9

TRANSFORMADAS INTEGRALES

9 - 1

ECUACIONES INTEGRALES

CRAIG + BROWN

FREDHOLM V.S. VOLTERRA

4

Mathematical Aspects of the Inversion Problem

QUITAS LA ESTABILIZACION DE
LA INVERSION DEBE DE VENIR DE
LA PROPIA FISICA

4.1 Introduction

It is natural to assume that the astronomical data inversion problems discussed previously can be illuminated to some extent by invoking the analytic mathematical theory of integral equations. This is indeed the case. Without attempting an exhaustive mathematical treatment, the present chapter aims to outline those aspects of the mathematical theory of relevance to practical data inversion and stabilisation techniques. The discussion is mainly concerned with integral equations of the first kind since these are known to present the most severe practical difficulties. The reader should be warned however, that no mathematical theory, no matter how powerful or elegant, can overcome the basic problem of the data generally lacking information with regard to the details—specifically the high frequency components—of the source function. Methods of stabilising the inversion by counteracting this 'lack of information' are discussed in Chapter 6.

Fuller development of material in this chapter (as well as Chapters 5 and 6) can be found in the following sources. Systematic developments of the theory of linear integral equations are presented in the textbooks by Smithies (1962) and Tricomi (1957). Of more relevance to the numerical inversion problem are the proceedings edited by Delves and Walsh (1974): the excellent contribution of Miller (Chapter 13) provides a particularly succinct account of the ill posed inversion problem. The more recent work of Baker (1977) has provided the most general and exhaustive treatment so far on the numerical treatment of integral equations. There are, in addition, many review articles that deal with different aspects and applications of the

RESUMEN DE ASTRONOMO I.

inversion problem (e.g. Franklin 1970, Turchin *et al* 1971, Parker 1977). Also of direct relevance are the workshop on applied inverse problems (Sabatier 1978) and Twomey's (1977) monograph on the mathematics of 'remote sensing' experiments.

4.2 Integral Equations of the First and Second Kinds

We will concentrate on the standard types of linear integral equations defined in Chapter 2. Recall that

$$\int_a^b k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y = g(x) \qquad c < x < d \qquad (4.1)$$

and

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y \qquad a < x < b \qquad (4.2)$$

are Fredholm integral equations of the first and second kind respectively (§2.1). In both cases the problem is to determine the unknown function $f(y)$ given that $g(x)$ and $k(x, y)$ are known functions prescribed over a given range of x. Note that although the x range can differ from the range of integration for equations of the first kind, it is always possible to ensure $c = a$, $d = b$, by a simple change of variable. In the special case where $k(x, y) = 0$ for $y > x$ the equations are known as Volterra rather than Fredholm equations. Thus

$$\int_a^x k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y = g(x) \qquad a < x < b \qquad (4.3)$$

is a Volterra equation of the first kind.

It is not difficult to see that equations of the second kind may be easier to solve than equations of the first kind. Observe that in the case where $|\lambda|$ is small a reasonable first approximation to the unknown function in equation (4.2) can be obtained by setting $f(x) = g(x)$. This approximation can then be refined by setting up, in the usual iterative spirit, a recursive procedure of the form

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f_n(y)\, \mathrm{d}y \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (4.4)$$

f_1 being obtained from the earlier approximation $f_0 = g(x)$ and so on. A basic result in the analytic theory of Fredholm integral equations is that, for continuous k and g, the iteration (4.4) converges to the true solution provided $|\lambda|$ is *sufficiently small*: specifically for uniform convergence $|\lambda|(b - a)\max_{x,y}|k(x, y)| < 1$ (e.g. Ursell 1974). It is clear that when $|\lambda|$

Volterra equations have rather distinct properties from Fredholm equations in respect of smoothing, and instability of inversion, and there appears to be a general consensus that inversion of Volterra equations is less troublesome (e.g. Baker 1974). For the case of Volterra equations of the second kind this superior behaviour is reflected by the fact that the iterative procedure analogous to equation (4.4) always converges independently of the magnitude of λ (see Baker 1977). Equations of the first kind tend to be more troublesome but note that by differentiating the data function in equation (4.3) we obtain

$$k(x, x)f(x) + \int_a^x \frac{\partial k}{\partial x}(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y = g'(x) \tag{4.6}$$

so that *provided k(x, y) is non-singular*, a Volterra equation of the first kind is reduced to a comparatively well behaved equation of the second kind with appropriate redefinition of the data and kernel functions in equation (4.6). There appears considerable practical advantage in such a reduction despite the potential for noise amplification that arises through numerical differention of the data function (see §§4.4 and 5.3). The problems associated with *weakly singular* Volterra equations of the first kind are discussed in §4.4.

Volterra equations, on the other hand, give rise to discretised linear systems of lower triangular form and these, although not entirely trouble free, tend to be better conditioned numerically.

* UN SIMPLE CAMBIO DE VARIABLE PUEDE ILUSTRAR MUCHO LA NATURALEZA DEL PROBLEMA.

EJEMPLO: INVERSION DE LA LEY DE OSCURECIMIENTO CENTRO BORDE

CAMBIA LOS LIMITES DE Y

Y CAMBIA LA NATURALEZA DE LA FUNCION QUE QUEREMOS ENCONTRAR.

EN GENERAL

EL ESPACIO DONDE SE DESENVUE~~L~~VE y

Y

EL ESPACIO DONDE SE DESENVUELVE X

PUEDEN NO TENER NADA QUE VER

OJO.

9.- 2

TRANSFORMADAS INTEGRALES

EXISTENCIA- UNICIDAD

TRANSFORMADAS INTEGRALES

EXISTENCIA / UNICIDAD

The inversion problems discussed previously can be illuminated to some extent by invoking the analytic mathematical theory of integral equations. This is indeed the case. Without attempting an exhaustive mathematical treatment, the present chapter aims to outline those aspects of the mathematical theory of relevance to practical data inversion techniques

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$$ FREDHOLM

$$g(y) = \int_a^y K(x,y)\, f(x)\, dx$$ VOLTERRA

SON PUES ECUACIONES INTEGRALES DEL PRIMER TIPO

CORRESPONDEN AL CASO MÁS ELEMENTAL DE PROBLEMAS LINEALES

TANTO DIRECTOS COMO INVERSOS

The problem of uniqueness of solutions to equation (1) can be boiled down to the question: are there any nontrivial solutions f to the equations

$$\int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx = 0 \qquad \int_a^y K(x,y)\, f(x)\, dx = 0$$

If the answer is no, then f is unique.

If it is yes, then the class, ϕ, of all such solutions (so that $f \in \phi$ is called the annihilator of $K(x,y)$ Our knowledge of ϕ can tell us nothing whatsoever about those parts of f that belong to ϕ, and therefore these parts must be deduced from information other than that contained in g For the complex kernels K of physical processes it is relatively rare that uniqueness can be established,

NECESIDAD DEL CONOCIMIENTO FISICO DEL PROBLEMA

CUANDO SEA NECESARIO UN ESTUDIO PARTICULAR, UNA REGLA GENERAL ES COMPARAR EL PROBLEMA PARTICULAR

CON one of the well-studied integral transforms, for example:

Laplace: $G(x,y) = e^{-xy}$, $\quad 0 \leq x < \infty$,

Fourier: $G(x,y) = e^{2\pi i x y}$, $\quad -\infty < x < \infty$.

Hankel: $G(x,y) = J_\nu(xy)(xy)^{1/2}$, $\quad 0 \leq x < \infty$.

All of these have unique solutions for a sufficiently well-behaved class of model functions.

Es decir, si:

$$\varphi(y) = \int_1 K(x,y)\, f(x)\, dx$$

tiene una solución: $f_p(x)$

Puede tener INFINITAS SOLUCIONES

$f_p(x) + \varphi(x)$

Siempre y cuando $\varphi(x)$ sea una solución de la ecuación homogénea

$$\int_1 K(x,y)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

ES DECIR: si la ecuación homogénea tiene solución, la ecuación general o bien no tiene solución, o tiene varias diferentes

SE TRATA DE UN PROBLEMA MAL PLANTEADO

Furthermore, many Volterra equations [which contain the Heaviside function $H(x-y)$] can be shown to possess unique solutions, e.g. the Abel equation with

$$K(x, y) = H(y-x)(y-x)^{-\nu}, \qquad 0 < \nu < 1.$$

Suppose an annihilator exists for a particular $K(x, y)$; its presence will not necessarily be revealed by numerical solutions of (1) because the (necessarily finite-dimensional) representation of $K(x, y)$ may not be singular, even though the true kernel is.

$$H(y-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \\ 1 & \text{si } y > x \end{cases}$$

$$g(y) = \int_0^1 K(x, y)\, f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{H(y-x)}{(y-x)^{\nu}} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^y \frac{f(x)}{(y-x)^{\nu}}\, dx \qquad \text{ABEL}$$

DEBIDO A LA REPRESENTACIÓN NUMERICO-PRACTICO DE $K(x, y)$ PERO, SOBRE TODO, A LA DEPENDENCIA CON y DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN LA INVERSIÓN SUELE SER ÚNICA, AUN EN CASOS EXTREMOS. O PUEDE SER, EN LA PRACTICA, ÚNICA

EJEMPLO

$$\int_{-1}^{+1} (x-y)^2 f(x)\,dx = g(y)$$

DESARROLLANDO EL NUCLEO $(x-y)^2$ TENEMOS

$$y^2\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - 2y\int_{-1}^{+1} x f(x) + \int_{-1}^{+1} x^2 f(x)\,dx = g(y)$$

TENEMOS PUES COMO CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD:

EL CONJUNTO DE DATOS $g(y)$ TIENE QUE TENER UNA FORMA PARABÓLICA. EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA NO TIENE SOLUCIÓN.

