
# EVALUACIÓN DE APROXIMACIONES ELIPSOIDALES DE DISTINTO ORDEN DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN EEG/MEG.

Alcocer Sosa Mauricio, Gutiérrez Ruiz Dania

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Unidad Monterrey,
malcocer@cinvestav.mx, dgtz@ieee.org

***RESUMEN***- Electroencefalografía (EEG) y magnetoencefalografía (MEG) son métodos que miden los campos bioelectromagnéticos causados por corrientes eléctricas en el cerebro. Dichos métodos se utilizan en el diagnostico para pacientes con epilepsia, en particular para determinar de manera no invasiva la ubicación exacta del foco epiléptico. La solución matemática precisa de este problema depende del uso de modelos geométricos realistas e idealizados basados en aproximaciones por el método de elementos de frontera (BEM por sus siglas en Inglés) y el modelo esférico, respectivamente. El modelo esférico está siendo suplido por el modelo elipsoidal ya que éste último aproxima de una mejor manera la cabeza, y por ende genera un menor error en la ubicación de la fuente. En este trabajo se extiende el modelo elipsoidal existente en la literatura de segundo orden a una aproximación elipsoidal de tercer orden, con lo cual se logra una disminución en el sesgo de la estimación de la ubicación de la fuente de actividad neuronal en regiones muy cercanas a la corteza cerebral. De manera preliminar podemos concluir que con la aproximación de tercer orden se logra una disminución en el error a distintas profundidades y orientaciones de la actividad cerebral en comparación con la aproximación de segundo orden, aunque este efecto es dependiente de la posición a estimar.

## INTRODUCCIÓN

Los campos bioeléctricos son causados por corrientes eléctricas asociadas a la actividad de órganos como el cerebro y corazón [1]. En particular, los campos generados por las corrientes eléctricas del cerebro producen señales que pueden medirse, de manera no invasiva, mediante electroencefalografía (EEG) y/o magnetoencefalografía (MEG). Tanto en EEG como en MEG, las mediciones son el resultado de dos contribuciones independientes de la corriente en el cerebro: la corriente pasiva y la corriente primaria. Las corrientes primarias son consideradas la fuente de interés en EEG/MEG, ya que representan las áreas de actividad neuronal asociada a un proceso sensorial, motriz o cognitivo [2]. En el contexto del modelado de las señales de EEG/MEG, se suele hacer referencia a resolver el problema directo en bioelectromagnétismo. Resolver dicho problema corresponde a calcular el potencial eléctrico (en el caso de EEG) o el campo magnético (para MEG) bajo el supuesto de que se conoce la geometría del volumen que modela el medio conductor, además de contar con una fuente de corriente plenamente caracterizada. Sin embargo, en el contexto de aplicaciones clínicas, el problema de mayor interés es el problema inverso, en el cual se conoce el campo y el volumen conductor pero se desconocen las fuentes que originaron las mediciones. Una de las áreas con mayor aplicabilidad para estos métodos es en el diagnostico para pacientes con epilepsia. El objetivo de la cirugía en epilepsia es la resección completa o desconexión de la zona epileptogénica (ubicación exacta del foco epiléptico) preservando al mismo tiempo funcionalmente la corteza elocuente relevante [3]. El primer modelo idealizado para la cabeza fue una esfera, posteriormente se utilizaron esferas concéntricas que modelaban el resto de los tejidos involucrados en la cabeza: cuero cabelludo, cráneo, líquido cefalorraquídeo y cerebro. Sin embargo, hoy en día éste último está siendo remplazado por el uso de un modelo elipsoidal ya que aproxima de una mejor manera la cabeza. Pero la ecuación que aproxima al campo eléctrico y en magnético en éste modelo, aún no se sabe a ciencia cierta hasta cuántos de los armónicos elipsoidales es suficiente considerar de la serie infinita que caracteriza al modelo elipsoidal [4]. En este trabajo se extiende el modelo elipsoidal existente en la literatura de segundo orden a una aproximación elipsoidal de tercer orden, con lo cual se logra una disminución en el sesgo de la estimación de la ubicación de la fuente de actividad neuronal en regiones muy cercanas a la corteza cerebral. En la sección de metodología se muestran los elementos necesarios para asumir una geometría elipsoidal para la solución de ambos problemas, directo e inverso. Para ver más a detalle sobre esta metodología ver [4, 5].

