



**V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD**  
5, 6 y 7 de junio de 2014  
TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

**ANÁLISIS FRACTAL DEL ELECTROENCEFALOGRAMA ¿ES EL EXPONENTE DE HURST UN BUEN INDICADOR DE COMPLEJIDAD CEREBRAL?**

<sup>a</sup>Arzola Flores Jesús Andrés

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería Química, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Puebla, Pue.,  
[jesus\\_andres@comunidad.unam.mx](mailto:jesus_andres@comunidad.unam.mx)

**RESUMEN**


En el presente estudio se propone una metodología basada en técnicas estadísticas para el análisis cuantitativo y cualitativo de los electroencefalogramas, mediante el análisis fractal de dichas series de tiempo. Se evaluó el exponente de Hurst para un electroencefalograma de movimiento motor, encontrándose una correlación entre los valores de exponente de Hurst y la dimensión fractal con la actividad del cortex motor y cortex visual. Se concluye que el análisis fractal de las series de tiempo mediante la evaluación del carácter auto afín por el método de Rango re-escalado puede ser un buen indicador y cuantificador de la complejidad cerebral.

**1. INTRODUCCIÓN**

En otro tiempo, diversos aspectos de la naturaleza eran considerados como rarezas, situaciones extrañas o simplemente aberraciones<sup>1</sup>. A estos fenómenos que se resisten a explicaciones de causa y efecto, infinitamente irregulares y particularmente bellas, se les dio lugar en un nuevo apartado de la ciencia, llamada geometría de la irregularidad o geometría fractal (donde la unidad básica requerida son los sistemas complejos), que en el último siglo se ha desarrollado con gran auge en distintas áreas<sup>1</sup>. Debido a sus múltiples niveles de organización, el cerebro puede entenderse como un sistema altamente complejo, ya que posee una intrincada red neuronal capaz de realizar tareas sumamente especializadas. La interacción no lineal entre neuronas le confiere al cerebro la habilidad de mostrar comportamientos colectivos, los cuales emergen como emociones, memoria, aprendizaje, etc.<sup>2,3,4</sup>

Los estudios experimentales y teóricos de la actividad cerebral de los seres humanos requieren técnicas no invasivas tales como la electroencefalografía (EEG), la magnetoencefalografía (MEG) y la proyección de imagen de resonancia magnética funcional (fMRI). Entre éstos el EEG provee una medida más directa de la actividad cortical con una alta resolución temporal (<1 milisegundo)<sup>5</sup>.

Los electroencefalogramas son series de tiempo con una estructura sumamente irregular, por lo que es imposible estudiarlos desde la tradicional visión euclidiana, por lo tanto, es necesario el uso de la geometría fractal, la cual permite cuantificar una propiedad conocida como dimensión fractal,



V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD  
5, 6 y 7 de junio de 2014  
TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

esta propiedad de los electroencefalogramas puede ser utilizada para evaluar el nivel de complejidad cerebral en pacientes sanos y enfermos<sup>4</sup>.

## 2. TEORÍA

Para analizar el electroencefalograma se emplean técnicas que permiten estudiar cada uno de los electrodos que componen a este método diagnóstico como series de tiempo. Por ello, es necesario encontrar el método más exacto para valorar cuantitativamente un electroencefalograma. Esto se realiza en base al análisis estadístico de los datos de voltaje vs tiempo. Para la realización de este estudio se empleó la base de datos de Physionet (<http://www.physionet.org/>) para obtener un electroencefalograma de movimiento motor (<http://www.physionet.org/cgi-bin/atm/ATM>).

## 3. PARTE EXPERIMENTAL

Al electroencefalograma obtenido de la base de datos de Physionet, se le aplicó la técnica matemática de análisis fractal mediante la evaluación del exponente de Hurst por el método de rango re-escalado (R/S)<sup>4</sup>, el cual consiste en obtener subconjuntos de igual tamaño a partir de la serie de tiempo original, posteriormente, se determina el valor promedio o primer momento estadístico de la serie de tiempo, subsecuentemente, se obtienen las sumas parciales de cada subconjunto, es decir, a cada valor del subconjunto se le resta el valor promedio y luego se determina el rango de esas sumas parciales, dicho de otra manera, se obtiene el valor máximo, mínimo y su diferencia. Finalmente, este rango se re-escala con la desviación estándar muestral. El procedimiento se repite para subconjuntos de diferentes tamaños<sup>4</sup>. La dependencia de este rango re-escalado con el tamaño de los subconjuntos tiene la forma de ley de potencia.<sup>4</sup>.

