5

EXTENSIÓN DE LA CLASIFICACIÓN DE GEL'FAND

CLASSICAL DYNAMICS:

A CONTEMPORARY APPROACH

JORGE V. JOSÉ

and

EUGENE J. SALETAN

CHAPTER 4

SCATTERING AND LINEAR OSCILLATORS

4.1 SCATTERING

4.1.1 SCATTERING BY CENTRAL FORCES

So far we have mostly concentrated on bounded orbits of central-force systems. Yet unbounded orbits are very common for both attractive and repulsive central forces. Indeed, for repulsive ones all orbits are unbounded. For attractive ones, the outer turning point of bounded orbits – the maximum distance of the particle from the attracting center – increases with increasing energy. If the force is weak enough at large distances, the particle may escape from the force center even at finite energies: the orbit may break open and the outer turning point may move off to infinity. Then the orbit becomes unbounded, as in the hyperbolic orbits in the Coulomb potential. The result is what is called scattering.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CLASIFICACIÓN DE GEL'FAND

1ª TIPO PROBLEMAS INVERSOS DE SCATTERING DE ONDAS PLANAS

CALCULAR POTENCIALES ATOMICOS

2º TIPO PROBLEMAS INVERSOS DE GEOMETRIA INTEGRAL : TRANSFORMADAS INTEGRALES

RECONSTITUCION DE ESTRUCTURAS A PARTIR DE INTEGRALES SOBRE LINEAS (PROYECCIONES)

Como ~~veremos~~ vimos ambos tipos pueden estar fuertemente relacionados.

NEWTON

UNA FORMA DE HACER LO
MISMO QUE EN LOS PROBLEMAS
CUANTICOS DE SCATTERIN
DE ONDAS
PERO MENOS ACADÉMICA

— Y MUCHISIMO MAS INTERESANTE..

Chapter One

INVERSE PROBLEMS OF DYNAMICS

One of the main problems of the dynamics of mechanical systems is to determine the forces and moments from given kinematic elements of motion or, in a more general statement, from given properties of motion. Problems of this kind, along with their various modifications, are called the inverse problems of dynamics [1, 2].

The inverse problems of dynamics have always attracted the attention of mathematicians and engineers primarily because they have a wide scope of application and offer challenging prospects for obtaining a final solution.

1.2. Bertrand's Problem. Newton's problem led to subsequent formulations of more general problems concerning the determination of the forces in accordance with the given properties of motion. One such problem is called Bertrand's problem on the determination of the force $\mathbf{F}(X, Y)$ under the action of which a particle moves along a conic section under any initial conditions. The force is supposed to depend only on the position (x, y) of the particle. This problem attracted the attention of a large number of engineers and mathematicians in the last century [2, 4, 5] as its statement predetermined the statements of several more general inverse problems of dynamics and its solution included the solution of Newton's problem itself, with less information about the properties of motion of the planets.

It should be noted that, mathematically, the solution of Bertrand's problem results in the construction of the right-hand sides of a system of two second-order equations

$$\ddot{x} = X(x, y), \qquad \ddot{y} = Y(x, y) \tag{1.2.1}$$

for which a conic section is the integra curve.

PERO, DEBEMOS DE TENER EN CUENTA QUE CIERTOS C_k PROTAGONISTAS NUMERICAMENTE PRINCIPALES DE LA SUMA

$$\sum_k C_k \bar{u}_k = \bar{Y}^0 \quad \text{PARA } x=0$$

AL ESTAR AFECTADOS POR $e^{-\lambda_k x}$ PUEDEN NO SER PROTAGONISTAS NUMERICAMENTE PRINCIPALES DE LA SUMA

$$\sum_k C_k e^{-\lambda_k x} \bar{u}_k = \bar{Y}(x) \quad \text{PARA } x>0$$

PARA VALORES DE $x \gg 0$

ERRORES DE REDONDEO EN LA DETERMINACION DE C_k PARA CIERTOS k, PUEDEN AFECTAR TANTO A LA SOLUCIÓN $\bar{Y}(x)$ COMO LOS MISMOS VALORES DE C_k PARA OTROS k, COMO CONSECUENCIA DEL FACTOR $e^{-\lambda_k x}$

ESTE PROBLEMA DEBE SER RECONOCIDO COMO DE "RELATIVA IMPORTANCIA". LOS VALORES DE $\{C_k\}$ GRANDES O PEQUEÑOS SE CONSERVAN EN MEMORIA (NO SE PIERDEN).

