



RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA CON REALCE DE BORDES ISOTROPICO DE OBJETOS DE FASE MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE HILBERT

Arelí Montes Pérez^a, Gustavo Rodríguez Zurita^b, Amalia Martínez García^a,

^aCentro de Investigaciones en Óptica, León, Gto., arelimp@cio.mx, amalia@cio.mx,

^bFCFM-BUAP, Laboratorio de Metrología Óptica, gzurita@fcfm.buap.mx

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un método de reconstrucción de realce de bordes de una imagen mediante la implementación óptica de la transformada de Hilbert, esto es obtenido mediante las proyecciones de la rebanada del objeto, tales proyecciones provienen de un sistema de filtraje espacial basado en un sistema $4f$, aquí las proyecciones del objeto de fase son obtenidas en el plano de entrada del sistema $4f$, posteriormente en el plano de Fourier es colocado un filtro signo (filtro escalón de fase) esto se hace con el fin de obtener la Transformada de Hilbert de la proyección en el plano imagen. La aplicación del filtro significa tener una diferencia de fase de π radianes en la izquierda y en la derecha del espectro frecuencial de la rebanada del objeto. Bajo estos antecedentes se presenta el análisis teórico, resultados numéricos y resultados experimentales del realce de bordes de la rebanada del objeto, mediante la transformada de Hilbert de las proyecciones a través del algoritmo de la retroproyección filtrada.

1. INTRODUCCIÓN

Con tomografía [2] de proyecciones paralelas, una desconocida rebanada del objeto $f(x, y)$ se puede calcular usando un conjunto de proyecciones paralelas conocidas $f_{\phi}^v(p)$ (Fig. 1), donde p es la posición de la coordenada de proyección (o detección). Cada proyección puede ser detectada saliendo del objeto y caracterizada al ángulo de proyección $0^{\circ} \leq \phi \leq 360^{\circ}$. Por simetría, en virtud de las proyecciones paralelas, en la práctica, un rango de 180° podría ser suficiente. La reconstrucción de la rebanada del objeto, usualmente, representa la distribución de absorción de la luz, pero ésta también puede representar la distribución del índice de refracción, experimentalmente, detectando diferencias de caminos ópticos, así la rebanada de índice de refracción puede ser obtenido con técnicas de proyecciones tomográficas.



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla

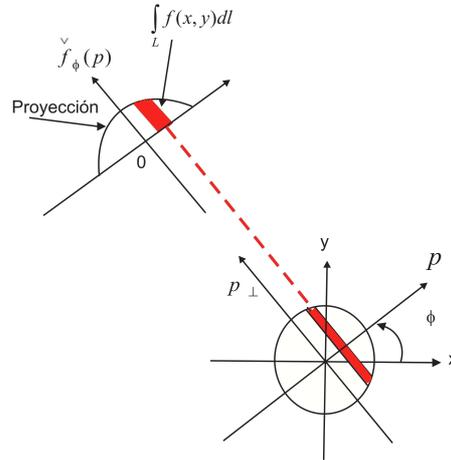


Fig. 1 TR o proyección integral de línea en relación a una función imagen $f(x, y)$

2. TRANSFORMADA DE RADON

La transformada de Radon (TR) de una función $f(x, y)$, representada como $\check{f}_\phi(p)$, es definida como la línea integral a lo largo de una línea que es paralela con el eje p_\perp a una distancia p del origen. Aquí (p, p_\perp) son las coordenadas rotadas de (x, y) con el ángulo de rotación ϕ , Fig. 1. Denotamos el operador de la TR por una función dada f como $\mathfrak{R}\{f(x, y)\}$ matemáticamente se denota por

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\} \equiv \check{f}_\phi(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (1)$$

Aquí, la función $\check{f}_\phi(p)$ es la proyección 1-D de $f(x, y)$ a un ángulo ϕ . El operador TR forma la integral de línea de los datos de la imagen 2-D a lo largo de p_\perp . Como es conocido, estos datos de proyección pueden ser la base de datos para la imagen a ser reconstruida y este es el aspecto más importante de la reconstrucción de imagen 2-D [1,2].