## METODOLOGÍA

Considerando el caso en que la cabeza es modelada por una geometría elipsoidal multicapas, tal que los elipsoides sean confocales y corresponden a: cerebro, líquido cefalorraquídeo, cráneo y cuero cabelludo. La solución al problema directo en EEG/MEG es usualmente obtenida bajo la aproximación cuasi-estática de las ecuaciones de Maxwell. Posteriormente las ecuaciones de Maxwell nos llevan a una solución del campo eléctrico y magnético denotada por la ley de Biot-Savart-Maxwell, la cual implica una integral volumétrica. Asumiendo que la corriente primaria o la fuente en la corteza cerebral (denotada por $\boldsymbol{J}^P$) es modelada por una corriente dipolar equivalente (ECD por sus siglas en Inglés); i.e.,

$$\boldsymbol{J}^P(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$ es el punto de observación (mediciones), $\boldsymbol{r}_0 = [r_{0x}, r_{0y}, r_{0z}]^T$ es la posición del dipolo, y $\boldsymbol{q}$ es el momento dipolar. Con dicha suposición de la corriente primaria, la solución propuesta con la ley antes mencionada, pueden rescribirse dichas integrales volumetricas en integrales superficiales, de tal forma que para el caso del campo eléctrico la solución propuesta en el modelo elipsoidal para orden tres es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\upsilon_L(\boldsymbol{r}) =& \frac{3}{4\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}} \sum_{i=1}^{3} \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}_1^i(\rho_r)}{{}_L\omega_1^i(\alpha_{L,1})} - \frac{5}{8\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}(\Lambda-\Lambda')} \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{u}_i) \\
&\times \left[ \frac{\mathbb{I}_2^1(\rho_r)\mathbb{E}_2^1(\rho_r,\mu_r,\nu_r)}{{}_L\omega_2^1\Lambda(\Lambda-\alpha_{L,i}^2)\mathbb{I}_2^1(\alpha_{L,1})} - \frac{\mathbb{I}_2^2(\rho_r)\mathbb{E}_2^2(\rho_r,\mu_r,\nu_r)}{{}_L\omega_2^2\Lambda'(\Lambda'-\alpha_{L,i}^2)\mathbb{I}_2^2(\alpha_{L,1})} \right] \\
&+ \frac{15}{4\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{u}_j) \frac{\mathbb{I}_2^{i+j}(\rho_r)}{{}_L\omega_2^{i+j}(\alpha_{L,i}^2+\alpha_{L,j}^2)\mathbb{I}_2^{i+j}(\alpha_{L,1})} \\
&- \frac{21}{8\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}} \sum_{i=1}^{3} \left[ \frac{\mathbb{I}_3^{2i-1}(\rho_r)\mathbb{E}_3^{2i-1}(\rho_r,\mu_r,\nu_r)\boldsymbol{q}\cdot(\Omega(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{u}_i)}{\mathbb{I}_3^{2i-1}(\alpha_{L,1})\,{}_L\omega_3^{2i-1}\Lambda_i(\Lambda_i-\Lambda_i')(\Lambda_i+2\alpha_i^2)} \frac{h_i}{h_1h_2h_3} \right. \\
&\left. - \frac{\mathbb{I}_3^{2i}(\rho_r)\mathbb{E}_3^{2i}(\rho_r,\mu_r,\nu_r)\boldsymbol{q}\cdot(\Omega'(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{u}_i)}{\mathbb{I}_3^{2i}(\alpha_{L,1})\,{}_L\omega_3^{2i}\Lambda_i'(\Lambda_i-\Lambda_i')(\Lambda_i'+2\alpha_i^2)} \frac{h_i}{h_1h_2h_3} \right] + \frac{105}{4\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}(\alpha_{L,1}^2\alpha_{L,2}^2+\alpha_{L,1}^2\alpha_{L,3}^2+\alpha_{L,2}^2\alpha_{L,3}^2)} \\
&\times \frac{\mathbb{I}_3^7(\rho_r)}{\mathbb{I}_3^7(\alpha_{L,1})\,{}_L\omega_3^7} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}_{6-i-j})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_{6-i-j})(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{u}_j) + O(\text{el}_4),
\end{aligned} \tag{2}
$$

