16

METODOS PSEUDO-ESPECTRALES

15-A

TRIANGULACIÓN DEL OPERADOR
EN SERIE DE FUNCIONES
ORTOGONALES NO PROPIAS

NO TRABAJAN CON FUNCIONES
PROPIAS DEL OPERADOR: LAS
QUE FORMAN SU ESPECTRO

POR ELLO ESTOS MÉTODOS
DE TRABAJO NO SON TAN
SIMPLES COMO LOS ANTERIORES

TRABAJAN USANDO LAS FUNCIONES
ORTOGONALES UNIVERSALES:

CON ELLAS PODEMOS
APROXIMARNOS TANTO COMO
QUERAMOS A CUALQUIER FUNCIÓN
FÍSICA $f(x)$ ó $g(y)$

QUE PUEDAN APARECER EN
NUESTRO PROBLEMA

LA FORMA DE TRABAJAR
ES, TAMBIÉN, MUY SIMPLE.

Table A.1: Flow Chart on the Choice of Basis Functions

If	Basis Set is
$f(x)$ is periodic	Fourier series
$f(x)$ is periodic & symmetric about $x = 0$	Fourier cosine
$f(x)$ is periodic & antisymmetric about $x = 0$	Fourier sine
$x \in [a, b]$ & $f(x)$ is non-periodic	Chebyshev polys. Legendre polys.
$y \in [0, \infty]$ & $f(y)$ decays exponentially as $y \to \infty$	$TL_n(y)$ Laguerre functions
$y \in [0, \infty]$ & $f(y)$ has asymptotic series in inverse powers of y	$TL_n(y)$ only
$y \in [-\infty, \infty]$ & $f(y)$ decays exponentially as $y \to \infty$	$TB_n(y)$ sinc functions or Hermite functions
$y \in [-\infty, \infty]$ & $f(y)$ has asymptotic series in inverse powers of y	$TB_n(y)$ only
$f(\lambda, \theta)$ is a function of latitude and longitude	spherical harmonics

TRIANGULACIÓN DE UNA. T. I.

LA IDEA PUEDE NACER ESTUDIANDO UN **OPERADOR DE CONVOLUCIÓN**

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)\, f(x)\, dx$$

VEÍAMOS QUE LAS EXPONENCIALES $e^{\pm kx}$, $e^{\pm ky}$ ERAN **FUNCIONES PROPIAS** CORRESPONDIENTES AL **AUTOVALOR**

$$\lambda^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(z)\, e^{-\pm kz}\, dz$$

EN PARTICULAR LAS **FUNCIONES PROPIAS ORTOGONALES**

$$e^{\pm i\omega y}, \quad e^{\pm i\omega x} \quad \text{FOURIER}$$

PERMITEN UNA DECONVOLUCIÓN MAS O MENOS INMEDIATA.

PERO PARA CIERTAS FORMAS DE LAS FUNCIONES $g(y)$ O $f(x)$, UN DESARROLLO DE FOURIER PUEDE NECESITAR FRECUENCIAS MUY GRANDES, Y ESTO PUEDE CREAR DIFICULTADES EN LA INVERSIÓN

VEAMOS QUE OCURRE CUANDO $g(y)$ - LUEGO $f(x)$ - TIENEN UN COMPORTAMIENTO POLINOMIAL

DIFÍCIL REPRESENTACIÓN EN $\cos wy$ Y $\operatorname{sen} wy$

ESTUDIEMOS EL CASO $f(x) = x^N$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\, x^N \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,(y+z)^N \, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(z) \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} y^k z^{N-k} \, dz$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} y^k M_{N-k}$$

$$M_{N-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\, z^{N-k} \, dz$$

MOMENTO $N-K$ DE $K(z)$

TRANSFORMA x^N EN UN POLINOMIO DE ORDEN N EN y DONDE LOS COEFICIENTES SON LOS MOMENTOS DEL NUCLEO (LIMITADO POR FUNCIONES RAPIDAMENTE DECRECIENTES)

PROBLEMA INVERSO

¿ COMO SERÁ EL POLINOMIO

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^N x^n$$

QUE GENERA EN LA TRANSFORMADA

LA FUNCIÓN $g(y) = y^N$?