GENERALIZACIÓN

Determinar

- Condiciones iniciales
- Condiciones de contorno

DETERMINACIÓN DE CONDICIONES INICIALES

Un sistema diferencial
Por ejemplo

$$\frac{d}{dx}\bar{y} = -\underline{\underline{A}}\,\bar{y}$$

$\underline{\underline{A}}$ matriz conocida

Conocida una solución

$$\bar{Y}(x_1)$$

Encontrar la solución en el momento inicial x_0:

$$\bar{Y}(x_0)$$

EJERCICIO

PROBLEMAS EN LA INVERSIÓN DE UNA EVOLUCIÓN, INCLUSO LINEAL

SEA $\underline{\underline{A}}$ UNA MATRIZ DEFINIDA POSITIVA INDEPENDIENTE DE LA VARIABLE X

CON ESPECTRO λ_K, $\bar{u}_K(X)$ REAL

$\bar{y} \equiv \bar{y}(x)$ UNA FUNCIÓN VECTORIAL SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY:

$$\frac{d}{dx}\bar{y} \equiv -\underline{\underline{A}}\,\bar{y} \qquad \text{con } \bar{y} = \bar{y}^{o} \text{ para } x = 0$$

SI $\{\bar{u}_K\}$ y $\{\lambda_K\}$ SON LOS VECTORES Y VALORES PROPIOS DE $\underline{\underline{A}}$ SERÁ

$$\bar{y}(x) = \sum_K C_K\, e^{-\lambda_K x}\, \bar{u}_K \equiv \sum_K e^{-\lambda_K x}\, \bar{y}^{o}_K$$

$$\bar{y}^{o}_K \equiv C_K\, \bar{u}_K \qquad \text{i.e.} \qquad C_K = \langle \bar{y}^{o}, \bar{u}_K \rangle$$

DADA LA CONDICIÓN INICIAL: $\bar{Y}^{o}$

PARA $x=0$ $\bar{Y}(0)=\bar{Y}^{o}$

Y CONOCIDOS LOS VALORES DEL ESPECTRO DE $\underline{\underline{A}}$: $\{\lambda_K\}$, $\{\bar{u}_K\}$

PUEDE SER RELATIVAMENTE FACIL ENCONTRAR EL CONJUNTO DE CONSTANTES $\{C_K\}$ - QUE PUEDEN SER POSITIVAS Y NEGATIVAS - TAL QUE

$$\bar{Y}^{o}=\sum_{K} C_K \bar{u}_K .$$

TAL SUMA SE PUEDE SATISFACER CON TODA PRECISIÓN DEL ORDENADOR:

SEGUIR LA EVOLUCIÓN, PARA ENCONTRAR, PARA CUALQUIER X, EL VALOR DE LA FUNCIÓN $\bar{Y}(X)$

$$Y(X)=\sum_{K} C_K e^{-\lambda_K X} \bar{u}_K .$$

PUEDE SER RELATIVAMENTE FACIL

EL PROBLEMA PUEDE SER MUCHO MÁS GRAVE CUANDO SE ESTUDIA LA **RETRO-EVOLUCIÓN**:

SE CONOCE, CONDICIÓN INICIAL

PARA $x_m > 0$ $\quad \bar{Y}^m = \bar{Y}(x_m)$

Y PRETENDEMOS ENCONTRAR $\bar{Y}(x)$ PARA $x < x_m$ EN ESPECIAL PARA $x = 0$

SE DETERMINA FACILMENTE EL CONJUNTO DE CONSTANTES

$$D_k = \langle \bar{y}^m \cdot \bar{u}_k \rangle .$$

SERA

$$\bar{Y}(x) = \sum_k D_k \, e^{-\lambda_k (x - x_m)} \, \bar{u}_k$$

$$= \sum_k D_k \, e^{\lambda_k (x_m - x)} \, \bar{u}_k$$

EN PARTICULAR

$$\bar{Y}^0 = \bar{Y}(0) = \sum_k D_k \, e^{\lambda_k x_m} \, \bar{u}_k$$

AHORA, AQUELLAS COMPONENTES QUE ANTES ERAN **NUMERICAMENTE IMPORTANTES** EN EL ESTADO $\bar{Y}^0$ PARA $x = 0$, HAN PODIDO DESAPARECER EN EL ESTADO $\bar{Y}^m$ PARA x_m.

