiantes y variando desde 60 dB hasta los casi 90 dB en un corto espacio de tiempo como se muestra en la figura 2.

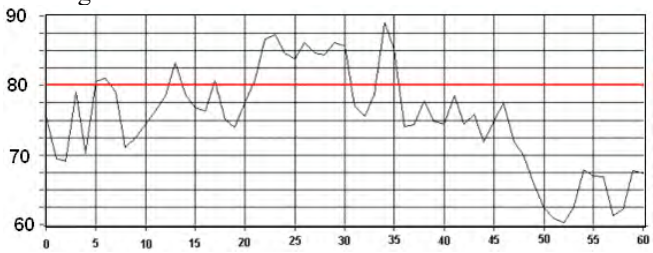


Figura 2. Niveles cambiantes del ruido en 1 minuto indicados en decibeles

V. El ruido en las fiestas y en ambientes domésticos

Por otra parte hemos hecho mediciones en fiestas y centros de diversión y hemos comprobado que las gentes se exponen a sonidos máximos por encima incluso de los 100 dB, particularmente en el rango de las frecuencias bajas (sonidos graves); así en una fiesta típica el nivel promedio fue de 96 dB con máximos de 107 dB. La explicación que dan los jóvenes es que de esta manera las vibraciones físicas de la música se sienten con mayor intensidad (¡oyen con la piel!), lo cual les causa sensaciones más vivas y placenteras.

VI. Los reproductores portátiles

Con del desarrollo de la tecnología, además del ruido dentro de las fábricas, del ruido en las calles, y del ruido dentro de los hogares, ha aparecido una nueva fuente no de ruido pero sí de sonidos intensos: los reproductores portátiles de música en todas sus variedades. Estas nuevas fuentes de daño acústico, que acompañan a multitud sobre todo de jóvenes que caminan por las calles, o que van en los diversos medios de transporte colectivo, y que se han vuelto una imagen familiar para todos nosotros, no molestan con el sonido de su música a las gentes que van a su lado, pero en realidad quienes se enfundan los audífonos son sometidos a niveles muy altos de intensidad sonora. Los jóvenes con este tipo de hábito ignoran los niveles de intensidad sonora a que se someten, ignoran los niveles a partir del cual ya empiezan a padecer riesgo de una sordera progresiva, y por otra parte no hay ninguna legislación vigente que norme este tipo particular de aparatos sonoros. Nosotros también hemos hecho mediciones de estos niveles sonoros utilizando el micrófono del sonómetro, una bocina típica de audífono de los que se introducen dentro del conducto auditivo, y disponiéndolos dentro de un orificio que simula al conducto auditivo así como el hueso temporal en el que está empotrado (ver figura 3).

Lo que se ha encontrado en una muestra de 50 alumnos es que el 80 % se sometían a intensidades en un rango de 85 a 120 dB [9], esto es que estaban francamente en zona de riesgo. Hay que considerar también que lo propio de estos jóvenes es que cuando viajan en el transporte público, ante el ruido ambiental, tienden a subirle al volumen de sus reproductores.

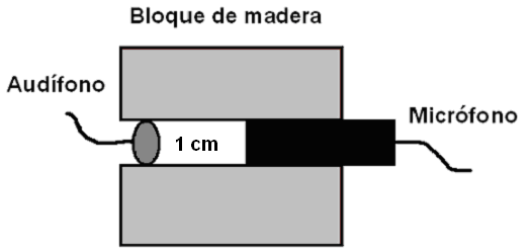


Figura 3. Arreglo experimental para medir los niveles de intensidad a que se someten los usuarios de reproductores portátiles.

VII. Daños que genera el ruido

Como se ha indicado en el inciso III los trabajadores de las industrias mencionadas están sometidos a altos niveles de ruido; en ellos se ha encontrado que los trabajadores expuestos a más de 90 dB mostraron mayores índices de tensión arterial sistólica, frecuencia cardiaca, cefalea, presencia de vértigo en horas de labores, alteraciones en el ritmo de sueño, cambios de conducta, y ansiedad o irritabilidad en horas de trabajo.

Tal como lo muestran ciertas situaciones de la vida diaria, el ruido altera la conducta de la gente; así, en un ambiente doméstico, cuando hay algún tipo de desacuerdo familiar los gritos y las palabras altisonantes aparecen con facilidad bajo condiciones de ruido; por otra parte, cuando se requiere hacer una tarea en que se requiere una percepción fina de los sonidos los ruidos ambientales ponen a los individuos bajo una máxima tensión, por ejemplo, detectar una falla del motor a la orilla de una avenida muy transitada.