SERÁ

$$y^N = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, P_N(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^N \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, x^n\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^N \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\,(y+z)^n\, dz$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^N \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_{n-k}\, y^k$$

$$M_{n-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)\, z^{n-k}\, dz$$

MOMENTO DEL NUCLEO

PERMUTANDO SUMATORIOS

$$y^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\, y^k \sum_{n=k}^{N} \frac{n!}{(n-k)!}\, M_{n-k}\, \alpha_n^N$$

SISTEMA TRIANGULAR:

IDENTIFICANDO COEFICIENTES DE y^k

$K=N \qquad 1 = \frac{1}{k!}\, k!\, M_0\, \alpha^N_N$

$K=N-1 \qquad 0 = \frac{(N-1)!}{0!} M_0\, \alpha^N_{N-1} + \frac{N!}{1!} M_1\, \alpha^N_N$

$K=N-2 \qquad 0 = \frac{(N-2)!}{0!} M_0\, \alpha^N_{N-2} + \frac{(N-1)!}{1!} M_1\, \alpha^N_{N-1} + \frac{N!}{2!} M_2\, \alpha^N_N$

$K=N-3 \qquad 0 = \frac{(N-3)!}{0!} M_0\, \alpha^N_{N-3} + \frac{(N-2)!}{1!} M_1\, \alpha^N_{N-2} + \frac{(N-1)!}{2!} M_2\, \alpha^N_{N-1} + \frac{N!}{3!} M_3\, \alpha^N_{N-3}$

— — — — —

$K=0 \qquad 0 = \sum_{n=0}^{N} M_n\, \alpha^N_n$

$$\alpha^N_N = \frac{1}{M_0}$$

Y POR ELIMINACIÓN SUCESIVA

TRIVIALMENTE

TODOS LOS α^N_n

CON UN POCO DE SUERTE SE PUEDE ENCONTRAR UNA EXPRESIÓN ANALÍTICA PARA ESTOS α^N_n

LUEGO SI $g(y) = Y^N$

$$f(x) = P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^N \, x^n$$

SE DETERMINA FACILMENTE ESTE POLINOMIO CORRESPONDIENTE A Y^N MEDIANTE UNA <u>INVERSIÓN TRIANGULAR</u>

SI $g(y)$ ES UN POLINOMIO

$$g(y) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k Y^k$$

PROPONEMOS

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n X^n .$$

SERÁ

$$\sum_{k=0}^{N} \beta_k Y^k = \int_{-\infty}^{+\infty} K(X-Y) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n X^n \, d$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y^k M_{n-k}$$

$$M_{n-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) \, t^{n-k} \, dt$$ MOMENTO DEL NUCLEO

ES DECIR

$$\sum_{k=0}^{N} \beta_k Y^k = \sum_{k=0}^{N} Y^k \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} \alpha_n M_{n-k}$$

IDENTIFICANDO COEFICIENTES

$$\beta_k = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} \alpha_n M_{n-k}$$

SISTEMA TRIANGULAR

$$\beta_N = M_0 \alpha_N$$

$$\beta_{N-1} = M_0 \alpha_{N-1} + \binom{N}{N-1} M_1 \alpha_N$$

$$\beta_{N-2} = M_0 \alpha_{N-2} + \binom{N-1}{N-2} M_1 \alpha_{N-1} + \binom{N}{N-2} M_2 \alpha_N$$

PERMITE CALCULAR TRIVIALMENTE

LOS $\alpha_N \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \alpha_{N-2}$ etc

A PARTIR DE LOS DATOS

$\beta_N, \beta_{N-1}, \beta_{N-2}$ — etc

CONOCIENDO LOS MOMENTOS DEL NUCLEO.

LAS IDEAS ANTERIORES
CONDUCEN A UN RAZONAMIENTO
MAS GENERAL EN LO QUE
CONCIERNE A LA TRIANGULACIÓN
DE NUCLEOS EN EL PROCESO
DE INVERSION

TRIANGULACION DEL OPERADOR EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES NO PROPIAS

De acuerdo con la forma de $g(q)$:

intervalo de variación

comportamiento en él

podremos encontrar, dentro del cuadro (bestiario) de las funciones ortogonales, alguna familia

$\psi_j(q)$

que puede describir $g(q)$ de UNA MANERA OPTIMA: CON POCOS TERMINOS:

$$g(q) = \sum_{j=0}^{N} \beta_j \psi_j(q)$$

siendo N pequeño.

Esto en principio ES UNA REGLA DE ORO

Veamos como se puede trabajar

SEA $\{\varphi_k(y)\}$ UN CONJUNTO DE FUNCIONES ORTOGONALES ESTÁNDAR: LEGENDRE, HERMITE, LAGUERRE etc QUE PUEDEN FORMAR UNA "BASE REPRESENTATIVA" DE LOS DATOS $g(y)$

EN CIERTO MODO CADA $g(y)$ ES CONSECUENCIA DE SU CORRESPONDIENTE OBJETO $f(x)$ SOBRE EL QUE HA ACTUADO EL NUCLEO $K(x,y)$

