

UN ALGORITMO ESTABLE DE IDENTIFICACIÓN DE FUENTES BIOELÉCTRICAS EN EL CEREBRO A PARTIR DE DATOS DEL EEG

Oscar Rafael Arachi Merced^a, María Blanca Del Carmen Bermúdez Juárez^a, Carlos Arturo Hernández Gracidas^b, José Jacobo Oliveros Oliveros^c

^aFacultad de Ciencias de la Computación, BUAP,
arachi910@gmail.com, bbj_6_26@hotmail.com

^bCONACYT-BUAP,
cahernandezgr@conacyt.mx

^cFacultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP,
oliveros@cfm.buap.mx

RESUMEN

El problema inverso electroencefalográfico consiste en determinar fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de mediciones electroencefalográficas. Su solución coadyuva a la visualización de la actividad eléctrica del cerebro con aplicaciones en la detección de anomalías, tales como focos epilépticos, edemas, calcificaciones y tumores. Además, también coadyuva al estudio de procesos cognitivos. En este trabajo, se presenta una solución para el problema inverso electroencefalográfico utilizando el método de gradiente conjugado, el método de diferencias finitas y el método de regularización de Tikhonov. Se implementa el algoritmo en MATLAB y se muestra un ejemplo numérico para su validación.

Palabras Claves: EEG, Diferencias Finitas, Gradiente Conjugado

ABSTRAC

The Inverse electroencephalographic problem consists of determining bioelectrical sources in the brain from electroencephalographic measurements. Its solution helps to the imaging of the bioelectrical activity of the brain with applications to detect anomalies as epileptic foci, edemas, calcifications, and tumors. In this work, a solution of the inverse electroencephalographic is presented, which use the conjugate gradient, the finite differences, and the Tikhonov regularization methods. The algorithm is implemented in MATLAB and numerical examples are shown to validate it.

Keywords: EEG, Finite Differences, Conjugate Gradient

1. INTRODUCCIÓN

En distintos campos de la investigación, hay situaciones donde se requiere conocer las causas que originan cierto fenómeno mediante la información parcial que se obtiene

de él [7, 9, 11]. A este tipo de problemas se les conoce como problemas inversos, entre los cuales se encuentran los problemas de identificación de fuentes, los cuales son estudiados ampliamente en diferentes campos de la investigación. Por ejemplo, en la medicina existe un interés grande en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, donde, partiendo de los datos conseguidos mediante, por ejemplo, un electroencefalograma (EEG), es posible detectar anomalías en el cerebro (mal funcionamiento, daños, patologías, etc.). Cabe mencionar, que la Electroencefalografía es la técnica más conocida para el estudio del cerebro. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado otras técnicas como son la tomografía por emisión de positrones, la resonancia magnética nuclear y la magnetoencefalografía.

Las fuentes que son producidas por la actividad electroquímica del cerebro son conocidas como fuentes bioeléctricas y se estima que se componen por grandes conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente [5, 12]. En algunos casos, se puede considerar que los generadores están concentrados en una región del cerebro y que se pueden representar mediante funciones de cuadrado integrable definidas sobre esa región [5]. Mediante la electroencefalografía se capturan los potenciales en un EEG, los cuales provienen de la actividad eléctrica de tejidos excitables y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia, colocados en el cuero cabelludo.

El problema inverso electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir del EEG sobre el cuero cabelludo, las fuentes bioeléctricas que generan dichas mediciones.

Un problema es bien planteado en sentido de Hadamard [11], si dicho problema tiene una única solución y esta solución depende continuamente de los datos. Un problema es mal planteado si no es bien planteado. El PIE es un problema mal planteado ya que dada una medición (EEG) no tiene solución o tal solución no es única ya que existen diferentes fuentes que pueden producir la misma medición. Otra razón por la que el PIE es mal planteado es que presenta una inestabilidad numérica, que se refleja en el hecho de que pequeños cambios en la medición pueden producir grandes variaciones en la localización de la fuente.