Desde nuestro punto de vista creemos que es posible que mantener una conducta adecuada bajo condiciones de ruido, o mantener reguladas ciertas funciones corporales como la atención o la frecuencia cardiaca en un medio muy ruidoso, le exige al individuo mayores esfuerzos de control de sus parámetros de conducta o fisiológicos; esto implica, aunque de manera poco aparente, un gran desgaste nervioso, esto es: estrés. Y el estrés a la larga se puede manifestar en una amplia variedad de formas: como malhumor, dolores de cabeza, alteraciones digestivas, cansancio, e incluso en los adultos falta de apetito sexual e indiferencia hacia las personas que nos rodean [10].

Hay que tomar en cuenta por otra parte que el ruido actúa en forma sinérgica con otros factores, es decir, que usualmente sobre un individuo no actúa como factor perturbador solo el ruido, sino también, especialmente en ciudades como las nuestras, la contaminación del aire, la mala alimentación, las

preocupaciones cotidianas, la sensación de inseguridad, la mala salud, todos estos padecimientos empujan a los individuos a considerar que de todos los males el ruido es el menor de sus problemas.

En cuanto a los niveles alarmantes de exposición a los que se someten sobre todo los jóvenes con el uso de reproductores portátiles, es posible que esto se deba a que sus efectos se hagan ver solo a largo plazo, cuando el daño ya ha alcanzado los rangos de frecuencia del habla y para entonces éste ya será irreversible. La advertencia formal de este daño que se les hace por parte de los fabricantes, y que les da la opción de tomarla en cuenta o no (al igual que el peligro de cáncer en el caso de los cigarrillos), puede no ser tomada en cuenta por la misma ignorancia en que los jóvenes se encuentran respecto a la dinámica del daño, esto es, porque éste se presenta en forma inadvertida comenzando en la frecuencia de los 4000Hz, frecuencia que cae fuera de los rangos usuales del habla.

VIII. Discusión

Pese a que el número de autos que circulan por la zona metropolitana ha aumentado notablemente en las últimas décadas, este aumento de automotores no se refleja en los niveles ruido en las calles y avenidas principales tal como se muestra en la tabla 2. Este hecho se puede deber a que ha habido en los últimos años una gran promoción en las ventas de autos a crédito, por tanto, la mayoría de autos que circulan por las diversas vías son de modelos recientes, esto es no tan ruidosos. Inclusive el uso de motos ha aumentado, y también los modelos recientes son mucho menos ruidosos que las antiguas motocicletas. Por otra parte, en avenidas como la Zaragoza, la cuales fueron remodeladas ampliándolas sensiblemente, el hecho de que el ruido se pueda dispersar más libremente ha logrado bajar los niveles de ruido, como se observa en la tabla 2.

En cuanto a los niveles altísimos de sonido a que las gentes se someten en una fiesta típica, nos llevan a hacernos la pregunta que ya hemos formulado en otra ocasión [7]. Los trabajadores están forzados a padecer niveles de ruido que les producen múltiples afecciones, ¿pero cómo entender que buscando el placer los adultos y los jóvenes se sometan a niveles sonoros tan o más intensos que los que privan en las fábricas cuando asisten a una fiesta? Una explicación posible es que para no sentir el dolor sus sentidos se han atrofiado; esta sería una de las ventajas de la sordera: atrofiar los nervios que portan las señales eléctricas al cerebro para que el dolor no se sienta tal como en la odontología se mata un nervio para no sentir el dolor de una muela.

Otra explicación posible es que dado que los niveles de ruido inundan todas nuestras situaciones de vida, el ruido se ha vuelto una categoría de nuestro modo de vida urbano, un valor. De hecho, aunque no miremos la TV, o pongamos atención en la música mientras se realiza una labor doméstica, necesitamos de un fondo de ruido porque el silencio causa sensaciones de desagrado. Curiosamente en las películas de terror, que supuestamente se han hecho con cámaras de video de uso personal, uno de los elementos que causa tensión es el fondo de silencio en que transcurren las historias.

Uno de los puntos que requiere de más estudio es el de los patrones que siguen los niveles de ruido en el tiempo. Usualmente la caracterización se reduce a indicar los niveles promedio del ruido, tal como se observa en las tablas que reglamentan los tiempos de exposición, pero los promedios ocultan toda la textura del ruido, y es altamente probable que no solo el nivel promedio de ruido sino también la evolución temporal caótica de los niveles genere en sí misma daños específicos.

Lo cierto es que hay sonidos que si se mantienen constantes a la larga dejan de ser percibidos, otros como el llamado ruido blanco empujan al sosiego, pero también hay otra clase de sonidos de evolución temporal caótica que para el mismo promedio de intensidad de los ruidos estables, o del ruido blanco, causan inquietud, sobresaltos, irritación, sensaciones desagradables como los que se muestran en la figura 2; en este caso en fracciones de segundo el nivel de ruido cambia desde niveles de 60 dB hasta los casi 90 dB, el cambio brutal se percibe mejor si consideramos que estas cifras son logarítmicas pero que expresadas en forma directa implican cambios azarosos de la energía que incide sobre la membrana timpánica, las cadena de huesecillos que llevan la energía a la cóclea, y la presión sobre la ventana oval por un factor de 1000.