### Matemáticamente

Donde  $r_k$  es el nueva variable que calcula la diferencia de cada elemento de la serie de tiempo respecto de la media<sup>4</sup>.

$$r_k = \sum_{t=1}^k X_t - \frac{k}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

En la cual  $X_t$  es el k-ésimo dato de la serie de tiempo y  $\frac{k}{n} \sum_{t=1}^n X_t$  es la media aritmética de los datos. La desviación muestral se define cómo:

$$S(n) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( X_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Redefiniendo la desviación estándar como:

$$S(n) = \sigma$$

V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD  
 5, 6 y 7 de junio de 2014  
 TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

Y el re-escalamiento se define:

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max\{0, r_t: t = 1, 2, \dots, n\} - \min\{0, r_t: t = 1, 2, \dots, n\}}{\sqrt{S(n)^2}}$$

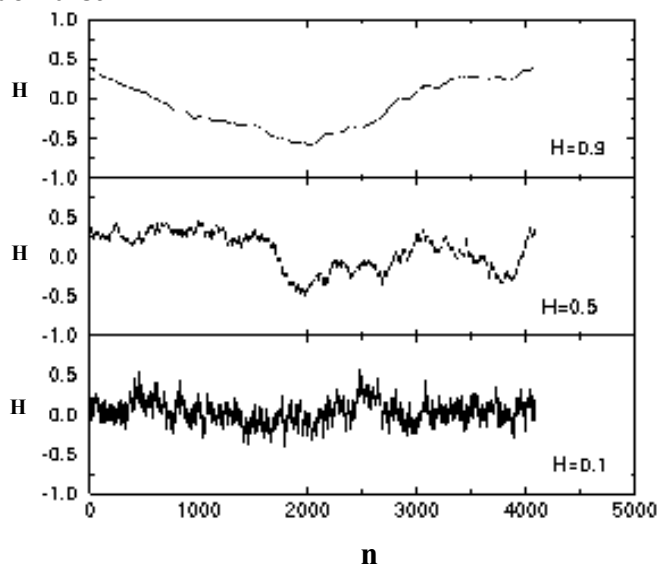
Dónde el Exponente de Hurst está relacionado con el Rango re-escalado de la siguiente manera:

$$\frac{R}{\sigma} \propto n^H$$

Dónde n es el número de datos de la serie de tiempo y H es el exponente de Hurst<sup>4</sup>.

Como un buen indicador de complejidad empleamos el exponente de Hurst (H) para describir el carácter auto afín del electroencefalograma ya que indica el grado de rugosidad de las curvas y así determinar si un fenómeno o una serie de tiempo presentan un comportamiento fractal además mide la intensidad de dependencia a largo plazo de una serie de tiempo<sup>4,6,7,8</sup>. Se dice que el fenómeno analizado es aleatorio cuando H=0.5, y es persistente cuando 0.5<H<1, (existe invariancia de escala asociada a correlaciones positivas a largo plazo, es decir, un periodo de crecimiento es seguido de otro análogo), y que es antipersistente cuando 0<H<0.5 (existe invariancia en la escala asociada a correlaciones negativas a largo plazo, es decir un periodo de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento)<sup>4</sup> (ver figura 1).

