

Una Variante del modelo SIR para modelar la dinámica de la pandemia Covid-19 que considera a la vacunación como mecanismo de control

Romero Michihua José Carlos, Morín Castillo María Monserrat, Oliveros Oliveros José Jacobo y Camacho Castañeda Josefina

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Abstrac

This work shows the analysis of two variant of the SIR model proposed by the Scottish biochemist William Ogilvy Kermack and the military doctor Anderson Gray McKendrick, which allows knowing the contagion dynamics of Covid-19 using vaccination techniques as a control element.

Introducción

Un modelo matemático es una representación simplificada por medio de ecuaciones, variables, parámetros, entidades y relaciones entre estos para estudiar el comportamiento de un sistema complejo, sus cambios y situaciones que son difíciles de observar en la vida real[1]. Una enfermedad puede ser observada como un modelo matemático el cual nos proporciona información que nos permita conocer la evolución de esta y generar hipótesis que se puedan probar de manera simulada para conocer las repercusiones que generan las acciones de control en la transmisibilidad de la enfermedad.

Modelo SIR

El modelo SIR permite dividir a la población en tres grandes grupos[2], véase figura 2:

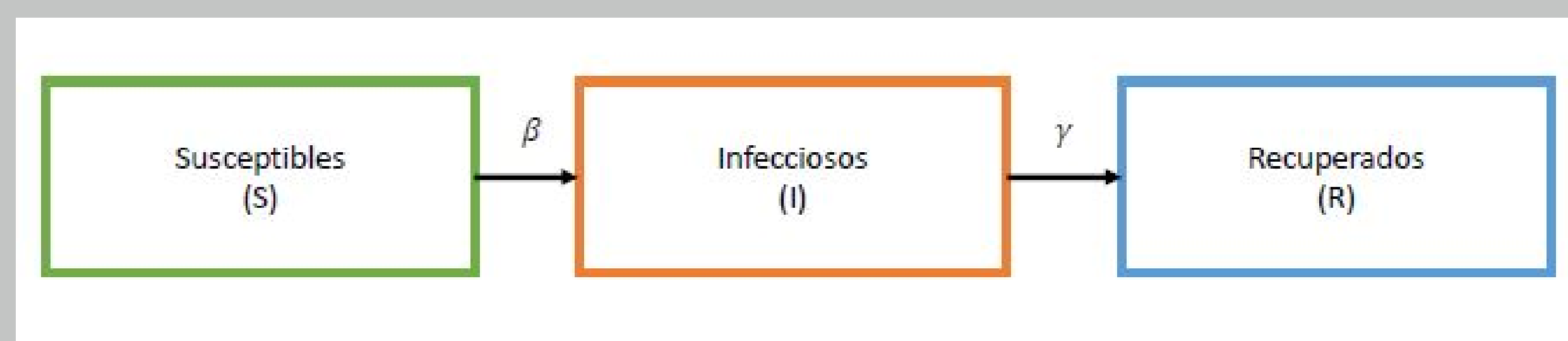


Figure 1: Modelo básico SIR

- ▶ Los susceptibles S es la población de individuos sanos
- ▶ Los infectados I es la población de individuos infectados
- ▶ Los recuperados R es aquella población la cual tuvo la enfermedad, ya no puede infectar a otros individuos

Este modelo se describe como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta_1 I S - \mu S, & S(0) = S_0, \\ I'(t) = \beta_1 S I - (\beta_2 + \mu) I, & I(0) = I_0, \\ R'(t) = \beta_2 I - \mu R, & R(0) = R_0, \end{cases}$$

donde

- ▶ β_1 representa la tasa de pérdida de individuos susceptibles
- ▶ μ representa la tasa de ganancia de la población recuperada
- ▶ β_2 representa la tasa de pérdida de individuos recuperado

Debido a que la población total N se divide en susceptibles S , infecciosos I y recuperados R , podemos escribir la siguiente ecuación.

$$N = S + I + R. \quad (1)$$

Objetivo

Proponer y analizar una variante del modelo SIR para modelar la dinámica de la pandemia de COVID-19 que considere a la vacunación como un mecanismo de control.