¿POR QUÉ OCURRE ESTO?

PUES POR LAS RAZONES DE SIEMPRE:

EL CONJUNTO DE NUCLEOS: UNO PARA VALOR DE y_e SÓLO TIENE 3 ELEMENTOS INDEPENDIENTES:

$(x-y_i)^2 \quad (x-y_j)^2 \quad (x-y_k)^2$

CUALQUIER OTRO $(x-y_e)^2$

ES COMBINACIÓN LINEAL DE LOS ANTERIORES (DE OTROS TRES CUALQUIERA)

$$(x-x_e)^2 = a(x-x_i) + b(x-x_j)^2 + c(x-x_k)^2$$

$$a + b + c = 1$$

$$a y_i + b y_j + c y_k = y_e$$

$$a y_i^2 + b y_j^2 + c y_k^2 = y_e^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_i & y_j & y_k \\ y_i^2 & y_j^2 & y_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_e \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{y_j y_k - (y_j + y_k)\, y_e + y_e^2}{(y_i - y_j)\,(y_i - y_k)}$$

$$b = \frac{y_i y_k - (y_i + y_k)\, y_e + y_e^2}{(y_j - y_i)\,(y_j - y_k)}$$

$$c = \frac{y_i y_j - (y_i + y_j)\, y_e + y_e^2}{(y_k - y_i)\,(y_k - y_j)}$$

POR LO TANTO DE LAS INFINITAS ECUACIONES CONTENIDAS EN

$$\int_{-1}^{+1} (x-y)^2 f(x)\,dx = g(y)$$

(UNA PARA CADA y) SÓLO HABRÁ TRES LINEALMENTE INDEPENDIENTES. ES UN PROBLEMA CON INFINITAS SOLUCIONES. MUCHOS AUTOVALORES NULOS.

ADMITAMOS QUE $g(y)$ TIENE UNA FORMA PARABOLICA CONOCIDA:

$$g(y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2$$

g_0, g_1, g_2 CONSTANTES CONOCIDAS

ENTONCES **PARA QUE HAYA SOLUCIÓN** TENDRA QUE SER

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = g_0 \qquad \int_{-1}^{+1} x\, f(x)\,dx = g_1$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2 f(x)\,dx = g_2$$

TODAS LAS FUNCIONES $f(x)$ QUE CUMPLEN CON ESAS ECUACIONES: - LIGADURAS - SERÁN SOLUCIÓN DE LA ECUACION

$$\int_{-1}^{+1} (x-y)^2 f(x)\,dx = g(y)$$

CON $$g(y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2$$

EN PARTICULAR TODOS LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE DE GRADO 3 O SUPERIOR

LA SOLUCIÓN NO SERÁ ÚNICA NUNCA AUNQUE $g(y)$ SATISFAGA LA CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD

EN OTROS TERMINOS:

LA ECUACIÓN HOMOGENEA

$$\int_{-1}^{+1} (x-y)^2 f(x)\,dx = 0$$

TIENE SOLUCIÓN: INFINITAS SOLUCIONES

POR ESO, AUNQUE $g(y)$ CUMPLA CON LA CONDICIÓN DE SER PARABÓLICA (COMPATIBILIDAD) EL PROBLEMA TENDRA INFINITAS SOLUCIONES:

SE TRATA DE UN PROBLEMA MAL PLANTEADO (HADAMARD)

ESTO VA A OCURRIR CON TODAS LAS TRANSFORMADAS INTEGRALES DE FREDHOLM (AL MENOS EN LA PRACTICA NUMERICA)

EN TEORIA PURA SE PUDE DEMOSTRAR LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA MUCHOS CASOS.

UNA CUESTIÓN MUY IMPORTANTE ES EL ESTUDIO DE LA **COMPATIBILIDAD** EN LA <u>PRACTICA NUMÉRICA</u>.

SI, POR REFERIRNOS AL EJEMPLO ANTERIOR, TENEMOS EL DATO $g(y)$ EN UNOS PUNTOS DADOS y_k, EN FORMA DE UNA "TABLA"

$$y_k \to g(y_k)$$

¿COMO SABEMOS SI ES, O NO UNA PARÁBOLA?

ES DECIR SI SON, O NO, DATOS **COMPATIBLES** CON NUESTRO PROBLEMA

SI, DENTRO DE UN ESQUEMA DE TRATADO ANALITICO, AJUSTAMOS LA CURVA $g(y)$ MEDIANTE UN POLINOMIO DE ORDEN IGUAL O MENOR (MINIMOS CUADRADOS), AL NUMERO DE PUNTOS MEDIDOS QUE TENEMOS

Y SI EL POLINOMIO ES DE ORDEN SUPERIOR A LA PARÁBOLA

NO ENCONTRAREMOS SOLUCIÓN

ES DECIR, LOS DATOS
EXPERIMENTALES-OBSERVACIONALES
DEBEN SER INTRODUCIDOS EN EL
ALGORITMO TEORICO/NUMERICO
DE INVERSION, DE ACUERDO CON
UNA FORMA MATEMÁTICA
COMPATIBLE CON LA ECUACIÓN
INTEGRAL

EN CASO CONTRARIO,
SOMOS NOSOTROS LOS QUE
ANULAMOS LA POSIBILIDAD
DE TENER UNA SOLUCIÓN.

PERO EN EL EJEMPLO ANTERIOR
ES FACIL DE SABER CUAL ES LA
FORMA MATEMATICA COMPATIBLE
CON LA ECUACIÓN INTEGRAL, A LA
QUE DEBEMOS AJUSTAR LOS DATOS:

UNA PARÁBOLA

PERO EN OTROS CASOS VA A SER
MUY DIFICIL SABERLO

ENTONCES, SI AJUSTAMOS LOS DATOS A CUALQUIER FORMA, MATEMATICAMENTE TÍPICA, LO MAS PROBABLE ES QUE AL RESOLVER NUMERICAMENTE EL PROBLEMA NO ENCONTREMOS SOLUCIÓN, O BIEN, COMO EL ORDENADOR DEBE ESCUPIR SIEMPRE ALGO, NOS ESCUPA ALGO CATASTRÓFICO

Y NO HAY QUE OLVIDAR QUE, AUNQUE EMPLEEMOS UN MÉTODO NUMÉRICO QUE NO IMPLIQUE UN "AJUSTE" DIRECTO DE LOS DATOS CUALQUIER REPRESENTACIÓN NUMÉRICA QUE EMPLEEMOS PARA EL OPERADOR

$$\int_a^b K(x,y) \ldots\ldots dx$$

(VEREMOS, LUEGO, VARIAS), IMPLICA, EN CIERTO MODO, UNA "FORMA MATEMÁTICA" DE ORGANIZAR LOS DATOS.

ES DECIR, LA ESTRUCTURA NUMERICA DEL OPERADOR — O DE LA ORGANIZACION DE LOS DATOS — TIENE QUE REPRESENTAR FIELMENTE LA ESTRUCTURA MATEMATICA DEL PROBLEMA.

EN CIERTO MODO, LA "FORMA MATEMATICA" DE PRESENTAR LOS DATOS

Y CUANDO ESOS DATOS SON EXPERIMENTALES / OBSERVACIONALES SOMOS NOSOTROS LOS QUE TENEMOS QUE PRESENTARLOS CON "ESA FORMA MATEMÁTICA"

VIENE INDICADA POR LAS

FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR.