3. TEOREMA DE PROYECCIÓN O TEOREMA DE LA REBANADA CENTRAL DE FOURIER

Por conveniencia, considerése los ejes coordenados rectangulares (p, p_\perp) y (ω, ω_\perp) obtenidos por rotación, al ángulo ϕ , de los ejes (x, y) y (μ, ν) respectivamente [2]. Un muestreo de la transformada a lo largo de una línea recta pasando por el origen y con inclinación ϕ , Fig. 2, puede escribirse como sigue,

$$\tilde{f}(\mu, \nu) \cdot \delta(-\mu \sin \phi + \nu \cos \phi) = \tilde{f}(\mu, \nu) \cdot \delta(\omega_\perp), \quad (2)$$

donde $\delta(\omega_\perp)$ denota un muestreo de la transformada a lo largo de la recta $\omega_\perp = 0$, es decir, a lo largo del eje ω . Dicho muestreo corresponde, en el plano del objeto, con una convolución entre las transformadas inversas de cada factor. Considerando el hecho de que $\mathfrak{F}^{-1}\{\delta(\omega_\perp)\} = \delta(p)$ para cualquier valor de ϕ , se tiene la siguiente identidad

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}(\mu, \nu) \cdot \delta(\omega_\perp)\} = f(x, y) \otimes \delta(x \cos \phi + y \sin \phi) = \mathfrak{R}_\phi\{f(x, y)\} = \check{f}_\phi(p), \quad (3)$$

el símbolo \otimes denota la operación convolución, esta ecuación es conocida como el teorema de la rebanada de Fourier o el teorema de proyección (Fig. 2).

4. TRANSFORMADA INVERSA DE RADON

La transformada inversa de Radon (TIR) puede resolverse interpretando a la proyección paralela $f_\phi^\vee(p)$, como la transformada inversa unidimensional $\mathfrak{S}_{1D}^{-1}\{\dots\}$, del muestreo de la transformada bidimensional $\tilde{f} = \mathfrak{S}_{2D}\{f(x,y)\}$, realizado a lo largo de la línea $w_\perp = 0$. Entonces, conociendo $f_\phi^\vee(p)$ para todo ϕ [2]

$$f(x,y) = \mathfrak{S}_{2D}^{-1}\{\tilde{f}(\mu,\nu)\} = \mathfrak{S}_{2D}^{-1}\{B \cdot \mathfrak{S}_{1D}[f_\phi^\vee(p)]\}, \quad (4)$$

donde se ha implicado que $\tilde{f}(\mu,\nu)$ se construye con toda $f_\phi^\vee(p)$ convencionalmente acomodadas, $\mathfrak{S}_{1D}\{\dots\}$, es de $p \rightarrow w$ y la operación de acomodo se denota con B.

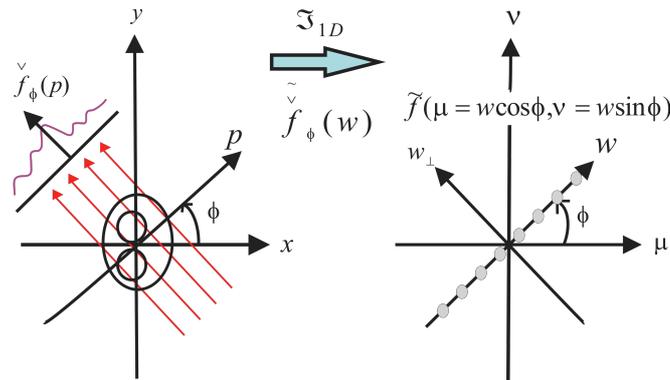


Fig. 2 Esquemas del teorema de la rebanada central de Fourier.

