

# Un algoritmo estable de identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de datos del EEG

Arachi Merced Oscar Rafael<sup>1</sup>, Bermúdez Juárez María Blanca Del Carmen<sup>1</sup>, Hernández Gracidas Carlos Arturo<sup>2</sup>, Oliveros Oliveros José Jacobo<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP. <sup>2</sup>CONACYT-BUAP. <sup>3</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

Videoconferencia: <https://meet.google.com/trj-fski-xsn>



## Resumen

El problema inverso electroencefalográfico consiste en determinar fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de mediciones electroencefalográficas. Llamaremos a este problema inverso, problema de identificación de fuentes bioeléctricas. Su solución coadyuva a la visualización de la actividad eléctrica del cerebro con aplicaciones en la detección de anomalías tales como focos epilépticos, edemas, calcificaciones y tumores. Además, también coadyuva al estudio de procesos cognitivos. En este trabajo se presenta una solución para el problema inverso electroencefalográfico utilizando el método de gradiente conjugado, el método de diferencias finitas y el método de regularización de Tikhonov.

## Introducción. Planteamiento del problema

**Problema directo.** El estudio del problema de identificación de fuentes se realiza a través del siguiente problema de contorno:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = r^2 f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1)$$

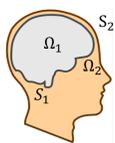
$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (3)$$

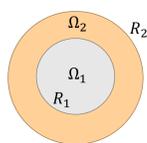
$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (5)$$

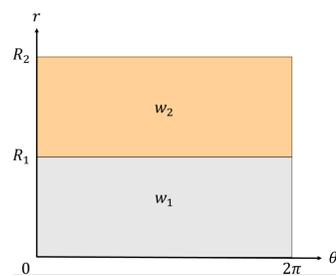
El problema (1)-(5) es conocido como problema de contorno volumétrico (PCV), el cual ha sido empleado para el estudio del problema inverso electroencefalográfico [1, 2, 3, 4, 5].



**Figura 1:** Representación esquemática de la cabeza en dos círculos concéntricos. En este caso,  $S_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R_1^2\}$  y  $S_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R_2^2\}$ .



**Figura 2:** Geometría utilizada para aplicar el método de las diferencias finitas. Esta geometría se obtiene del cambio a coordenadas polares.



El Problema Directo consiste en: Dada la fuente  $f$  hallar el EEG producido por dicha fuente. En este caso, el EEG se obtiene de la siguiente manera:

$$EEG = w_2|_{r=R_2}, \quad (6)$$

es decir, el EEG corresponde a la restricción de la solución del problema (1)-(5) a la frontera  $S_2$ .

**Problema Inverso:** Este problema consiste en lo siguiente:

Dado el EEG sobre  $S_2$ , hallar una fuente  $f$  tal que la solución  $u$  del problema (1)-(5) correspondiente a esa fuente, cumpla que  $u|_{S_2} = EEG$ .

## Objetivo

Implementar un algoritmo de identificación de fuentes para el problema inverso electroencefalográfico, que utilice el método de gradiente conjugado (MGC), el método de diferencias finitas y el método de regularización de Tikhonov.

## Metodología

Se desarrollaron programas en MATLAB para implementar el MGC y el método de las diferencias finitas. Este último, nos da la solución de los problemas de contorno involucrados en el MGC (el problema (1)-(5) y el llamado problema de contorno adjunto).

Para validar la implementación computacional desarrollada, se construyen ejemplos sintéticos y procedemos como sigue:

1. Se toman algunos valores para los parámetros  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  así como una fuente  $f$  definida en  $\Omega_1$ .
2. Se resuelve el problema de contorno (1)-(5).
3. Se calcula el  $EEG = w_2|_{r=R_2}$ , la medición exacta, usando la Eq. (6).
4. Para emular la medición (con error), se agrega un error aleatorio apropiado, usando la función `rand` de MATLAB.
5. Se obtiene la solución regularizada para el problema de identificación de fuentes minimizando el funcional:

$$J_{k(\delta)}(f) = \frac{k}{2} \|A(f) - EEG\|_{L_2(S_2)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1)}^2, \quad (7)$$

el cual está asociado al funcional de Tikhonov tomando apropiadamente el parámetro  $k$ . Más precisamente, si  $\alpha > 0$  es el parámetro de regularización de Tikhonov, entonces tomando  $k = \frac{1}{\alpha}$  los dos funcionales tienen la misma solución. En coordenadas polares  $S_2 = \{(R_2, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ .

## Resultados

Se presenta un ejemplo sintético para validar la implementación. **Ejemplo** (Solución del problema de contorno (1)-(5)). Consideremos a la fuente  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , que en coordenadas polares es  $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ . Tomemos  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1.2$ ,  $\sigma_1 = 3$  y  $\sigma_2 =$

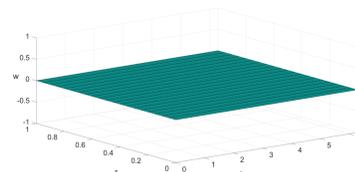
1. Con  $\varepsilon$  denotamos la tolerancia que sirve como condición de paro del método iterativo. La medición exacta se muestra en la Figura (7) en rojo. La medición con error en azul.