SON LAS QUE DESCRIBEN SU COMPORTAMIENTO

PERO, LA POSIBILIDAD DE ENCONTRAR LAS **FUNCIONES PROPIAS** $\phi(x)$, (ESTRICTAMENTE PROPIAS):

$$\int_a^b K(x, y)\, \phi(x)\, dx = \lambda\, \phi(y)$$

ES, PRACTICAMENTE NULA (EN LINEAS GENERALES)

SI TUVIERAMOS UN CONJUNTO LO SUFICIENTEMENTE COMPLETO DE **FUNCIONES PROPIAS** $\{\phi_j(x)\}$

SERÍA, EN LA PRÁCTICA

$$K(x, y) \simeq \sum_j \alpha_j \, \phi_j(x) \, \phi_j(y)$$

Y LOS DATOS SE TENDRÍAN QUE "PRESENTAR" EN LA FORMA

$$g(y) \simeq \sum_j \gamma_j \, \phi_j(y)$$

ES DECIR COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LAS FUNCIONES PROPIAS

PERO, PARA UN OPERADOR GENERAL, DADO, SERÁ PRACTICAMENTE ENCONTRAR ESTAS FUNCIONES **ESTRICTAMENTE PROPIAS**

EN REALIDAD, COMO VEREMOS DESPUES, NO TIENEN QUE SER **ESTRICTAMENTE PROPIAS**

PUEDEN SERLO EN EL SENTIDO DE LANCZOS.

PERO, EN CUALQUIER CASO, CUALQUIER AYUDA SOBRE EL COMPORTAMIENTO CON y DEL OPERADOR INTEGRAL, DEBE SER TENIDA EN CUENTA A LA HORA DE "REPRESENTAR LOS DATOS"

OTRA POSIBILIDAD PARA TENER EN CUENTA CORRECTAMENTE LA CONDICIÓN DE **COMPATIBILIDAD**

O, MEJOR DICHO, PARA NO INTRODUCIR ARTIFICIALMENTE LA **INCOMPATIBILIDAD**

CONSISTE EN PROPONER UN **MODELO MATEMÁTICO** LO SUFICIENTEMENTE GENERAL (CON MUCHOS PARAMETROS LIBRES) PARA $f(x)$

CON ESA $f(x)$ GENERAL (SUFICIENTEMENTE BIEN PARAMETRIZADA)

SE CALCULA $g(y)$ EN LA ECUACIÒN INTEGRAL: PROBLEMA DIRECTO, GUARDANDO LOS PARAMETROS LIBRES COMO TALES

COMPARANDO ESA $g(y)$ - QUE DEPENDE DE LOS PARAMETROS LIBRES - CON LOS DATOS OBSERVACIONALES / EXPERIMENTALES, SE DETERMINARÁ EL VALOR DE LOS PARÁMETROS.

DE ESTA MANERA DESCRIBIMOS LAS OBSERVACIONES $g(y)$ CON UNA "FORMA MATEMÁTICA" QUE RESULTA DE LA PROPIA ECUACIÓN INTEGRAL

PERO HAY QUE ELEGIR ESE MODELO DE $f(x)$ — LO SUFICIENTEMENTE BIEN PARAMETRIZADO —.

DEBEMOS DE CONOCER EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE $f(x)$ CUANDO $x \to \pm\infty$ (QUE, PARA $g(y)$ SUELE ESTAR FUERA DE LA REGIÓN DE MEDIDA)

NO ES UNA TAREA DIFÍCIL, PERO SUPONE UN CIERTO CUIDADO.

SON DOS FORMAS COMODAS PARA TENER EN CUENTA LA CONDICIÓN DE **COMPATIBILIDAD** EN EL MOMENTO DE INTRODUCIR LOS DATOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA

ES. EN ESTE PUNTO DONDE EXISTE UNA DE LAS MAYORES DIFICULTADES.

CONCLUSIONES

EN LOS PROBLEMAS INVERSOS, FORMULADOS COMO TRANSFORMADAS INTEGRALES LINEALES ENCONTRAMOS LOS MISMOS PROBLEMAS QUE EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES ALGEBRAICAS.

PUEDE EXISTIR INCOMPATIBILIDAD ENTRE LOS DATOS Y EL SISTEMA DE ECUACIONES, ES DECIR ENTRE LOS DATOS Y LA FORMA DEL NUCLEO: LOS DATOS $g(y)$ SE ENCUENTRAN FUERA DEL ESPACIO DONDE PROYECTAN TODAS LAS POSIBLES FUNCIONES OBJETO $f(x)$.

ENTONCES, EVIDENTEMENTE NO SE PUEDEN INVERTIR

EN EL CASO EN EL QUE SE PUEDE INVERTIR, ES DECIR, EN EL CASO EN EL QUE EXISTE UNA SOLUCIÓN, PUEDEN EXISTIR INFINITAS.

HAY QUE ESTUDIAR EL PROBLEMA HOMOGENEO: SÍ NO TIENE SOLUCIONES, ES DECIR SI EL OPERADOR NO TIENE NINGÚN AUTOVALOR NULO,

ESA SOLUCIÓN (QUE EXISTE) SERÁ ÚNICA.

PERO SI EL SISTEMA HOMOGENEO TIENE SOLUCIONES: AL MENOS ALGUNO DE SUS AUTOVALORES ES NULO

EL PROBLEMA PROPUESTO TENDRA INFINITAS SOLUCIONES:

SERA UN PROBLEMA MAL PLANTEADO.

VEREMOS A CONTINUACIÓN QUE, EN LA PRACTICA, EL PROBLEMA HOMOGENEO TENDRA SOLUCIÓN SIEMPRE O CASI SIEMPRE.

SALVEDAD IMPORTANTE

NOS ESTAMOS OCUPANDO DE PROBLEMAS INVERSOS TIPO GEOMETRÍA INTEGRAL (GEL'FAND) QUE PROVIENEN DEL CAMPO DE LA FÍSICA EXPERIMENTAL / OBSERVACIONAL

EN ESTAS CONDICIONES EL TÉRMINO ECUACIONES INTEGRALES SE APLICA GENERAL-MENTE A ECUACIONES CON NUCLEO DEFINIDO POSITIVO QUE, COMO VEREMOS, PRESENTA SIEMPRE UN FENÓMENO DE FILTRADO Y ALISAMIENTO DE LA FUNCIÓN SOBRE LA QUE ACTUA.

9-3

TRANSFORMADAS INTEGRALES

PROPAGACIÓN DE DETALLES ESPECÍFICOS

FREDHOLM

CONVOLUCIÓN

POR COMODIDAD

UN **NUCLEO** RECTANGULAR TIPO PIXEL

$$k(x,y) = u(y-\Delta \le x \le y+\Delta)$$

ANCHURA 2Δ

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\, f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(y-\Delta \le x \le y+\Delta)\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} f(x)\, dx$$

PARA UN ESTUDIO SIMPLE

$$\underline{f(x)} = f_0 + \Delta f(x)$$

$$\underline{= f_0 + \Delta f \cos \omega x}$$

$f(x)$ UNA COMPONENTE f_0 cte

UNA COMPONENTE OSCILANTE: IRREGULARIDADES, CON VALOR MEDIO NULO, AMPLITUD Δf Y FRECUENCIA ω

QUEREMOS ESTUDIAR COMO SE PROPAGA LA "AMPLITUD RELATIVA" DE LAS IRREGULARIDADES QUE SE PUEDEN PRESENTAR EN LA FUNCIÓN OBJETO $f(x)$

$$\frac{\Delta f}{f_0} \rightarrow \frac{\Delta g(y)}{g_0(y)}$$

$$g(y) = \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} \left(f_0 + \Delta f \cos \omega x \right) dx = g_0(y) + \Delta g(y)$$

$$g_0(y) = \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} f_0 \, dx = 2\Delta f_0$$

$$\Delta g(y) = \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} \Delta f \cos \omega x \, dx = -\frac{2\Delta}{\omega\Delta} \Delta f \operatorname{sen} \omega\Delta \cos \omega y$$

EL VALOR MÁXIMO (MODULO) DE LAS "IRREGULARIDADES" OBSERVADAS

$$\Delta g_0(y) = 2\Delta \frac{\Delta f}{\omega\Delta}$$

LUEGO

$$\frac{\Delta g_0(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f}{f_0} \frac{1}{\omega\Delta}$$

CUANTO MAS GRANDE SEA LA FRECUENCIA DE LAS IRREGULARIDADES EN LA FUNCIÓN OBJETO $f(x)$ MENOS APARECERÁ EN LA IMAGEN $g(y)$

MAYOR DIFICULTAD DE RECUPERARLAS EN LA INVERSIÓN

CUANTO MAYOR SEA LA ANCHURA DEL NÚCLEO Δ, MENOR SERÁ LA INFLUENCIA RELATIVA SOBRE LA FUNCIÓN IMAGEN $g(y)$ DE LAS IRREGULARIDADES EN LA FUNCIÓN OBJETO $f(x)$

MAYOR DIFICULTAD DE RECUPERARLAS EN LA INVERSIÓN

SI $\Delta g / g$ ES LA AMPLITUD RELATIVA DE IMPRECISIONES EN LOS DATOS

LA CORRESPONDIENTE AMPLITUD RELATIVA EN EL RESULTADO DEL P.I. SERÁ

$$w\Delta$$

Δ: ANCHURA DEL NÚCLEO

VECES MAYOR

FREDHOLM

CONVOLUCIÓN GAUSSIANA

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{-\left(\frac{y-x}{\Delta}\right)^2} dx$$