**Figura 1. Exponente de Hurst**



**Figura 1.** Gráfica de exponente de Hurst vs No de datos.

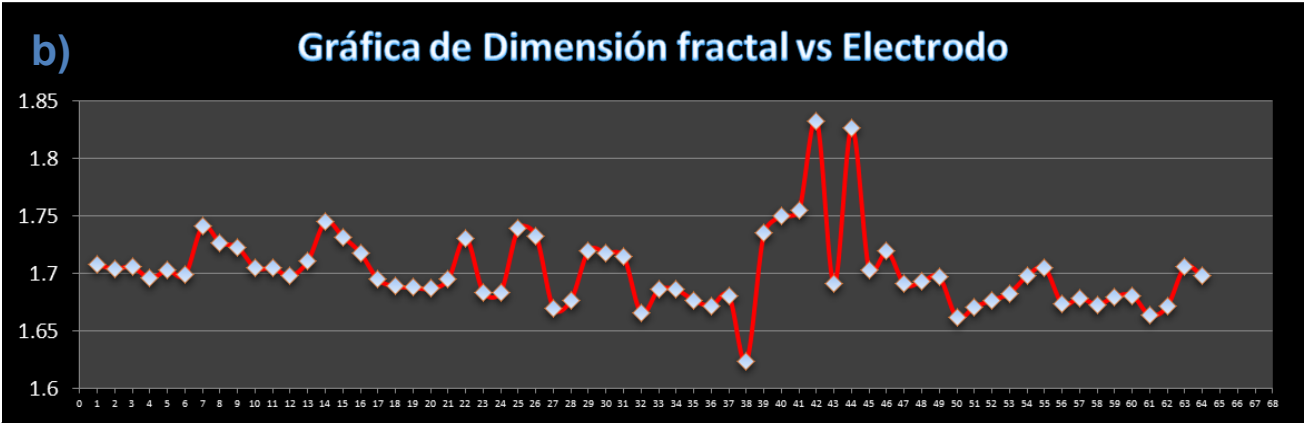
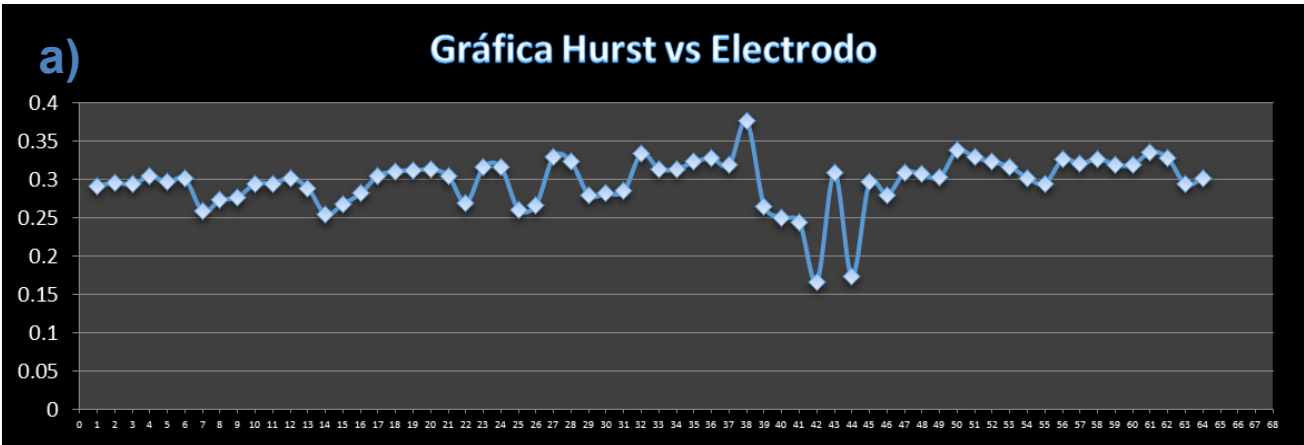


V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD  
5, 6 y 7 de junio de 2014  
TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

Se analizó estadísticamente un electroencefalograma de movimiento motor al cual se le aplico la técnica matemática de análisis fractal mediante la evaluación del exponente de Hurst por el método de rango re-escalado (R/S) y la dimensión fractal para los 64 canales o electrodos del electroencefalograma.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