LUEGO $g(y)$ DEBE LLEVAR INFORMACIÓN DEL NUCLEO $K(x,y)$

EN CIERTO MODO LAS FUNCIONES $\{\varphi_k(x)\}$ SI PUEDEN DESCRIBIR LA OBSERVACION $g(y)$ DENTRO DE UN GRADO DE APROXIMACIÓN PODRAN, TAMBIEN, SERVIR PARA DESCRIBIR LA DEPENDENCIA CON y DEL NUCLEO $K(x,y)$

DESARROLLEMOS EL NUCLEO $K(x, y)$ EN SERIE DE ESTE CONJUNTO DE FUNCIONES ORTOGONALES $\{\psi_K(x)\}$

$$K(x, y) = \sum_K \mathcal{H}_K(x)\, \psi_K(y)$$

LOS COEFICIENTES $\mathcal{H}_K(x)$ SERÁN

$$\mathcal{H}_K(x) = \int_A^B K(x, y)\, \psi_K(y)\, dy$$

EL CALCULO DE ESTAS FUNCIONES $\mathcal{H}_K(x)$ PUEDE HACERSE ANALITICA_MENTE, SI LOS NUCLEOS SON SENCILLOS, O BIEN NUMERICAMENTE

UNA INTEGRAL, AUNQUE SEA NUMERICA, ES UNA OPERACION DETERMINISTA.

SI LAS FUNCIONES $\{\mathcal{H}_K(x)\}$
SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES
SE PUEDEN ORTOGONALIZAR

$$\{\mathcal{H}_K(x)\} \to \{\varphi_K(x)\}$$

$\{\varphi_K(x)\}$ ORTOGONALES

$$\varphi_0(x) = \mathcal{H}_0(x)$$

$$\varphi_1(x) = C_{10}\,\varphi_0(x) + \mathcal{H}_1(x)$$

$$\varphi_2(x) = C_{20}\,\varphi_0(x) + C_{21}\,\varphi_1(x) + \mathcal{H}_2(x)$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{nk}\,\varphi_k(x) + \mathcal{H}_n(x)$$

$$C_{nk} = -\frac{\int_a^b \mathcal{H}_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_k(x)\,dx}$$

SERÁ TAMBIÉN

$$\mathcal{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk}\,\varphi_k(x)$$

CON LO CUAL

$$K(X,Y) = \sum_{K=0}^{N} \varphi_K(Y) \sum_{J=0}^{K} A_{KJ} \varphi_J(X)$$

HEMOS REDUCIDO EL NUCLEO
A UNA FORMA TRIANGULAR

AHORA EL DESARROLLO EN SERIE
NO SERÁ EL OPTIMO PARA
DESCRIBIR EL NUCLEO

PERO SI LO SERA PARA
DESCRIBIR LOS DATOS

AHORA LOS CONJUNTOS $\{\varphi_J(X)\}$, $\{\varphi_K(Y)\}$
NO SON FUNCIONES PROPIAS DEL
NUCLEO, SON FUNCIONES PROPIAS
DEL NUCLEO APROXIMADO

NO TIENE NINGÚN INTERES EL
TRABAJAR CON EL OPERADOR
EXACTO, SI LOS DATOS NO LO SON.
ELLO SERÍA LA MAYOR FUENTE
DE INESTABILIDADES

SI EN

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$

DESARROLLAMOS $g(y)$ EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k \, \varphi_k(y)$$

PROPONEMOS PARA LA FORMA

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \, \varphi_j(y)$$

SERA

$$\alpha_0 = \frac{\beta_0}{A_{00}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 - A_{10}\alpha_0}{A_{11}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 - A_{20}\alpha_0 - A_{21}\alpha_1}{A_{22}}$$

etc.

INVERSION TRIANGULAR

SI LAS FUNCIONES $\mathcal{X}_k(x)$

TUVIERAN ALGUNA LINEALMENTE

~~IN~~DEPENDIENTE DE LAS DEMÁS

ALGUN COEFICIENTE $A_{kk} = 0$

SE PODRÍA REPETIR EL PROCESO

"A LA INVERSA":