Para el estudio del PIE, se requiere considerar el llamado problema directo, el cual consiste en determinar la medición (EEG) cuando se conoce la fuente. A diferencia del problema inverso, el problema directo tiene buenas propiedades numéricas, es decir, si dos fuentes están cercanas, las respectivas mediciones también lo estarán [1, 2, 4].

Las fuentes bioeléctricas pueden dividirse en corticales (definidas en la corteza cerebral) y subcorticales (en los núcleos interiores como los ganglios basales y el sistema límbico). El estudio del problema de identificación de fuentes puede hacerse considerando las fuentes corticales y subcorticales por separado. Por ejemplo, en [2, 4] sólo consideraron el caso en el que la fuente se localiza sobre la corteza cerebral. En este caso, el problema de identificación de la fuente tiene solución única, por lo que el

mal planteamiento del PIE está asociado con la inestabilidad numérica y aquí no se considera la actividad de fuentes corticales.

En este trabajo, se implementa un algoritmo estable de identificación de fuentes el cual utiliza el método de gradiente conjugado (MGC) para minimizar el llamado funcional de Tikhonov. En cada paso de la iteración del MGC, se resuelven dos problemas de contorno elípticos utilizando el método de las diferencias finitas (MDF). Se muestra un ejemplo para validar la implementación realizada.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para establecer correlaciones entre las fuentes bioeléctricas y las mediciones electroencefalográficas, se utiliza un problema de contorno (definido en una región no homogénea) que se deduce de las ecuaciones de Maxwell y datos experimentales [1, 2, 4, 5].

$$\Delta u_1 = f \quad \text{en} \quad \Omega_1, \quad (1)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \quad (2)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre} \quad S_1, \quad (3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre} \quad S_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre} \quad S_2, \quad (5)$$

donde $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ representa la cabeza, $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_2$, Ω_1 representa al cerebro, Ω_2 es el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes y $\sigma_1 \neq \sigma_2$, f es la fuente, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$, donde u representa el potencial eléctrico en Ω , Δ representa el operador laplaciano, S_1 representa la superficie de la corteza cerebral y S_2 es la superficie del cuero cabelludo.

El problema (1)-(5) es conocido como problema de contorno volumétrico (PCV), el cual ha sido empleado para el estudio del problema inverso electroencefalográfico [1, 2, 3, 4, 5].

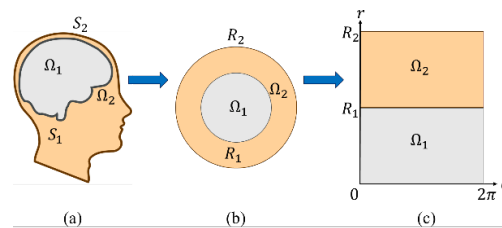


Figura 1: (a). La cabeza se divide en dos capas conductoras, a saber, el cerebro y el resto de las capas que la componen. (b). Representación de la cabeza por dos círculos concéntricos. (c). Región rectangular obtenida por medio del cambio de variables a coordenadas polares

Problema directo. En lo que sigue, vamos a considerar el caso que se muestra en la Figura 1b), es decir, el caso en el que la cabeza se representa por dos círculos concéntricos. Utilizando coordenadas polares, vamos a considerar la región que se muestra en el Figura 1c). En este caso el operador de Laplace está dado por:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (6)$$

Así, el problema (1)-(5) se expresa en la forma:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = r^2 f \quad \text{en} \quad \Omega_1, \quad (7)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \quad (8)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre} \quad r = R_1, \quad (9)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{sobre} \quad r = R_1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre} \quad r = R_2. \quad (11)$$

Para el estudio del problema inverso, se tienen las siguientes definiciones asociadas al problema de contorno (7)-(11):

Definición. El Problema directo consiste en: dada la fuente f hallar el EEG producido por dicha fuente. En este caso, el EEG se obtiene de la siguiente manera:

$$EEG = w_2|_{r=R_2}. \quad (12)$$

Definición. Dado el EEG sobre S_2 , el problema inverso electroencefalográfico consiste en hallar una fuente f tal que la solución u del problema (7)-(11) correspondiente a esa fuente, cumpla que

$$u|_{S_2} = EEG. \quad (13)$$

3. OBJETIVO

Implementar un algoritmo de identificación de fuentes para el problema inverso electroencefalográfico, que utilice el método de gradiente conjugado (MGC), el método de diferencias finitas y el método de regularización de Tikhonov.