Δ : ANCHURA DEL NUCLEO

CONSIDERAREMOS (POR COMODIDAD) UNA "IMPRECISIÓN", "ERROR" "IRREGULARIDAD", TAMBIÉN GAUSSIANO, DE AMPLITUD Δf, DE ANCHURA L, SITUADA EN EL PUNTO x_0

$$f(x) = f_0 + \Delta f(x)$$

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta f}{\sqrt{\pi}\, L} e^{-\left(\frac{x-x_0}{L}\right)^2}$$

SERÁ

$$g(y) \equiv g_0 + \Delta g(y)$$

$$g_0 =$$

$$\Delta g(y) = \frac{\Delta f}{\sqrt{\pi}\sqrt{\Delta^2 + L^2}} e^{-\left(\frac{y-x_0}{\sqrt{\Delta^2+L^2}}\right)^2}$$

SOBRE $g(y)$ LA "IREGULARIDAD" APARECE EN EL MISMO SITIO: $y = x_0$

CON UNA "ANCHURA" $\sqrt{\Delta^2 + L^2}$ MAYOR

Y CON UNA AMPLITUD $1/\sqrt{\Delta^2 + L^2}$ MENOR

$$\frac{\Delta g(y)_{max}}{g_0} = \frac{\Delta f(x)_{max}}{f_0} \frac{L}{\sqrt{\Delta^2 + L^2}}$$

EN UNA CONVOLUCIÓN LAS IRREGULARIDADES SE HACEN MAS PEQUEÑAS: SE ALISAN

TANTO MAS CUANTO MAS GRANDE SEA LA ANCHURA Δ DEL NUCLEO

SÍ APARECEN ERRORES (DE ANCHURA CARACTERÍSTICA L) EN LAS MEDIDAS $g(y)$

EN LA INVERSIÓN

LOS CORRESPONDIENTES ERRORES SOBRE $f(x)$ SON LOS ANTERIORES AMPLIFICADOS POR UN FACTOR

$$\frac{\sqrt{\Delta^2 + L^2}}{L}$$

RIESGOS

LAPLACE

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-xy}\, dx$$

PARA TODOS LOS VALORES DE y,
EL NUCLEO CORRESPONDIENTE e^{-xy}
TIENE SU VALOR MAXIMO EN EL
MISMO PUNTO $x = 0$.

LA ANCHURA CARACTERISTICA DE
CADA NUCLEO e^{-xy}

PUEDE CONSIDERARSE $\Delta \sim 1/y$

PARA VALORES DE y GRANDES

NUCLEOS MUY ESTRECHOS

TRANSMITEN BIEN LA INFORMACIÓN

BUENAS POSIBILIDADES DE INVERSIÓN

PARA VALORES DE y PEQUEÑOS

NUCLEOS MUY ANCHOS

TRANSMITEN MAL LA INFORMACIÓN

MALAS CONDICIONES DE INVERSIÓN

FREDHOLM

LAPLACE

PROPAGACIÓN DE UNA IRREGULARIDAD AISLADA:

$$f(x) = f_0 + \Delta f \; u\,(x_0 \leq x \leq x+L)$$

LA AMPLITUD DE LA IRREGULARIDAD Δf SU ANCHURA L, Y SITUADA A PARTIR DEL PUNTO $x = x_0$

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-xy}\, dx \quad \text{LAPLACE}$$

EN ESTE CASO

$$g(y) = \frac{f_0}{y} + \frac{\Delta f}{y}\left[e^{-x_0 y} - e^{-(x_0+L)y}\right]$$

$$= \frac{f_0}{y} + \frac{\Delta f}{y}\, e^{-x_0 y}\left[1 - e^{-Ly}\right]$$

IDENTIFICAMOS $g(y) = g_0(y) + \Delta g(y)$

$$g_0(y) = \frac{f_0}{y}$$

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f}{f_0}\, e^{-x_0 y}\left[1 - e^{-Ly}\right]$$

LA PERTURBACIÓN QUE SOLO EXISTE PARA VALORES DE X TALES QUE $X_0 < X < X_0+L$

MODIFICA LOS VALORES DE $g(y)$ PARA TODO y

ERA $\Delta \sim 1/y$ ANCHURA DE CADA NUCLEO (PARA CADA VALOR DE y)

Si $Ly = \frac{L}{\Delta} \gg 1$

ANCHURA DE LA PERTURBACIÓN MAYOR QUE LA ANCHURA DEL NUCLEO

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f}{f_0} e^{-X_0 y}$$

RELATIVAMENTE BUENA PROPAGACIÓN.
ALGUNA POSIBILIDAD DE INVERSIÓN

Si $Ly = \frac{L}{\Delta} \ll 1$

ANCHURA DE LA PERTURBACIÓN MENOR QUE LA ANCHURA DEL NUCLEO

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f}{f_0} e^{-X_0 y} Ly$$

MUY MALA PERTURBACIÓN
POCAS POSIBILIDADES DE INVERSIÓN.

FREDHOLM **LAPLACE**

$$g(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx$$

PROPAGACIÓN DE UNA IRREGULARIDAD REPARTIDA:

$$f(x) = f_0 + \Delta f(x) = f_0 + \Delta f \cos \omega x$$

SERÁ

$$g(y) = g_0(y) + \Delta g(y)$$

$$g_0(y) = \frac{f_0}{y}$$

$$\Delta g(y) = \Delta f \frac{y}{y^2+\omega^2}$$

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f(x)}{f_0} \frac{y^2}{y^2+\omega^2} = \frac{\Delta f(x)}{f_0} \frac{1}{1+\omega^2\Delta^2}$$

Δ ANCHURA DE CADA NÚCLEO (UNO PARA CADA VALOR DE y) $\Delta \doteq 1/y$

DÉBIL PROPAGACIÓN DE UNA IRREGULARIDAD DE FRECUENCIA ω GRANDE

POCA PROBABILIDAD DE RECUPERAR LA PERTURBACIÓN EN LA INVERSIÓN.

SI LA FRECUENCIA ω ES PEQUEÑA

HABRA BUENA PROPAGACIÓN DE LA PERTURBACION SOBRE TODO SI LA ANCHURA DEL NUCLEO Δ ES TAMBIÉN PEQUEÑA ; $\omega^2 \Delta^2 \ll 1$

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} \simeq \frac{\Delta f}{f_0}$$

COMO CONSECUENCIA HABRÁ BUENA PROBABILIDAD DE ENCONTRAR LA SEÑAL $\Delta f(x)$ EN LA INVERSIÓN

LA FASE DE LA PERTURBACIÓN INFLUYE LIGERAMENTE, PERO NO ALTERA LA CONCLUSIÓN ANTERIOR

EN LINEAS MUY GENERALES PUEDE APLICARSE EL LEMA DE RIEMAN-LEBESGUE. PERO LA SITUACIÓN ES PEOR QUE EN UNA CONVOLUCIÓN, YA QUE EL NUCLEO e^{-xy} TIENE SIEMPRE SU MAXIMO EN $x=0$ PARA CUALQUIER VALOR DE y.

CONCLUSIONES GENERALES

TRANSFORMADAS DE FREDHOLM

EN CIERTO MODO; CON MAYOR O MENOR PRECISIÓN, SIEMPRE SE PODRÁ DEFINIR UNA ANCHURA Δ CARACTERÍSTICA DE LOS NÚCLEOS

$$\Delta = \Delta(y)$$

SI L ES LA ESCALA CARACTERÍSTICA DE UN DETALLE EN $f(x)$

$$\omega \sim 1/L$$

HABRÁ BUENA TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN, Y, POR LO TANTO BUENAS POSIBILIDADES DE INVERSIÓN

SI $\quad \dfrac{\Delta}{L} = \Delta\omega \ll 1$

ENCONTRAREMOS FÁCILMENTE LOS DETALLES EN $g(y)$ NÚCLEOS ESTRECHOS

SI $\quad \dfrac{\Delta}{L} = \Delta\omega > 1$

MALA TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

DESAPARECEN DETALLES:

NÚCLEOS ANCHOS

MALAS POSIBILIDADES DE INVERSIÓN.