IX. Conclusiones

En realidad para entender de manera más clara los efectos del ruido y de las tensiones asociadas a la vida urbana, habría que vivir bajo condiciones más benignas de vida el suficiente tiempo para tener una visión crítica sobre lo dañino que es vivir diariamente bajo condiciones de ruido, porque sumergidos desde la mañana hasta la noche, ya sea en nuestros hogares, en la calle, o en el trabajo, así como en las fiestas, vivir bajo ruido nos parece un hecho natural.

Nos permitimos reproducir un párrafo en donde se narran los efectos de permanecer unos días en la llamada “Zona del silencio” en el estado de Durango.

> “En rigor, ahí no existe el silencio “puro”, sino los sonidos puramente naturales, pues el tráfico más cercano está a 40 km y ninguna ruta aérea cruza sus cielos. Con eso basta para vivir una de las experiencias vitales más asombrosas y benéficas que el individuo pueda imaginar.

> El sonido del viento es dominante; así, a medida que nuestros oídos se desintoxican de los ruidos citadinos y gozan de una etapa de verdadera recuperación de su crónica fatiga, el viento va desplegando su abanico sonoro de cualidades y matices, de tal forma que uno comprende que "el sonido del viento" es plural, pues es uno el que ronda nuestros oídos, otro el que barre las hojas a unos metros de distancia, y claramente diferenciado aquel de fondo, presente como un horizonte sonoro…Poco a poco comenzamos a disfrutar de una verdadera "orquesta de vientos"; nada obstaculiza el gozo de esos sutiles matices; ni los leves y variados sonidos que de múltiples maneras hacen las hojas al rozarse, al caer, al rodar secas, ni los desplazamientos nerviosos de los pequeños animalillos —codornices, ratones, viborillas— que se escabullen a ras de suelo, o los quejumbrosos aullidos de los coyotes…Al paso de los días en ese ambiente natural el cuerpo rejuvenece; uno se sorprende de ser aún tan ágil, de caminar o correr sin respiración agitada, de que ya nada duela, de que desparezcan los dolores de la espalda y del cuello, de las articulaciones." [7].

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la COFAA el apoyo prestado para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] H. M. Enzensberger, *Contribución a la crítica de la ecología política*, Ediciones de la UAP, 1976.
[2] R. A. Baron, *La tiranía del ruido*, Fondo de Cultura Económica, 1980.
[3] Gabriela Reyna García, *Efectos de la exposición a ruido para una prueba específica de habilidad manual*, tesis de licenciatura presentada en la E.S.F.M., abril 5 de 1995.
[4] Carlos Nelson Gillespie Ball Aguado, *Efectos de los sonidos puros de alta intensidad para una prueba específica de habilidad manual y ritmo cardiaco*, tesis de licenciatura presentada en la E.S.F.M., septiembre 4 de 1996.
[5] Aguilar G. y Velázquez M. Lucía M. *"Estudios epidemiológicos de los efectos en la vía auditiva de los trabajadores expuestos simultáneamente a sonidos de gran magnitud y disolventes orgánicos*", Tesis en la especialidad de Medicina del Trabajo, IMSS.
[6] Dorsey J. Ángel L. "*Efectos del ruido sobre la salud de los trabajadores*". Tesis en la especialidad de Medicina en el trabajo, IMSS.
[7] J.A. Peralta, *El ruido en la ciudad de México*, Ciencias 50, 1998.
[8] OCDE, *Urban Traffic Noise,* Report of the consultative group on transportation research.
[9] José Antonio Peralta, *La exposición a ruido en la zona metropolitana de la ciudad de México*, 8a Reunión nacional académica de física y matemáticas, 2003.
[10] J. Rabinowitz, *Los efectos fisiológicos del ruido*, Mundo Científico Núm. 112.