4. METODOLOGÍA

Se desarrollaron programas en MATLAB para implementar el MGC y el método de las diferencias finitas. Este último, nos da la solución de los problemas de contorno

involucrados en el MGC, a saber, el problema (1)-(5) y el llamado problema de contorno adjunto, el cual está dado por:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1, \quad (14)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \quad (15)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre} \quad r = R_1, \quad (16)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{sobre} \quad r = R_1, \quad (17)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = \psi \quad \text{sobre} \quad r = R_2. \quad (18)$$

Para validar la implementación computacional desarrollada, se construyen ejemplos sintéticos y procedemos como sigue:

1. Se toman algunos valores para los parámetros σ_1 , σ_2 , R_1 , R_2 así como una fuente f definida en Ω_1 .
2. Se resuelve el problema de contorno (1)-(5).
3. Se calcula el $EEG = u_2|_{r=R_2}$, la medición exacta, usando la Eq. (13).
4. Para emular la medición (con error), se agrega un error aleatorio apropiado, usando la función rand de MATLAB.
5. Se obtiene la solución regularizada para el problema de identificación de fuentes minimizando el funcional:

$$J_{k(\delta)}(f) = \frac{k}{2} \|A(f) - EEG\|_{L_2(S_2)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1)}^2. \quad (19)$$

El funcional (19) está asociado al funcional de Tikhonov tomando apropiadamente el parámetro k . Más precisamente, si $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización de Tikhonov, entonces tomando $k = \frac{1}{\alpha}$ los dos funcionales tienen la misma solución [10]. El funcional (19) es convexo y tiene un único mínimo [7, 9, 11].

El punto 5, se divide en:

- 5a). Utilizar el método de gradiente conjugado para hallar el mínimo.
- 5b). Utilizar el método de las diferencias finitas para hallar resolver tanto el problema de contorno (1)-(5) como el llamado problema adjunto.

5. Validación Numérica

Se presenta un ejemplo sintético para validar la implementación del algoritmo de identificación de fuentes.

Ejemplo. Consideremos a la fuente $f(x, y) = x^2 - y^2$, que en coordenadas polares es $f(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$. Tomemos $R_1 = 1$, $R_2 = 1.2$, $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$. Con ε denotamos la tolerancia que sirve como condición de paro del método iterativo. La medición exacta sobre S_2 se muestra en la Figura 5 en rojo y la medición con error en azul. En coordenadas polares $S_2 = \{(R_2, \theta): 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. En las Figuras 1-3, se muestran las primeras tres iteraciones del algoritmo. La primera se ha elegido de manera simple para iniciar el proceso iterativo, más precisamente, se ha tomado a la función nula como el inicio del proceso iterativo. La Figura 3 muestra la tercera iteración, en la cual se detuvo el método iterativo porque se cumplió la tolerancia $\varepsilon = 10^{-4}$. Se tomó $k = 10^4$.