VOLTERRA

$$g(y) = \int_y^{\infty} f(x)\, e^{-xy}\, dx$$

ESTUDIAREMOS SOBRE LA MISMA TRANFSFORMADA INTEGRAL ANTERIOR LA PROPAGACIÓN DE UN DETALLE AISLADO :

$$f(x) = f_0 + \Delta f \quad u[x_0 \leq x \leq x_0 + L]$$

PIXEL DE AMPLITUD Δf DE ANCHURA L, ENTRE $\cancel{x_0}$ x_0 y $x_0 + L$

$$g(y) = g_0(y) + \Delta g(y)$$

$$g_0(y) = f_0 \int_y^{\infty} e^{-xy}\, dx = f_0 \frac{e^{-y^2}}{y}$$

SI $y \geq x_0 + L$ LA PERTURBACIÓN NO APARECE EN $g(y)$

SI $x_0 \leq y \leq x_0 + L$

$$\Delta g(y) = \int_y^{x_0+L} \Delta f\, e^{-xy}\, dx = \Delta f \frac{e^{-y^2} - e^{-y[x_0+L]}}{y}$$

VOLTERRA

$$g(y) = \int_y^{\infty} f(x)\, e^{-xy}\, dx$$

ESTUDIAMOS UN $f(x)$ DE LA FORMA

$$f(x) = f_0 + \Delta f(x) \equiv f_0 + \Delta f \cos \omega x$$

MODULACIÓN

SERÁ

$$g(y) = g_0(y) + \Delta g(y)$$

$$g_0(y) = f_0 \int_y^{\infty} e^{-xy}\, dx = f_0 \frac{e^{-y^2}}{y}$$

$$\Delta g(y) = \Delta f \int_y^{\infty} e^{-xy} \cos \omega x\, dx$$

$$\Delta f\, e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{y^2+\omega^2}} \cos(\omega y + \theta)$$

$$\theta = \arccos \frac{y}{\omega}$$

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \frac{y}{\sqrt{y^2+\omega^2}} \cos(\omega y + \theta)$$ → OSCILA ENTRE +1, -1

PARA GRANDES, SE ATENUA POCO

PARA PEQUEÑOS, SE ATENUA BASTANTE.

LA INFLUENCIA DE LA POSICIÓN DE LA PERTURBACION PERIODICA (MODULACIÓN) CON RESPECTO AL LIMITE DE LA INTEGRAL (FASE), APARECE EN EL TÉRMINO

$$\cos(\omega y + \theta)$$

LA ANCHURA DEL NUCLEO (PARA CADA y) ;

$$\Delta = 1/y$$

LA CAPACIDAD DE TRANSMISIÓN DE ESA MODULACIÓN AL ESPACIO DE LAS VARIABLES OBSERVADAS DE ACUERDO CON LA FRECUENCIA ω APARECE EN EL TÉRMINO :

$$\frac{y}{\sqrt{y^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\Delta)^2}}$$

ENCONTRAMOS EL MISMO CRITERIO DE SIEMPRE, PERO AHORA DENTRO DE UNA RAIZ CUADRADA. ESTO MITIGA ALGO LAS DIFICULTADES DE LA INVERSIÓN.

$$\frac{\Delta g(y)}{g_0(y)} = \frac{\Delta f}{f_0}\left[1 - e^{-[x_0+L-y]}\right]$$

Si $y \leq x_0$

$$\Delta g(y) = \int_{x_0}^{x_0+L} \Delta f \, e^{-xy} \, dx$$

$$= \Delta f \, \frac{e^{-x_0 y} - e^{-(x_0+L)y}}{y}$$

$$= \Delta f \, \frac{e^{-x_0 y}}{y}\left[1 - e^{-Ly}\right]$$

$$\frac{\Delta g(y)}{g(y)} = \frac{\Delta f}{f_0} e^{-x_0 y}\left[1 - e^{-Ly}\right]$$

ESTAMOS EN EL MISMO CASO QUE PARA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

NO HAY NADA NUEVO QUE AÑADIR.

COMO SI EL LIMITE ANTERIOR FUERA 0.

AHORA, A PARTIR DE UN LIMITE INFERIOR $y = x_0$, $g(y)$ DEBE "SENTIR" LA PERTURBACIÓN SOBRE $f(x)$.

ES DECIR CUANDO EL LIMITE INFERIOR PERMITE QUE LA PERTURBACIÓN INTERVENGA EN LA INTEGRAL.

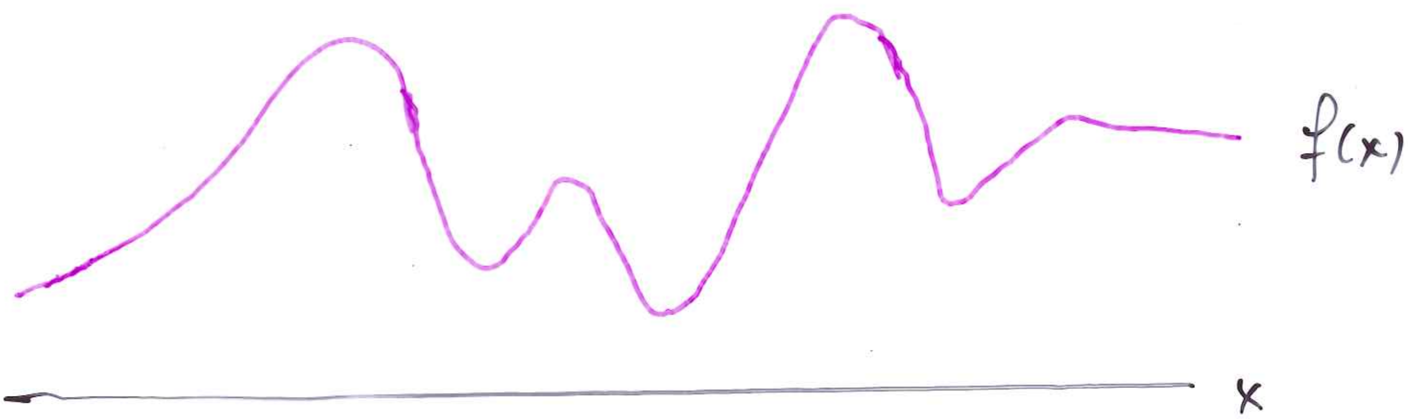
ESTA CIRCUNSTANCIA DEBE FAVORECER LA INVERSIÓN CON RESPECTO A LA SITUACIÓN QUE TENÍAMOS EN LAS TRANSFORMADAS DE FREDHOLM.

9-4

TRANSFORMADAS
INTEGRALES

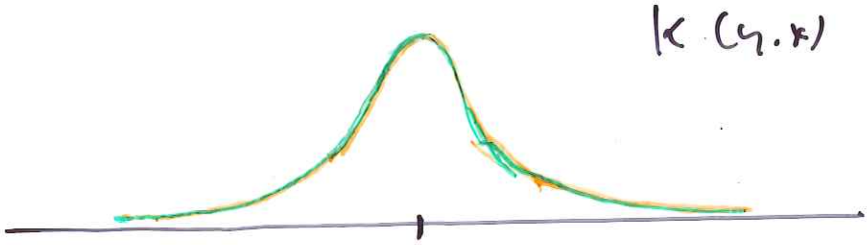
PROPAGACIÓN DE
COMPORTAMIENTOS FUNCIONALES