COMENZANDO POR UN CONJUNTO

DE FUNCIONES ORTOGONALES

ESTANDAR $\{\varphi_k(x)\}$ PARA $f(x)$

ENCONTRARÍAMOS MEDIANTE SU

CORRESPONDIENTE PROCESO DE

SÍNTESIS EN LA TRANSFORMADA

INTEGRAL UN CONJUNTO DE

FUNCIONES $\mathcal{X}_k(y)$ TALES QUE

MEDIANTE ORTOGONALIZACIÓN

NOS CONDUZCAN A LA BASE

$\{\psi_j(y)\}$

$\boxed{\text{RECUPERAMOS UN SISTEMA TRIANGULAR}}$

LAS FUNCIONES $\psi_K(y)$ QUE ELIGIREMOS PARA REPRESENTAR LOS DATOS $g(y)$ EN LA FORMA

$$g(y) = \sum_{J=0}^{N} \beta_J \psi_J(y)$$

SON GENERALMENTE FUNCIONES MUY SIMPLES (NATURALMENTE ORTOGONALES) PARA CALCULAR FACILMENTE LOS COEFICIENTES β_J

DISPONEMOS DE UN CUADRO SUFICIENTEMENTE GENERAL DE POSIBILIDADES (VER FOTOCOPIAS SOBRE EL BESTIARIO DE FUNCIONES) PARA REPRESENTAR COMODAMENTE CUALQUIER $g(y)$ DENTRO DE UN ORDEN N MUY BAJO:

LOS COEFICIENTES DISMINUIRÁN RAPIDAMENTE CUANDO J CRECE

Y, SI LA ELECCIÓN ES BUENA, SERÁ DE ESPERAR EL QUE NO HAYA DIFICULTADES EN LA INVERSIÓN

EN OTROS TERMINOS, AL ELEGIR DE UNA FORMA OPTIMA EL CONJUNTO DE FUNCIONES $\psi_k(y)$ Y EL VALOR MÁXIMO DE ELLAS QUE NECESITAMOS PARA REPRESENTAR LOS DATOS $g(y)$

SE HA IMPUESTO IMPLICITAMENTE UNA CIERTA **REGULARIZACIÓN**

COMO CONSECUENCIA DE QUE EL LIMITAR EL NUMERO, ACTUA DE **FILTRO** DE COMPONENTES DE ALTA FRECUENCIA

Y COMO CONSECUENCIA DE QUE AL OPTIMIZAR LA ELECCIÓN LOS COEFICIENTES β_k DISMINUIRÁN DE LA MANERA MÁS RÁPIDA POSIBLE A MEDIDA QUE SE AUMENTA EL ORDEN DEL DESARROLLO.

CONCLUSIÓN PARCIAL

ENTRE LAS FUNCIONES ESPECIALES DISPONEMOS DE UNA PANOPLIA DE POSIBILIDADES, COMO PARA PODER DESCRIBIR DENTRO DE UN PROCESO DE APROXIMACIÓN CUALQUIER FUNCIÓN MATEMÁTICA QUE CUMPLA CIERTAS CONDICIONES ELEMENTALES.

UTILIZANDO EL CONJUNTO MÁS ADECUADO $\{\varphi_j(x)\}$ PARA DESCRIBIR $f(x)$ EN SU PROPIO ESPACIO, F, Y EL MÁS ADECUADO $\{\psi_j(y)\}$ PARA DESCRIBIR $g(y)$ EN SU PROPIO ESPACIO G,

SERÁ POSIBLE DESCOMPONER EN FORMA **TRIANGULAR** CUALQUIER OPERADOR TRANSFORMADA INTEGRAL LINEAL.

LA INVERSIÓN DE UN OPERADOR TRIANGULAR, AUNQUE SEA LIGERAMENTE MÁS COMPLICADA QUE LA DE UN OPERADOR DIAGONAL, NO REPRESENTA, TAMPOCO, NINGÚN PROBLEMA.

EJEMPLO

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$g(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx$$

CON EL CAMBIO DE VARIABLES

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{1+t}{1-t} = \frac{1}{2} + \frac{t}{1-t} \qquad t = \frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{dt}{(1-t)^2} \qquad \begin{array}{ll} x=0 & t=-1 \\ x=\infty & t=1 \end{array}$$

$$f(x) \to f(t)$$

$$g(y) = e^{-\frac{y}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{t}{1-t}y}}{(1-t)^2} f(t)\, dt$$

FUNCIÓN GENERATRIZ DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}(y)$

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \exp\left\{-\frac{yt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^{(\alpha)}(y)$$

$L_n^{(\alpha)}(y)$ POLINOMIOS ORTOGONALES EN $(0,\infty)$ CLÁSICOS.