donde $\boldsymbol{u}_i$ es un vector en $\Re^3$ tal que la $i$-ésima componente es uno y las otras componentes son cero; $\Lambda$ y $\Lambda'$ son las raíces del polinomio $\sum_{i=1}^{3} 1/(\Lambda-\alpha_{L,i}^2)=0$ con $\Lambda>\Lambda'$; $h_i$ son las distancias semi-focales; $\Lambda_i$ y $\Lambda_i'$ son las raíces de los polinomios asociados a las funciones armónicas de grado tres; $O(\text{el}_4)$ son los términos de orden mayor o igual a cuatro; $\Omega(\boldsymbol{r}_0)$ está dado por una matriz de dimensión $3\times3$. Para el caso de $\Omega'(\boldsymbol{r}_0)$ basta con sustituir $\Lambda_i$ por $\Lambda_i'$ en la matriz $\Omega(\boldsymbol{r}_0)$.
Para el caso del campo magnético la aproximación de tercer orden de una sola capa está dada por la siguiente ecuación [6]:

$$
\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{b}_{qua}(\boldsymbol{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{b}_{oct}(\boldsymbol{r}) + O(\text{el}_4), \tag{3}
$$

donde $\boldsymbol{b}_{qua}$ y $\boldsymbol{b}_{oct}$ denotan los terminos cuadrupolar y octapolar de la expansión multipolar de $\boldsymbol{b}$, respectivamente. Entonces:

$$
\boldsymbol{b}_{qua}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathbb{F}_2^1(\boldsymbol{r})}{\Lambda-\Lambda'} \sum_{k=1}^{3} \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{u}_k}{\Lambda-\alpha_k^2}\boldsymbol{u}_k - \frac{\mathbb{F}_2^2(\boldsymbol{r})}{\Lambda-\Lambda'} \sum_{k=1}^{3} \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{u}_k}{\Lambda'-\alpha_k^2}\boldsymbol{u}_k - 15 \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{3} (\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{u}_k)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_k)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}_2^{k+j}(\rho_{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{u}_j, \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_{oct}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{3}{2(h_1h_2h_3)^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{h_k^2}{\Lambda_k-\Lambda_k'}\boldsymbol{q}\times\nabla_{\boldsymbol{r}_0}\left[\frac{\mathbb{E}_3^{2k-1}(\boldsymbol{r}_0)\mathbb{F}_3^{2k-1}(\boldsymbol{r})}{\Gamma_k}-\frac{\mathbb{E}_3^{2k}(\boldsymbol{r}_0)\mathbb{F}_3^{2k}(\boldsymbol{r})}{\Gamma_k'}\right]\\
&+\frac{15}{(h_1h_2h_3)^4}(\boldsymbol{q}\times\nabla_{\boldsymbol{r}_0}\mathbb{E}_3^7(\boldsymbol{r}_0))\mathbb{F}_3^7(\boldsymbol{r})+\frac{3}{10(h_1h_2h_3)^2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\hat{\boldsymbol{x}}_k\times\hat{\boldsymbol{x}}_j)\frac{h_kh_j}{(\Lambda_k-\Lambda_k')(\Lambda_j-\Lambda_j')}\\
&\times\left\{\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}_0}\mathbb{E}_3^{2j-1}(\boldsymbol{r}_0)}{\Lambda_j+2\alpha_j^2}\left[\Phi(\Lambda_k,\Lambda_j)\mathbb{F}_3^{2k-1}(\boldsymbol{r})-\Phi(\Lambda_k',\Lambda_j)\mathbb{F}_3^{2k}(\boldsymbol{r})\right]\right.\\
&\left.-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}_0}\mathbb{E}_3^{2j}(\boldsymbol{r}_0)}{\Lambda_j'+2\alpha_j^2}\left[\Phi(\Lambda_k,\Lambda_j')\mathbb{F}_3^{2k-1}(\boldsymbol{r})-\Phi(\Lambda_k',\Lambda_j')\mathbb{F}_3^{2k}(\boldsymbol{r})\right]\right\}\\
&-\frac{3}{(h_1h_2h_3)^3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^j\alpha_j^2h_j^3\hat{\boldsymbol{x}}_j\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}_0}}{\Lambda_j-\Lambda_j'}\left[\frac{(\Lambda_j-\alpha_j^2)\mathbb{E}_3^{2j-1}(\boldsymbol{r}_0)}{\Gamma_j(\Lambda_j+2\alpha_j^2)}-\frac{(\Lambda_j'-\alpha_j^2)\mathbb{E}_3^{2j}(\boldsymbol{r}_0)}{\Gamma_j'(\Lambda_j'+2\alpha_j^2)}\right]\mathbb{F}_3^7(\boldsymbol{r})\\
&+\frac{1}{\Lambda\Lambda'(h_1h_2h_3)^3}(\boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}_0}\mathbb{E}_3^7(\boldsymbol{r}_0))\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^k\alpha_k^2h_k^3}{\Lambda_k-\Lambda_k'}\hat{\boldsymbol{x}}_k\times\left[\frac{\Lambda_k(\Lambda_k-\alpha_k^2)\mathbb{F}_3^{2k-1}(\boldsymbol{r})}{\Gamma_k}-\frac{\Lambda_k'(\Lambda_k'-\alpha_k^2)\mathbb{F}_3^{2k}(\boldsymbol{r})}{\Gamma_k'}\right].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

