10

PROBLEMAS MAL CONDICIONADOS

10-1

LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

FOURIER'S INTEGRAL THEOREM

We saw in the last section by a purely formal argument that in some sense the identity

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iu\xi}\, du \tag{1}$$

might be valid. This identity is known as *Fourier's integral theorem*. In this section we shall show that Fourier's integral theorem holds for functions $f(x)$ which are piecewise-continuously differentiable and absolutely integrable on the whole real line.

Fourier's integral has been proved under much more general conditions on the behavior of the function $f(x)$. We shall look at some of these results in sec. 2-11, but we shall here confine our attention to establishing the theorem for the class of functions stated since that class is sufficiently wide to embrace most of the functions which arise in problems in mathematical physics.

This can be written in another way. If we put

$$F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iu\xi}\, du,$$

then equation (1) states that

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-ix\xi}\, d\xi.$$

The central result of the Fourier's theorem is the

RIEMAN-LEBESGUE LEMA

LEMA RIEMAN-LEBESGUE

$$\int_a^b f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt \to 0$$

$$\int_a^b f(t) \cos \omega t \, dt \to 0$$

si $\omega \to \infty$

ω suficientemente alta

ESTUDIO MUY GENERAL, PERO MUY IMPORTANTE DE CARACTER PRACTICO, DE LOS NUCLEOS $K(X,y)$, A LA VISTA DEL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

SI PARA CADA y, EN LA INTEGRAL

$$\int_a^b K(x,y)\left[f(x)+\lambda\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \operatorname{sen} mx\end{Bmatrix}\right]dx$$

SI m ES LO SUFICIENTEMENTE GRANDE

LA INFLUENCIA DEL TERMINO

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \operatorname{sen} mx\end{Bmatrix}dx$$

ES INAPRECIABLE, ES DECIR SI

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \operatorname{sen} mx\end{Bmatrix}dx \ll \int_a^b K(x,y)\,f(x)\,dx$$

LOS TERMINOS ADITIVOS EN

$\cos mx$ $\quad$ $\operatorname{sen} mx$

NO SE PODRÁN APRECIAR EN LA INTEGRAL

ELLO NOS LLEVA A DEDUCIR CONCLUSIONES DE GRAN IMPORTANCIA

1ª CONCLUSION

SI LA ECUACIÓN

$$\int_a^b K(x,y) f(x)\,dx = g(y)$$

SE SATISFACE PARA UNA SOLUCIÓN $f_0(x)$

CUALQUIER FUNCIÓN DEL TIPO

$$f_0(x) + \lambda \left\{ \begin{matrix} \cos mx \\ \operatorname{sen} mx \end{matrix} \right\}$$

CON m SUFICIENTEMENTE GRANDE

SERA, TAMBIEN, EN LA PRACTICA, UNA SOLUCIÓN

EL VALOR DE m SUFICIENTEMENTE GRANDE (PARA ANULAR - EN LA PRACTICA - EL TERMINO HOMOGENEO DE LA ECUACIÓN) DEPENDE DE LA FORMA DEL NUCLEO

ES DECIR, EN LA PRACTICA, UNA TRANSFORMADA INTEGRAL DE FREDHOLM, SIEMPRE PUEDE TENER INFINITAS SOLUCIONES

PERO, SOBRE TODO, ESTO VA A CREAR GRAVES, MUY GRAVES, PROBLEMAS DE ESTABILIDAD EN EL PROCESO DE INVERSIÓN.

(lo veremos enseguida)

EN OTROS TERMINOS
PARA UN m SUFICIENTEMENTE GRANDE
DEPENDIENDO DE LA FORMA PARTICULAR DE CADA NUCLEO $K(x,y)$

FUNCIONES DEL TIPO $\begin{cases} \cos mx \\ \operatorname{sen} mx \end{cases}$

SON SOLUCIONES - PRACTICAS - DE LA ECUACIÓN HOMOGENEA, ES DECIR CORRESPONDEN AL AUTOVALOR NULO ! (MUY PEQUEÑO, SI SE QUIERE, EN LA PRÁCTICA NUMERICA)

EN OTRAS PALABRAS, LA ECUACIÓN HOMOGENEA, TIENE SIEMPRE, EN LA PRACTICA, SOLUCIÓN.

ES DECIR, EN LA PRACTICA, ESTE TIPO DE PROBLEMAS: TRANSFORMADAS INTEGRALES DE FREDHOLM, SERA SIEMPRE UN PROBLEMA MAL PLANTEADO. (Hadamard)

2ª CONCLUSION

CIERTAS CARACTERISTICAS DE $f(x)$

COMO PUEDEN SER VARIACIONES RELATIVAMENTE RAPIDAS, O IRREGULARIDADES

QUE PUDIERAN REPRESENTARSE MATEMATICAMENTE CON TERMINOS DEL TIPO: $\cos \omega x$ $\operatorname{sen} \omega x$

NO VAN A APARECER EN EL VALOR DE LA INTEGRAL

$$\int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

EN LA CITADA INTEGRAL EL NUCLEO $K(x, y)$

ALISARÁ LAS PROPIEDADES DE ALTA FRECUENCIA DE LA FUNCIÓN OBJETO $f(x)$

EN OTROS TERMINOS, A CAUSA DE ESTE FENÓMENO DE ALISAMIENTO, NO APARECERÁN SOBRE $g(y)$ LAS CITADAS PROPIEDADES DE ALTA FRECUENCIA Y NO LAS PODREMOS ENCONTRAR EN EL PROCESO DE INVERSIÓN:

PÉRDIDA DE INFORMACIÓN

EN LAS ECUACIONES, TRANSFORMADAS TIPO VOLTERRA

$$\int_a^y K(x, y) f(x) dx =$$

EL PROBLEMA DE LA PERDIDA DE INFORMACION DE ALTA FRECUENCIA SI LOS NUCLEOS $K(x, y)$ SON ANCHOS

Y, POR LO TANTO LA IMPOSIBILIDAD DE RECUPERARLA SIN ACUDIR A HIPÓTESIS EXTERIORES

SE PLANTEA IGUALMENTE, AUNQUE DE FORMA MENOS ACUSADA, DEBIDO A LA FORMA ABIERTA DE LOS NUCLEOS

$$\int_a^y K(x,y) f(x) dx = \int_a^b K(x, y)\, u(x < y) f(x) dx$$

$$u(x < y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$

AL DEPENDER EL VALOR DE LA INTEGRAL DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN, QUE A SU VEZ DEPENDE DE LA VARIABLE y, EL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE, NO ES VALIDO.

SI A $f(x)$ SE LE AÑADE UNA FUNCIÓN DEL TIPO

$\operatorname{sen} mx \quad \cos mx$

CON m SUFICIENTEMENTE ALTO

SU INFLUENCIA APARECERA SOBRE $g(y)$ DEBIDO A LA DEPENDENCIA DE LA INTEGRAL CON y EN LOS LIMITES

OTRA CUESTIÓN ES QUE NO SEPAMOS MEDIR ESTA POSIBLE INFLUENCIA EN LOS DATOS $g(y)$. ES DECIR QUE NO TENGAMOS SUFICIENTE PRECISIÓN Y RESOLUCIÓN EN LAS MEDIDAS DE y Y DE $g(y)$.

VOLVAMOS SOBRE EL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

EN UN EJEMPLO:

SEA LA ECUACIÓN

$$\int_a^b K(x,y) f(x)\,dx = g(y)$$

Y SEA $f_1(x)$ UNA SOLUCIÓN

$$\int_a^b K(x,y) f_1(x)\,dx = g(y)$$

VAMOS A VER QUE OCURRE CON UNA FUNCION $f_2(x)$ TAL QUE

$$f_2(x) = f_1(x) + F \cos \omega x$$

F y ω DOS PARÁMETROS LIBRES TAN GRANDES COMO SE QUIERA

$$f_2(x) \xrightarrow{\text{SINTESIS}} g_2(y)$$

$$g_2(y) \equiv \int_a^b K(x,y) f_2(x)\,dx$$

SERÁ, EN PRINCIPIO DIFERENTE DE $g(y)$

¿CÓMO MEDIR ESTA DIFERENCIA?

$$d_1\{g(y), g_2(y)\} \equiv \max_y |g_2(y) - g_1(y)|$$

$$\equiv \max_y \left| \int_a^b K(x,y) F \cos \omega x \, dx \right|$$

$$= F \max_y \left| \int K(x,y) \cos \omega x \, dx \right|$$

DEBIDO AL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE PARA CUALQUIER F (AUNQUE SEA GRANDE) SE PODRA ENCONTRAR UN ω TAL QUE LA DISTANCIA d_1 ENTRE $g_2(y)$ Y $g(y)$ SEA NULA

$$d_2^2\{g(y), g_2(y)\} = \int_I dy \left[\int_a^b K(x,y) F \cos \omega x \, dx \right]^2$$

OCURRE EXACTAMENTE LO MISMO: LA DISTANCIA d_2 ENTRE $g_2(y)$ Y $g(y)$ PUEDE HACERSE TAN PEQUEÑA COMO SE QUIERA, PARA CUALQUIER VALOR DE LA AMPLITUD F, CON TAL DE ELEGIR UNA FRECUENCIA ω SUFICIENTEMENTE GRANDE

LUEGO PUEDE SER PARA CUALQUIER F

$$g_2(y) \simeq g(y)$$

SIN EMBARGO, LAS DISTANCIAS ENTRE LAS CORRESPONDIENTES FUNCIONES INVERSAS: $f_1(x)$ Y $f_2(x)$ SERAN

$$d_1\{f_1(x), f_2(x)\} = \max_{a \le x \le b} |f_2(x) - f_1(x)|$$

$$= F \max_{a \le x \le b} |\cos \omega x| = F$$

$$d_2^2\{f_1(x), f_2(x)\} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]^2 dx$$

$$= F^2 \int_a^b \cos^2 \omega x \, dx = F^2 \left[\frac{b-a}{2} - \frac{\operatorname{sen} \omega (b-a) \cos \omega (b+a)}{2\omega} \right]$$

AUNQUE TOMEMOS ω MUY GRANDE

$$d_2\{f_1(x), f_2(x)\} \to F \sqrt{\frac{b-a}{2}}$$

ES DECIR LA DISTANCIA d_1 o d_2 ENTRE $f_1(x)$ Y $f_2(x$ PUEDE SER MUY GRANDE AUNQUE LAS DISTASTANCIAS ENTRE $g_1(y)$ Y $g_2(y)$ SEAN PRACTICAMENTE NULAS

PODREMOS TENER MUCHAS FUNCIONES $f_k(x)$ MUY DIFERENTES TALES QUE, EN LA PRACTICA PUEDEN SER SOLUCION DE LA MISMA TRANSFORMADA CON LOS MISMOS DATOS