5. ALGORITMO DE RETROPROYECCIÓN FILTRADA

Definiendo a la proyección filtrada con un filtro espacial de la forma

$$g_\phi^\vee(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\omega| \tilde{f}(\omega) e^{i2\pi\omega p}, \quad (5)$$

entonces se demuestra que la ecuación (4) se puede reescribir como sigue

$$f(x,y) = \int_0^\pi d\phi g_\phi^\vee(p) = \int_0^\pi d\phi g_\phi^\vee(x \cos \phi + y \sin \phi). \quad (6)$$

El resultado establece una posible operación de transformación inversa de Radon mediada por un filtro espacial $|\omega|$, por lo cual es conocida como una proyección filtrada (ecuación 5), y la ecuación (6) es conocida como la retroproyección de las proyecciones filtradas.

6. REALCE DE BORDES

El realce de imagen consiste en la aplicación de una técnica cuyo objetivo es resaltar alguna característica de la imagen:



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla



- La reducción del ruido de fondo en la captación de una imagen. En este caso, lo que se pretende resaltar de la imagen es el contenido de la misma, eliminando la textura que pueda estar presente en el fondo, esto es, tratar de conseguir que el fondo presente una intensidad lo más constante posible.
- El ajuste de intensidad y/o contraste. Una vez más, se pretende resaltar el contenido de la imagen con respecto al fondo.

El presente trabajo consiste en una descripción teórica de la operación de procesamiento por grupo de píxeles conocida como filtrado espacial y su aplicación a objetos de fase.

6.1 TRANSFORMADA DE HILBERT

Es una herramienta matemática útil para describir la envolvente compleja de una señal modulada por una portadora real [2]. Su definición es $\overset{\cap}{\eta}(x) = \mathcal{H}\{\eta(x)\} = \eta(x) \otimes 1/\pi x$, en dos dimensiones a lo largo de una dirección arbitraria se puede definir como:

$$\overset{\cap}{\eta}_\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \otimes \eta(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -i \operatorname{sgn}(\mu \cos \alpha + \nu \sin \alpha) \tilde{\eta}(\mu, \nu) \right\}, \quad (7)$$

donde α denota la dirección a la cual se halla la transformada de Hilbert, $-i \operatorname{sgn}(\mu) = \mathcal{F}\{1/\pi(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\}$ y se ha aplicado la propiedad de convolución de dos funciones. Bajo la definición de la Transformada de Hilbert (TH), se requiere hallar la TH de la proyección al ángulo ϕ (Ec. 1).

$$\overset{\cap}{f}_\phi(p) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -i \operatorname{sgn}(\omega) \tilde{f}_\phi(\omega) \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -i \operatorname{sgn}(\omega \sin \phi) \tilde{f}_\phi(\omega) \right\}, \quad (8)$$

donde se ha introducido el $\sin \phi$ debido a que para el rango de ϕ entre 0 y π siempre es positivo, por lo tanto su efecto como factor en el argumento de la función signo no altera. Aplicando el teorema de la rebanada de Fourier y la propiedad de muestreo de la función delta, la ecuación (8) se expresa como sigue

$$\overset{\cap}{f}_\phi(p) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -i \operatorname{sgn}(\nu) \tilde{f}(\mu, \nu) \delta(\omega_\perp) \right\}, \quad (9)$$

entonces aplicando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier tenemos que

$$\begin{aligned} \overset{\cap}{f}_\phi(p) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ -i \operatorname{sgn}(\nu) \tilde{f}(\mu, \nu) \right\} \otimes \mathcal{F}^{-1} \left\{ \delta(\omega_\perp) \right\} \\ &= \overset{\cap}{f}^{\pi/2}(x, y) \otimes \delta(p) = \overset{\cap}{f}_\phi^{\pi/2}(p), \end{aligned} \quad (10)$$

donde se ha considerado que $\mathcal{R}\{f(x, y)\} = f(x, y) \otimes \delta(p)$, $\alpha = \pi/2$, este resultado significa que tenemos la TH de la TR en la dirección y , e implica que el realce de bordes es en la dirección y . Ahora, si queremos hacer realce de borde en una dirección arbitraria, hagamos el cálculo para el caso más general, esté a partir de la definición de la transformada de Hilbert, escribimos

$$\overset{\cap}{f}^\alpha(x, y) = f(x, y) \otimes \frac{1}{\pi(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad (11)$$