La expresiónes (2) y (3) no son adecuadas para una solución numérica del problema inverso en EEG/MEG, debido a que corresponde a una caracterización donde los parámetros lineales (magnitud) y no lineales (localización) de la fuente se encuentran acoplados. Por lo tanto, se reformulará la solución al problema directo (tal y como se realizo en [7]) expresando el campo eléctrico y magnético en factorizaciones algebraicas de vectores y matrices:

$$\upsilon(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)^T\boldsymbol{q}, \tag{6}$$
$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}) = K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{q}, \tag{7}$$

tal que $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ es el vector *kernel* de $3\times 1$ en EEG; $K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ es una matriz kernel de $3\times 3$ para MEG. De tal forma que la expresión del kernel para EEG está dada por la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi\alpha_{L,1}\alpha_{L,2}\alpha_{L,3}}&\left[3\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{r})-\left(\frac{5}{2}H_1(\boldsymbol{r})-15H_2(\boldsymbol{r})\right)\boldsymbol{r}_0-\frac{21}{2}\left(\Omega(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{r})-\Omega'(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{r})\right)\right.\\
&\left.+105g_2(\boldsymbol{r})diag(Adj(diag(\boldsymbol{r}_0)))\right],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

más detalles sobre los vectores y matrices pueden encontrarse en [8]. Por cuestiones de espacio no es posible mostrar el kernel para el caso en MEG de una sola capa, para solicitar dicha información favor de mandar un correo electrónico a cual quiera de las direcciones proporcionadas.

**EXPERIMENTOS**

El objetivo de los siguientes experimentos es verificar si existe alguna mejora debida a la aportación de términos de tercer orden en comparación con las aproximaciones de segundo orden propuestas en [4, 9]. Como referencia para la evaluación del problema directo se utilizó el modelo de elementos de frontera (*Boundary Element Method* o BEM), para el cual la solución del problema directo ya ha sido implementada a través de la librería de Helsinki [10]. El modelo BEM utiliza tres mallas en las cuales se modela, de adentro hacia afuera, el cerebro, el cráneo y el cuero cabelludo con 1500, 1000 y 500 nodos, así como 2996, 1996 y 996 triángulos, respectivamente. De allí se seleccionaron 400 nodos uniformemente distribuidos, dichos nodos se utilizaron como posiciones de sensores para EEG/MEG. Una vez establecido las posiciones de los sensores fue necesario situarlos sobre la superficie del elipsoide que modela la geometría de la cabeza. Para ello, primero se realizó una descomposición en los tres planos, proyectando los puntos de estos sensores en cada plano para posteriormente realizar una discriminación de puntos por medio de la magnitud vectorial de cada sensor. Una vez teniendo esto se realizó un ajuste por mínimos cuadrados para aproximar los puntos a la mejor elipse posible. El mismo proceso se realizó en los tres planos y se promediaron los semiejes para finalmente ajustar al mejor elipsoide posible. Una vez teniendo el mejor elipsoide fue necesario ajustar las demás elipsoides que representarían las capas restantes de la cabeza utilizando las proporciones propuestas en [11] para el cerebro, líquido cerebroespinal y cráneo respectivamente. Estas proporciones se utilizaron manteniendo iguales las distancias semifocales entre capas, para asegurarnos de tener elipsoides confocales.

