



# VII CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

16-18  
junio 2016  
Unidad de Seminarios, BUAP

"GENERACION DE NUEVAS TECNICAS DE DIAGNOSTICO Y TRATAMIENTO"



## PROBLEMA DIRECTO ELECTROENCEFALOGRÁFICO PARA FUENTES EN LA CORTEZA CEREBRAL ASOCIADOS A FOCOS EPILÉPTICOS.

M.M. Morín-Castillo<sup>\*</sup>, J.J. Oliveros-Oliveros<sup>\*\*</sup>, C. Netzahualcoyotl Bautista<sup>\*\*</sup>, G. García Aguilar<sup>\*\*\*</sup>,  
B. S. Soto Cruz<sup>\*</sup>, S. Alcántara Iniesta<sup>\*</sup>, E. M. Gutiérrez Arias<sup>\*</sup>, E. Flores Mena<sup>\*</sup>.

<sup>\*</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla México, [oliveros@cfcm.buap.mx](mailto:oliveros@cfcm.buap.mx),  
[netzahualcoyotl\\_24@hotmail.com](mailto:netzahualcoyotl_24@hotmail.com)

<sup>\*\*</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Puebla, México, [mmorin@ece.buap.mx](mailto:mmorin@ece.buap.mx),  
[blanca.soto@icbuap.buap.mx](mailto:blanca.soto@icbuap.buap.mx), [salvador@siu.buap.mx](mailto:salvador@siu.buap.mx), [jmgutierrez@ece.buap.mx](mailto:jmgutierrez@ece.buap.mx),  
[eflores@ece.buap.mx](mailto:eflores@ece.buap.mx).

<sup>\*\*\*</sup>Facultad de Psicología, BUAP. Puebla, México. [gregorio.garcia@correo.buap.mx](mailto:gregorio.garcia@correo.buap.mx).

### RESUMEN

En la actualidad hay un gran interés por la investigación sobre los métodos no destructivos para detección de fuentes de actividad bioeléctrica en el cerebro. Estos métodos tratan de identificar alguna(s) característica(s) el cerebro a partir del electroencefalograma (EEG) el cual registra la actividad eléctrica por medio de electrodos sobre el cuero cabelludo.

La Electroencefalografía es una de las técnicas más conocidas de investigación no invasiva del cerebro. Por medio de ella se registran los potenciales en un electroencefalograma; estos potenciales provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia. Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentran que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no invasiva además de económica. Por medio de esta técnica se han detectado posibles anomalías en el cerebro y una de sus principales aplicaciones se encuentra en el diagnóstico y detección de focos epilépticos. La epilepsia es una alteración neurológica crónica, caracterizada por crisis convulsivas recurrentes y espontáneas, producidas por descargas eléctricas anormales de las neuronas corticales.

El Problema Inverso Electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir del EEG medido sobre el cuero cabelludo, las fuentes de actividad bioeléctrica que lo generan. En este trabajo se proponen modelos para generar el EEG producido por un foco epiléptico ubicado en corteza cerebral. En estos modelos se proponen tres posibles casos: que la fuente esté ubicada en el volumen de la corteza cerebral, sobre la superficie de separación del cerebro y el resto de la cabeza o que por su ubicación espacial ocupe tanto volumen de la corteza cerebral como parte la mencionada frontera superficie de separación. El objetivo es obtener un modelo matemático para el Problema Directo Electroencefalográfico para zonas epileptógenas, con lo cual podamos reproducir el EEG de pacientes con diagnóstico de la epilepsia. Con ello se podrá estudiar el PIE para este tipo de fuentes.

### 1. INTRODUCCIÓN

En diversos campos de la investigación, se presentan situaciones en las cuales es necesario conocer las causas que producen cierto fenómeno a través de la información parcial que se obtiene del mismo ([1]). Este tipo de problemas son llamados de identificación y son ampliamente estudiados en muchos campos de la investigación, entre otros la medicina, donde hay un gran interés en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, a partir de los datos obtenidos por medio de un electroencefalograma (EEG) ya que permiten detectar posibles anomalías (daños, mal funcionamiento, etc.) lo que se ha hecho tradicionalmente a través de diferentes técnicas de diagnóstico.



