



IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DEL ALGORITMO SIGMA DE LANCZOS EN DISPOSITIVOS PROGRAMABLES PARA LA ATENUACIÓN DEL FENÓMENO DE GIBBS

C. Juan José Meza Gutiérrez¹, Dra. Monserrat Morin Castillo¹, Dr. Jacobo Oliveros Oliveros², Dr. José Rubén Conde Sánchez².

¹Facultad de Ciencias de la Electrónica, de la BUAP, ²Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, de la BUAP.

Sesión de preguntas y respuestas

<https://meet.google.com/ixm-whim-ewu>

Resumen

Las series de Fourier son una herramienta matemática ampliamente utilizada en el área de procesamiento de señales, así como de gran importancia en el desarrollo de dispositivos de diagnóstico médico. Cuando este tipo de series se utilizan para aproximar funciones definidas a trozos, suelen presentarse oscilaciones en las cercanías de los puntos de discontinuidad, las cuales se estrechan, pero no desaparecen conforme se incrementa el número de coeficientes, lo cual, es conocido como Fenómeno de Gibbs. Este fenómeno puede ser muy perjudicial en diferentes aplicaciones de la ingeniería y en particular en ingeniería biomédica. A manera de ejemplo, en la generación de Imagen por Resonancia Magnética, este fenómeno puede provocar la aparición de objetos inexistentes en la imagen. Este trabajo presenta el desarrollo de dos arquitecturas para implementar el algoritmo del sigma-Factor Lanczos, que permite atenuar la magnitud de las oscilaciones ocasionadas por el Fenómeno de Gibbs e incrementa la rapidez de convergencia de las series de Fourier. Las arquitecturas son diseñadas para operar en dispositivos programables basados en el sistema integrado en un chip (SoC) Zynq 7020, utilizando las metodologías de diseño de descripción de hardware y síntesis de alto nivel. Se comparan los recursos de hardware utilizados por cada arquitectura y se implementan para sintetizar funciones definidas a trozos conocidas. Finalmente, los resultados son evaluados a través de su error absoluto medio y la magnitud del sobreimpulso máximo producido por las oscilaciones del Fenómeno de Gibbs para contrastar los beneficios del uso del sigma-Factor.

Introducción

Una de las áreas de estudio de las series de Fourier es el denominado Fenómeno de Gibbs, que se caracteriza por una mala aproximación a funciones definidas a trozos, específicamente en sus puntos de discontinuidad. Esta mala aproximación se ve reflejada en la presencia de oscilaciones, con un sobreimpulso máximo que tiende a un valor cercano al 9 % de la amplitud del salto de la discontinuidad de la función, conforme el número de coeficientes utilizados en la serie tiende a infinito.

En este trabajo se estudia la implementación del algoritmo del sigma-Factor Lanczos en dispositivos programables, debido a que este factor posee la propiedad de atenuar los efectos del Fenómeno de Gibbs así como incrementar la rapidez de convergencia de las Series de Fourier.

Objetivos

Implementar en el SoC Zynq 7020 mediante, dos metodologías de diseño distintas, el algoritmo del factor σ -Lanczos para atenuar el fenómeno de Gibbs.

1. Implementar el algoritmo del factor σ -Lanczos a partir de una arquitectura desarrollada en lenguaje VHDL y otra desarrollada mediante el flujo de diseño de Síntesis de Alto Nivel.
2. Comparar la cantidad de recursos de hardware utilizados por cada una de las implementaciones.
3. Validar de manera experimental, mediante la síntesis de diferentes funciones el aumento de la rapidez de convergencia de series de Fourier que proporciona el factor σ -Lanczos.

Metodología

1. **Requerimientos del Algoritmo:** Implementar mediante las metodologías de descripción de hardware (I) y síntesis de alto nivel (II), dos arquitecturas que permitan realizar el cálculo de series de Fourier y las series de Fourier corregidas por el sigma-Factor.
2. **Especificación detallada:** En ambas arquitecturas se deben implementar hasta 16 armónicos de la serie en 256 muestras por periodo de la función, el tipo de dato para realizar las operaciones es en formato entero con signo de 32 bits para la metodología de descripción de hardware, y punto flotante de 32 bits para la de Síntesis de Alto Nivel.
3. **Metodología de diseño I:** Se desarrolla una arquitectura para FPGAs que satisfaga los requerimientos planteados en las etapas anteriores aplicando la metodología de diseño por descripción de hardware en lenguaje VHDL y haciendo uso de módulos IP proporcionados por el fabricante Xilinx [2].
4. **Metodología de diseño II:** Se desarrolla una arquitectura para la implementación del algoritmo que cumpla con los requerimientos planteados en los pasos 1 y 2, utilizando tanto los recursos de la lógica programable (PL) como del sistema de procesamiento (PS) del SoC Zynq 7020. El desarrollo se hace siguiendo la metodología de diseño de Síntesis de Alto Nivel (en inglés HLS), que permite la generación de módulos que se implementan en hardware a partir de funciones de código escritas en lenguaje C o C++.
5. **Síntesis de funciones discontinuas:** En este punto, se sintetizan en las arquitecturas desarrolladas, las series de Fourier de funciones con discontinuidades de salto, en las que se visualicen las características del Fenómeno de Gibbs.
6. **Síntesis de funciones con factor σ -Lanczos:** Se realiza el procedimiento anterior, utilizando el σ -Factor de Lanczos para atenuar las oscilaciones del Fenómeno de Gibbs.
7. **Análisis de resultados:** Finalmente, analizan los datos obtenidos en los dos pasos anteriores, a partir del cálculo del Error Absoluto Medio y el porcentaje de sobreimpulso generado por el fenómeno de Gibbs. Además, se hace la comparativa de los recursos requeridos en la implementación entre arquitectura I y II.