SI $\alpha = 1$

$$g(y) = e^{-\frac{y}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(y) \int_{-1}^{+1} t^n f(t)\, dt$$

TENEMOS PUES

$$\phi_n(y) = e^{-\frac{y}{2}} L_n^{(\alpha)}(y) \qquad \alpha = 1$$

ES RELATIVAMENTE FACIL EL CALCULAR LOS COEFICIENTES β_n DEL DESARROLLO

$$g(y) = e^{-\frac{y}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n L_n^{(\alpha)}(y)$$

SERÁN

$$\beta_n = \frac{1}{g_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} dy\, y^{\alpha} \phi_n(y)\, g(y)$$

CON $\quad g_n^{(\alpha)} = \dfrac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}$

LOS COEFICIENTES β_n CONSTITUYEN LA MANERA MÁS ADECUADA PARA REPRESENTAR LOS DATOS

SERÁ ENTONCES $(\alpha = 1)$

$$\beta_n = \int_{-1}^{+1} f(t)\, t^n \, dt$$

MOMENTO n (DE LAGRANGE) DE LA FUNCIÓN $f(t)$

EN PRINCIPIO, EL CONOCIMIENTO DE ESTOS MOMENTOS, PERMITE RECONSTITUIR $f(t)$ LUEGO $f(x)$.

DESARROLLEMOS $f(t)$ EN SERIE DE POLINOMIOS DE LEGENDRE

$$f(t) = \sum_{J=1}^{N_J} \alpha_j \, P_J(t)$$

Será $\alpha_J = \frac{2J+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) \, P_J(t) \, dt$

etc: $P_{2n}(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_{n+k} 2^{2k} t^{2k}}{(n-k)! \, (2k)!}$

$$P_{2n+1}(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_{n+1+k} 2^{2k+1} t^{2k+1}}{(n-k)! \, (2k)!}$$

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

etc

$$P_J(t) = \sum_{k=0}^{J} C_{Jk} \, t^k$$

C_{Jk} TRIVIAL

ENTONCES

$$\alpha_J = \frac{2J+1}{2} \sum_{k=0}^{J} C_{Jk} \, \beta_k$$

TENIENDO EN CUENTA QUE

$$t^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(4k+1)}{(2n-k)!\,\left(\frac{3}{2}\right)_{n+k}} P_{2k}(t)$$

$$t^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(4k+3)}{(2n+1-k)!\,\left(\frac{3}{2}\right)_{n+1+k}} P_{2k+1}(t)$$

O SEA

$$t^{k} = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{kj}\, P_j(t)$$

RELACIÓN INVERSA DE AQUELLA

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^{j} c_{jk}\, t^{k}$$

SE PUEDE ESCRIBIR

$$g(y) = e^{-\frac{y}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(1)}(y) \sum_{j=0}^{n} \gamma_{nj} \int_{-1}^{+1} P_j(t)\, f(t)\, dt$$

QUE EQUIVALE A LA DESCOMPOSICIÓN TRIANGULAR DEL NUCLEO EN FUNCIÓN DE FUNCIONES ORTOGONALES UNIVERSALES:

$$e^{-\frac{y}{2}}\, L_n^{(1)}(y) \qquad P_j(t)$$

$$K(t,y) = e^{-\frac{y}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(1)}(y) \sum_{j=0}^{n} \gamma_{nj}\, P_j(t)$$

16-2

INVERSIÓN AUTO-ESPECTRAL

KRILOW

ECUACIÓN MATRICIAL: KRYLOV

$$\bar{g} = \underline{\underline{K}}\,\bar{f} \qquad \bar{f} = \underline{\underline{K}}^{-1}\bar{g}$$

DIMENSIÓN N

CAYLEY-HAMILTON

EXISTEN LOS COEFICIENTES C_J, $J = 1, 2 .. N$

TALES QUE

$$C_1\,\underline{\underline{K}} + C_2\,\underline{\underline{K}}^2 + C_3\,\underline{\underline{K}}^3 + \cdots + C_N\,\underline{\underline{K}}^N = \underline{\underline{I}}$$

C_J : DEPENDEN SÓLO DE LOS VALORES PROPIOS DE $\underline{\underline{K}}$

ENTONCES

$$\underline{\underline{K}}^{-1} = C_1\,\underline{\underline{I}} + C_2\,\underline{\underline{K}} + C_3\,\underline{\underline{K}}^2 + \cdots + C_N\,\underline{\underline{K}}^{N-1}$$

RESUELVE EL PROBLEMA DE LA MISMA FORMA ANTERIOR

TRABAJAREMOS EN EL
ESPACIO G DE LAS VARIABLES
$g(y)$
CON FUNCIONES ORTOGONALES
GENERADAS POR LAS DIFERENTES
TRANSFORMACIONES DE $g(y)$

NO SON FUNCIONES PROPIAS, PROPIAS DEL
OPERADOR
AUNQUE TENGAN MUCHO QUE VER CON ÉL

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\, f(x)\, dx$$

SELF-SPECTRAL DE CONVOLUTION

FUNCIONES ORTOGONALES

GENERADAS POR LAS DIFERENTES

CONVOLUCIONES DE $g(y)$

$$G_1(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\, g(x)\, dx$$

$$G_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\, G_1(x)\, dx$$

$$G_3(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\, G_2(x)\, dx$$

etc.