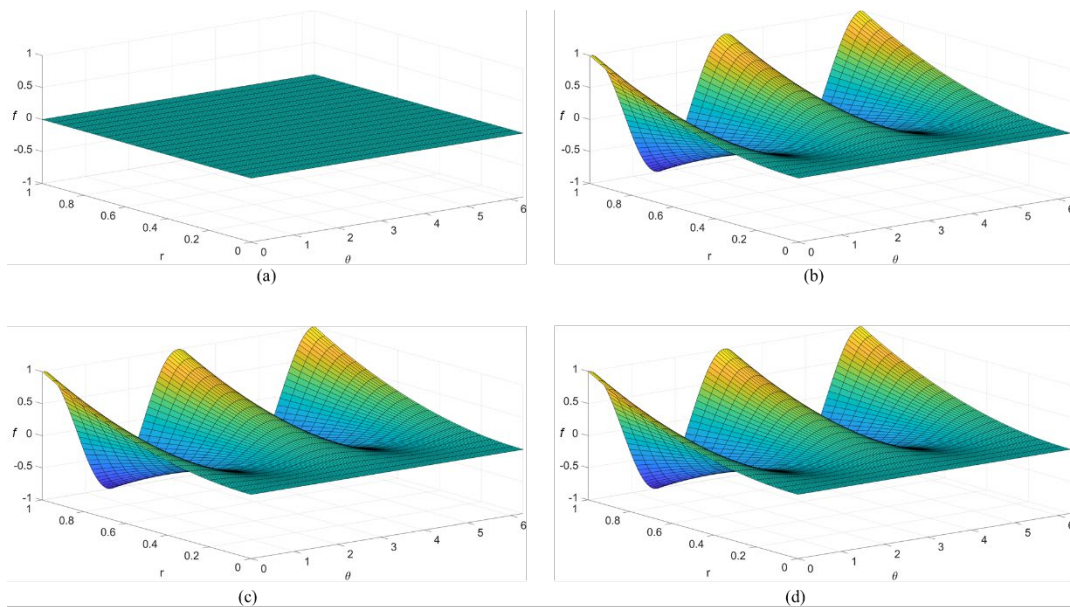


Figura 1. (a) Fuente propuesta para iniciar el MGC que se considera la iteración inicial 1. (b) Fuente recuperada, iteración 2. (c) Fuente recuperada por la implementación del MGC en la iteración 3. Con error relativo entre esta fuente recuperada y la exacta de 0.0136. (d) Fuente exacta

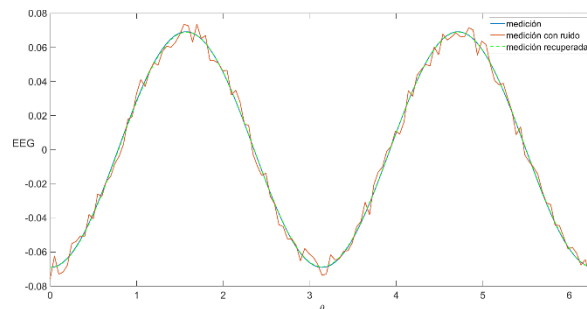


Figura 3. Medición numérica exacta obtenida del problema directo (azul), medición con ruido (roja) y la medición asociada a la fuente recuperada (verde) en la iteración 3

En las Tablas 1 y 2, se muestran los resultados para dos mallados de la región y diferentes valores de ε y k . En la Tabla 1 se puede observar que usando una malla del 0.03 el MGC encuentra la fuente deseada en 5 iteraciones con un error relativo de 0.0117 mientras que en la Tabla 2 se puede ver que utilizando una malla del 0.05 el MGC encuentra la fuente en sólo 3 iteraciones, pero con un error relativo de 0.0136. También al observar las Tablas 1 y 2 podemos decir que mientras la malla sea más fina, el error relativo es menor, pero el tiempo de ejecución será también mayor.

Tabla 1. Tamaño de la malla: 0.03, obtenida tomando $NR_1 = 33$, $NR_2 = 7$ y $N_\theta = 209$

ε	k	Iteración	Error Relativo	Tiempo de ejecución
$1e - 3$	$1e + 4$	5	0.0117	57.40
$1e - 4$	$1e + 6$	8	0.0117	87.34
$1e - 5$	$1e + 6$	8	0.0117	87.49

Tabla 2. Tamaño de la malla: 0.05, obtenida tomando $NR_1 = 20$, $NR_2 = 4$ y $N_\theta = 126$