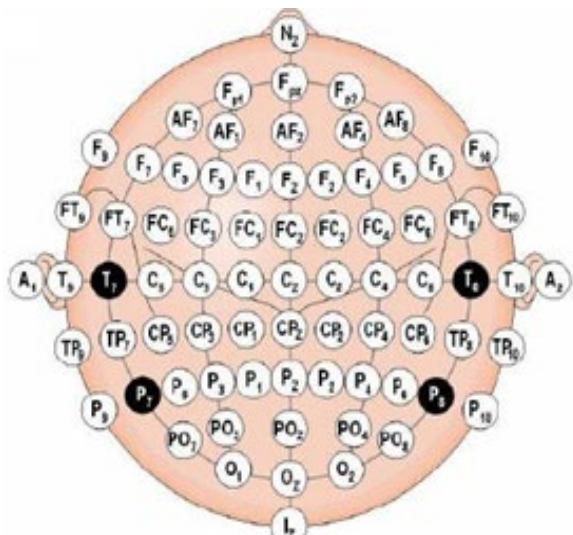
Figuras 2. a) Exponente de Hurst vs Electrodo. b) Exponente de Hurst vs Dimensión fractal



Figuras 2. Análisis fractal del electroencefalograma de movimiento motor. a) La gráfica muestra el valor del exponente de Hurst para cada uno de los 64 canales o electrodos del electroencefalograma. Se puede apreciar como el valor del exponente de Hurst para los canales 41 a 45 oscila. b) La gráfica muestra la dimensión fractal de cada uno de los 64 canales o electrodos del electroencefalograma. Se puede apreciar como la dimensión fractal de igual manera oscila para los canales 41 a 45.



V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD  
 5, 6 y 7 de junio de 2014  
 TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

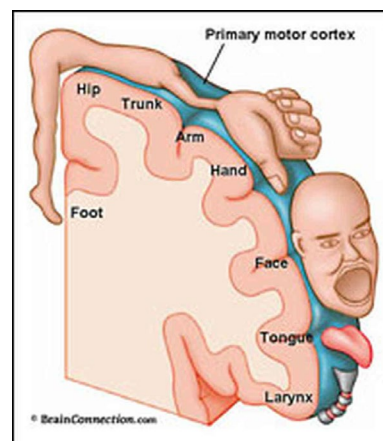
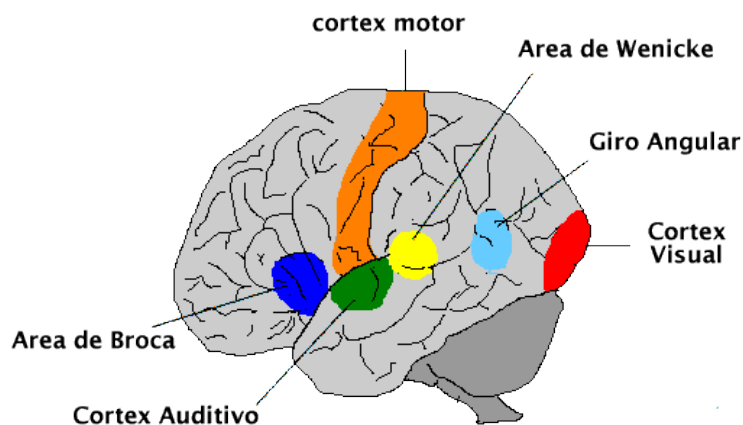


Canal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Electrodo	'Fc5'	'Fc3'	'Fc1'	'Fcz'	'Fc2.'	'Fc4.'	'Fc6.'	'C5'	'C3'	'C1'
Canal	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Electrodo	'Cp6'	'Fp1'	'Fpz'	'Fp2'	'Af7'	'Af3'	'Afz'	'Af4'	'Af8'	'F7'
Canal	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Electrodo	'F5'	'F3'	'F1'	'Fz'	'F2'	'F4'	'F6'	'F8'	'Ft7'	'Ft8'
Canal	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Electrodo	'T7'	'T8'	'T9'	'T10'	'Tp7'	'Tp8'	'P7'	'P5'	'P3'	'P1'
Canal	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Electrodo	'Pz'	'P2'	'P4'	'P6'	'P8'	'Po7'	'Po3'	'Poz'	'Po4'	'Po8'
Canal	61	62	63	64						
Electrodo	'O1'	'Oz.'	'O2'	'Iz'						