# VII

CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

16-18  
junio 2016

Unidad de Seminarios, BUAP

"GENERACION DE NUEVAS TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO"



En el área médica se utilizan diferentes técnicas de identificación como son: la tomografía por emisión de positrones, la resonancia magnética nuclear, la electroencefalografía, esta última es de particular interés para nosotros, ya que permite registrar los potenciales por medio de un electroencefalograma (EEG); estos potenciales provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia. A las fuentes que son generadas por la actividad electroquímica de estos órganos se les conoce como fuentes bioeléctricas y se considera que están compuestas por grandes conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente. Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentran que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no invasiva además de económica. En algunos casos podemos considerar que los generadores están concentrados en una región del cerebro y que pueden representarse por funciones de cuadrado integrable definidas sobre esa región. En el caso particular en que se tiene una fuente dipolar (con la cual se representan a los focos epilépticos), es necesario enfocar el análisis de este problema a través de las distribuciones o funciones generalizadas. Para el estudio de este problema se consideran el problema directo e inverso electroencefalográfico. El primero de ellos consiste en hallar el EEG cuando conocemos a la fuente. El segundo consiste en determinar la fuente a partir del EEG.

La corteza cerebral es una lámina gris, formada por cuerpos de neuronas, que cubre los hemisferios cerebrales y cuyo grosor varía de 1.25 mm en el lóbulo occipital a 4 mm en el lóbulo anterior. Cada hemisferio se divide en cuatro grandes lóbulos: frontal, parietal, temporal y occipital. En general, los lóbulos se sitúan debajo de los huesos que llevan el mismo nombre. Así, el lóbulo frontal descansa en las profundidades del hueso frontal, el lóbulo parietal debajo del hueso parietal, el lóbulo temporal debajo del hueso temporal y el lóbulo occipital debajo de la región correspondiente a la protuberancia del occipital.

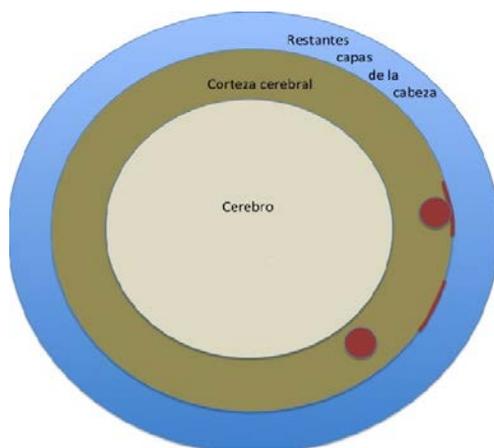
En este trabajo se está interesado en la detección de los focos epilépticos en la corteza cerebral. Los focos epilépticos pueden encontrarse en el volumen o en la corteza cerebral. Para el primer caso se utiliza la técnica de la función de Green para su análisis y la teoría de funciones generalizadas, para el caso en que los focos epilépticos se encuentran en la corteza cerebral se busca la solución como suma de un potencial de capa doble más uno de capa simple. Para la detección de los focos epilépticos en la corteza cerebral se va a resolver primero el problema directo es decir conozco la fuente (foco epiléptico) y lo que quiere obtener es la medición que produce el EEG, para esto se considera la solución en armónicos esféricos, para resolver los modelos que se están proponiendo.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático que se presenta en este trabajo ha sido ampliamente utilizado para el estudio del problema de identificación en ([1], [3], [4], [5]); en él la cabeza humana ha sido modelada por medio de capas conductoras con conductividad constante y diferente en cada capa. La actividad eléctrica del cerebro es registrada en el cuero cabelludo por medio del EEG. Se considera para la modelación que el EEG es producido por grandes conglomerados de neuronas que se activan simultáneamente que pueden estar concentradas en el volumen, en la corteza o en ambas; a estos conglomerados de neuronas se les conoce como generadores o fuentes bioeléctricas ([4], [6]). Para la modelación se supone que las corrientes que pueden producirse en la región  $\Omega$  se deben únicamente a la actividad eléctrica del cerebro y pueden ser de dos tipos: óhmicas e impresas. Las primeras se deben al movimiento de cargas iónicas a través del fluido extracelular en el cerebro y las segundas a las corrientes de difusión a través de las membranas neuronales ([6]) las cuales se denotan por  $J^p$  y son las de interés en el problema de identificación,