ISSN: 2594-1011

Análisis de las anisotropías magnéticas en policristales de $Ni_{0.5}Zn_{0.5}Fe_2O_4$ por Resonancia Ferromagnética

Hernández Santiago Ma. Guadalupe[1], Zamorano Ulloa Rafael[2]
[1]Departamento de Matemáticas, FES Cuautitlán, Estado de México, México
[2]Física Avanzada, ESFM-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Fax (55) 5729-55015 E-mail: mghs_1@hotmail.com

Resumen — **Para un material magnético operando a frecuencia de microondas una de las propiedades más importantes a controlar es la anisotropía magnética. Las bajas anisotropías es una de las condiciones para la baja coercitividad y bajas perdidas de energía magnética debido a que estas proporcionan un medio de auto-polarización. La Resonancia Ferromagnética (FMR) es una técnica que sirve para medir las fuerzas de los campos anisotrópicos, y determinar los orígenes físicos de estos campos. El magnetismo anisotrópico del segmento después de la zona resonante en el espectro FMR ha sido poco explorada en sistemas policristalinos y como consecuencia se desconocen los fenómenos magnéticos anisotrópicos que la originan. En este trabajo estudiamos las anisotropías magnéticas por FMR de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ de tamaño de 88-105 μm de formas geométricas semejantes a esfera, cubo y elipsoide, a través de parámetros espectroscópicos propuestos con poca o ninguna frecuencia en la literatura. Encontramos que las anisotropías de las muestras policristalinas no promedian a cero en escala micrométrico como se esperaría que sucediera a escala macroscópica. La contribución anisotrópica principal es la anisotropía magnetocristalina.**

Palabras Clave – **ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$, Resonancia Ferromagnética, micrometros, anisotropías.**

Abstract −**For a magnetic material operating at microwave frequency one of the most important properties to control is magnetic anisotropy. Low anisotropies is one of the conditions for low coercivity and low losses of magnetic energy because they provide a means of self-polarization. Ferromagnetic Resonance (FMR) is a technique used to measure the forces of anisotropic fields and determine the physical origins of these fields. The anisotropic magnetism of the segment after the resonant zone in the FMR spectrum has been little explored in polycrystalline systems and as a consequence the anisotropic magnetic phenomena that originate it are unknown. In this work we study the magnetic anisotropies by FMR of ferrite Zn0.5Ni0.5Fe2O4 with a size of 88-105 μm of geometric shapes similar to sphere, cube and ellipsoid, through spectroscopic parameters proposed with little or no frequency in the literature. We found that the anisotropies of the polycrystalline samples do not average to zero on a micrometric scale as would be expected to happen on a macroscopic scale. The main anisotropic contribution is magnetocrystalline anisotropy.**

Keywords — **ferrite $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$, Ferromagnetic Resonance, micrometer, anisotropies.**

I. Introducción

El interés tecnológico en las ferritas y óxidos magnéticos similares surge de dos propiedades fundamentales: la alta resistividad y la magnetización relativamente alta. [1]. Debido a su alta resistencia específica, flexibilidad notable en la adaptación de las propiedades magnéticas, facilidad de preparación, y por último, pero no menos importantes, considerables precio y rendimiento hacen de las ferritas los primeros materiales para aplicaciones en microonda [2].

La anisotropía es un parámetro muy importante para controlar las respuestas magnéticas en los dispositivos [3]. Las bajas anisotropías es una de las condiciones para la baja coercitividad y bajas perdidas [3], debido a que estas proporcionan un medio de auto-polarización.

El control de las anisotropías es debido a la simetría finita de la red cristalina y forma de la muestra, impuestas sobre los electrones en un sistema magnético, la energía total de un sistema magnético no es la misma para cada orientación posible de la magnetización. Esta anisotropía es fundamental para la comprensión de las curvas de histéresis y formación de dominios, así como óptica magnética y Resonancia Ferromagnética [4]. Las dos contribuciones principales que están siempre presentes son la anisotropía magnetocristalina y la anisotropía de forma dipolar. Es importante separar las contribuciones energéticas locales y no locales. Se entiende por interacciones locales a las que tienen un corto alcance, de tal manera que sus contribuciones energéticas esta definida en gran medida por el entorno local del espín es decir los vecinos cercanos. Las interacciones no locales requieren proporciones grandes del sistema a tomar en cuenta para obtener la contribución energética de cada sitio [4]. Las interacciones anisotrópicas locales son; anisotropía magnetocristalina y anisotropía de intercambio. Las anisotropías no locales son coma la interacción dipolar.

FMR es una excelente técnica que proporciona información directa sobre el modo de precesión uniforme que puede estar relacionado con la magnitud promedio de la anisotropía [5]. FMR es una técnica que sirve para medir las fuerzas de los campos anisotrópicos en materiales magnéticos, pero

también para determinar los orígenes físicos de estos campos [6]

Tradicionalmente los elementos de ferrita tienen formas geométricas regulares como esfera [2], cubos, películas delgadas, etc. con el objetivo de manipular las anisotropías dipolares de forma y magnetocristalinas. Las anisotropías de muestras policristalinas han sido poco exploradas debido a los anchos pronunciados que aparecen en los espectros FMR. Específicamente el magnetismo anisotrópico del segmento después de la zona resonante en el espectro FMR ha sido poco explorada en sistemas policristalinos y como consecuencia se desconocen los fenómenos físicos que la originan.