THE RIEMANN-LEBESGUE LEMA

$f(x)$ CONTINUA EN (a,b) $\quad f(x) \in C(a,b)$

- CONTINUA POR SEGMENTOS QUE NO SE SUPERPONEN $\quad f(x) \in \mathcal{P}(a,b)$

$(a, a_1)\ (a_1, a_2)\ \ldots\ (a_{n-1}, b)$

ENTONCES

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx \to 0$$

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda x)\, dx \to 0$$

SI $\lambda \to \infty$

CONSECUENCIAS

NO HABRÁ CASI NUNCA
- EN LA PRACTICA -
UNICIDAD DE LA SOLUCION

PERDIDA DE INFORMACIÓN
SI LOS NUCLEOS SON "ANCHOS"

PROBLEMAS MAL PLANTEADOS

10-2

ESTABILIDAD

COMPATIBILIDAD

EJEMPLO CON UN PROBLEMA ALGEBRAICO

EL SISTEMA $$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &= 8 \\ X_1 - X_2 &= 1 \end{aligned}$$

TIENE COMO SOLUCIÓN ESTABLE

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$

PERO EL CASO

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &= 5 \\ 3{,}1\,X_1 + 2{,}1\,X_2 &= 5{,}2 \end{aligned}$$

CON SOLUCIONES

$X_1 = 1 \qquad X_2 = 1$

SI PERTURBAMOS LOS DATOS

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &= 5(1+\varepsilon_1) \\ 3{,}1\,X_1 + 2{,}1\,X_2 &= 5{,}2(1+\varepsilon_2) \end{aligned}$$

SOLUCIONES $$\begin{aligned} X_1 &= 1 + 105\,\varepsilon_1 - 104\,\varepsilon_2 \\ X_2 &= 1 - 152{,}5\,\varepsilon_1 + 156\,\varepsilon_2 \end{aligned}$$

LOS ERRORES RELATIVOS SOBRE LA SOLUCIÓN SON DEL ORDEN DE 100 VECES MAS.

COMO ε_1 Y ε_2 PODRÁN SER POSITIVOS O NEGATIVOS, LA SOLUCIÓN SE CONVIERTE EN DRAMÁTICA.

EL PROBLEMA ES INESTABLE PORQUE EL OPERADOR $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3,1 & 2,1 \end{pmatrix}$

ES PRACTICAMENTE SINGULAR:

SUS AUTOVALORES λ_1 Y λ_2, SOLUCIÓN DE

$$(3-\lambda)(2,1-\lambda)-6,2=0$$

$$\lambda = \frac{5,1 \pm \sqrt{(5,1)^2 - 0,4}}{2} = \begin{cases} 0.04 = \lambda_1 \\ 5.08 = \lambda_2 \end{cases}$$

HAY UN AUTOVALOR PRACTICAMENTE NULO (DENTRO DE LOS ERRORES QUE ADMITIMOS)

EN "LA PRACTICA", LAS DOS ECUACIONES SON LA MISMA (HAY UNA ECUACIÓN QUE ES COMBINACIÓN LINEAL DE LAS OTRAS)

ESTO OCURRE MUCHO MÁS AMENUDO DE LO QUE NOS PENSAMOS

(SOBRE TODO "EN LA PRACTICA")

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS SON INESTABLES CUANDO, "EN LA PRACTICA", TIENEN ALGUN VALOR PROPIO PRACTICAMENTE NULO

EL SISTEMA HOMOGENEO TENDRÁ, "EN LA PRACTICA", INFINITAS SOLUCIONES (TODAS IGUALES, SALVO UN FACTOR MULTIPLICATIVO.

EL SISTEMA COMPLETO, SI TIENE SOLUCION, ES DECIR, SI ES COMPATIBLE, TENDRA, TAMBIEN, INFINITAS SOLUCIONES "EN LA PRACTICA" CUALQUIER COSA.

ALGO COMO ESTO VA A OCURRIR PRACTICAMENTE SIEMPRE EN LA INVERSIÓN DE TRANSFORMADAS INTEGRALES.

YA VIMOS QUE LOS OPERADORES INTEGRALES LINEALES, SIEMPRE PUEDEN TENER AUTOVALORES MUY PEQUEÑOS: PRACTICAMENTE NULOS.

Y QUE ESTO ES TANTO MAS VERDAD, CUANTO "MAS ANCHO" ES EL NUCLEO, ES DECIR CUANTO MÁS INFORMACIÓN DESTRUYE AL INTEGRAR.

QUE ES PRECISAMENTE EL CASO EN EL QUE ES MÁS DIFICIL CONSEGUIR LA INVERSIÓN CORRESPONDIENTE

EN CUALQUIER CASO:

OSCILACIONES O IRREGULARIDADES DE FRECUENCIA ω EN $g(y)$ SE AMPLIFICARAN MUCHO AL HACER LA INVERSION

LO PRIMERO QUE TENEMOS QUE ANALIZAR ES VER SI ESTAS OSCILACIONES O IRREGULARIDADES SON COMPATIBLES CON EL PROBLEMA

SI NO LO SON Y TRATAMOS DE INVERTIR TENIENDOLAS EN CUENTA, OBTENDREMOS RESULTADOS ABSURDOS

HAY QUE HACERLAS DESAPARECER ALISANDO LOS DATOS

LOS DATOS $g(y)$ EN

$$\int_a^b k(x, y) f(x) dx = g(y)$$

NO SON NUNCA ABSOLUTAMENTE PRECISOS

. The reader should be warned however, that no mathematical theory, no matter how powerful or elegant, can overcome the basic problem of the data generally lacking information with regard to the details—specifically the high frequency components—of the source function. Methods of stabilising the inversion by counteracting this 'lack of information' will be discussed later

The matter of stability is also of great importance from a practical viewpoint. As we have seen in the previous section, the construction of solutions to an unstable problem is difficult: the smallest error in g may result in a wild excursion of f that bears no relation to the true solution.