Modelos Propuestos

Modelo 1

Para esta variación del modelo modificado, la población vacunado adquiere la misma inmunidad que la población recuperado, y lo denotamos por la literal P (protegidos). De lo anterior tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta I S - \alpha S, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I S - \gamma I, \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \gamma I + \alpha S. \quad (4)$$

Podemos conocer $P = N - (S + I)$ y los puntos críticos:

$$(\beta I + \alpha) S = 0, \quad (5)$$

$$(\beta S - \gamma) I = 0, \quad (6)$$

Modelos Propuestos

los cuales están dados por $(0, 0)$ y $(\frac{\gamma}{\beta}, -\frac{\alpha}{\beta})$. El punto $(0, 0)$ permite saber que la pandemia se encuentra controlada. Mientras que el punto dado por $(\frac{\gamma}{\beta}, -\frac{\alpha}{\beta})$ aparentemente no es de interés biológico. Una posible interpretación de este punto, es que hay una parte de la población que es inmune, por ello el valor negativo de I

La matriz Jacobiana está dada por

$$DF_{\alpha}(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I - \alpha & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}.$$

Modelo 2

otra variante consiste en considerar que una parte de la población vacunada pasa a ser protegido y otra infectada. El modelo queda como:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta I S - \alpha S, \quad (7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I S - \gamma I + \alpha_1 S, \quad (8)$$

$$\frac{dP}{dt} = \gamma I + \alpha_2 S. \quad (9)$$

donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

La matriz Jacobiana está dada por

$$DF_{\alpha}(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I - \alpha & -\beta S \\ \beta I + \alpha_1 & \beta S - \gamma \end{pmatrix}.$$

Resultados

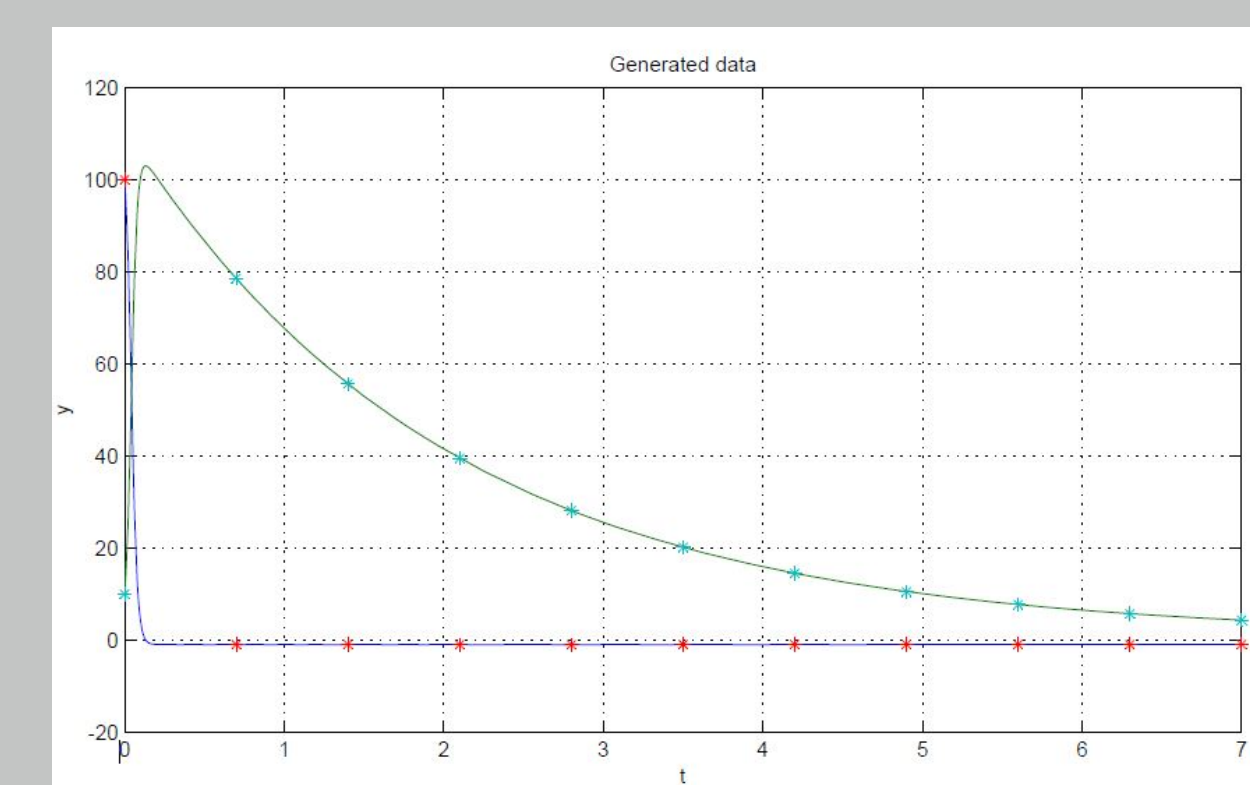


Figure 2: Comportamiento de las poblaciones de susceptibles e infectados modelo 1