En este trabajo estudiamos las anisotropías magnéticas por FMR de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ de tamaños de 37-450 µm, de policristales y formas geométricas semejantes a esfera, cubo y elipsoide, a través de parámetros espectroscópicos propuestos con poca o ninguna frecuencia en la literatura. Encontramos que las anisotropías de las muestras policristalinas no promedian a cero en escala micrométrico como se esperaría que sucediera a escala macroscópica. La contribución anisotrópica principal es la anisotropía magnetocristalina.

II. Metodología

El cerámico $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ lo preparó la Dra. M. P. Gutiérrez por el método de coprecipitación en forma de pastilla que posteriormente fue sinterizada de la cual se obtuvo un toroide [9]. Toroide que posteriormente fue molida y tamizada a través de mallas de tamaño de (<37 µm), 37-48 µm, 48-53 µm, 53-74 µm, 74-88 µm, 88-105 µm, 105-125 µm, 125-250 µm, 250-300 µm, 300-450 µm y mayor de (>) 450 µm. Se consideran muestras policristalina de 88 a 125 µm de las cuales se aíslan con ayuda de un microscopio óptico TH3 Olimpus invertido formas geométricas semejantes a elipsoide, esfera y cubo.

En este trabajo se utilizan muestras policristalinas aisladas de tamaño de 88-125 µm con formas geométricas semejantes a elipsoide, esfera y cubo se caracteriza magnéticamente en un espectrómetro EPR de marca JEOL modelo JES-RE3X, sometido a un campo magnético variable de 0- 600 mT y frecuencia de microondas fija, 9.81 GHz a Temperatura ambiente.

Las medidas de absorción de microondas FMR de cada una de las muestras se variaron angularmente con respecto al campo aplicado. Cada muestra se giró de 0° a 360° en intervalos de 30 ± 0.3°. Las muestras fueron colocadas dentro de la cavidad resonante desconociendo los ejes principales de magnetización.

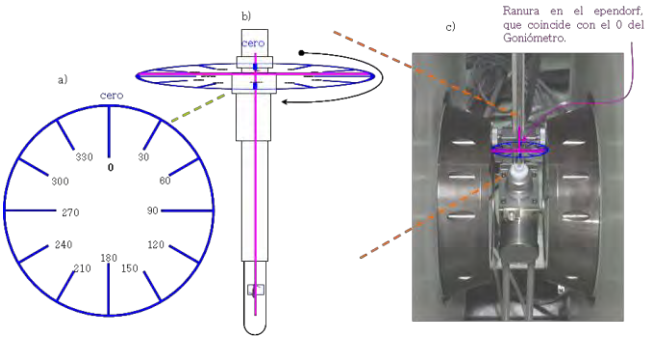


Figura 1. Esquema de la variación angular de la ferrita dentro del espectrómetro JEOL. El goniómetro se coloca en la posición mostrada en la figura 1a), donde el cero de referencia comienza a detrás de la muestra, viéndola de frente. b) Es colocado el goniómetro sobre el sujetador haciendo coincidir el cero del goniómetro con una línea de referencia en el sujetador de la muestra, los giros se hacen en el sentido de las agujas del reloj. c) el sistema de referencia inercial (goniómetro) se encuentra entre los polos del electroimán, los cuales se marcan para colocar al goniómetro en la misma posición, se hace coincidir la línea de referencia de la muestra con el cero del goniómetro.

Se realizan las gráficas de cada uno de los parámetros propuestos en este artículo en función de la variación angular.

III. Resultados Y Análisis

A. ¿Cómo se miden los parámetros FMR en el espectro de la ferrita Ni-Zn%0.5?

Un requisito fundamental para la medición adecuada de los parámetros espectroscópicos de absorción es la elección acertada de la línea base. La condición física $\mu \rightarrow \mu_0$ es la condición física adecuada para la línea base, la ferrita se magnetiza hasta su valor de saturación, las perdidas debido a la rotación de dominios desaparecen gradualmente, y la muestra actúa como un dominio único saturado, dando una línea de resonancia única [7], esta curva de absorción tendera hacia el valor de la permeabilidad inicial, figura 2.

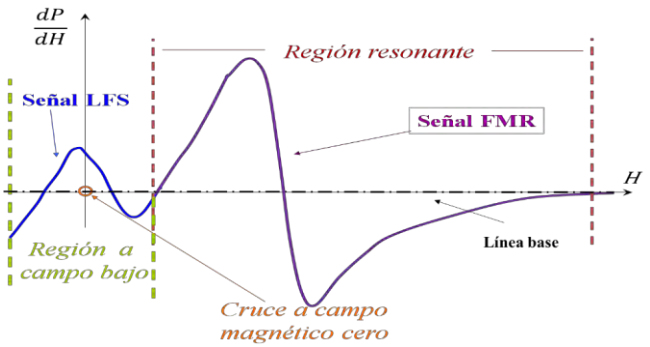


Figura 2. Señal de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ de un microvolumen aislado de tamaño de 88-105 µm donde se observan las regiones a campo bajo, señal LFS y región resonante, señal FMR.