DUPLICIDAD DE INFORMACIÓN

- COMPATIBLE MAL
- INCOMPATIBLE CATASTROFICO

$$g(y) = \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, dx$$

EN TERMINOS DE ORDENADAS DISCRETAS $y \to y_k$ $k = 1, 2, \dots$

HAY QUE PENSAR QUE TENEMOS UNA ECUACION PARA CADA y_k

LAS INCOGNITAS SON LOS DIFENTES VALORES $f(x_j)$

PERO, ¿ESTAMOS SEGUROS QUE HAY DE VERDAD UNA ECUACIÓN PARA CADA y_k DIFERENTE DE LAS DEMÁS

O, BIEN, TENEMOS LA MISMA ECUACION PARA DIFERENTES y_k

PARA y_k e y_{k+1}

$$K(x, y_k) \simeq K(x, y_{k+1})$$

IGUAL O PRACTICAMENTE IGUAL EN TERMINOS NUMÉRICOS

EN ESTE ULTIMO CASO TENDREMOS DOS (VARIAS) ECUACIONES IGUALES.

SI EL ALGORITMO DE RESOLUCIÓN NO DISCRIMINA LOS AUTOVALORES NULOS DEBIDOS A ESTA DUPLICIDAD.

PERO PUEDE SER GRAVÍSIMO SI LOS VALORES DE $g(y)$: $g(y_k)$ $g(y_{k+1})$ SON DIFERENTES DEBIDO A IMPRECISIONES NUMERICAS EN LA MEDIDA.

DE AQUI LA NECESIDAD DE MEDIR Y REPRESENTAR LOS DATOS $g(y)$ DE ACUERDO CON LAS POSIBILIDADES DEL PROBLEMA

FORMA DE

$$\int_a^b k(x, y) \ldots dx \rightarrow g(y)$$

ESEMPLO de TWOMEY

$$g(y) = \int_0^1 x\, e^{-xy} f(x)\, dx$$

EL NUCLEO $x e^{-xy}$

- VARIA MUY POCO PARA VALORES DE $y > 1$
- Y PARA VALORES DE $y < 1$ TAMPOCO ES QUE VARIE MUCHO

NO MERECE LA PENA (NO DEBEMOS) CONSTRUIR ECUACIONES CON VALORES DE y PRÓXIMOS.

NO VAYA A SER QUE OBTENGAMOS -MIDIENDO- VALORES DE $g(y)$ MAS DIFERENTES DE LO QUE EL PROBLEMA PERMITE

Y AL INVERTIR UN SISTEMA QUE REPRESENTA UNA SITUACIÓN NO NATURAL

ENCONTREMOS RESULTADOS CATASTRÓFICOS.

Harmonic Continuation—A Numerical Example

If a harmonic function takes boundary values $h(\varphi)$ on the unit circle, the values $f(\theta)$ on the concentric interior circle of radius $r < 1$ are given by Poisson's formula,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,h(\varphi)\,d\varphi = f(\theta). \qquad (7.1)$$

Can we invert Poisson's formula? Given the interior values $f(\theta)$, can we solve the integral equation (7.1) for the boundary values $h(\varphi)$?

If f is square-integrable, and if a square-integrable solution h exists, then the solution is uniquely determined almost everywhere. For if f has the Fourier series

$$f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\theta + f_k' \sin k\theta)$$

then the Fourier coefficients h_k, h_k' for the solution are uniquely determined from the integral equation (7.1):

$$h_k = r^{-k} f_k, \qquad h_k' = r^{-k} f_k'. \qquad (7.2)$$

The identities (7.2) also illustrate that the solution depends discontinuously on the data. If k is a large integer, a small data-variation, $\delta f(\theta) = k^{-1}\cos k\theta$, produces the large answer-variation, $\delta h(\varphi) = r^{-k}k^{-1}\cos k\varphi$. This is a typical ill-posed linear problem.

Sea una sóla componente en los datos:

$$f(\theta) = f_2 \cos 2\theta$$

la solución será

$$h(\varphi) = \frac{1}{r^2} f_2 \cos 2\varphi$$

$r < 1$

MAS TARDE VEREMOS COMO SE RESUELVEN, EN GENERAL, ESTOS PROBLEMAS

SI EN LOS DATOS $f(\theta)$

HAY UNA LIGERA INDETERMINACIÓN, ERROR, DE ALTA FRECUENCIA

$$f(\theta) = f_2 \cos 2\theta + \varepsilon \cos N\theta$$

N muy grande

EL ERROR - DISTANCIA - EN LOS DATOS,

$$d_1 \{ f(\theta), f_2 \cos 2\theta \} = \max | \varepsilon \cos N\theta | = \varepsilon$$

$$d_2 \{ f(\theta), f_2 \cos 2\theta \} = \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \cos^2 N\theta \, d\theta = \pi \varepsilon^2$$

PUEDE RESULTAR TAN PEQUEÑO COMO SE QUIERA

PERO SOBRE LA SOLUCIÓN

$$h(\varphi) = \frac{1}{r^2} f_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{r^N} \varepsilon \cos N\varphi$$

$$d_1 \{ h(\varphi), \frac{1}{r^2} f_2 \cos 2\varphi \} = \varepsilon / r^N$$

$$d_2 \{ h(\varphi), \frac{1}{r^2} f_2 \cos 2\varphi \} = \sqrt{\pi}\, \varepsilon / r^N$$

EL ERROR PUEDE SER MUY GRANDE YA QUE $r < 1$

PERO PARA $r \ll 1$

EL PROBLEMA ES PRACTICAMENTE

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi$$

NO TIENE NINGÚN SENTIDO

10-3

TECNICAS DE

ESTABILIZACIÓN..