$\varepsilon$	$k$	Iteración	Error relativo	Tiempo de ejecución
$1e-3$	$1e+4$	5	0.0117	57.40
$1e-4$	$1e+6$	8	0.0177	87.34
$1e-5$	$1e+6$	8	0.0177	87.49

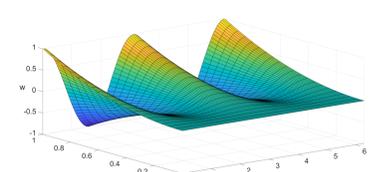
**Tabla 1:** Tamaño de la malla: 0.03, obtenida tomando  $NR_1 = 33$ ,  $NR_2 = 7$  y  $N_\theta = 209$ .

$\varepsilon$	$k$	Iteración	Error relativo	Tiempo de ejecución
$1e-3$	$1e+4$	3	0.0136	8.86
$1e-4$	$1e+4$	3	0.0136	8.76
$1e-5$	$1e+7$	7	0.2384	19.7

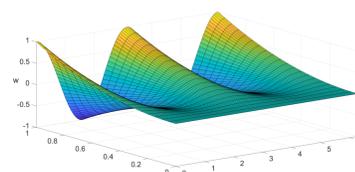
**Tabla 2:** Tamaño de la malla: 0.05, obtenida tomando  $NR_1 = 20$ ,  $NR_2 = 4$  y  $N_\theta = 126$ .



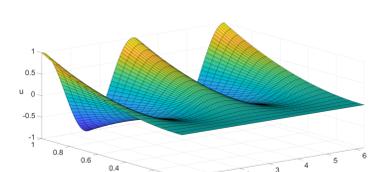
**Figura 3:** Fuente propuesta para iniciar el MGC que se considera iteración inicial 1.



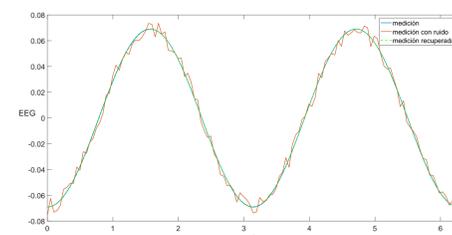
**Figura 4:** Fuente recuperada, iteración 2.



**Figura 5:** Fuente recuperada por la implementación del MGC en la iteración 3. Con error relativo = 0.0136.



**Figura 6:** Fuente exacta.



**Figura 7:** Medición numérica exacta obtenida del problema directo (azul), medición con ruido (roja) y la medición asociada a la fuente recuperada (verde) en la iteración 3.

## Conclusiones y perspectivas

Se implementó computacionalmente el algoritmo de identificación de fuentes para el problema inverso electroencefalográfico. Para alcanzar dicha implementación, se utilizó el Método de Gradiente Conjugado (MGC) que es iterativo y requiere que en cada iteración se resuelva un problema de contorno. Para este último, se utilizó el Método de las Diferencias Finitas (MDF). Se validó la implementación por medio de ejemplos sintéticos. Se realizaron pruebas numéricas con diferentes mallas para el MDF así como para diferentes valores del parámetro de regularización de Tikhonov que aparece en el MGC. Se incluyeron imágenes para el caso de una fuente, que describen las iteraciones del algoritmo y también se incluyeron tablas. Lo anterior muestra la factibilidad del método para hallar fuentes en este problema inverso. Como trabajo futuro, se encuentra implementar este método en tres dimensiones, considerar geometrías complejas y su implementación en dispositivos programables como los Field Programmable Gate Arrays, que permiten la paralelización de estos algoritmos, ya que debe tomarse en cuenta que la electroencefalografía es multicanal.

## Referencias

- [1] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Oliveros, J. Conde, and L. Juárez. Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 20:53–97, 02 2019.
- [2] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Conde, J. Oliveros, and A. Santillán. Identificación estable de fuentes asociadas a focos epilépticos ubicadas sobre la corteza. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 40(3):1–14, Sep. 2019.
- [3] Ignacio Algreto-Badillo, José Julio Conde-Mones, Carlos Arturo Hernández-Gracidas, María Monserrat Morín-Castillo, José Jacobo Oliveros-Oliveros, and Claudia Feregrino-Urbe. An FPGA-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations. *PLOS ONE*, 15(6):1–26, 06 2020.
- [4] José Julio Conde Mones, Emmanuel Roberto Estrada Aguayo, José Jacobo Oliveros Oliveros, Carlos Arturo Hernández Gracidas, and María Monserrat Morín Castillo. Stable identification of sources located on interface of nonhomogeneous media. *Mathematics*, 9(16), 2021.
- [5] María Monserrat Morín Castillo, Jesús Alonso Arriaga Hernández, Bolivia Teresa Cuevas Otahola, and José Jacobo Oliveros Oliveros. Analysis of dipolar sources in the solution of the electroencephalographic inverse problem. *MATHEMATICS*, 04 2022.