La forma de línea de la curva de absorción resonante de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ es un singulete ancho alrededor del campo magnético cero y a la derecha del campo resonante, figura 2. Los espectros FMR de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ en todas sus formas (policristales aislados sin forma y con forma geométrica definidas) y tamaños (37- 450 µm) se dividen en dos regiones, señal a campo bajo y señal resonante [7, 8]. La región a campo bajo (LFS) se atribuye al movimiento de las paredes de los dominios magnéticos, la energía magnética en esta región es insuficiente para rotar a los momentos magnéticos de la ferrita. La región resonante (FMR) es debido a la precesión de los momentos magnéticos de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$, figura 2.

Los parámetros a analizarse en este trabajo son observados en la figura 3: campo máximo ($\vec{H}_a$-verde), campo resonante ($\vec{H}_b$-azul ópalo), campo mínimo ($\vec{H}_c$ azul), así como los semianchos: izquierdo externo ($semi\Gamma_{izq-out}$- café), izquierdo interno ($semi\Gamma_{izq-in}$-guinda), derecho interno ($semi\Gamma_{der-in}$-naranja) y derecho externo ($semi\Gamma_{der-out}$-rosa), ancho (Γ-rosa mexicano), área bajo la curva (azul cielo), semialtura (A-morado), semialtura (B-verde), altura total (h=A+B) y conductividad por hopping ($\sigma_{\mu\omega}$= A/B) en la señal FMR de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$.

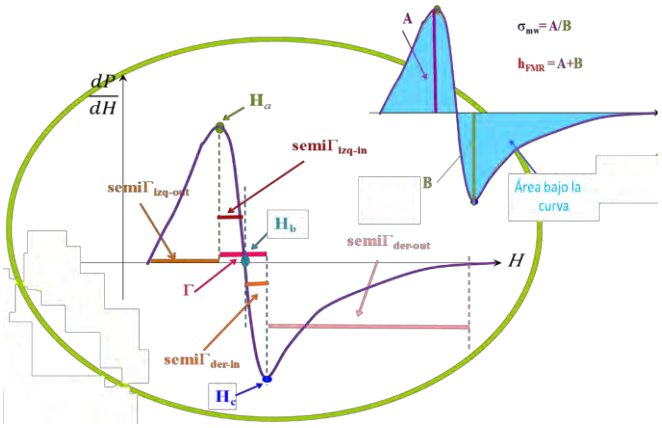


Figura 3. Parámetros medidos en la señal FMR de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$.

B. *Análisis de las gráficas de los parámetros espectrales en función de la variación angular*

La gráfica de cada uno de los parámetros espectroscópicos: H_a, H_b, H_c, Γ, h, área bajo la curva y σ en función de la variación angular, insinúan comportamientos oscilatorios para cada una de las muestras de ferrita. En las siguientes gráficas, figuras (4 -6) solo se observan los comportamientos del campo resonante, ancho y altura.

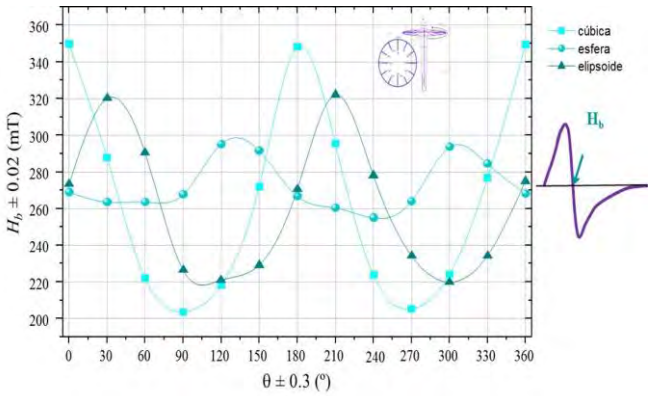


Figura 4. Gráfica H_b vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm.