REGULARIZACIÓN

LAS LLAMADAS TECNICAS DE ESTABILIZACION PERMITEN ESTABILIZAR PROBLEMAS QUE, EN PRINCIPIO, SON INESTABLES.

ES DECIR PERMITEN TRATAR PROBLEMAS MAL CONDICIONADOS

SEGUN P. LINZ THEORETICAL NUMERICAL ANALYSIS

ACTUAN EN DOS ETAPAS DIFERENTES DEL DESARROLLO DEL **P.I.**

LOS LLAMADOS METHODOS DE EXPANSIÓN

EN EL MOMENTO DE LA CONSTRUCCIÓN DEL **ALGORITMO** QUE CONSTRUIMOS PARA FORMULAR NUMERICAMENTE EL **P.I.**

LAS LLAMADAS TECNICAS DE REGULARIZACION

EN EL MOMENTO DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA NUMÉRICO UNA VEZ QUE EL **P.I.** HA SIDO FORMULADO.

ACTUAN MODIFICANDO LA NATURALEZA DEL PROPIO PROBLEMA QUE TRATAMOS DE RESOLVER (ACEPTANDO, A PRIORI, UNA APROXIMACIÓN)

Attempts were made to solve ill-posed problems long before the modern mathematical methods of regularization were developed. Brilliant intuitions led scientists to acceptable results in solving inverse problems which included relatively simple models with small numbers of parameters. But intuitive methods are only possible when the precision of the input data is not high. Present experimental equipment involving very precise measurements and powerful computers have made necessary a technology for solving inverse problems.

Nowadays, there is the theory of the regularization of ill-posed problems, and this allow us to find effective numerical algorithms for a wide range of inverse problems. The fundamental point in this theory is the concept of a regularizing algorithm. This is defined as an operator (or a rule) R which establishes a relationship between each pair (u_δ, δ) and an element $z_\delta \in Z$ such that $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ as $\delta \to 0$. Regularizing algorithms were developed for many ill-posed problems and implemented on computers. This allowed us to formulate a new approach to the automated processing of experimental data and to create automated packages for data processing in geophysics, plasma physics, astrophysics, spectrometry, etc. The modern methods of the theory of regularization has promoted considerable progress in solving the problems of synthesis of antennas, optical elements for laser light focusing, and optical coatings. Regularizing algorithms also provide a basis for the modern methods for reconstructing images in medical and industrial tomography and pattern recognition.

La REGULARIZACIÓN parte del reconocimiento trivial de que LOS DATOS g(y) — y los errores en g(y) — influyen sobre la solución f(x) del P.I. (transformada integral)

$$g(y) = \int K(x,y)\, f(x)\, dx.$$

y en vez de estudiar las posibles
indeterminaciones
errores
fluctuaciones ... etc

que se pueden presentar en g(y),
y como actuan sobre f(x)

SE ACTUA SOBRE EL RESULTADO f(x)

Es decir se RESTRINGE LOS GRADOS DE LIBERTAD DE f(y) — y de sus inestabilidades y errores — actuando sobre f(x)

¿ Cómo ?

PUES IMPONIENDO CONDICIONES RESTRICTIVAS — DE CARACTER MATEMATICO — A LA FORMA FUNCIONAL DE f(x)

Por ejemplo: IMPONIENDO que $f(x)$

NO PUEDA VARÍAR (OSCILAR) MUY DEPRISA

(es lo que propone D.L. PHILLIPS)

J. ASOC. COMPUTING MACHINERY **9**, 84-97, 1962

LA MANERA DE INTRODUCIR LA CONDICION ANTERIOR SERÁ MINIMIZAR (A MÍNIMOS CUADRADOS) LA DERIVADA SEGUNDA DE $f(x)$

J. ASSOC. COMPUTING MACHINERY
9 84, 97, 1962.

A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind*

DAVID L. PHILLIPS†

Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois

Since the function $g(x)$ is not known accurately, we should state the problem as

$$\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x) + \epsilon(x) \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{2}$$

where $\epsilon(x)$ is an arbitrary function except for some condition on the size of $\epsilon(x)$, such as $|\epsilon(x)| \leqq M$ or $\int_a^b \rho(x)\epsilon^2(x)\, dx \leqq \bar{M}$, $\rho(x) > 0$. Instead of a unique solution of (2) we get a family $\mathfrak{F}$ of solutions. The real problem then is to pick out of the family of functions $\mathfrak{F}$ the true solution f. This cannot be done without more information about the problem than is given in equation (2). We will assume here that the functional form of f is not known. If it were known we could use a least square fit to find a best fit to f. However, we will assume here that f is a reasonably smooth function. With this assumption the best approximation to f we can choose is probably the function $f_s \in \mathfrak{F}$ which is the smoothest in some sense. Of the various smoothness conditions, we choose the following (assuming the f have piecewise continuous second derivatives):

$$\int_a^b (f_s'')^2\, dx = \min_{f \in \mathfrak{F}} \int_a^b (f'')^2\, dx. \tag{3}$$

Disponemos de la ecuación

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$

a la que se impone la condición

$$\int_a^b |f''(x)|^2\, dx \quad \text{mínimo.}$$

Como en los datos $g(y)$ y en la resolución numérica de la ecuación también puede haber errores,

se optimizará también "a mínimos cuadrados"

Al imponer una ecuación y una ligadura implica la necesidad de un parámetro libre λ (Lagrange).