ORTONORMALIZACIÓN

CON LAS FUNCIONES

$G_1(y)$, $G_2(y)$, $G_3(y)$, ... etc

GENERAREMOS UNA BASE ORTONORMAL:

$\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$, $\phi_3(y)$ ..... $\phi_N(y)$

GRAM, SMITH

ES DECIR, ENCONTRAREMOS LOS COEFICIENTES C_{KJ} DE LAS RELACIONES

$$\phi_K(y) = \sum_{J=1}^{K} C_{KJ}\, G_J(y)$$

$K = 1, 2, \dots N \qquad J = 1, \dots K$

$$\langle \phi_J(y)\, \phi_K(y) \rangle = \delta_{JK}$$

DESARROLLAMOS $g(y)$ EN SERIE DE LAS $\{\phi_K(y)\}$:

$$g(y) = \sum_{K=1}^{N} \beta_K\, \phi_K(y)$$

$$\beta_K = \langle g(y)\, \phi_K(y) \rangle$$

ES LA MANERA DE PRESENTAR LOS DATOS

LA ÚNICA HIPOTESIS FUERTE QUE SE HA HECHO, ES QUE EL CONJUNTO DE FUNCIONES ORTONORMALES $\{\phi_K(y)\}$ ES LO SUFICIENTEMENTE COMPLETO COMO PARA QUE $g(y)$ SE PUEDA DESARROLLAR EN SERIE DE FUNCIONES DE ÉL.

SIMBOLICAMENTE

$$f \rightarrow g \qquad f = K^{-1} g = K^{-1} K^{-1} G_1 = K^{-1} K^{-1} K^{-1} G_2$$

$$g \rightarrow G_1 \qquad g = K^{-1} G_1 = K^{-1} K^{-1} G_2$$

$$G_1 \rightarrow G_2 \qquad G_1 = K^{-1} G_2$$

EN PRINCIPIO PARECE QUE OPERACIONALMENTE g SI QUE DEBE PODER DESARROLLARSE EN UNA SERIE DEL TIPO ANTERIOR

ENTONCES, SI

$$g(y) = \sum_{K=1}^{N} \beta_K \phi_K(y)$$

Y

$$\phi_K(y) = \sum_{J=1}^{K} C_{KJ} G_J(y)$$

$$g(y) = \sum_{K=1}^{N} \beta_K \sum_{J=1}^{K} C_{KJ} G_J(y)$$

$$= \sum_{J=1}^{N} G_J(y) \cdot \sum_{K=J}^{N} C_{KJ} \beta_K$$

$$= \sum_{J=1}^{N} \alpha_J G_J(y)$$

$$\alpha_J = \sum_{K=J}^{N} C_{KJ} \beta_K$$

Y SÍ

$$g(y) = \sum_{J=1}^{N} \alpha_J G_J(y)$$

SERÁ

$$f(x) = \alpha_1 g(y=x) + \sum_{J=2}^{N} \alpha_J G_{J-1}(y=x)$$

NO HAY MÁS QUE APLICAR EL OPERADOR INTEGRAR PARA COMPROBARLO

TENEMOS ASÍ RESUELTO NUESTRO PROBLEMA

16-2

CONCLUSION

METODOS ESPECTRALES

A LA VISTA DE LA METODOLOGÍA INTRODUCIDA EN EL DESARROLLO DEL FORMALISMO DE LA INVERSIÓN ESPECTRAL

ESTRICTA (PROPIA) $\phi(x) = \psi(y)$

SINGULAR (IMPROPIA) $\phi(x) \neq \psi(y)$

O DEL ESTABLECIMIENTO DE UNA RELACIÓN BIUNÍVOCA ENTRE FUNCIONES ORTOGONALES

$\phi(x)$ EN EL ESPACIO OBJETO

$\psi(y)$ EN EL ESPACIO IMAGEN (DATOS)

VAMOS A VOLVER A ESTUDIAR MUY RAPIDAMENTE CIERTOS ASPECTOS BÁSICOS DEL PROBLEMA INVERSO QUE DISCUTIMOS PARA LAS TRANSFORMADAS INTEGRALES

IMCOMPATIBILIDAD, INDETERMINACIÓN.