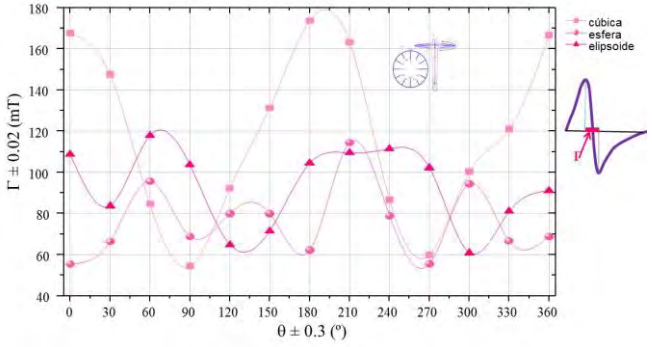


Figura 5. Gráfica Γ vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm

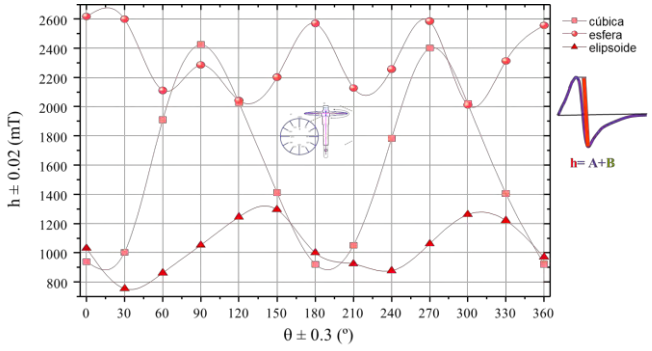


Figura 6. Gráfica h vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm

Los parámetros FMR, H_a, H_b, H_c, Γ, h, área bajo la curva y σ en función de la variación angular, insinúan comportamientos oscilatorios, más aún insinúan comportamientos periódicos. Como se muestran en las figuras 7-9.

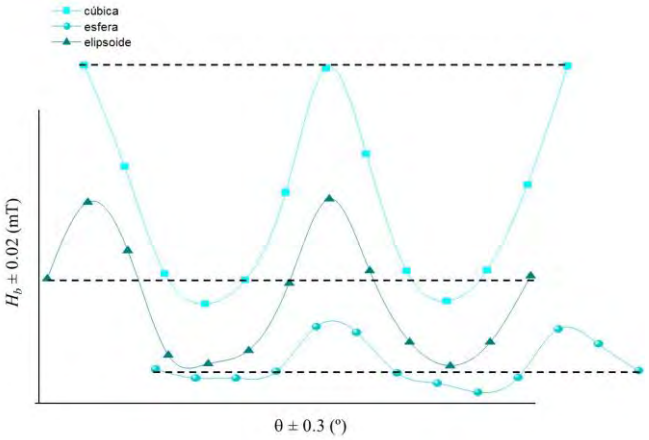


Figura 7. Gráfica H_b vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm.

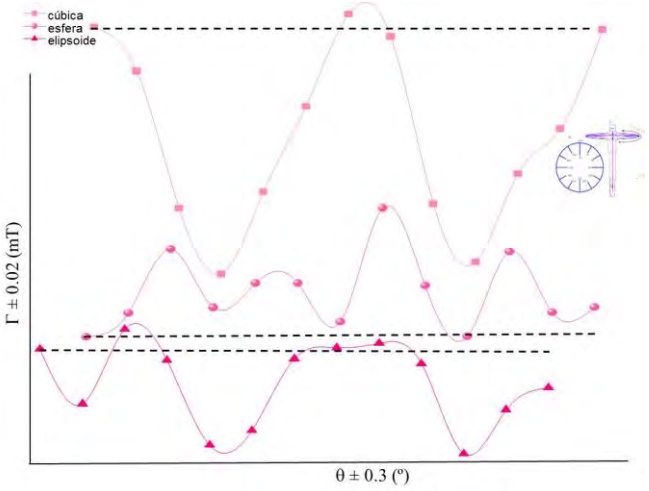


Figura 8. Gráfica Γ vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm.

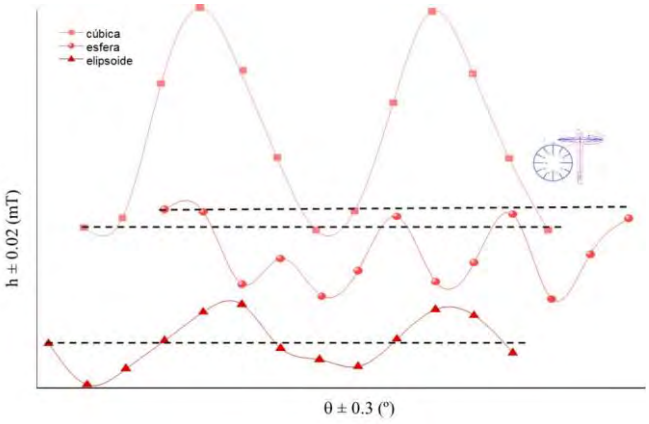


Figura 9. Gráfica *h* vs θ muestras III, microvolumen aislado de formas semejante a esfera, elipsoide y cubo de 88-105 µm.