ya que el soporte de estas puede darnos información sobre la ubicación espacial de la zona afectada. Tomando en cuenta que la corteza cerebral tiene un grosor se puede considerar tres modelos para generar los EEG cuando se conoce la fuente, el modelo cuando la fuente se encuentra en el volumen de la corteza cerebral, cuando la fuente esta sobre la superficie de la corteza cerebral o la fuente se encuentra en ambos lugares, volumen y superficie cerebral. Como se muestra en la figura (2)



**Figura 1:** Representación de la corteza cerebral para los modelos matemáticos.

A partir de lo anterior, se demuestra que el estudio del Problema Directo Electroencefalográfico (PDE) para el caso en que la fuente se encuentra concentrada en el volumen, puede ser realizado a través del siguiente problema de valores en la frontera ([1], [4], [5], [7]):

$$\Delta u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \tag{2}$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \tag{3}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en } S_1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{en } S_2, \tag{5}$$

donde  $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$  representa a la cabeza,  $\Omega_1$  el cerebro,  $\Omega_2$  el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo),  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las conductividades de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  las cuales se suponen constantes (ver figura 2),  $f = \frac{\text{div} \mathbf{J}^p}{\sigma_1}$  es



llamada la fuente,  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $u$  representa al potencial eléctrico en  $\Omega$ . El símbolo  $\Delta$  representa al operador Laplaciano, que también se simboliza como  $\nabla^2$ . Obsérvese que en este caso podremos recuperar sólo una parte de la fuente bioeléctrica  $J^p$ . Las condiciones de frontera (3)-(4) son llamadas de transmisión y la condición de frontera (5), se obtiene al considerar que la conductividad de  $\Omega^c$  es cero (la conductividad del aire). De las fórmulas de Green se deduce la siguiente condición de compatibilidad

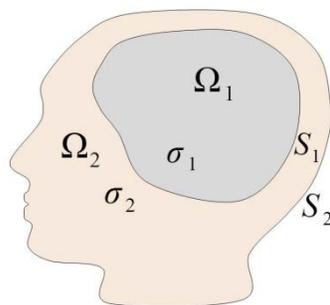
$$\int_{\Omega_1} f(x) dx = 0.$$

En el caso en que sólo se consideren fuentes corticales, su presencia se refleja sobre la condición de frontera asociada con la igualdad de flujos de corriente. Si denotamos por  $j^p$  a la densidad de corriente cortical entonces dicha condición de frontera toma la forma:

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + j^p \cdot n_1 \quad \text{en } S_1.$$

Se denomina a  $j^p \cdot n_1$  fuente cortical y satisface una condición de compatibilidad similar a la (6). Sin embargo, si consideramos simultáneamente tanto fuentes corticales como volumétricas esta condición se debe cumplir es  $\int_{\Omega_1} f(x) dx + \int_{S_1} j^p \cdot n_1 dx = 0$ . El caso de fuentes corticales ha sido

estudiado en [8] y se busca la solución como la suma de un potencial de capa doble definido  $S_1$  más uno de capa simple definido sobre  $S_2$ . En este caso la densidad dipolar definida sobre  $S_1$  puede representar la actividad de neuronas piramidales y, por lo tanto, brindar información sobre la zona activa de la corteza cerebral. Sin embargo, en ese trabajo sólo se consideraron fuentes que pueden representarse por funciones campana y no por funciones generalizadas con las cuales se representan las fuentes dipolares.