Con lo que resolveremos

$$\left[\int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx - g(y)\right]^2 + \lambda \left[\int_a^b [f''(x)]^2 dx\right] =$$

$$= \text{mínimo.}$$

Existen otros criterios de optimización diferentes.

Por ejemplo:
no sólo minimizar el cuadrado de la derivada segunda de $f(x)$, sino el de una combinación de las dos o tres primeras derivadas.

O bien condiciones de naturaleza estadística. por ejemplo
que la separación (a mínimos cuadrados) de $f(x)$ con respecto a una solución media $\bar{f}(x)$ prescrita (conocida) sea mínima.

etc.

Veremos algunos métodos al final del curso.

EN LINEAS GENERALES
LA CONDICIÓN DE <u>REGULARIZACIÓN</u>
IMPLICA, EN CIERTO MODO, QUE
LOS AUTOVALORES DEL
OPERADOR QUE HEMOS DE
INVERTIR,
QUE INICIALMENTE ERAN MUY
PEQUEÑOS Y CAUSABAN
INESTABILIDADES,
CREZCAN AUTOMATICAMENTE
LO CUAL FACILITA
EXTRAORDINARIAMENTE
LA INVERSIÓN DEL OPERADOR

RECONOCIENDO QUE

- CUANDO SE SABE MUY POCO DE LA NATURALEZA FÍSICO-MATEMÁTICA DEL PROBLEMA EN ESTUDIO.

- Y, SOBRE TODO, CUANDO NO SE SABE NADA SOBRE LO QUE VALEN LOS DATOS EN RELACIÓN CON LO QUE DEBIERAN VALER (ES DECIR, SE MIDE, SE OBSERVA, LO QUE SE PUEDE, NO LO QUE SE QUIERE O SE DEBE)

VER ARTÍCULO DE D.D. JACKSON

LA ÚNICA POSIBILIDAD DE OBTENER UNA SOLUCIÓN NO MONSTRUOSA ES A TRAVÉS DE TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN.

NO OBSTANTE, ANTES DE ABANDONAR ESTE PUNTO, VAMOS A DISCUTIR ALGUNA CONSIDERACIÓN SOBRE ESTE PARTICULAR

Geophys. J. R. astr. Soc. (1972) **28**, 97–109

Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data

D. D. Jackson

(Received 1972 January 27)*

Summary

Many problems in physical science involve the estimation of a number of unknown parameters which bear a linear or quasi-linear relationship to a set of experimental data. The data may be contaminated by random errors, insufficient to determine the unknowns, redundant, or all of the above. This paper presents a method of optimizing the conclusions from such a data set. The problem is formulated as an ill-posed matrix equation, and general criteria are established for constructing an ‘inverse’ matrix. The ‘solution’ to the problem is defined in terms of a set of generalized eigenvectors of the matrix, and may be chosen to optimize the resolution provided by the data, the expected error in the solution, the fit to the data, the proximity of the solution to an arbitrary function, or any combination of the above. The classical ‘least-squares’ solution is discussed as a special case.

INCONSISTENT !!!

Vers vers des prés.

COMENTARIO N-1

CUANDO EN LUGAR DE INVERTIR LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$\int_a^b K(x,y) f(x)\, dx = g(y)$$

SE RESUELVE, OPTIMIZANDO, LA ECUACIÓN

$$\left[\int K(x,y) f(x)\, dx - g(y)\right]^2 + \lambda \left[\int_a^b f''(x)^2\, dx\right] = \text{mínimo}$$

ES DECIR, SE APLICAN TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN

ES BASTANTE INTERESANTE:

- SE DEBERÍA HACER
- A MI CONOCIMIENTO NUNCA SE HACE

EL CALCULAR (VIA PROBLEMA DIRECTO) LA INTEGRAL

$$\int_a^b K(x,y) f(x)\, dx$$

A VER SI LA SOLUCION OBTENIDA SE PARECE EN ALGO A LA FUNCIÓN $g(y)$ DADA.

COMENTARIO N

LA REGULARIZACIÓN SUPONE EL INTRODUCIR UNA INFORMACIÓN SUPLEMENTARIA QUE IMPLICA UNA IMPOSICIÓN DE "ALISAMIENTO" DEL RESULTADO $f(x)$

SE HUBIERA PODIDO IGUALMENTE HABER REGULARIZADO: ES DECIR APLICAR ESTA INFORMACIÓN SUPLEMENTARIA, A LOS DATOS

ESTO QUE SE HACE INTUITIVAMENTE, Y QUE SE LLAMA

FILTRAR LOS DATOS

NO PARECE GOZAR DE MUCHO PREDICAMENTO ENTRE LAS CORRIENTES MATEMÁTICAS.

VOLVEREMOS SOBRE ELLO

10-4

COMPATIBILIDAD

V.S.