SEA UN NUCLEO $K(x,y)$ DESARROLLADO EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES $\varphi_j(x)$ QUE FORMAN UNA BASE EN EL ESPACIO OBJETO:

$$K(x,y) = \sum_n \chi_n(y)\,\varphi_n(x)$$

NATURALMENTE

$$\chi_n(y) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi_n(x)\,dx$$

EL CONJUNTO DE TODAS $\chi_n(y)$ QUE CORRESPONDEN A CADA UNA DE LAS $\varphi_n(x)$ PUEDE NO FORMAR UNA BASE: PUEDEN NO SER FUNCIONES ORTOGONALES

SI LA FUNCION DATO $g(y)$
NO SE PUEDE EXPRESAR LINEALMENTE
COMO COMBINACION DE ALGUNAS DE
– TODAS – LAS $\chi_n(y)$, ESA $g(y)$
NO CORRESPONDE A ESTE
PROBLEMA, ES IMCOMPATIBLE.
NO HAY SOLUCIÓN

SI EN ESE CONJUNTO DE
IMAGENES $\{\chi_n(y)\}$ DE LAS
FUNCIONES BASE $\{\varphi_n(x)\}$ DEL
ESPACIO OBJETO, HAY VARIAS
IGUALES, O HAY ALGUNA
COMBINACIÓN LINEAL DE OTRAS,
UNA MISMA IMAGEN PODRÁ
PROVENIR DE DOS O MÁS
OBJETOS DIFERENTES. EL
PROBLEMA INVERSO ESTARÁ
INDETERMINADO.

PERDIDA IRRECUPERABLE DE INFORMACIÓN

$$\int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx = g(y)$$

PARA ESTUDIAR SI PUEDE, O NO, EXISTIR PERDIDA DE INFORMACION EN UNA TRANSFORMADA INTEGRAL SE PUEDE DESARROLLAR SU NUCLEO $K(x,y)$ EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES $\varphi_j(x)$ (PROPIAS, O NO) CORRESPONDIENTES AL ESPACIO OBJETO:

$$K(x,y) = \sum_n \chi_n(y)\, \varphi_j(x)$$

SI EL CONJUNTO $\{\varphi_j(x)\}$ FORMA UNA BASE EN EL ESPACIO OBJETO, CUALQUIER FUNCION $f(x)$ SE PODRA DESCOMPONER EN SERIE DE FUNCIONES DE ESA BASE

PARA QUE SE TRANSMITA TODA LA INFORMACION DE CUALQUIER $f(x)$ DEL ESPACIO OBJETO AL ESPACIO IMAGEN, EL DESARROLLO ANTERIOR NO TENDRA QUE TENER NINGÚN COEFICIENTE NULO:

NATURALMENTE DENTRO DE LA PRECISIÓN PRACTICA CON LA QUE TRABAJEMOS.

TENDRÀ QUE SER UN DESARROLLO INFINITO

CONCLUSIÓN

ES FACIL INVERTIR UNA TRANSFORMADA INTEGRAL QUE CORRESPONDE A UN OPERADOR SIMÉTRICO, PARA EL QUE SE CONOCE SU ESPECTRO

$$\{\lambda_j, \phi_j(x)\}$$

SE TRATA DE UNA INVERSIÓN DIAGONAL: TERMINO A TERMINO,

EN LA QUE SE PUEDE "SEGUIR LA PISTA" A LAS CONDICIONES DE ESTABILIDAD

APARECERAN INESTABILIDADES SI HAY AUTOVALORES MUY PEQUEÑOS

EN PRINCIPIO, PARA AUTOVALORES NULOS O MUY PEQUEÑOS NO SE DEBIERA TRANSMITIR INFORMACIÓN EN EL PROCESO DE SINTESIS

$$f(x) \longrightarrow g(y)$$

LUEGO SI ENCONTRAMOS ALGUNA "SEÑAL" EN $g(y)$ QUE CORRESPONDA

A INFORMACIÓN ASOCIADA A AUTOVALORES PEQUEÑOS TENDREMOS PROBLEMAS GRAVES.

POR ELLO ES ACONSEJABLE: DESTRUIR INFORMACIÓN DE ALTA FRECUENCIA - QUE PUEDA SER ESPUREA - FILTRANDO.

O BIEN HACER UN ANÁLISIS MUY DETALLADO DEL PROBLEMA.

NO OBSTANTE, NO HAY QUE PERDER DE VISTA QUE, AUNQUE ESTA SEA LA MANERA MAS FACIL DE INVERTIR, NO TIENE POR QUE SER LA MAS ADECUADA. *

GENERALMENTE, ALGUNA OTRA FORMA - COMO LAS QUE VEREMOS - EN LA CUAL DESCRIBAMOS A LA FUNCIÓN DATO $g(y)$ CON POCOS TERMINOS, AUNQUE LUEGO LA INVERSIÓN SEA TRIANGULAR, SERA SIEMPRE RECOMENDABLE.