SI MEDIMOS / CALCULAMOS
ALGO PARA EL VALOR D_k
CORRESPONDIENTE, TAL MEDIDA / CALCULO
PRESENTARA MUCHO RIESGO

RIESGO QUE SE AMPLIFICA
POR EL FACTOR

$$e^{\lambda x_M}$$

EXPONENCIAL POSITIVA QUE APARECE
EN LA RETRO-EVOLUCIÓN.

SITUACIÓN INTRÍNSECA DE
LOS PROBLEMAS INVERSOS.

QUE SE AGRAVA CON EL
CALCULO NUMÉRICO.

AMPLIFICACIÓN EXTRAORDINARÍA
DE ERRORES, SOBRE TODO SI LOS
VALORES DE LAS VARIABLES
ALTERNAN LOS SIGNOS.

RIESGOS, MUY GRAVES,
DE HACER CÁLCULO NUMÉRICO
BASADO EN EL ALGEBRA LINEAL.

DE TERMINACION DE
CONDICIONES DE CONTORNO

JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 31, 682–716 (1970)

Well-Posed Stochastic Extensions of Ill-Posed Linear Problems*

JOEL N. FRANKLIN

Willis H. Booth Computing Center, California Institute of Technology, Pasadena, California 91109

Submitted by Richard Bellman

HARMONIC CONTINUATION—A NUMERICAL EXAMPLE

If a harmonic function takes boundary values $h(\varphi)$ on the unit circle, the values $f(\theta)$ on the concentric interior circle of radius $r < 1$ are given by Poisson's formula,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,h(\varphi)\,d\varphi = f(\theta). \tag{7.1}$$

Can we invert Poisson's formula? Given the interior values $f(\theta)$, can we solve the integral equation (7.1) for the boundary values $h(\varphi)$?

If f is square-integrable, and if a square-integrable solution h exists, then the solution is uniquely determined almost everywhere. For if f has the Fourier series

$$f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\theta + f_k' \sin k\theta)$$

then the Fourier coefficients h_k, h_k' for the solution are uniquely determined from the integral equation (7.1):

$$h_k = r^{-k} f_k, \qquad h_k' = r^{-k} f_k'. \tag{7.2}$$

The identities (7.2) also illustrate that the solution depends discontinuously on the data. If k is a large integer, a small data-variation, $\delta f(\theta) = k^{-1}\cos k\theta$, produces the large answer-variation, $\delta h(\varphi) = r^{-k}k^{-1}\cos k\varphi$. This is a typical ill-posed linear problem.

$f(\theta)$ DATOS

$$f(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \, d\varphi$$

$r \leq 1$

DATOS: SE CONOCEN LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE $f(\theta)$

$$f(\theta) = f_0 + \sum_k \left[f_k^s \operatorname{sen} k\theta + f_k^c \cos k\theta \right]$$

DATOS $f_0, \{f_k^s\}, \{f_k^c\}$

TENDREMOS QUE CALCULAR LOS COEFICIENTES $h_0, \{h_k^s\}, \{h_k^c\}$

PARA EL DESARROLLO DE LA INCÓGNITA $h(\varphi)$:

$$h(\varphi) = h_0 + \sum_k \left[h_k^s \operatorname{sen} k\varphi + h_k^c \cos k\varphi \right]$$

PARA EL DESARROLLO PROPUESTO DE $h(\varphi)$ LA INTEGRAL

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi =$$

$$\theta-\varphi=\alpha$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\theta-\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{h_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[h_k^s \operatorname{sen} k(\theta-\alpha) + \cos k(\theta-\alpha)\right]}{1-2r\cos\alpha+r^2}\,d\alpha$$