**Tabla 1.** Nombre y localización espacial de cada uno de los 64 canales o electrodos.

**Figura 3.** Localización de una configuración de 64 electrodos. (Adaptado de Malmivuo, 1995)<sup>5</sup>.

Al observar las figuras 2, se puede apreciar como el exponente de Hurst y la dimensión fractal oscilan en los canales 41, 42, 43, 44 y 45, los cuales corresponden a los electrodos T7, T8, T9, T10 y Tp7, respectivamente. Analizando la figura 2, se puede observar que estos electrodos están colocados en las zonas pertenecientes a la corteza motora. Las partes más bajas del cortex motor, cercanas a las sienas, controlan los músculos de la boca y la cara, mientras que las áreas más cercanas a la parte superior de la cabeza controlan las piernas y los pies (ver figuras 3). También se puede apreciar que en los canales 50 a 61, que corresponden al cortex visual, el exponente de Hurst se mantiene estable, oscilando poco entre los valores 0.302-0.336.



**Figuras 4.** Localización de la corteza motora.



## V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD 5, 6 y 7 de junio de 2014 TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO

### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se consideró al electroencefalograma como un fractal debido a sus propiedades de autosimilitud, por lo que se estudió mediante su dimensión fractal y se cuantificó su complejidad mediante el exponente de Hurst.<sup>4</sup>

Se puede concluir que el exponente de Hurst es un buen indicador y cuantificador de la complejidad cerebral, puesto que el electroencefalograma analizado corresponde al movimiento motor de una persona sana; asimismo, al observar los resultados se verificó que efectivamente las zonas con mayor complejidad correspondían a los canales localizados en el cortex motor y visual, ya que para realizar una actividad motriz, se requiere de la corteza motora y asumimos que por los valores encontrados del exponente de Hurst de los electrodos colocados en el área del córtex visual, cabría suponer la utilización de la misma para coordinar los movimientos y llevar a cabo la acción.

Sin duda, la Medicina en un tiempo inmediato dependerá de la computación y, sobre todo, modelos matemáticos que nos permitirán una valoración más próxima a la realidad de lo que ahora, con sorprendivos ojos denominamos salud y enfermedad<sup>10</sup>.

### BIBLIOGRAFÍA

1. QUEZADA, A. (2006). "Fractales y opinión pública: una aplicación del exponente de Hurst al estudio de la dinámica de la identificación ideológica". (Tesis de doctorado). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.
2. Facultad de Psicología, Departamento de Psicología Social. Barcelona, Junio 2006. 177-179.
3. KANDEL Eric R, et SCHWARTS James H, JESSELL Thomas M. Principles of Neural Sciences. Third Edition. Center for Neurobiology and Behavior College of Physicians and Surgeons of Columbia University and The Howard Hugues Medical Institute. Elsevier. 283-295.
4. Contreras Troya, T.I. (2007). Análisis fractal de un sistema complejo: Epilepsia (Tesis de Maestría). Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.



**V CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD**  
**5, 6 y 7 de junio de 2014**  
**TONANTZINTLA, PUEBLA, MÉXICO**

5. Ferreira Lage, Elisabete. (2009). La técnica de electroencefalografía en la evaluación de la actividad cortical motora (Tesis de Maestría). Instituto de Neurociencias Castilla y León. Universidad de Salamanca, Salamanca, España.
6. GEBHAR Kirchgässner., et JÜRGEN Wolters. Introduction to Modern Time Series Analysis. First Edition. Berlin, Germany. Springer. 27-89.
7. SHUMWAY Robert H, et STOFFER David S. Time Series Analysis and its Applications .Third Edition. New York, USA. Springer. 1-78.
8. ABRIL Juan Carlos. Análisis de series de tiempo basado en modelos de espacio estado // Notes.
9. MARTÍN RODRIGUEZ Amelia. Análisis fractal: Algunas aplicaciones. Revista cubana de física – Vol. 17. – No 1,2- 2000.
10. José Gabriel Ávila Rivera. (2014). Las matemáticas en la medicina. 2014, de Saberes y Ciencias Sitio web: <https://saberesyciencias.com.mx/2014/03/02/las-matematicas-en-la-medicina/>.
11. Base de datos Physionet. National Institute of Biomedical Imaging and Bioengineering and National Institute of General Medical Sciences. Fecha de consulta: 15/02/2014. <http://www.physionet.org/>