Ejemp. CONVOLUCIONES V.S. FOURIER

If it is supposed therefore that the singular function system of the kernel can be represented numerically in some way, solution of the integral equation $\mathcal{K}f = g$ depends only on developing the expansion (5.11) until the data function (vector) is reproduced to sufficient accuracy, that is until some norm on the residual $(\mathcal{K}f_{(n)} - g)$ is sufficiently small—in much the same spirit as the overdetermined problem (§5.3.4). The practical problem boils down to balancing the residual against the increasing oscillatory tendency of the recovered solution $f_{(n)}$ for large n. The 'numerical noise' associated with determining the higher singular functions, now exacerbates the customary problem of determining the high frequency development of the solution that arises because of data noise (see §4.3.2). The recovered solution is therefore entirely dependent upon a sensible strategy for truncating the singular function development at a suitable point.

Miller (1974) points out that the singular function method is attractive for the theoretical insight it provides into the problem but is rather laborious and computationally expensive to apply in practice (cf §6.2) while Baker (1977, p 643) mentions the numerical disadvantages of computing a series that converges in the mean square sense rather than uniformly. A rather unsuccessful application of the method to the solar limb darkening problem (defined in §2.3.4) is described by Kunasz *et al* (1973) (though cf Parker 1977). !!!

Parker.

$$\int_c^b K(x,y)\, f(x)\, dx = g(y) \qquad (1)$$

. To calculate solutions $f(x)$ [especially when (1) is a linearization of a nonlinear problem] a different method has been found that offers distinct advantages, mainly with regard to numerical stability: this is the spectral expansion method.

A Spectral Expansion

The procedure to be described is a particular formulation of the numerical solution to practical linear inverse problems advocated by many authors (Gilbert 1971; Jackson 1972; Wiggins 1972; Jupp & Vozoff 1975), all of whom based the solution ultimately upon the philosophy of Lanczos (1961). Most workers have dealt with finite-dimensional models because this allows a direct description in terms of matrices and makes possible a limited form of the Backus-Gilbert interpretation of the results. The approach developed here, following Gilbert (1971), is in greater harmony with the cardinal factor distinguishing inverse theory from conventional parameter estimation, namely, that the space of unknowns is infinite-dimensional.

Analytic instability appears as extremely poor conditioning in the matrices encountered in a numerical solution, even if nonuniqueness is evaded by reducing the number of unknowns sought. The spectral expansion explicitly isolates those parts of the solution that are well determined by the data and those that are not; furthermore, the statistically reliable component of f (as derived from the known error estimates in the data) are also those with the highest numerical reliability in actual, finite-accuracy computations. These features of the method make it the most suitable when very large data sets are handled, even though it is up to ten times slower computationally than simple matrix inversion.

?!!!?

No tanto cuando se conoce un poco de la teoría y práctica de funciones especiales.

CONCLUSIONES

EN MUCHOS PROBLEMAS RESUELTOS UTILIZANDO FAMILIAS DE FUNCIONES ORTOGONALES CLASICAS

- SE PUEDE INCLUSO LLEGAR A UNA REPRESENTACION DIAGONAL DEL OPERADOR: Correspondencia biunívoca entre ~~cada~~ cada función $\phi_j(x)$ en el espacio objeto, y cada función $\psi_j(y)$ de el espacio imagen.

- EN LOS OTROS LLEGAMOS A UNA REPRESENTACIÓN MATRICIAL TRIANGULAR que también es fácil de invertir:

Si

$$g(y) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \psi_j(y)$$

[cálculo fácil de β_j ya que $\psi_j(y)$ es un elemento de una familia ortogonal]

será

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x)$$

donde

$$\alpha_j = \sum_{l=1}^{j} C_{jl} \beta_l .$$

Los coeficientes C_{jl} fáciles de calcular numéricamente, a veces pueden obtenerse analíticamente.

En el conjunto de funciones $\varphi_j(q)$, SABIAMENTE ELEGIDO PARA REPRESENTAR LOS DATOS $g(q)$, se pueden introducir de una manera natural una serie de elementos que hay que introducir artificialmente, como correcciones, en otros métodos, para compensar diferentes comportamientos de $g(q)$ según diferentes regiones de q: factores de escala; PESOS DE INTEGRACIÓN

El número de funciones $\varphi_j(q)$ que se usan en la representación analítica de los datos numéricos $g(q)$, lleva, en sí mismo un cierto proceso de regularización. Sabemos que la solución no dependerá de funciones $\phi_j(x)$ con frecuencia superior a N

Es decir, el propio desarrollo en serie, FILTRA los datos: como en FOURIER

Además, (también como allí), para frecuencias menores, el hecho de calcular los coeficientes β_j a partir de integrales de los datos $g(q)$, se destruirán -al integrar- muchos errores aleatorios que puedan presentar estos datos