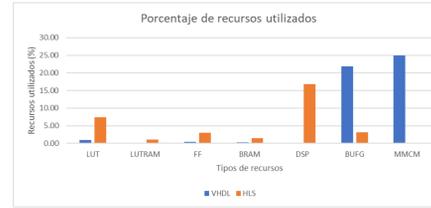
Sigma-Factor Lanczos

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\frac{\pi k}{n}} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx))$$

$$\equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)).$$

Resultados

Cantidad de recursos utilizados por cada arquitectura
Se puede observar un mayor consumo de recursos de hardware en la implementación del diseño realizado con la metodología HLS.



Error Absoluto Medio (EAM)

Calculado a partir de las funciones sintetizadas con las arquitecturas con respecto a las funciones discontinuas. *El error absoluto medio más pequeño se obtuvo con arquitectura diseñada mediante la metodología HLS y el uso del σ -Factor.

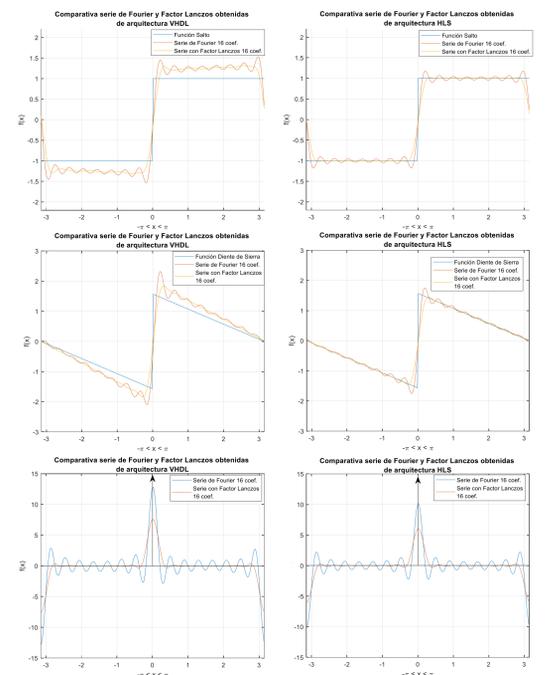
Arquitectura	Función Salto		Función Diente de Sierra	
	Fourier	Lanczos	Fourier	Lanczos
VHDL	EAM 0.2803	EAM 0.2755	EAM 0.2267	EAM 0.2197
HLS	EAM 0.0774	EAM 0.0654*	EAM 0.0682	EAM 0.0559*

Porcentaje de sobreimpulso (PS)

Sobreimpulso producido por el Fenómeno de Gibbs en la síntesis de funciones discontinuas utilizando las arquitecturas desarrolladas. Se incluyen los resultados por medio de series de Fourier y corregidos por el σ -Factor.

Arquitectura	Función Salto		Función Diente de Sierra	
	Fourier	Lanczos	Fourier	Lanczos
VHDL	PS 53.3	PS 32.3	PS 50.4	PS 18.04
HLS	PS 18	PS 0.02	PS 12.5	PS -7.2

Gráficas de funciones sintetizadas



Conjunto de gráficas resultantes del cómputo de las series de Fourier y su corrección por medio del factor σ -Lanczos para las funciones salto, diente de sierra y delta de Dirac. Del lado izquierdo corresponden a los resultados obtenidos de la arquitectura desarrollada en lenguaje VHDL. Del lado derecho corresponden a los resultados obtenidos de la arquitectura desarrollada usando la metodología de flujo de diseño HLS. En ambos casos, las arquitecturas se implementaron en la tarjeta de desarrollo PYNQ-Z2.

Conclusiones

1. El σ -Factor Lanczos ha demostrado reducir considerablemente la magnitud de las oscilaciones y el sobreimpulso causados por el Fenómeno de Gibbs.
2. El Fenómeno de Gibbs está presente en muchas aplicaciones del procesamiento de señales, incluyendo el desarrollo de equipo de diagnóstico médico. En este proyecto se han implementado dos arquitecturas para la síntesis de series de Fourier y el σ -Factor Lanczos como elemento para atenuar sus efectos.
3. El uso de una metodología enfocada en el diseño a partir de descripción de hardware, permite implementar sistemas optimizando los recursos utilizados.
4. Utilizar una metodología de diseño basada en síntesis de alto nivel (HLS) facilita el proceso de diseño, con resultados aceptables en cuanto a la gestión y uso de recursos de hardware.

Referencias

1. Uribe Hernández José Miguel. El Fenómeno de Gibbs y el σ -factor Lanczos, 2011.
2. Roberto Rodríguez del Río and Enrique Zuazua Iriondo. Series de Fourier y Fenómeno de Gibbs. Ene, 2009.
3. Carolyn Oddy. The Gibbs Phenomenon and its Resolution, 2015.
4. Sanjay Churiwala and I Hyderabad. Designing with Xilinx® FPGAs. Springer, 2017.
5. Louise Helen Crockett, Ross Elliot, Martin Enderwitz, and Robert Stewart. The Zynq book: embedded processing with the ARM Cortex-A9 on the Xilinx Zynq-7000 all programmable SoC. 2014.
6. Xilinx. Vivado Design Suite User Guide: High-Level Synthesis (ug902), 2019.
7. Inc. Xilinx. Vitis unified software platform documentation: Embedded software development. 2022.