INESTABILIDAD

(COMPATIBILDAD :
ENTRE LOS DATOS

Y ~~EA~~ NATURALEZA DEL
PROBLEMA QUE TRATAMOS
DE RESOLVER

10-4

COMPATIBILIDAD

V.S.

INESTABILIDAD

(COMPATIBILDAD :

ENTRE LOS DATOS

Y LA NATURALEZA DEL

PROBLEMA QUE TRATAMOS

DE RESOLVER

Hemos visto que la REGULARIZACION actua introduciendo hipótesis suplementarias sobre la solución $f(x)$ de la Transformada Integral

$$\int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx = g(y)$$

a veces sin importar nada el ver si la función dato $g(y)$ es lo suficientemente correcta como para ser segundo miembro de esa ecuación integral.

Es decir sin importarnos si los datos $g(y_k)$ se encuentran dentro del espacio G donde el operador $K(x \to y)$ proyecta todos y cada uno de los posibles elementos $f(x_k)$ del espacio F.

Si $g(y_k)$ se encuentra fuera de este espacio, en principio el problema inverso no tiene solución. Pero si utilizamos un método automatico de inversion, nos conduciría a cualquier cosa INESTABILIDAD

COMPATIBILIDAD

Naturalmente en los casos en los cuales los datos g(y) NO SEAN COMPATIBLES con la Transformada Integral

$$\int_a^b k(x,y)\, f(x)\, dx$$

los resultados - numéricos - f(x) de la ecuación

$$\int_a^b k(x,y)\, f(x)\, dx = g(y)$$

PUEDEN SER CUALQUIER COSA

En realidad este caso entra en lo que llamamos PSEUDOPROBLEMA

PERO ES EL CASO QUE OCURRE MAS A MENUDO DE LO QUE PARECE

SON LOS PROPIOS DATOS g(y) LOS QUE INTRODUCEN LA INESTABILIDAD:

COMO UN **EJEMPLO** DE OPERADORES INTEGRALES HABÍAMOS VISTO QUE

$$\int_{-1}^{+1} (x-y)^2 f(x)\, dx = g(y)$$

PODÍA O NO TENER SOLUCIÓN. NO TENÍA EN EL CASO EN EL QUE LOS DATOS $g(y)$ ERAN INCOMPATIBLES CON LA ESTRUCTURA DEL OPERADOR (QUE IMPLICA QUE $g(y)$ ES UNA PARABOLA EN y). SI $g(y)$ CUMPLE ESTA CONDICIÓN, LA ECUACIÓN ANTERIOR TIENE INFINITAS SOLUCIONES.

PERO SI LOS DATOS $g(y)$

- NO TIENEN
- NO LOS CONSIDERAMOS COMO
- O HACEMOS UN MODELO QUE NO LO TENGA EN CUENTA

UNA ESTRUCTURA PARABÓLICA

ES POSIBLE QUE EL RESULTADO FINAL PARA $f(x)$ PUEDA SER CUALQUIERA.

CONTINUA...

EN PURA TEORÍA, EL PROBLEMA NO
TENDRÍA SOLUCIÓN.

PERO CUANDO ESTA SE BUSCA DENTRO
DE UN ALGORITMO NUMÉRICO CON
UN SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN
DE LAS SOLUCIONES, ENCONTRAREMOS
ALGO

ALGO QUE RESPONDE A LOS CRITERIOS
DEL ALGORITMO DE ESTABILIZACIÓN
PERO ALGO QUE NO TENDRÁ NADA
QUE VER CON NUESTRO PROBLEMA

ENTONCES

SÍ HEMOS RESUELTO EL PROBLEMA
NUMERICAMENTE SIN ALGORITMO
DE ESTABILIZACIÓN, Y ENCONTRAMOS
CUALQUIER COSA (CON CARACTERES
DE BURRADA)

O SÍ HEMOS RESUELTO EL PROBLEMA
NUMERICAMENTE CON ALGORITMO
DE ESTABILIZACIÓN, Y ENCONTRAMOS
TAMBIÉN, CUALQUIER COSA (PERO,
AHORA, CON CARACTERES SERIOS
MATEMATICAMENTE)

SERÁ SIEMPRE CUALQUIER COSA

NO ES UN PROBLEMA DE ESTABILIDAD
SIMPLEMENTE NO PODEMOS TENER
DATOS (ESOS DATOS) PARA ESTE PROBLEMA.

CUANDO DISPONEMOS DE UNOS DATOS PRACTICOS $g(y)$ (DE OBSERVACION O DE EXPERIMENTACION), ES DECIR, UNA TABLA

$$y_k \rightarrow g(y_k)$$

DEBEMOS DE ESTUDIAR MUY CUIDADOSAMENTE COMO INTRODUCIRLOS EN EL ESQUEMA NUMÉRICO QUE VA A INVERTIR LA TRANSFORMADA INTEGRAL

$$\int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx = g(y)$$

UN ESTUDIO SERIO

A PARTIR DE LA FORMA MATEMÁTICA DEL NUCLEO $K(x,y)$

Y A PARTIR DE LA FORMA MATEMÁTICA DEL MÉTODO DE INVERSIÓN

NOS VA A PROPORCIONAR EL CUADRO MATEMATICO EN EL QUE DEBEMOS REPRESENTAR LOS DATOS

ES DECIR LA ESTRUCTURA DEL ESPACIO G DE TODAS LAS PARTICULARES IMAGENES DEL OPERADOR $K(x,y)$ PARA TODAS LAS POSIBLES FORMAS QUE PUEDA TENER CUALQUIER $f(x)$