Para la solución del problema directo para EEG/MEG en BEM, de los 1500 nodos que forman la malla del cerebro en BEM se utilizaron 1000 nodos los cuales representan la parte superior de la misma. Estos nodos determinarán las distintas posiciones dipolares $\boldsymbol{r}_0$ para generar datos en EEG/MEG a distintas profundidades $d = 5, 10, 15, 20\ \ mm$ por debajo de la corteza cerebral y con momentos dipolares $\boldsymbol{q}$ de orientación radial y tangencial. Las conductividades utilizadas se consideran isotrópicas y constantes para las distintas capas involucradas en el modelo elipsoidal, siendo estas de $0.33$, $0.1.79$, $0.0041$ y $0.33$ $(1/\Omega m)$ (considerando de la capa mas interna a la más externa).

Habiendo definido las condiciones necesarias se generan datos en BEM, posteriormente se agrega ruido a dichos datos y finalmente se da solución al problema inverso con los modelos elipsoidales propuestos. Para la estimación de $\boldsymbol{r}_0$ se utilizó la técnica de estimación de máxima verosimilitud de manera similar a lo propuesto en [12], donde el momento dipolar asemeja a la respuesta típica de un evento evocado. Máxima verosimilitud requiere de la optimización de la función de verosimilitud concentrada, lo que se implementó utilizando las utilerías de optimización de Matlab (*patternsearch*).

Para saber qué modelo aproxima de una mejor manera la posición de la fuente, se cálculo la proporción entre los errores absolutos en la estimación de la posición del dipolo generado por BEM y la posición estimada por ambos modelos elipsoidales, i.e., $\frac{\|\boldsymbol{r}_{0_{BEM}} - \widehat{\boldsymbol{r}}_{0_3}\|}{\|\boldsymbol{r}_{0_{BEM}} - \widehat{\boldsymbol{r}}_{0_2}\|} = \frac{O(3)}{O(2)}$ ó $\frac{O(2)}{O(3)}$ donde $\widehat{\boldsymbol{r}}_{0_2}$ y $\widehat{\boldsymbol{r}}_{0_3}$ son la posición estimada del dipolo usando los modelos elipsoidales de orden dos y tres, respectivamente. Analizamos ambos casos de las proporciones propuestas debido a que no sabemos exactamente qué modelo tiene un mayor *bias* de manera general.

Con los resultados de las simulaciones se observo que el bias máximo obtenido por orden dos para

| | Media | | Proporción ($\bar{P}$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | Orden 2 | Orden 3 | $O2/O3$ | $O3/O2$ | Distribución | $n$ |
| 5 | 16.3674 | 17.6971 | 1.01933 | 1.11195 | Logística | 763 |
| 10 | 17.5882 | 16.8824 | 1.16645 | 0.979807 | Logística | 776 |
| 15 | 20.0454 | 16.8447 | 1.35899 | 0.857157 | Logística | 855 |
| 20 | 21.8018 | 16.5106 | 2.01842 | 0.948773 | Rician | 925 |

**Tabla 1:** Los resultados de esta tabla muestran la evaluación de las mil posiciones distintas para el dipolo, en una orientación tangencial.

cada $d$, es menor que el bias máximo obtenido por orden tres (para los datos generados en BEM sin ruido). Entonces tomando en cuenta esto se estableció como cota superior al valor obtenido por orden dos, desechando cualquier estimación superior a esta cota en ambos modelos para los datos con ruido. Algunos de los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1. Analizando el caso $d = 5$ podemos decir que los modelos son iguales de acuerdo a la proporción $O2/O3$, pero por otro lado $O3/O2$ sugiere que orden tres es mayor lo cual se puede confirmar haciendo la prueba de hipótesis para la diferencia de medias con un valor de significancia de $\alpha = 0.05$. Para los demás casos donde se utiliza una orientación radial sucede algo muy similar a lo antes mencionado.