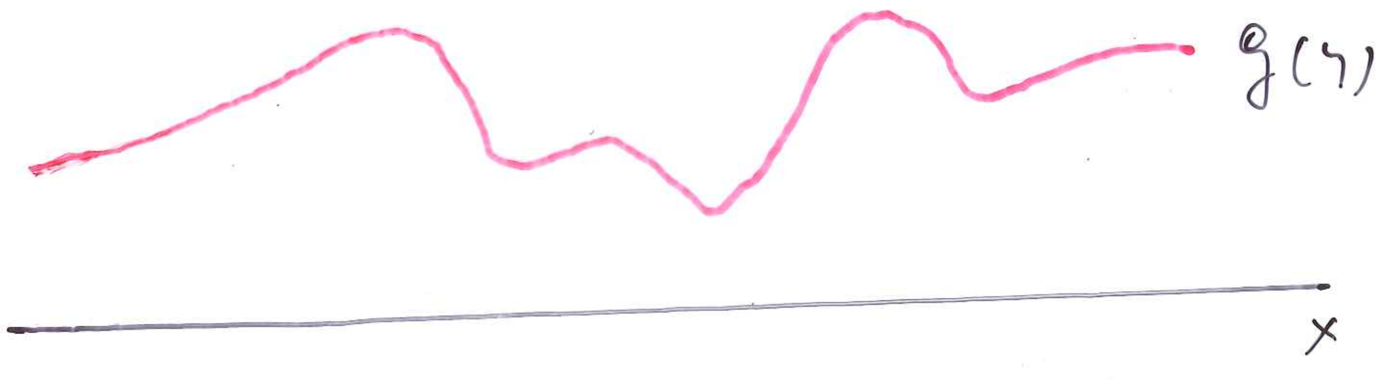
$$g(y) = \int K(y,x)\, f(x)\, dx$$



NUCLEO DE CONVOLUCIÓN

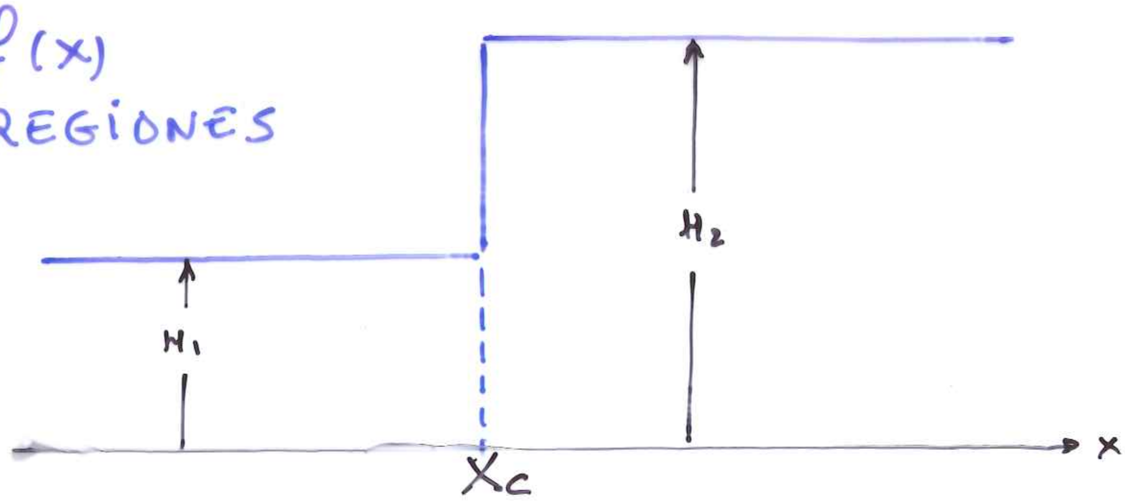
$K(y.x)$





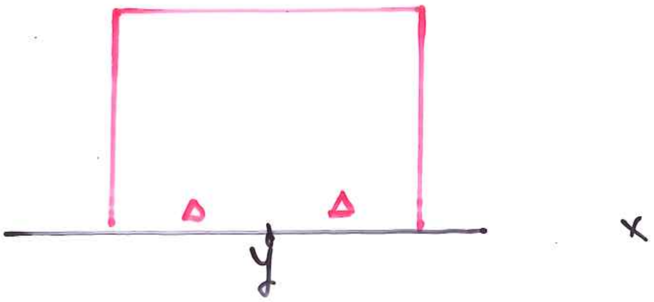
$f(x)$

DOS REGIONES



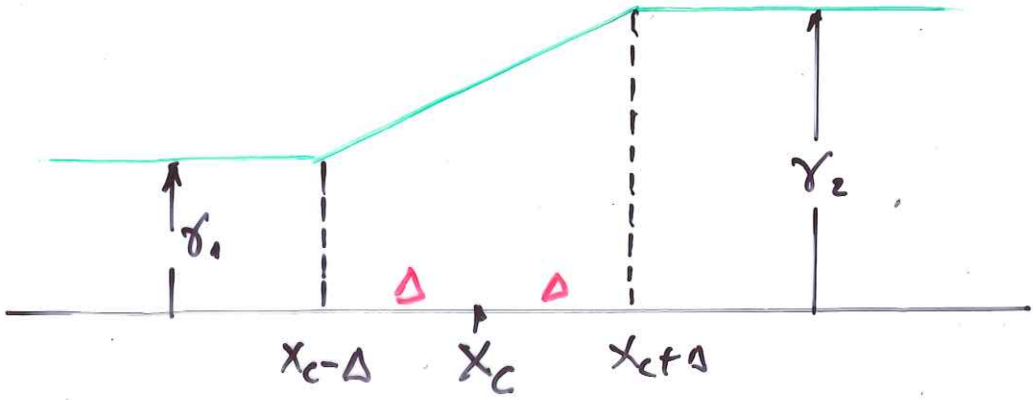
$$f(x) = \begin{cases} H_1 & \text{si } x < x_c \\ H_2 & \text{si } x > x_c \end{cases}$$

NUCLEO



$$K(y,x) = U(|x-y| < \Delta) \equiv U(y-\Delta < x < y+\Delta)$$

Altura 1, por comodidad.



$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y, x)\, f(x)\, dx = \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} f(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dy} g(y) = f(y+\Delta) - f(y-\Delta)$$

- Si $y < x_c - \Delta$

$$g(y) = H_1 \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} dx = 2\Delta H_1 \equiv \gamma_1$$

- Si $y > x_c + \Delta$

$$g(y) = H_2 \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} dx = 2\Delta H_2 \equiv \gamma_2$$

- Si $x_c - \Delta < y < x_c + \Delta$

$$g(y) = H_1 \int_{y-\Delta}^{x_c} dx + H_2 \int_{x_c}^{y+\Delta} dx =$$

$$= H_1 [x_c - y + \Delta] + H_2 [y + \Delta - x_c]$$

$$= [H_1 (\Delta + x_c) + H_2 (\Delta - x_c)] + (H_2 - H_1)\, y$$

RECONSTRUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Si $g(y)$ se observa con gran precisión se puede encontrar $f(x)$

SE OBSERVA

$g(y) = \gamma_1$ cte   Si $y \leq x_c - \Delta$

$g(y) = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} y$ $x_c - \Delta \leq y \leq x_c + \Delta$

$g(y) = \gamma_2$ cte $y \geq x_c + \Delta$

- PARA $y \leq x_c - \Delta$

$g'(y) = 0 = f(y+\Delta) - f(y-\Delta) \quad \forall\, y < x_c - \Delta$

$\Rightarrow \quad f(y+\Delta) = f(y-\Delta) \quad \forall\, y < x_c - \Delta$

$\Rightarrow \quad f(y) = \text{cte} = H_1 = \gamma_1/2\Delta$

Si $y < x_c$

- PARA $y \geq x_c + \Delta$ (lo mismo)

$f(y) = \text{cte} = H_2 = \gamma_2/2\Delta$ si $y > x_c$

ESTA RECONSTRUCCIÓN SUPONE UNA BUENA OBSERVACIÓN DE $g(y)$

EN PARTICULAR DETECTAR LOS PUNTOS $y = x_c - \Delta$ $y = x_c + \Delta$ DONDE EL COMPORTAMIENTO DE $g(y)$ CAMBIA

ESTO PUEDE SER MÁS COMPLICADO CUANTO MENOR SEA LA PENDIENTE DE $g(y)$ EN LA REGIÓN INTERMEDIA

$$x_c - \Delta < y < x_c + \Delta$$

ES DECIR CUANTO MAYOR SEA Δ: LA ANCHURA DEL NUCLEO

ADEMAS HAY QUE TENER EN CUENTA LOS ERRORES EXPERIMENTALES

· ESTE EJEMPLO PRESENTA CIERTAS VENTAJAS PEDAGOJICAS:

AUNQUE $f(x)$ SEA DISCONTINUA $g(y)$ SERÁ SIEMPRE CONTÍNUA (fundamental pérdida de información)

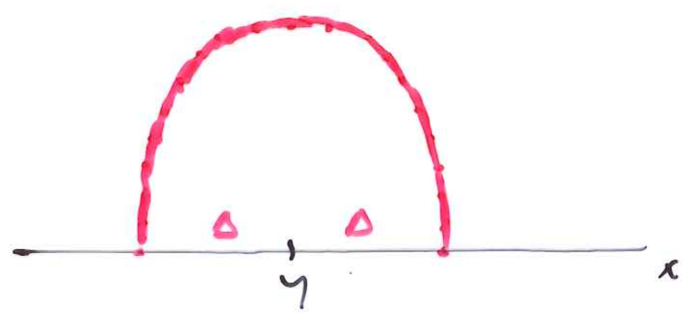
PERO AQUÍ, DEBIDO A LA FORMA DEL NUCLEO (pendientes infinitas(*) para $x = y - \Delta$, $x = y + \Delta$) $g(y)$ PRESENTA UNA DERIVADA DISCONTINUA EN ESOS PUNTOS.

ESTO PUEDE FACILITAR LA "DETECCIÓN" DE ESTOS PUNTOS Y CON ELLO LA RECONSTRUCCIÓN DE $f(x)$.