ε	k	Iteración	Error Relativo	Tiempo de ejecución
$1e - 3$	$1e + 4$	3	0.0136	08.86
$1e - 4$	$1e + 4$	3	0.0136	08.76
$1e - 5$	$1e + 7$	7	0.2384	08.76

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se implementó computacionalmente el algoritmo de identificación de fuentes para el problema inverso electroencefalográfico. Para alcanzar dicha implementación, se utilizó el Método de Gradiente Conjugado (MGC) que es iterativo y requiere que en cada iteración se resuelvan dos problemas de contorno. Para este último, se utilizó el Método de las Diferencias Finitas (MDF). Se validó la implementación por medio de ejemplo sintético. Se realizaron pruebas numéricas con diferentes mallas para el MDF, así como para diferentes valores del parámetro de regularización de Tikhonov que aparece en el MGC. Se incluyeron imágenes, para el ejemplo sintético, que describen las iteraciones del algoritmo. También se incluyen tablas. Lo anterior muestra la factibilidad del método para hallar fuentes en este problema inverso.

Como trabajo futuro, se encuentra implementar este método en tres dimensiones, considerar geometrías complejas y su implementación en dispositivos programables como los Field Programmable Gate Arrays (FPGA), que permiten la paralelización de estos algoritmos, ya que debe tomarse en cuenta que la electroencefalografía mide el voltaje en diferentes electrodos colocados en el cuero cabelludo, es decir, es un problema con características multicanal.

7. REFERENCIAS

- [1] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Oliveros, J. Conde, and L. Juárez, "Stable identification of sources located on separation interfaces of two different

- homogeneous media,” *Advances in Differential Equations and Control Processes* 20, pp. 53–97, 02 2019.
- [2] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Conde, J. Oliveros, and A. Santillán, “Identificación estable de fuentes asociadas a focos epilépticos ubicadas sobre la corteza,” *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica* 40, pp. 1–14, Sep. 2019.
- [3] I. Algreto-Badillo, J. J. Conde-Mones, C. A. Hernández-Gracidas, M. M. Morín-Castillo, J. J. Oliveros-Oliveros, and C. Feregrino-Urbe, “An FPGA-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations,” *PLOS ONE* 15, pp. 1–26, 06 2020.
- [4] J. J. Conde Mones, E. R. Estrada Aguayo, J. J. Oliveros Oliveros, C. A. Hernández Gracidas, and M. M. Morín Castillo, “Stable identification of sources located on interface of nonhomogeneous media,” *Mathematics* 9(16), 2021.
- [5] M. M. Morín Castillo, J. A. Arriaga Hernández, B. T. Cuevas Otahola, and J. J. Oliveros Oliveros, “Analysis of dipolar sources in the solution of the electroencephalographic inverse problem,” *MATHEMATICS*, 04 2022.
- [6] Y. Díaz Ferrer and M. Cruz Ramírez, “Algoritmo para la solución numérica de la ecuación de Poisson usando diferencias finitas,” *Divulgaciones Matemáticas* 20, pp. 67–77, 11 2019.
- [7] M. S. Gockenbach, *Linear inverse problems and Tikhonov regularization / Mark S. Gockenbach.*, The Carus Mathematical Monographs; number thirty-two, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2016.
- [8] L. M. Méndez Moreno, G. Orozco Hernández, and F. Fonseca, “Discretización en diferencias finitas de la ecuación de Laplace y Poisson. aplicación a un anillo circular (dona),” *Ciencia en Desarrollo* 6, pp. 225 – 229, 07 2015.
- [9] A. M. Denisov, *Elements of the Theory of Inverse Problems*, De Gruyter, 2014.
- [10] J. J. Conde Mones, L. H. Juárez Valencia, J. J. Oliveros Oliveros, and D. A. León Velasco, “Stable numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation in irregular annular regions,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 33(6), pp. 1799–1822, 2017.
- [11] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, vol. 120, 01 2011.
- [12] L. Nunez and R. Srinivasan, *Electric Fields of the Brain: The neurophysics of EEG*, Oxford University Press, 2006.