## CONCLUSIONES

El análisis de este problema estuvo motivado por el desconocimiento de la aportación de los armónicos elipsoidales y el interés por saber si agregar armónicos de orden mayor a dos tendría impacto en la solución del problema neuroeléctrico inverso.

La aproximación del potencial eléctrico a un tercer orden en la geometría elipsoidal tiene una mejora parcial en la focalización y en la magnitud del potencial eléctrico producido por un dipolo eléctrico. Y con dicha mejora en la solución del problema directo, resolver el problema inverso sigue presentando imprecisiones pues no está claro cuál es la aportación de los armónicos de orden superior. Entonces, agregar armónicos de tercer orden no proporciona grandes mejoras a la solución del problema inverso, pero tampoco lo empeora significativamente. En base a estos resultados aún queda en duda hasta qué termino es necesario truncar la sumatoria infinita del potencial eléctrico en el modelo elipsoidal para EEG. Si bien no se muestran resultados para MEG es porque no son aún del todo comparables con el respectivo modelo de orden dos para cuatro capas.

El trabajo a futuro será realizar un análisis más riguroso y poder determinar diferencias más concretas, lo cual creemos que podemos lograr utilizando la Frontera de Cramér-Rao.

## Referencias


[1] J. Sarvas, "Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem", *Physics in Medicine and Biology*, vol. 32, pp. 11-22, 1987.

[2] J. Mosher, R. Leahy, and P. Lewis, "EEG and MEG: Forward solutions for inverse methods", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 46, no. 3, pp. 245-259, Mar. 1999.

[3] Knake S, Halgren E, Shiraishi H, Hara K, Hamer HM, Grant PE, Carr VA, Foxe D, Camposano S, Busa E, Witzel T, Hämäläinen MS, Ahlfors SP, Bromfield EB, Black PM, Bourgeois BF, Cole AJ, Cosgrove GR, Dworetzky BA, Madsen JR, Larsson PG, Schomer DL, Thiele EA, Dale AM, Rosen BR, Stufflebeam SM., "The value of multichannel MEG and EEG in the presurgical evaluation of 70 epilepsy patients", *Epilepsy Research*, vol. 69, pp. 80-86, 2006.

[4] F. Kariotou, "Electroencephalography in ellipsoidal geometry", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 290, pp. 324-342, 2004.

[5] G. Dassios, "Electric and Magnetic Activity of the Brain in Spherical and Ellipsoidal Geometry", Minisymposium on Mathematics of Emerging Biomedical ed H Ammari (Berlin: Springer) en prensa.

[6] G. Dassios, D. Hadjiloizi and F. Kariotou, "The octapolic ellipsoidal term in magnetoencephalography", *Journal of Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 013508, 2009.

[7] D. Gutiérrez, A. Nehorai and H. Preissl, "Ellipsoidal head model for fetal magnetoencephalography: forward and inverse solutions", *Physics in Medicine and Biology*, vol. 50, no. 9, pp. 2141-2157, 2005.

[8] D. Gutiérrez y M. Alcocer-Sosa, "A Third-Order Approximate Solution of the EEG Forward Problem in Four-Shell Ellipsoidal Geometry", en Proceedings of the 46th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, EUA, Nov. 2012, pp. 633-637.

[9] Dassios G and Kariotou F, "Magnetoencephalography in ellipsoidal geometry", *Journal of Mathematical Physics* vol. 44, pp. 220-241, 2003.

[10] M. Stenroos, V. Mäntynen, J. Nenonen, "A Matlab library for solving quasi-static volume conduction problems using the boundary element method", Comput Methods Prog Biomed, vol. 88, no. 3, pp. 256-263, 2007.

[11] C.J. Stok, "The inverse problem in EEG and MEG with application to visual evoked responses", CIP Gegevens Koninklijke Bibliotheek. The Hague. 1986.

[12] D. Gutiérrez, A. Nehorai and H. Preissl, "Ellipsoidal head model for fetal magnetoencephalography: forward and inverse solutions", Phys. Med. Biol., vol. 50, no. 9, pp. 2141-2157, 2005.