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla



escribiendo esta ecuación en términos de las proyecciones $f_{\phi}^v(p)$ de $f(x,y)$ a un ángulo ϕ se expresa como sigue

$$f_{\phi}^v(p) = f(x,y) \otimes \frac{1}{\pi(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \otimes \delta(p), \quad (12)$$

esta relación nos expresa la TR de la TH en la dirección α , siguiendo un natural desarrollo matemático y aplicando el teorema de la rebanada central de Fourier, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\phi}^v(\omega) &= f(\mu, \nu) [-i \operatorname{sgn}(\mu \cos \alpha + \nu \sin \alpha)] \delta(-\mu \sin \phi + \nu \cos \phi) \\ &= f_{\phi}^v(\omega) [-i \operatorname{sgn}(\omega \cos(\phi - \alpha))], \end{aligned} \quad (13)$$

de aquí podemos concluir que el filtro usado en el plano de Fourier de proyección se expresa de la siguiente forma

$$h(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega \cos(\phi - \alpha)), \quad (14)$$

esta relación es más general, y esta expresada en términos de una dirección arbitraria, a partir de aquí podemos analizar dos casos; el primer caso si $\alpha = \pi/2$, la ecuación (14) se expresa como sigue

$$h(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega \sin \phi), \quad (15)$$

esta ecuación indica el realce de borde en dirección y , esta expresión es la misma que obtuvimos en la ecuación (10). Ahora analicemos el segundo caso de interés, cuando $\alpha = 0$, la ecuación (14) queda expresada de la siguiente manera

$$h(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega \cos \phi), \quad (16)$$

lo cual indica el realce de borde en dirección x , estos dos casos se cumplen haciendo uso de la ecuación para el filtro en el plano de Fourier (Ec. 14), que es el caso más general en una dirección arbitraria α . Ahora, estableceremos una expresión que indique la operación inversa de la ecuación (12). Partiendo de la ecuación (14), hallamos la transformada de Fourier inversa, es decir

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{sgn}(\omega \cos(\phi - \alpha)) e^{i2\pi\omega p} \quad (17)$$

haciendo $\omega \cos(\phi - \alpha) = \omega' \Rightarrow \omega = \frac{\omega'}{\cos(\phi - \alpha)}$ y $d\omega = \frac{d\omega'}{\cos(\phi - \alpha)}$, entonces la ecuación

(17) la reescribimos como

$$\Rightarrow - \frac{1}{\cos(\phi - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \operatorname{sgn}(\omega') e^{i2\pi \frac{\omega'}{\cos(\phi - \alpha)} p}$$



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla



$$= -\frac{1}{|\cos(\phi - \alpha)|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \operatorname{sgn}(\omega') e^{i2\pi\omega' \frac{p}{\cos(\phi - \alpha)}}$$

$$= -\frac{1}{|\cos(\phi - \alpha)|} \frac{1}{\pi \left(\frac{p}{\cos(\phi - \alpha)}\right)} = \frac{1}{\pi p} \frac{\cos(\phi - \alpha)}{|\cos(\phi - \alpha)|} = \frac{1}{\pi p} \operatorname{sgn}(\phi - \alpha)$$

con lo anterior, la ecuación (13) la relación inversa queda expresa como sigue

$$\overset{\cap}{f}_{\phi}^{\alpha}(p) = \overset{\vee}{f}_{\phi}(p) \otimes \frac{1}{\pi p} (\operatorname{sgn}(\phi - \alpha)) = \operatorname{sgn}[\cos(\phi - \alpha)] \overset{\cap}{f}_{\phi}^{\alpha}(p). \quad (18)$$

Ésta relación es muy importante, ya que nos predice los resultados que se obtendrán a partir de los datos experimentales obtenidos en la mesa de laboratorio, es decir experimentalmente sólo estamos limitados a conocer la expresión del lado izquierdo de la ecuación (18), y la parte derecha de esta ecuación nos predice el resultado que obtendremos, este tratamiento es puramente matemático.