**Figura 2:** Representación de la cabeza como dos medios conductores homogéneos acoplados.



### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO PARA FUENTES DIPOLARES

En este trabajo estamos interesados en el caso en que la fuente corresponde a un foco epiléptico y la representación matemática de este tipo de fuentes es por medio de las funciones campanas. Más precisamente, un foco epiléptico concentrado en el punto  $a$  puede representarse en la forma ([4]):

$$J^p = \mathbf{p}\delta(x-a), \quad (22)$$

donde  $\mathbf{p}$  representa al momento dipolar y  $\delta(x-a)$  es la función delta de Dirac concentrada en  $a$  que es representada por funciones campanas. La idea básica para hallar la solución en este caso es la siguiente: ya que  $\delta(x-a)$  es el límite de funciones suaves concentradas alrededor de  $a$ , para cada una de dichas funciones suaves, se busca la solución clásica en términos de una función de Green y se toma el límite de dichas soluciones clásicas para hallar la solución que corresponde a  $f(x) = \frac{\text{div}J^p}{\sigma_1}$  cuando  $J^p$  está dado por (22) para el caso en que la fuente este en el volumen y para cuando la fuente está en la corteza la expresión es la (22).

#### Caso en el que la fuente está en el volumen de la corteza cerebral.

Consideremos el modelo dado por las ecuaciones (1) a (5). Dado  $f(x) = \frac{\text{div}J^p}{\sigma_1}$  lo que voy a buscar el la solución del problema directo, es decir la medición que produce la fuente. Para simplicidad vamos a considerar resolver el problema en tres dimensiones

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi).$$

Se va a considerar los potenciales

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{n+2}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (C_{nm} r^n + D_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

Tomando las condiciones del problema (1)-(5), se obtienen los coeficientes  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$  y  $D_{nm}$ .

A continuación se evalúan los coeficientes obtenidos en el potencial  $u_2(r, \theta, \phi)$ , luego se evalúa

$u_2(r, \theta, \phi)|_{R_2}$  y se llega a que la solución del problema directo está dado como

$$v(R_2, \theta, \phi) = u_2(R_2, \theta, \phi) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ \frac{2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} R_2^n (n+2)}{(4n+6) \left[ (n+1)(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2n+1} + (n(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_2) R_2^{2n+1} \right]} \right] y_{nm}(\theta, \phi),$$

donde  $v(R_2, \theta, \phi)$  es la medición sobre el cuero cabelludo (EEG).



### Caso en el que la fuente está en la superficie de la corteza cerebral

En el caso en que solo se consideren fuentes corticales, la presencia de estas se refleja sobre la condición de frontera con igualdad de corriente. Si denotamos por  $j^p \cdot n_1$  a la densidad de corriente cortical, entonces el problema de estudio es

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (6)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (7)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \quad (8)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + j^p \cdot n_1 \quad \text{en } S_1. \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{en } S_2, \quad (10)$$

Se resuelve el problema en tres dimensiones. Así que dado  $f(x) = J^p \cdot n_1$ , donde se va a considerar

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi),$$

La solución se busca en la forma

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi)$$

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi)$$

Considerando las condiciones de contorno del problema (6)-(10) se encuentran los coeficientes  $C_{nm}$ ,  $A_{nm}$  y  $B_{nm}$ . Después se evalúan los coeficientes obtenidos en el potencial  $u_2(r, \theta, \phi)$ , luego se evalúa  $u_2(r, \theta, \phi)|_{R_2}$  y se llega a que la solución del problema directo está dado como

$$v(R_2, \theta, \phi) = u_2(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ \frac{(2n+1) f_{nm} R_1^{n+2} R_2^n}{n \left[ (n+1)(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2n+1} + (n(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_2) R_2^{2n+1} \right]} \right] y_{nm}(\theta, \phi),$$

donde  $v(R_2, \theta, \phi)$  es la medición sobre el cuero cabelludo (EEG).