SÌ REPRESENTAMOS LOS DATOS CON UNA FORMA MATEMÁTICA QUE ESTÉ FUERA DE LAS POSIBLES $g(y)$

BIEN PORQUE ESTA FUERA NATURALMENTE DEL ESPACIO: ejemp. QUE TENGA QUE SER MONOTONA Y NOS DAMOS $g(y)$ QUE NO LO SON

BIEN PORQUE EL ALGORITMO NUMÉRICO RESTRINGE LA FORMA DE LA FUNCION DATOS $g(y)$:

- APROXIMACION POLINOMIAL EN INTERVALO FINITO
- APROXIMACIÓN POLINOMIAL EN INTERVALO INFINITO PESADA O NO CON UNA EXPONENCIAL O UNA GAUSSIANA

Y, AUNQUE LOS DATOS VENGAN COMO UNA TABLA DE PUNTOS DISCRETOS AL HACER EL ALGORITMOS HEMOS HECHO UNA HIPOTESIS SOBRE SU COMPORTAMIENTO.

EL RESULTADO, COMO CONSECUENCIA DE LA INCOMPATIBILIDAD, SERÁ ABSURDO.

UNA MENCIÓN ESPECIAL MERECE UN HECHO QUE SE PRESENTA CON GRAN FRECUENCIA

SOBRE UNA FORMA MEDIA $\bar{g}(y)$ DE LA FUNCIÓN DATOS $g(y)$ QUE PUEDE TENER EN CUENTA LA CONDICIÓN ANTERIOR DE PERTENECER AL "CUADRO DE POSIBILIDADES DEL OPERADOR $K(x, y)$

RUIDO

SULEN APARECER OSCILACIONES DE "ALTA FRECUENCIA":
OSCILACIONES DE PUNTO A PUNTO -DE PIXEL A PIXEL-
QUE "PERTURBAN" LA COMPONENTE MEDIA $\bar{g}(y)$ SUPUESTAMENTE CORRECTA.

MUY PROBABLEMENTE ; **SEGURO**
ESTAS OSCILACIONES,
AUNQUE SEAN DE DÉBIL AMPLITUD
VAN A DESESTABILIZAR EL PROCESO DE INVERSIÓN.

PERO, ESAS OSCILACIONES
- AUNQUE SEAN DE DEBIL AMPLITUD -
¿SON COMPATIBLES CON LA FISICA DEL FENOMENO?

¿SON COMPATIBLES CON EL OPERADOR INTEGRAL?

SI NO LO SON, ¿PARA QUÉ DEJARLAS EN LOS DATOS?

- YA QUE NOS VAN A DESESTABILIZAR LA INVERSION
- Y NOS VAN A OBLIGAR A BUSCAR MÉTODOS DE ESTABILIZACION.

FILTRAR OSCILACIONES
DE PUNTO A PUNTO
DE PIXEL A PIXEL

GENERALMENTE NO TIENEN NADA QUE VER CON EL PROBLEMA, Y SEGURO DESESTABILIZAN LA INVERSION.

VEÍAMOS Y VEREMOS

QUE LOS NUCLEOS "MÁS ANCHOS"
SON LOS QUE DESTRUYEN MÁS
CANTIDAD DE INFORMACIÓN
(MAS FENÓMENOS DE ALTA FRECUENCIA)

Y CON ELLO LA INVERSIÓN DE
SUS TRANSFORMADAS INTEGRALES
ES LA MÁS INESTABLE

PERO SI TENEMOS UNA ECUACIÓN
DE ESTE TIPO: CON UN NUCLEO
"MUY ANCHO" ¿CÓMO SE
PUEDEN JUSTIFICAR OSCILACIONES
DE ALTA FRECUENCIA EN LOS
DATOS g(y)?

¿NO SERÁ QUE HEMOS MEDIDO MAL?
¿O QUE HEMOS REPRESENTADO
MATEMATICAMENTE (NUMERICAMENTE)
MAL LOS DATOS?

¿O QUE SE NOS HA COLADO
UN FENOMENO EXTERNO AL
PROBLEMA?

MEDIR MAL

QUIERE DECIR, DE UNA FORMA QUE (SABIÉNDOLO O SIN SABERLO) ES INCOMPATIBLE CON LO QUE PUEDE PROPORCIONAR EL OPERADOR INTEGRAL PARA CUALQUIER INPUT $f(x)$

ES DECIR DEBEMOS DE MEDIR

- CON LA MISMA PRECISIÓN
- Y DENTRO DEL MISMO ESPÍRITU FÍSICO

QUE SE UTILIZÓ PARA ESTABLECER EL PROBLEMA

NO VAYA A SER QUE EL PROPIO PROBLEMA CONLLEVE ALGUNA HIPÓTESIS QUE SEA INCOMPATIBLE CON LOS DATOS.

LA INVERSIÓN SERÍA CATASTRÓFICA.

EN OTROS TERMINOS

SEA, O NO, EL PROBLEMA

MAL PLANTEADO
MAL CONDICIONADO

EN EL SENTIDO DE HADAMARD

HAY QUE TENER MUCHO CUIDADO EN NO INTRODUCIR INCOHERENCIAS ENTRE LOS DATOS Y LA ESTRUCTURA MATEMATICA DEL PROBLEMA

Y SI LO HACEMOS, NO UTILICEMOS NUESTRA INCAPACIDAD PARA JUSTIFICAR LOS MÉTODOS QUE CORRIJAN (?) ESTA INCAPACIDAD