7. SIMULACIÓN NUMÉRICA

La presente simulación muestra la reconstrucción de realce de bordes a partir de la TH, de las proyecciones de la rebanada del objeto, la cual, está basada en las siguientes consideraciones generales:

1. Los rayos de luz son líneas rectas que pasan por el objeto sin desviarse.
2. Los cambios en la sonda al pasar por el objeto se consideran únicamente de fase.
3. Se desprecia la difracción, cambios de polarización, refracción.
4. La función de la rebanada del objeto se considera continua y cero fuera de la región de la rebanada, lo cual permite definir a la función con dominio en todo el plano infinito.

En la simulación se involucran los siguientes pasos: (a) definición de la función de rebanada del objeto $f(x,y)$, (b) senograma $\overset{\vee}{f}_{\phi}(p)$ (TR), (c) 3-D de $\overset{\vee}{f}_{\phi}(p)$, (d) TF de las

proyecciones $\tilde{f}_{\phi}(\omega)$, (e) filtro $-i \operatorname{sgn}(\omega)$, (f) senograma de TH de las proyecciones $\overset{\cap}{f}_{\phi}^{\alpha}(p)$,

(g) retroproyección filtrada $\overset{\cap}{g}_{\phi}^{\alpha}(p)$, (h, i) reconstrucción de la rebanada del objeto en 2-D y

3-D respectivamente, con realce de borde en dirección $y \overset{\vee}{f}_{\phi}^{\pi/2}(p)$, mediante el algoritmo de retroproyecciones, la Fig.3 muestra gráficamente lo antes mencionado. La simulación está desarrollada en Mathematica V. 6.0 Wolfram Research. La Fig. 4 muestra ejemplos de reconstrucción de realce de borde a partir de la TH de las proyecciones de la rebanada del

objeto, donde (a) define la rebanada del objeto $f(x,y)$, (b,c) senograma $\overset{\vee}{f}_{\phi}(p)$ (TR) mapeando los datos del dominio del espacio del objeto al dominio del espacio de los datos de



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla



proyección en 2-D y 3-D respectivamente, (d) $\check{f}_\phi^\alpha(p)$ senograma de la TH de la TR con $\alpha = 0$ que indica realce de borde en dirección x , (e,f) $\check{f}_\phi^\alpha(p)$ reconstrucción de la rebanada con realce de borde 2-D y 3-D respectivamente, con $\alpha = 0$, (g) $\hat{f}_\phi^\alpha(p)$ senograma de la TH de la TR con $\alpha = \pi/2$ indicando el realce de borde en la dirección y , (h,i) $\hat{f}_\phi^\alpha(p)$ reconstrucción de la rebanada con realce de borde 2-D y 3-D respectivamente, con $\alpha = \pi/2$, (j) $\hat{f}_\phi^\alpha(p)$ senograma de la TH de la TR con $\alpha = \pi/4$ el realce de borde es en una dirección arbitraria, (k,l) $\hat{f}_\phi^\alpha(p)$ reconstrucción de la rebanada con realce de borde 2-D y 3-D respectivamente, con $\alpha = \pi/4$. En los resultados numéricos que se muestran se tiene dimensiones de 200 renglones y 200 columnas, con proyecciones de $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$.

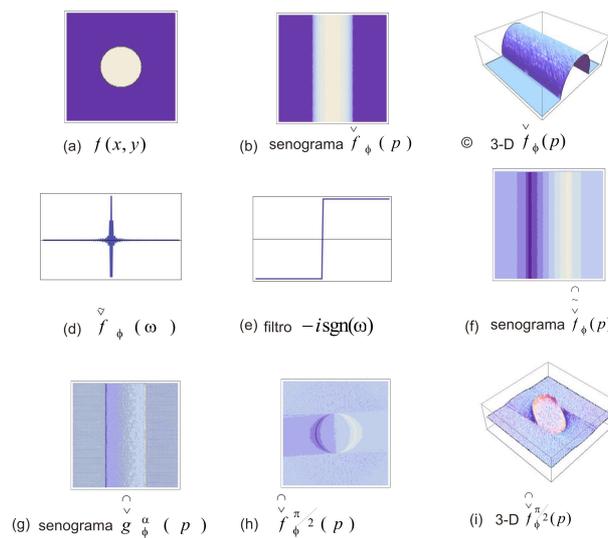


Fig. 3. (a) $f(x,y)$, (b) $\check{f}_\phi(p)$, (c) $\check{f}_\phi(p)$, (d) $\check{f}_\phi^\alpha(p)$, (e) $-i \operatorname{sgn}(\omega)$, (f) $\check{f}_\phi^\alpha(p)$, (g) $\check{g}_\phi^\alpha(p)$, (h, i) reconstrucción en 2-D y 3-D respectivamente, con realce de borde en dirección y $\hat{f}_\phi^\alpha(p)$,