### Caso en el que la fuente está sobre la corteza y volumen

Si consideramos simultáneamente tanto fuentes corticales como volumétricas el modelo se plantea de la siguiente forma



# VII CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

"GENERACION DE NUEVAS TECNICAS DE DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO"

16-18 junio 2016  
Unidad de Seminarios, BUAP



$$\Delta u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (11)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (12)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \quad (13)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + j^p \cdot n_1 \quad \text{en } S_1. \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{en } S_2, \quad (15)$$

. Se resuelve el problema en tres dimensiones. Dado

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi).$$

Se consideran

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{n+2}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (C_{nm} r^n + D_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi).$$

La solución del problema directo del problema (11)-(15) es la suma de las soluciones de los dos casos anteriores. Así que la medición sobre el cuero cabelludo esta dado como

$$v(R_2, \theta, \phi) = u_2(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ \frac{f_{nm} R_2^n (2(n+2)\sigma_1 R_1^{2n+3}) + (2n+1)R_1^{n+2}}{(5n+6) \left[ (n+1)(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2n+1} + (n(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_2) R_2^{2n+1} \right]} \right] y_{nm}(\theta, \phi).$$

donde  $v(R_2, \theta, \phi)$  es la medición sobre el cuero cabelludo (EEG).

## 4. CONCLUSIONES

Se presentan tres modelos para el EEG producido por una fuente sobre corteza cerebral suponiendo que esta se conoce. Los modelos propuestos consideran que la corteza cerebral está compuesta por un lámina de neuronas piramidales cuyo espesor se encuentra entre 1.25 mm en el lóbulo occipital a 4 mm. Se considera el modelo de esferas concéntricas para representan a la cabeza y se halla la solución de un problema de contorno que nos permite simular el EEG. Estos modelos deben compararse con EEG reales lo cual es el paso siguiente de la investigación

## BIBLIOGRAFÍA

1. Fragueta A, Morín M. Oliveros J. "Modelos Matemáticos en Electroencefalografía Inversa" En: Jiménez Pozo M, Bustamante González J, editores, Tópicos de la Teoría de Aproximación II, Capítulo 4. Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007; 73-95.



# VII CONGRESO NACIONAL DE TECNOLOGÍA APLICADA A CIENCIAS DE LA SALUD

16-18 junio 2016  
Unidad de Seminarios, BUAP

"GENERACION DE NUEVAS TECNICAS DE DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO"



2. Beatriz Fuertes de Gilbert Rivera, Rafael López Gutiérrez, Pedro Gil Gregorio. "EPILEPSIA" En: Tratado de geriatría para residentes. Editado por Sociedad Española de Geriatría y Gerontología (SEGG), Príncipe de Vergara, 57-59, 1.º B, 28006 (Madrid), 2006: 519-530.
3. Heller L. "Return Current in Encephalography. Variational Principles" Biophysical Journal, 1990; 5: 601-607.
4. Sarvas J. "Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem" Phys. Med. Biol., 1987, 32(1): 11-22.
5. Grave R, González S, Gómez C. M. "Bases biofísicas de la localización de los generadores cerebrales del electroencefalograma. Aplicación de un modelo tipo distribuido a la localización de focos epilépticos" Revista de Neurología, 2004; 39: 748-756.
6. Nuñez P.L. Electric Field of the Brain. New York, Oxford Univ. Press, 1981.
7. Fraguela A, Morín M, Oliveros J. "Planteamiento del Problema Inverso de Localización de los Parámetros de una Fuente de Corriente Neuronal en forma de Dipolo" Comunicaciones de la Sociedad Matemática Mexicana, 1999; 25: 41-55.
8. Fraguela A, Oliveros J, Grebennikov A. "Planteamiento operacional y análisis del problema inverso electroencefalográfico" Revista Mexicana de Física, 2001; 47 (2): 162-174.
9. Fraguela A, Morín M, Oliveros J. "Inverse electroencephalography for volumetric sources" Mathematics and Computers in Simulation, 2008; 78: 481-492.
10. D. Rubio and M.I. Troparevsky. (2005). the EEG Forward Problem: Theoretical and Numerical Aspects. *Procesamiento de la Información y Control*, 55-60.
11. Kirsch A., 1996. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer Verlag
12. Kress R., Linear Integral Equations. Springer Verlag. 1989.