Como

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2} = \frac{2\pi}{1-r^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos k\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}\,d\alpha = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos k\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}\,d\alpha = \frac{2\pi}{1-r^2}\,r^k$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} k\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}\,d\alpha = 0$$

RESULTA QUE

$$f(\theta) = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[h_k^s \sin k\theta + h_k^c \cos k\theta \right]$$

IDENTIFICANDO CON LOS DATOS

$$h_0 = f_0$$

$$h_k^s = \frac{1}{r^k} f_k^s \qquad h_k^c = \frac{1}{r^k} f_k^c$$

Si disponemos de los datos para valores de r pequeños (lejos del borde), $r \ll 1$ será muy difícil que encontremos correctamente los coeficientes de alta frecuencia – k grande – del resultado $h(\varphi)$

GENERALIZACIÓN

- Determinar coeficientes de una ecuación diferencial

EN REALIDAD, EL PROBLEMA INVERSO DE SCATTERING DE ONDAS PLANAS PUEDE PLANTEARSE EN TÉRMINOS MÁS GENERALES:

DADA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)\, y = f(x)$$

DETERMINAR EL CONJUNTO DE COEFICIENTES $\{a_k(x)\}$ CONOCIDAS $n+1$ FUNCIONES $\{y_k(x)\}$ FUNCIONALMENTE INDEPENDIENTES, QUE SE SUPONEN SER SOLUCIONES DE LA ECUACION

EN PRINCIPIO SE PUEDE ESCRIBIR UNA ECUACION ALGEBRAICA LINEAL PARA CADA UNA DE ESTAS FUNCIONES $y_k(x)$: CALCULANDO SUS DERIVADAS

DE ESTE SISTEMA SE PODRIAN DEDUCIR LOS VALORES DE $\{c_k(x)\}$ PARA CADA X

PERO ESTO ES SIMPLE, SÓLO CONCEPTUALMENTE

OPERACIONES ARRIESGADAS:

DERIVACIONES

RESOLUCION DE SISTEMAS ALGEBRAICOS LINALES etc

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMO TRANSFORMADA INTEGRAL (PROBLEMA INVERSO)

$$g(y) = \int_{x_0}^{y} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{d\, g(y)}{dy}$$

$$g(y) = \int_{x_0}^{y} (y - x)\, f(x)\, dx$$

$$\frac{d\, g(y)}{dy} = \int_{x_0}^{y} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{d^2 g(y)}{dy^2}$$

$\Rightarrow$ DERIVADAS FRACCIONARIAS

§ 2. Nexo entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra

La resolución de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\, y = F(x) \tag{1}$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, con las condiciones iniciales

$$y(0) = C_0,\quad y'(0) = C_1,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \tag{2}$$

puede ser reducida a la resolución de cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie.

Demostremos esto en el ejemplo de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\, y = F(x), \tag{1'}$$

$$y(0) = C_0, \qquad y'(0) = C_1. \tag{2'}$$

Hagamos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{3}$$

De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (2′), se halla sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\, dt + C_1, \qquad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\, dt + C_1 x + C_0. \tag{4}$$

Aquí hemos aplicado la fórmula

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\, dz.$$

Teniendo en cuenta (3) y (4), escribamos la ecuación diferencial (1) así:

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\, dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\,\varphi(t)\, dt + \\ + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x),$$

o bien

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \quad (5)$$

Haciendo

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \quad (6)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x), \quad (7)$$

reducimos (5) a la forma

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x), \quad (8)$$

es decir, se llega a una ecuación integral de Volterra de segunda especie.

OTRAS TRANSFORMADAS INTEGRALES

LAPLACE

$$g(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx$$

PLANCK

$$E_a(r) = \int_0^{\infty} a(\nu)\, B(\nu, T)\, d\nu$$

DEDUCIR $T(r)$

CONVOLUCIONES:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\, f(x)\, dx$$

EN ESPECIAL GAUSSIANA

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)^2} f(x)\, dx$$