IV CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"Generación de Nuevas Técnicas de Diagnóstico y Tratamiento"

6, 7 y 8 de Junio de 2013, Tonantzintla, Cholula, Puebla

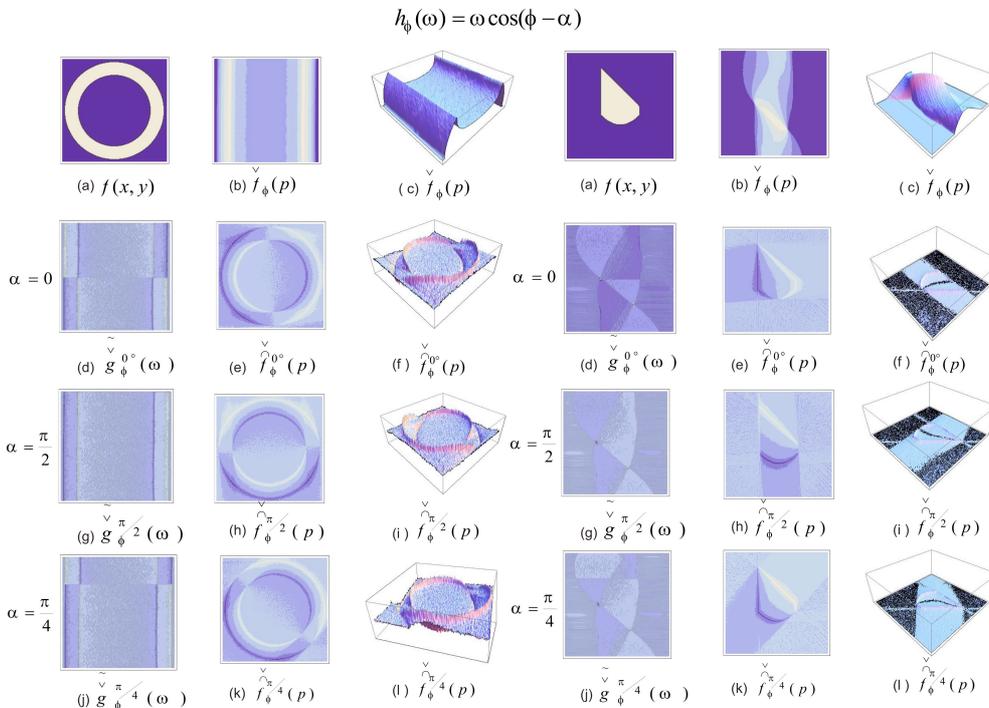


Fig. 4. Ejemplos de reconstrucción con realce de borde, con $\alpha = 0, \pi/2, \pi/4$, en 2D y 3D.

8. CONCLUSIONES

Se ha presentado la matemática fundamental para el método de reconstrucción de realce de bordes de imágenes a partir de la TH de las proyecciones del objeto. Se muestran resultados

de simulación numérica de realce de bordes $f_\phi^\alpha(p)$, pero estamos limitados a efectuar el realce de bordes anisotrópico, es posible tratar el realce de bordes isotrópicamente, esto con la ayuda de encontrar el filtro adecuado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Meneses-Fabián, G. Rodríguez-Zurita, V. Arrizón, "Optical tomography of transparent objects whit phase-shifting interferometry and stepping wise shifted Ronchi ruling", J. Opt. Soc. Am A **23**, 298-305 (2006).
- [2] Stanley R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, Department of Physics, University of South Florida, John Wiley & Sons 1993.