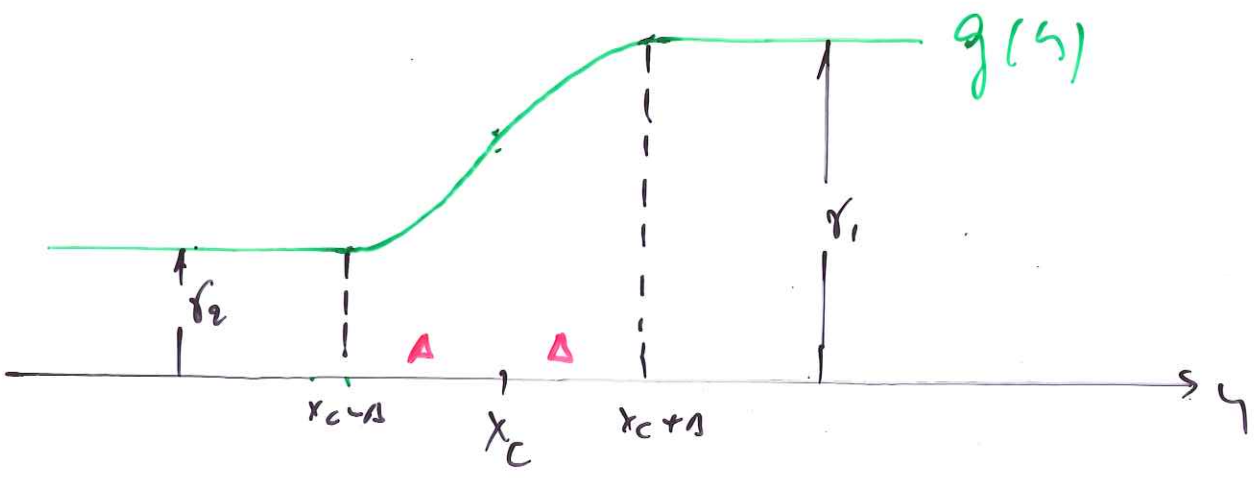
(*) VOLTERRA

SITUACIÓN NO TAN ÓPTIMA (VOLTERRA)

$$K(y,x) = \left(1 - \frac{(y-x)^2}{\Delta^2}\right) \quad u\,(y-\Delta < x < y+\Delta)$$



Ahora $g(y)$ será del tipo



- $y < x_c - \Delta$

$$g(y) = H_1 \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} \left[1 - \frac{(x-y)^2}{\Delta^2}\right) dx = \frac{4}{3}\Delta H_1 \qquad g'(y) = 0$$

- $y > x_c + \Delta$

$$g(y) = \frac{4}{3}\Delta H_2 \qquad g'(y) = 0$$

- $x_c - \Delta \leq y \leq x_c + \Delta$

$$g(y) = H_1 \int_{y-\Delta}^{x_c} \left[1 - \frac{(x-y)^2}{\Delta^2}\right] dx + H_2 \int_{x_c}^{y+\Delta} \left[1 - \frac{(x-y)^2}{\Delta^2}\right) dx$$

$$= H_1 \left[x_c - y + \Delta - \frac{1}{3}\frac{(x_c-y)^3 + \Delta^3}{\Delta^2}\right] +$$

$$+ H_2 \left[y - x_c + \Delta - \frac{1}{3}\frac{\Delta^3 - (x_c-y)^3}{\Delta^2}\right)$$

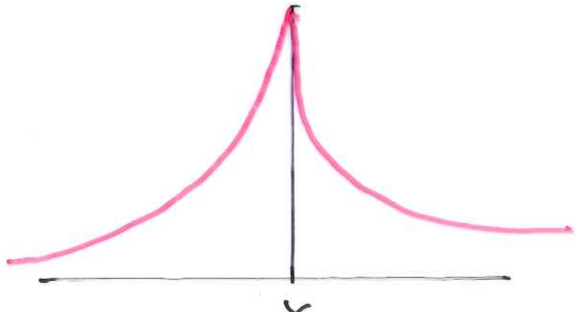
$$g'(y) = H_1 \left[-1 + \frac{(x_c-y)^2}{\Delta^2}\right] + H_2 \left[1 - \frac{(x_c-y)^2}{\Delta^2}\right]$$

Hay continuidad de la función y de la derivada en los puntos $y = x_c - \Delta$, $y = x_c + \Delta$

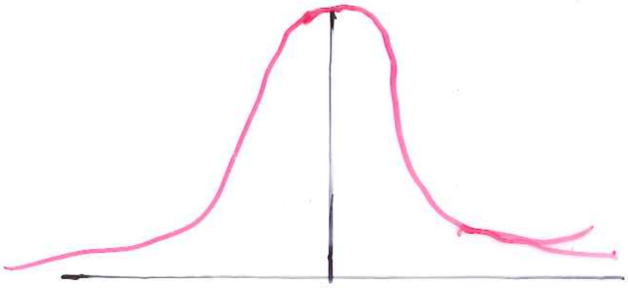
EL "DETECTAR", EN ESTE CASO, LOS PUNTOS DONDE $g(y)$ DEJA DE SER CONSTANTE, SERÁ MAS COMPLICADO QUE EN EL PRIMER CASO

PERO AUN ASÍ SABEMOS, -Y YA ES ALGO- QUE LA REGIÓN EN LA CUAL $g(y)$ VARIA, ESTÁ LIMITADA A UN INTERVALO DE ANCHURA 2Δ (esto nos puede ayudar a localizar los puntos $x_c - \Delta$, $x_c + \Delta$)

$$K(y,x) = e^{-|x-y|}$$



$$K(y,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}$$



SITUACIONES MÁS COMPLICADAS

$y \ll x_c$

$$\int_{-\infty}^{x_c} K(y,x)\,dx \simeq 1 \qquad \int_{x_c}^{\infty} K(y,x)\,dx \simeq 0$$

$y \gg x_c$

$$\int_{-\infty}^{x_c} K(y,x)\,dx \simeq 0 \qquad \int_{x_c}^{\infty} K(y,x)\,dx \simeq 1$$

el mismo comportamiento. .

Pero entre estas dos situaciones extremas !!!

CONCLUSIÓN

APARECEN CLARAMENTE DOS CARACTERÍSTICAS DE LOS NUCLEOS, QUE VAN A CONDICIONAR EXTRAORDINARIAMENTE LA "CALIDAD" DEL PROCESO INVERSO:

- SU ANCHURA: DE LA QUE DEPENDE EL MAYOR O MENOR GRADO DE ALISAMIENTO DE LAS CARACTERISTICAS DE $f(x)$

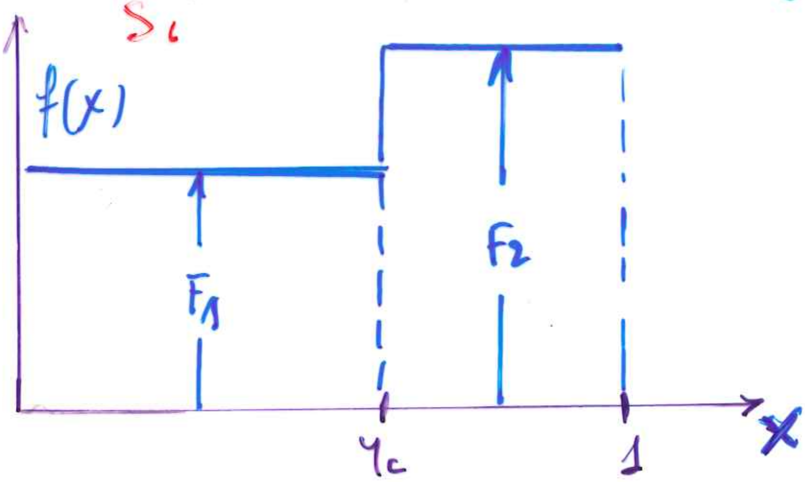
  ciertos detalles que se conserven en $f(x)$ pueden confundirse con los errores.

- SU FORMA FUNCIONAL: DE LA QUE VA A DEPENDER LA FORMA FUNCIONAL DE $g(y)$ Y POR LO TANTO EL PODER APRECIAR DIFERENTES REGIONES DE LOS DATOS, ASOCIADAS A CARACTERISTICAS DE $f(x)$

ABEL

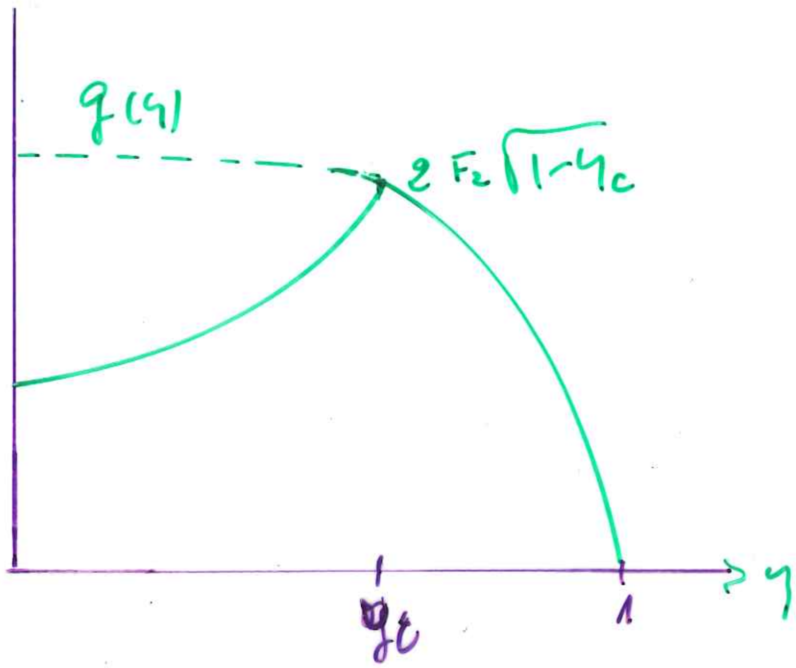
$$g(y) = \int_y^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x-y}}\,dx$$