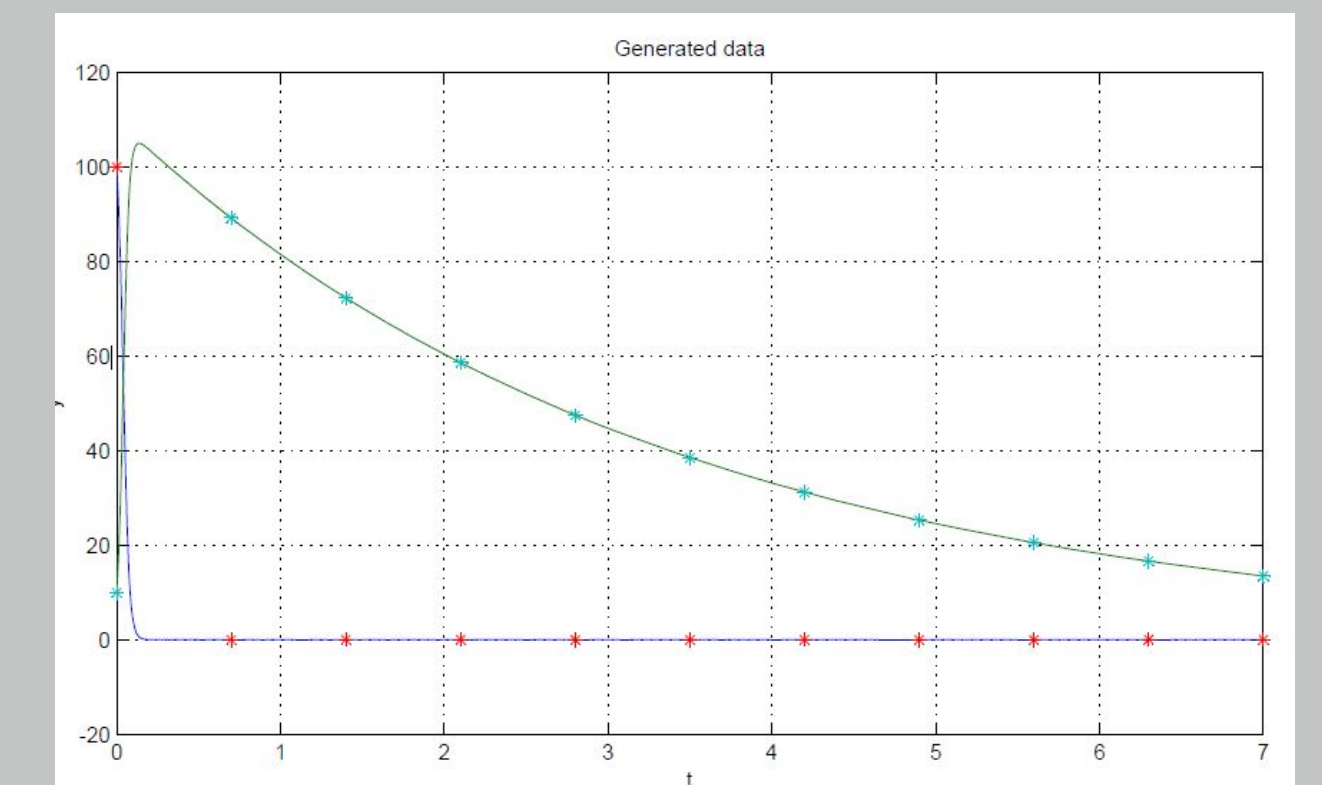


Figure 3: Comportamiento de las poblaciones de susceptibles e infectados modelo 2

Conclusión

Se presentaron dos variantes del modelo SIR , que muestran dinámicas que son plausibles. Se debe determinar a partir de datos cuál de las dos reproduce mejor dichos datos. Esto permitirá determinar los parámetros del sistema y ver cuál es la proporción con la que funciona la vacuna. Esta misma técnica podría aplicarse para otros métodos de control como el uso del cubre bocas y la limpieza de lugares.

References

- [1] DiPrima. R Boyce. W. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. LIMUSA, 5th edition, 2015.
- [2] Morales W Abello I.A, Guinovart R. The basic sir model and antiepidemic policies in public health against covid-19 in cube. *Revista Cubana de salud Publica*, 46:123–456, 2020.
- [3] Díaz Hernández R Guevara Villa M.R. Altamirano Robles L. Juárez Lucero J.J, Sanchez Sánchez A.S. Anova to compare three methods to track covid-19 in nine countries. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 42:36–46, 2021.

Contact Information

- ▶ Email: jose.romeromic@alumno.buap.mx
- ▶ Phone: +52 (221)40553242