En las gráficas anteriores se observan claramente el comportamiento periódico desfasado de los parámetros anteriormente mencionados. Esto influye de manera significativa en los términos del Hamiltoniano, en el término de anisotropía, este Hamiltoniano propuesto por Heisenberg es de la forma:

$$\vec{H}_K = \vec{H}_{K-forma} + \vec{H}_{K-magnetocristalina} + \vec{H}_{K-tensión\ y\ esfuerzo} + \vec{H}_{K-inducida} + \vec{H}_{K-\text{int}ercambio} \quad (1)$$

donde de acuerdo a la teoría cada término contribuye a la suma total de la anisotropía en la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$. Sin embargo, algunos de estos términos contribuyen más que otros. La anisotropía de intercambio no contribuye de ninguna forma debido a que la ferrita en cualquiera de sus formas no tiene interfaces magnéticas. La anisotropía inducida no influye debido a que por el tratamiento artesanal que le dimos a nuestras muestras se rompió con direcciones magnéticas fáciles, y forma geométrica original. Por otra parte, la anisotropía magnetoelástica es un término que no influye de forma significativa, debido a su estabilidad mecánica de la ferrita, la fuerza mecánica es mayor a la del campo magnético aplicado.

Los comportamientos periódicos de las gráficas no son debido a la forma geométrica de la ferrita, las anisotropías se conservan su forma oscilatoria semejante, lo que varía es la fase, es decir, la posición donde comienza el espín a precesar y donde termina. Mencionado lo anterior, la forma geométrica de la ferrita no influye, por lo que el término de la energía anisotropía de forma no influye en la suma de los términos de anisotropía.

Considerando el análisis anterior el término restante de la ecuación (1) es la energía magnetocristalina. Por lo que la anisotropía observada en el microvolumen aislado en sus diferentes formas se debe principalmente al termino magnetocristalino.

Todas las muestras de ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ tienen el Hamiltoniano

$$\vec{H}_{efec} = \vec{H}_0 + \vec{H}_{\text{int}} = \vec{H}_K + \vec{H}_{d-d} + \vec{H}_0 + \vec{H}_J + \vec{H}_D \quad (2)$$

Donde $\vec{H}_K = \vec{H}_{K-magnetocristalina}$

IV. Conclusiones

La anisotropía magnética en las diferentes muestras de la ferrita $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ en sus tamaños de 88- 105 µm no promedian a cero como se espera a escala macroscópica.

Más aún, la anisotropía magnetocristalina es el principal término dejando de lado a todos los demás términos. Eso implica que la forma geométrica del microvolumen de $Zn_{0.5}Ni_{0.5}Fe_2O_4$ no influye significativamente en la anisotropía.

REFERENCIAS

[1] Prepared by members of the technical staff, AT&T Bell Laboratories S.Millman, editor, A History of Engineering and Science in the Bell System Physical Sciencies (1925-1980), AT&T Bell Laboratories 1983.

[2] J. Mag.Mag. Mater. 215-216 (2000) 171-183, Martha Pardabi-Horvath, Microwave applications of soft ferrites.

[3] A. Phys.Leter. Vol.79 No.3, 2001, L.V. Saraf, E.Lofland, Arthur V.Cresce, S.M.Bhagat and R.Ramesh, Structural and ferromagnetic resonance characteristics of BaFe12O19 films with minimal linewidths.

[4] Tesis de maestría para obtener el título académicos de maestría en ciencias en Física, Benjamin Wilfried Zingsem de Mönchegladbach, A theory of the magnetodynamic response function, julio 2016.

[5] Fundamental Research Dr. Abbass Hashim (Ed.) ISBN: 978-953-307-327-9. InTech, Carlos A. Ramos, Ettore Vassallo Brigneti, Emilio De Biasi and Manuel Vázquez (2011). On the behavior of Ni Magnetic Nanowires as studied by FMR and the effect of "blocking"., Nanowires as-studied-by-fmr-and-the-effect-of-blocking, Available: http://www.intechopen.com/books/nanowires-fundamental-research/on-the-behavior-of-ni-magneticnanowires-

[6] Jose R. Fermin, Ferromagnetic Resonance applications to new materials, República Bolivariana de Venezuela, Universidad del Zulia Facultad Experimental Ciencias

[7] Ronal F. Soohoo, Theory and applications of ferrite, Prentice-Hall, Inc (1960).

[8] Nova Microwave, Electro Technik, Understanding circulators and isolators, 2014.

[9] M. P. Gutiérrez, Tesis para obtener el grado de Doctorado, Propiedades eléctricas y magnéticas de fronteras de grano en óxidos ferrimagnéticos. Facultad de Química-UNAM, Marzo (2001)

ISSN: 2594-1011

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
"La Técnica al Servicio de la Patria"

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Av. "Instituto Politécnico Nacional" S/N, Edificio 9, U.P. Adolfo López Mateos, Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, Ciudad de México, C.P. 07738, Tel. (55) 57296000 ext. 55343

www.esfm.ipn.mx