Si



$$g(y) = 2F_2\sqrt{1-y} \qquad y \geq y_c$$

$$g(y) = 2F_2\sqrt{1-y} - 2(F_2 - F_1)\sqrt{y_c - y}$$



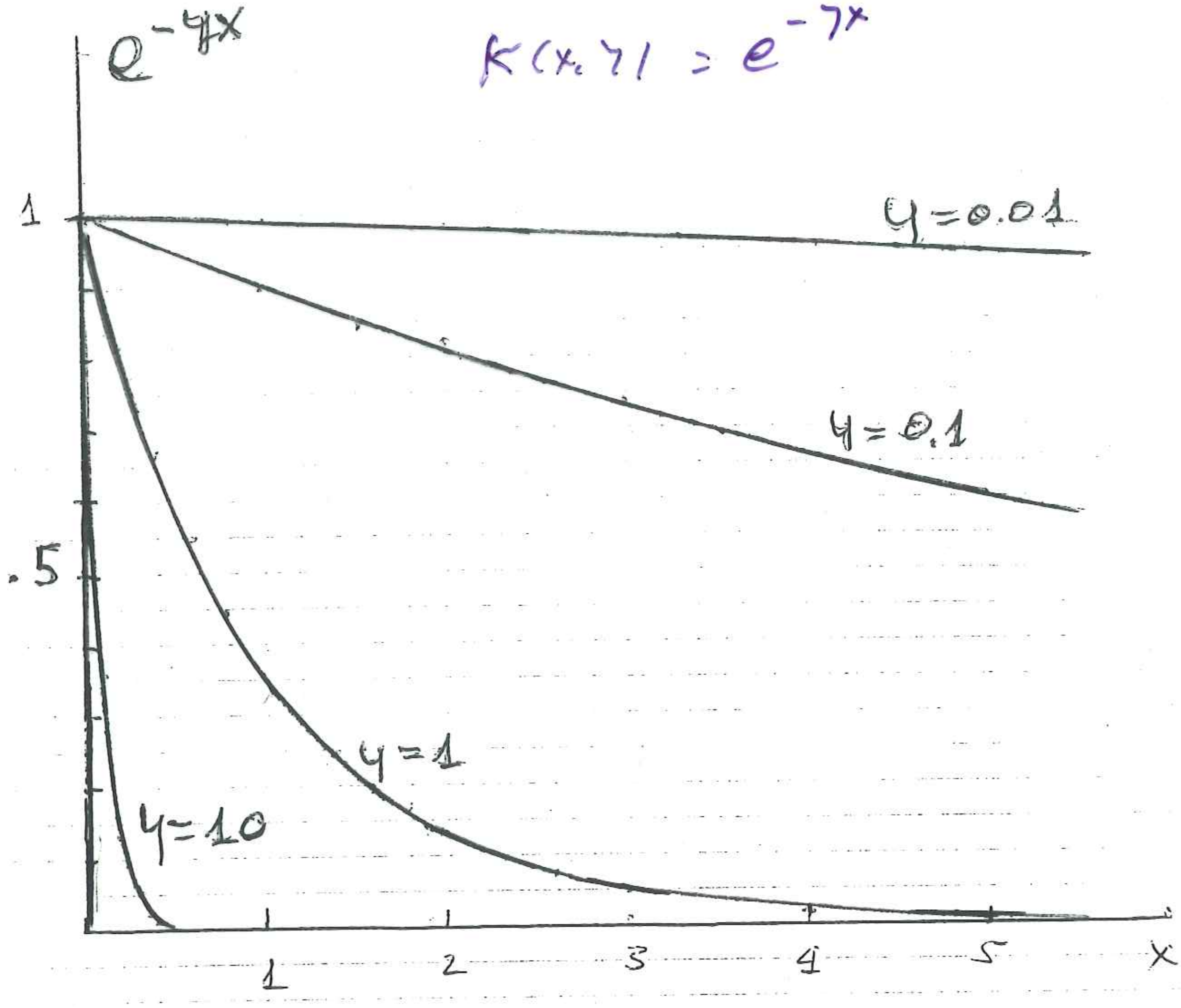
LA FUNCION $g(y)$ ES CONTINUA PERO HAY UN CAMBIO EN SU DERIVADA

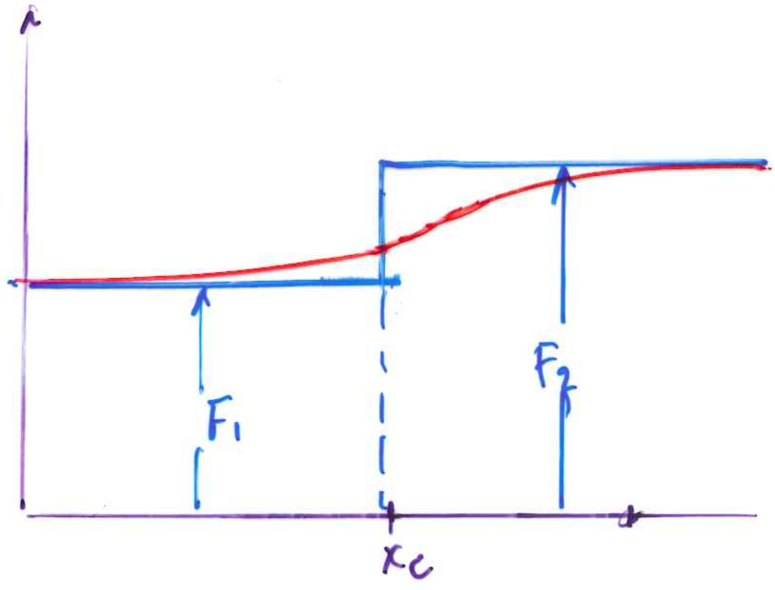
¿DONDE?

¿COMO APRECIARLO?

LAPLACE

$K(x, y) = e^{-yx}$

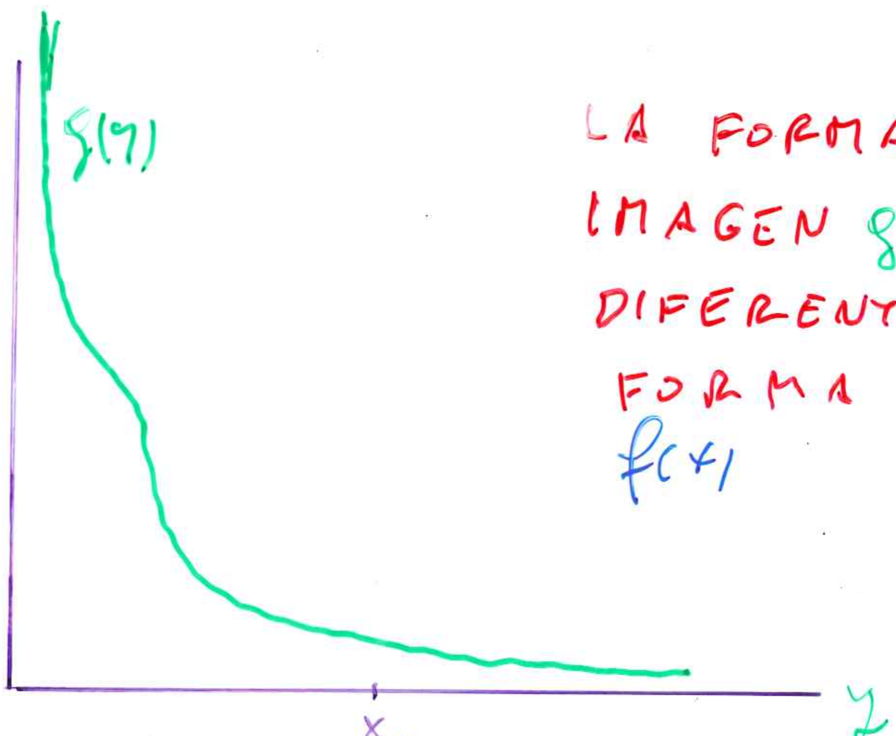




$$\left[y\, g(y) \right]_{y=\frac{1}{x}}$$

DIBUJADO EN ROJO

$$g(y) = \frac{F_1}{y} + \frac{e^{-y x_c}}{y} (F_2 - F_1)$$



LA FORMA DE LA IMAGEN $g(y)$ ES MUY DIFERENTE DE LA FORMA DEL OBJETO $f(x)$